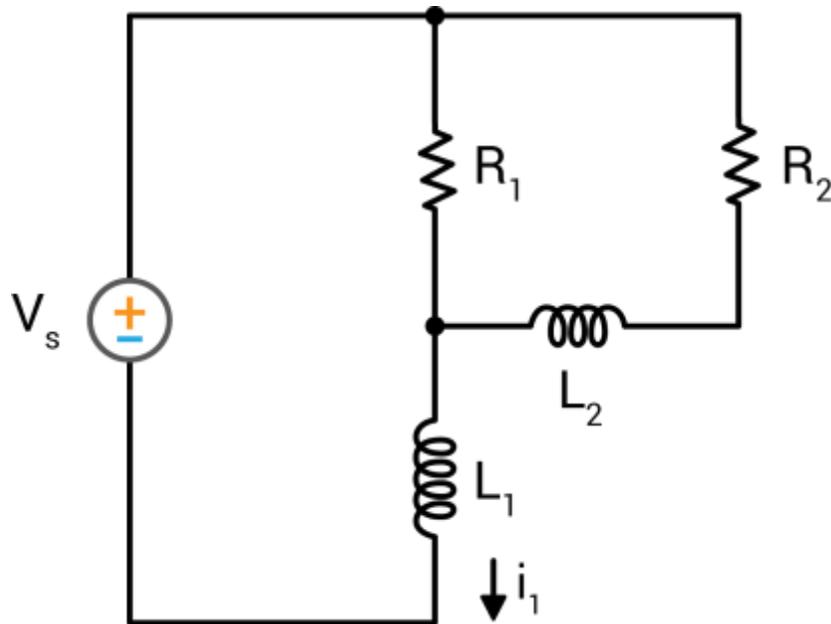


Problema resuelto Circuito RLL

Ejemplo de un sistema de segundo orden.

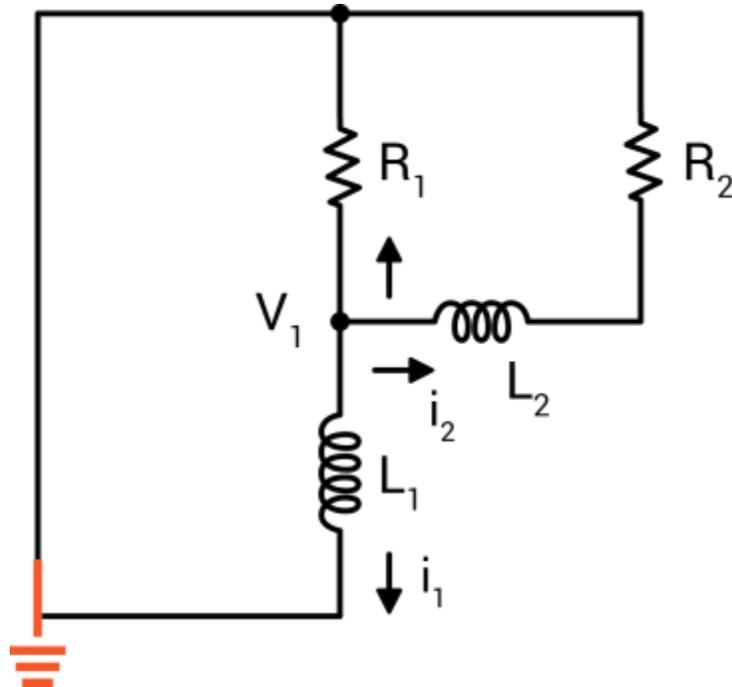
Para el circuito que se muestra en la siguiente figura, se plantean las preguntas a y b:



- Obtener la ecuación diferencial para la corriente i_1 . Puede hacer el análisis anulando la fuente de voltaje V_s .
- Calcular la respuesta completa para i_1 , para ello utilice los siguientes valores: $V_s = 4U(t)$ Voltios, $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$

Solución

- Al anular la fuente (para obtener la respuesta natural) el circuito queda como se muestra a continuación



Aplicamos la Ley de Corrientes de Kirchhoff en el nodo V_1 para obtener la ecuación **(1)**. Usando la relación voltaje corriente para el inductor podemos obtener las ecuaciones **(2)** y **(3)**.

$$i_1 + \frac{V_1}{R_1} + i_2 = 0 \quad (1)$$

Además:

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

$$V_1 = L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot R_2 \quad (3)$$

Despejando i_2 de **(1)** y sustituyendo i_2 y V_1 en **(3)** se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{d}{dt} \left[-i_1 - \frac{L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt} \right] - R_2 i_1 - \frac{R_2 L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt}$$

Esta ecuación debe desarrollarse derivando el término entre paréntesis cuadrados y agrupando los términos semejantes:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -L_2 \frac{di_1}{dt} - \frac{L_1 L_2}{R_1} \frac{d^2 i_1}{dt^2} - R_2 i_1 - \frac{R_2 L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt}$$

⇒

$$\frac{L_1 L_2}{R_1} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(L_1 + L_2 + \frac{R_2 L_1}{R_1} \right) \frac{di_1}{dt} + R_2 i_1 = 0$$

Se multiplica ahora toda la ecuación por el término $R_1/(L_1 L_2)$ de manera que la segunda derivada quede "sola":

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1 + R_1 + R_2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = 0$$

De esta manera se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden, por ello el nombre de **circuitos o sistemas de segundo orden** .

b- Al sustituir los valores dados en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 15 \frac{di_1}{dt} + 25 i_1 = 0$$

De esta ecuación se extraen los valores de los parámetros necesarios para resolver la ecuación y determinar el tipo de respuestas que tendrá el circuito. En este caso será una respuesta sobreamortiguada, como se ve:

$$2\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 7,5 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_o^2 = 25 \Rightarrow \omega_o = 5 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha > \omega_o \Rightarrow \text{sobreamortiguado}$$

La respuesta total será la suma de la respuesta forzada más la respuesta natural:

$$\Rightarrow i_1(t) = i_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

$$s_1 = -7,5 + \sqrt{(7,5)^2 - 25}$$

$$s_1 = -1,91 \text{ s}^{-1}$$

$$s_2 = -13,09 \text{ s}^{-1}$$

La respuesta forzada se obtiene notando que los inductores, en corriente directa, se comportan como cortocircuitos:

$$i_{1f} = 4V / R_1 \parallel R_2 = 4V / 5\Omega = 0,8A$$

Las condiciones iniciales se obtienen analizando el circuito en el instante $t=0$, vemos que la fuente no provee energía para valores de t menores que cero. Por lo tanto la corriente y el voltaje en el inductor L_1 son ambos igual a cero.

$$i_1(0) = 0 \text{ A}$$

$$V_{L_1}(0) = 0 \text{ V}$$

Finalmente, queda por determinar las constantes A_1 y A_2 de la respuesta total. Estas se obtienen haciendo uso de las condiciones iniciales.

Al evaluar la respuesta para la corriente en $t=0$ se obtiene que:

$$0 = 0,8 + A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow A_1 = -0,8 - A_2$$

Luego se hace uso de la segunda condición inicial y de la relación voltaje corriente para el inductor como se muestra a continuación:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -0,86 A_1 - 29,14 A_2$$

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = -0,86 A_1 - 29,14 A_2$$

Se obtiene entonces dos ecuaciones para obtener las dos constantes y por ende la respuesta total para la corriente $i_1(t)$

$$A_2 = 0,024 \quad A_1 = -0,824$$

$$i_1(t) = 0,8 - 0,824 e^{s_1 t} + 0,024 e^{s_2 t} \text{ A}$$

Créditos

Vicerrectoría de Docencia

CEDA - TEC Digital

Proyecto de Virtualización 2016

Circuitos Eléctricos en CC

Dr. Roberto Pereira Arroyo (profesor)

Licda. Isaura Ramírez Brenes (coordinadora de diseño)