SESIÓN 19

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS – I

Al finalizar esta sesión serás capaz de:

- Describir las principales características de un movimiento rotacional.
- Resolver problemas que involucren rotaciones con aceleración angular constante.
- Relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un punto en el cuerpo.

En este capítulo analizaremos el movimiento de cuerpos que giran o rotan alrededor de un eje. En general, un objeto puede deformarse cuando se le aplica una fuerza; sin embargo, consideraremos cuerpos con forma y tamaño definidos e inmutables; por lo que le llamaremos *Cuerpos Rígidos*.

19.1 Velocidad y aceleración angulares

Para describir el movimiento de un objeto rígido que gira (por ejemplo, ver Figura 19.1), nos enfocaremos en su movimiento *angular*. Definimos así, la posición angular, θ, de un punto cualquiera del cuerpo; a partir del cual podemos hacer una descripción del movimiento rotacional del cuerpo, de manera que

$$s = R\theta \tag{19.1.1}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(velocidad angular)} \tag{19.1.2}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(aceleración angular)} \tag{19.1.3}$$

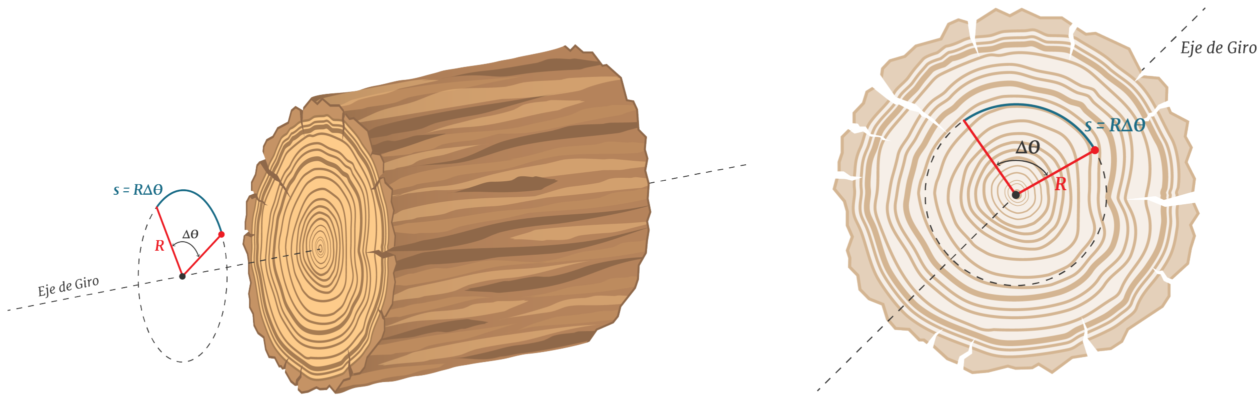

Figura 19.1: Movimiento angular de cuerpo rígido, determinado a partir del movimiento de cualquier punto alrededor el eje de giro.

o de forma análoga

$$\theta(t) = \int \omega \mathrm{d}t \tag{19.1.4}$$

$$\omega(t) = \int \alpha \mathrm{d}t \tag{19.1.5}$$

Para describir cantidades angulares pueden utilizarse los radianes o los grados. Recordar que ambas cantidades están relacionadas mediante la siguiente equivalencia

$$2\pi[\,\text{radianes}] = 360°[\,\text{grados}]$$

En términos de movimiento angular, se dice que cada vez que un objeto completa una vuelta, realiza una revolución, de manera que

$$2\pi[\,\text{radianes}] = 360°[\,\text{grados}] = 1\,\text{rev}[\,\text{revolución}]$$

Utilizando el concepto de revolución; surgen por ejemplo unidades “populares” para la rapidez angular, como los son los r.p.m:

$$\boxed{1 \text{ r.p.m=1 revolución por minuto=}\frac{2\pi}{1\,\text{min}} = 2\pi\,\text{rad/min} = 1/30\,\text{rad/s.}}$$

19.2 Rotación con aceleración angular constante

Si la aceleración angular de un objeto es constante, podemos escribir[1]

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (19.2.1)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad (19.2.2)$$

$$\alpha(t) = \alpha = \text{constante} \quad (19.2.3)$$

19.3 Relación entre cinemática lineal y angular

Considere un punto sobre un cuerpo rígido en movimiento de rotación; por ejemplo el de la Figura 19.1. La velocidad tangencial, aceleración tangencial y aceleración centrípeta de este punto se relacionan con la velocidad angular del movimiento mediante

$$v_{\text{tangencial}} = R\omega \quad (19.3.1)$$

$$a_{\text{tangencial}} = R\alpha \quad (19.3.2)$$

$$a_{\text{centrípeta}} = R\omega^2 \qquad (\text{si}\,\omega\,\text{es constante}) \quad (19.3.3)$$

[1] Observe la similitud de estas relaciones con las expresiones para un MRUA.

SESIÓN 20

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS – II

Al finalizar esta sesión serás capaz de:

- Interpretar el significado del momento de inercia de un cuerpo rígido.
- Aplicar el Teorema de Ejes Paralelos.

20.1 Energía en el movimiento de rotación

Consideremos una partícula puntual que gira alrededor de una trayectoria circular. Su energía cinética la podemos expresar en función de su velocidad angular mediante

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(mR^2)}_{I}\omega^2, \qquad (20.1.1)$$

donde I se conoce como *Momento de inercia rotacional*. Podemos escribir entonces que

$$K_{rotacional} = \frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (20.1.2)$$

Si consideramos ahora un sistema de partículas que giran respecto a un eje, la energía cinética asociada estará dada por

$$K_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega_i^2. \qquad (20.1.3)$$

A partir de esta expresión, pensemos que construimos un cuerpo rígido como un conjunto de partículas puntuales (infinitesimales) que giran colectivamente, de manera que

$$m_i \to dm, \qquad \omega_i \to \omega \qquad \text{y} \qquad \sum \to \int,$$

por lo tanto para un cuerpo rígido

$$K_{rotacional} = \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{20.1.4}$$

donde

$$I = \int r^2 dm \tag{20.1.5}$$

y la integral tiene que evaluarse a lo largo de toda la distribución de masa. Una consecuencia de esta definición es que el momento de inercia rotacional de un cuerpo rígido depende de la forma en que se encuentra distribuida la masa respecto al eje de giro. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 20.1.

Recuerde que $M = \int \mathrm{d}m$. Para distintas distribuciones de masa:

$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \lambda \mathrm{d}x & \text{(distribución lineal)} \\ \sigma \mathrm{d}A & \text{(distribución superficial)} \\ \rho \mathrm{d}V & \text{(distribución volumétrica)} \end{cases}$$

Si un cuerpo rígido presenta traslación más rotación:

$$\begin{aligned} K_{total} =& K_{traslacional} + K_{rotacional} \\ =& \frac{1}{2} m v_{\text{c.m}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{c.m}} \omega^2. \end{aligned} \tag{20.1.6}$$

Si el sistema rueda sin deslizarse

$$v_{\text{c.m}} = \omega R \tag{20.1.7}$$

En el rodamiento sin deslizamiento se cumple que la fricción no realiza trabajo, de manera que es posible aplicar la *Ley de Conservación de la Energía* en estos casos

$$E = K_{total} + U_{\text{g}} = \frac{1}{2} m v_{\text{c.m}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{c.m}} \omega^2 + M g y_{\text{c.m}} = \text{constante} \tag{20.1.8}$$

donde $v_{\text{c.m}}$ representa la velocidad del centro de masa, $I_{\text{c.m}}$ el momento de inercia respecto al centro de masa y $y_{\text{c.m}}$ la posición vertical del centro de masa del cuerpo.

20.2 Teorema de los Ejes Paralelos

Si se conoce el momento de inercia de un objeto respecto a su centro de masa ($I_{\text{c.m}}$), es posible calcular el momento de inercia respecto a un eje que sea paralelo (I_{p})

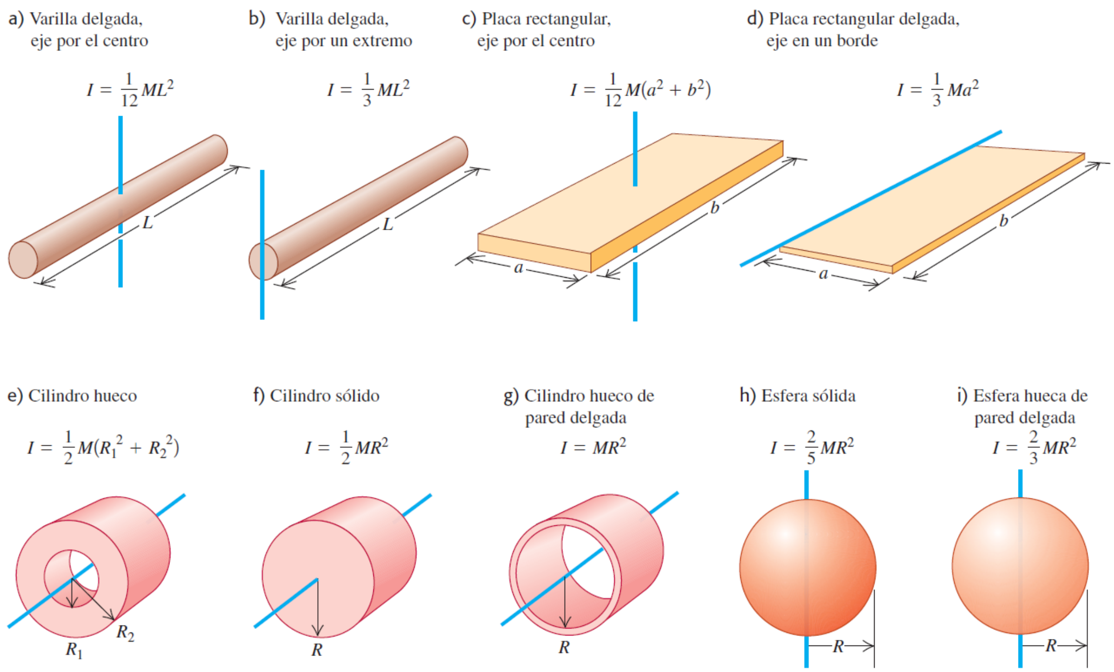

Figura 20.1: Momentos de inercia diversos objetos.
Fuente: Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. y Freedman, R. A. (2013). Física Universitaria. Volumen 1. Décimo tercera Edición. México: Pearson Educación

a un eje que pase por el centro de masa, según

$$I_{\text{p}} = I_{\text{c.m}} + Md^2$$

donde d es la distancia perpendicular entre el eje de giro y el centro de masa y M es la masa de la distribución.

Créditos

Vicerrectoría de Docencia
CEDA-TEC Digital

Proyecto de Virtualización 2017
Física General I

Gerardo Lacy Mora (Profesor)
Ing. Andrea Calvo Elizondo (Coordinadora de Diseño)