TEC | Tecnológico de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Vicerrectoría de Investigación y Extensión
Escuela de Matemática

Sistematización de la experiencia:

Proyecto de extensión

RENACE

Capacitación, actualización y formación de profesores de matemática de la educación media en el contexto de los programas aprobados en el 2012 por el Consejo Superior de Educación.

Compiladores

Lic. Carlos Monge Madriz
Dra. Zuleyka Suárez Valdés-Ayala
Dr. Luis Gerardo Meza Cascante
Dra. Evelyn Agüero Calvo

2019

Agradecimientos

Se agradece el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión del Instituto Tecnológico de Costa Rica, a los asesores de matemática de las Regiones Educativas de Turrialba y Cartago que colaboraron y a los/as docentes participantes.

Se le agradece al Mag. Randall Blanco Benamburg por las sugerencias aportadas.

Tabla de contenidos

Introducción

A partir del año 2013, el Ministerio de Educación Pública (MEP) inició con nuevos programas de matemática aprobados por el Consejo Superior de Educación en mayo de 2012 y ha desarrollado una actividad importante para capacitar a los docentes de matemática de la educación media y a los de la educación primaria. No obstante, mediante el proyecto de investigación REMEYC [1], se detectaron necesidades de capacitación a docentes de matemática de la educación media, en contenidos matemáticos (probabilidad, estadística y geometría analítica), formación pedagógica (resolución de problemas, trabajo cooperativo) y en el empleo de recursos tecnológicos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (especialmente desde una perspectiva de innovación educativa).

Las necesidades de capacitación detectadas por REMEyC y por el Estado de la Educación (2013), y que coinciden con los hallazgos de Vargas (2016), se explican por varias razones. En primer lugar, los nuevos programas han introducido nuevos temas, en los que los planes de formación universitaria no habían sido tradicionalmente fuertes como la estadística o la probabilidad. En segundo lugar, la metodología de la resolución de problemas, que ha gozado desde hace muchos años de alto reconocimiento teórico, no ha formado parte de la práctica educativa nacional en ninguno de los niveles educativos y por ello, los docentes no cuentan con experiencia en esta modalidad metodológica. En tercer lugar, el éxito de las innovaciones educativas requiere que los profesores de aula cuenten con acompañamiento (Meza, 2003; Sánchez, 2000), que puede ser provisto por un proyecto de extensión como el que se propone.

Consecuentemente, y como derivación natural del proyecto REMEYC, se formuló, aprobó y desarrolló en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica un proyecto de extensión, orientado a la capacitación y formación de docentes de matemática de la educación media que atendiera las necesidades de capacitación y de formación detectadas. Tal proyecto, denominado RENACE[2], fue ejecutado durante el año 2019 con la participación de 37 profesores de matemática de colegios públicos de las Regiones Educativas de Cartago y de Turrialba.

---

[1] **REMEyC**: Reforma de la educación matemática en Costa Rica. Evaluación de avance a tres años de aplicación y sistemas de creencias de los profesores sobre la reforma. Desarrollado como proyecto de investigación aprobado por el Consejo de Investigación y Extensión, bajo el código 1440030, por el Dr. Gerardo Meza, la Dra. Zuleyka Suárez y la Dra. Evelyn Agüero en la Escuela de Matemática. 2016-2017.

[2] **RENACE:** capacitación, actualización y formación de profesores de matemática de la educación media en el contexto de los programas aprobados en el 2012 por el Consejo Superior de Educación. Desarrollado como proyecto de extensión aprobado por el Consejo de Investigación y Extensión, bajo el código 1440039, por la Dra. Zuleyka Suárez, el Dr. Gerardo Meza, la Dra. Evelyn Agüero y el Lic. Carlos Monge Madriz, en la Escuela de Matemática. 2019.

RENACE se ejecutó como un esfuerzo concreto para dar respuesta, al menos parcialmente, a los hallazgos del proyecto REMEYC, que develaron la falta de coherencia entre la dinámica desarrollada en el aula y lo que plantean los programas aprobados en el año 2012.

La pertinencia del proyecto de extensión a lo externo del TEC se desprende de uno de los objetivos estratégicos establecidos en el eje de docencia del Plan Nacional de la Educación Superior Universitaria Estatal 2016-2020, consistente en “Propiciar el trabajo conjunto entre las universidades y el Ministerio de Educación Pública para incidir en la calidad y pertinencia de la educación nacional” (p.87). Además, el proyecto encuentra respaldo en la Ley de Promoción del Desarrollo Científico y Tecnológico (Ley No. 7169 del 26 de junio de 1990), que establece como objetivo específico para el desarrollo científico y tecnológico: “Fomentar todas las actividades de apoyo al desarrollo científico y tecnológico sustantivo; los estudios de posgrado y la capacitación de recursos humanos, así como el mejoramiento de la enseñanza de las ciencias, las matemáticas y la educación técnica, lo mismo que la documentación e información científica y tecnológica”.

También el proyecto contribuyó con el Ministerio de Educación Pública a la atención del desafío que el Quinto Informe del Estado de la Educación (2015) expresó de la siguiente manera:

> *Fortalecer los procesos de capacitación e integrarlos en el marco de una política de desarrollo profesional de largo plazo, que tenga como norte principal potenciar las habilidades que requieren los docentes para aplicar con éxito los nuevos programas de estudios (p. 161).*

Finalmente, esfuerzos académicos de vinculación con el MEP como el que ofreció el proyecto RENACE encuentran respaldo en la “Ruta 2021: conocimiento e innovación para la competitividad, prosperidad y bienestar”, establecida por el Ministerio de Ciencia, Tecnología y Telecomunicaciones (MICITT), en la que se establece la enseñanza de la matemática como parte del eje estratégico Educación.

En este documento se sistematiza parte de la experiencia del proyecto RENACE, mediante la recopilación de un conjunto de materiales utilizados en el desarrollo de los talleres y de algunos de los productos generados por las personas participantes en el proyecto, con el propósito de ponerlos en manos de otros docentes y de estudiantes de las carreras formadoras de matemática.

Geometría

¿Cómo se distribuyen los contenidos de geometría en el programa de estudios según el MEP?

Objetivos del MEP

Tercer ciclo

- **Reconocer:** figuras geométricas, identificar sus elementos constituyentes y realizar algunas construcciones sencillas.
- **Aplicar:** diferentes características de los triángulos y los cuadriláteros, incluyendo el cálculo de sus perímetros y áreas.

- **Profundizar:** el conocimiento de propiedades de las figuras geométricas, introducir el estudio básico de la trigonometría y ampliar la capacidad de abstracción y razonamiento matemático.

Ciclo diversificado

- **Estudiar:** analíticamente la circunferencia, algunos conocimientos relacionados con polígonos y algunas transformaciones en el plano.

- **Profundizar:** en el estudio de los polígonos y de las transformaciones en el plano: rotaciones, traslaciones y reflexiones.
- **Desarrollar:** habilidades y competencias relacionadas estrechamente con la visualización, ubicación y movimiento en entornos, algo muy útil en artes gráficas, arquitectura, artesanía o simplemente en la manipulación ordinaria de las cosas que se encuentran dentro del espacio físico en el que se mueven las personas.

Habilidades generales

Tercer ciclo

- Identificar relaciones entre los conceptos básicos de la geometría (puntos, rectas, segmentos, rayos, ángulos).
- Aplicar diversas propiedades y transformaciones de las figuras geométricas.
- Utilizar nociones básicas de geometría analítica.
- Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) y las relaciones entre ellas en diferentes contextos.
- Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.

Ciclo diversificado

- Representar las circunferencias de manera analítica y gráfica.
- Analizar relaciones de posición relativa entre rectas y circunferencias.
- Calcular áreas y perímetros de polígonos.
- Aplicar e identificar diversas transformaciones en el plano a figuras geométricas.

- Utilizar la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones.
- Identificar simetrías.
- Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.

Consideraciones teóricas

A. Nota histórica

La creación de la geometría analítica se atribuye a René Descartes (Renatus Cartesius), filosofo, matemático y físico francés, por la publicación de un apéndice de su obra "Discurso del método", publicado en 1637, denominado "La Géométrie", aunque actualmente se reconoce que el matemático y abogado Pierre de Fermat, también francés, conocía y utilizaba el método antes de la publicación de Descartes.

B. Postulados básicos

Podemos desarrollar la mayor parte del tema que nos interesa, con base en los siguientes postulados:

- **Postulado de la distancia:** A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.

Con base en este postulado, podemos definir la distancia entre dos puntos, de la siguiente manera:

Definición de distancia: La distancia entre dos puntos de una recta es el número establecido por el postulado de la distancia. Para los puntos A y B se denota la distancia AB.

- **Postulado de la regla:** Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales de manera que se cumpla que:

1. A cada punto de la recta le corresponde un número real.
2. A cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.
3. La distancia entre dos puntos cualesquiera es igual al valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

C. Sistema de coordenadas lineal

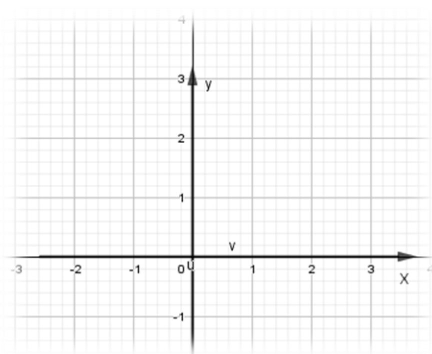
Sea una recta l y un punto O de la misma. Sea A otro punto de la recta l. Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre la recta l y el conjunto de los números reales, de manera que para todo punto arbitrario P de la recta l se considere el número x calculado por $x = \frac{OP}{OA}$. A esta correspondencia la denominamos "Sistema de coordenadas lineal" con origen en el punto O.
A "x" se le denomina coordenada del punto P en ese sistema.

Problema propuesto

Se da un sistema de coordenadas de manera que la coordenada de P es 8 y la coordenada de Q es -10. Hallar la coordenada de T tal que MT=TQ.

D. Sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas

Se consideran dos rectas perpendiculares l y m en el plano, que se intersecan en el punto O. Consideramos en un sistema de coordenadas lineal en cada una de las rectas, ambos con origen en el punto O.
Se considera un punto del plano P, del cual se trazan perpendiculares a las rectas l y m. Si "x" es la coordenada del pie de la perpendicular por P a la recta l y "y" el pie de la perpendicular par P a la recta m, definimos una relación biunívoca entre los puntos del plano y el conjunto IR^2, asignando a cada punto el par correspondiente (x,y).



Con base en una figura como la anterior, se suele tomar las coordenadas positivas que están a la derecha del punto O para los valores de "x", y los de la parte superior para los valores de "y", más nada impide que se puedan tomar cualquier otra combinación.

E. La distancia entre dos puntos

A partir de las coordenadas de los puntos A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2) se puede establecer una fórmula para calcular la distancia d(A,B) entre los puntos A y B, de la siguiente manera:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La que se puede establecer con base en el Teorema de Pitágoras.

Problema propuesto

Considere los puntos A(-1,1), B(-1,1) y C(-$\sqrt{3}, \sqrt{2}$). ¿Es el triángulo ABC equilátero?

Problema propuesto

Identifique al menos dos estrategias para calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(2,1)$, $B(-1,2)$ y C$(4,5)$.

F. División de un segmento en una razón dada

Dados los puntos P(x_1,y_1) y Q(x_2,y_2) como extremos de un segmento PQ, se puede calcular las coordenadas (x, y) del punto R que divide al segmento en la razón r, $r = \frac{PR}{RQ}$ con las siguientes expresiones:

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1+r} \text{ , y, } y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1+r}$$

Problema propuesto

Hallar dos puntos de manera que trisequen al segmento de extremos (-2,5) y (3,6).

G. Punto medio de un segmento

El punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ es un punto de ese segmento que cumple con la siguiente condición: PM=MQ. Tomando el valor de r=1 en las fórmulas del apartado anterior, se logran las fórmulas para las coordenadas del punto medio, que se muestran a continuación:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ , y, } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Problema propuesto

Considere que las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es 8. Asumiendo que la coordenada de Q es mayor que la coordenada de P, y si PQ=20, hallar las coordenadas de P y Q.

Problema propuesto

Las medianas de un triángulo son concurrentes en el baricentro. Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado. Demuestre que si los vértices del triángulo son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3,y_3)$ entonces el baricentro corresponde al punto

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Problema propuesto

Calcule las longitudes de las medianas del triángulo cuyos vértices son los puntos A(2,1), B(-1,2) y (5,4).

H. La ecuación de la recta

A toda recta en el plano se le puede asociar una ecuación de la forma
$ax + by + c = 0$, con a, b y c constantes reales tales que $a^2 + b^2 \neq 0$.

En el caso de que los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son tales que $x_1 \neq x_2$ la ecuación puede ser expresada de la siguiente manera:

$$y = mx + b$$

Donde $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, llamada pendiente y $b = y_2 - mx_2$.

En el caso de que los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ sean tales que $x_1 = x_2$ la recta que los contiene será vertical y su ecuación será $x = x_1$.

I. Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Las rectas no verticales $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son paralelas si y solo sí $m_1 = m_2$. Dos rectas verticales son paralelas.

Por otra parte, las rectas serán perpendiculares si y solo si $m_1m_2 = -1$.

Problemas propuestos

- Demuestre, al menos de dos maneras diferentes, que los puntos A(5,-3), B(4,4) y C(8,1) son los vértices de un triángulo rectángulo.
- Hallar la ecuación de la altura del triángulo de vértices A(5,-3), B(4,4) y C(8,1) que contiene al punto C.
- Tres de los vértices del paralelogramo ABCD son los puntos A(-9,1), B(-5,2) y C(-3,-1). Hallar el punto D.
- Hallar el valor de k para que la recta $\mathrm{kx} + (\mathrm{k}-1)\mathrm{y} - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.
- Determinar el valor de k para que la recta $k^2\,x + (k+1)\,y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

J. Ángulo entre dos rectas

El ángulo θ entre las rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ se puede determinar mediante la ecuación:

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1},\ m_2 \neq m_1$$

Problemas propuestos

- Calcular la medida de los ángulos internos del triángulo de vértices A(-8,1), B(-1,2) y C(-5,4).
- Verifique que los puntos A(-8,1), B(-5,4), C(-1,2) y D(-2,-1) son los vértices de un paralelogramo y calcule la medida del ángulo agudo.
- Utilice la fórmula de esta sección para demostrar que las $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son paralelas si y solo sí $m_1 = m_2$.
- Los vértices de un triángulo son $A(3,3), B(1,-3)\ y\ C(-1,2)$. Calcular el valor del ángulo agudo que forma la mediana que corresponde al lado $\overline{AB}$ con la mediatriz del lado $\overline{AC}$.

K. Demostración de teoremas geométricos con procedimientos analíticos

Los procedimientos analíticos permiten la demostración de algunos teoremas geométricos de manera relativamente sencilla.

Problemas propuestos

Utilizar procedimientos analíticos para demostrar los siguientes teoremas:

- La mediana sobre la hipotenusa mide la mitad de esta.
- El segmento que une los puntos medios de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de este.
- Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes, en un punto que equidista de los vértices.
- Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son congruentes entonces el cuadrilátero es un rectángulo.
- Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- El cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un cuadrilátero dado es un paralelogramo.

L. La ecuación de la circunferencia

La ecuación de la circunferencia de radio R y centro $C(h,k)$ es:

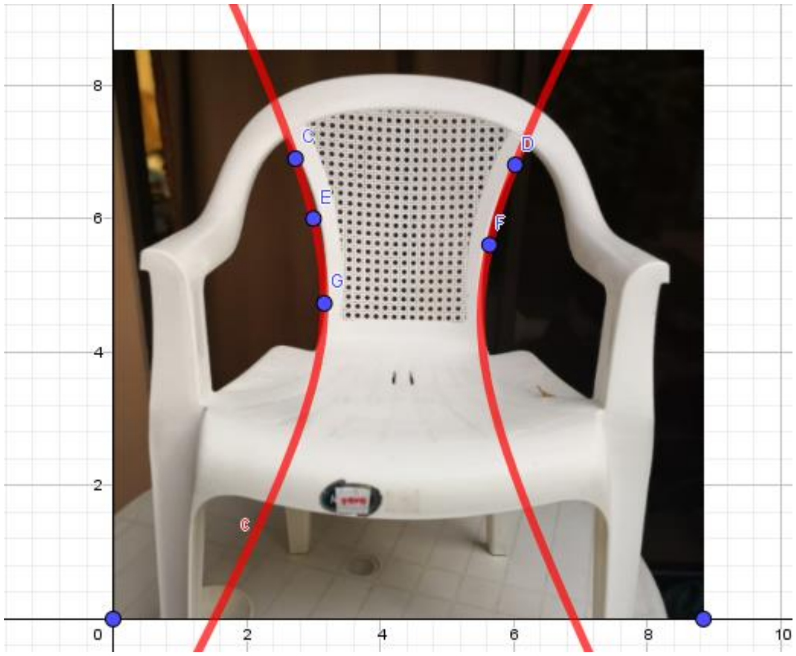
$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

Problema propuesto

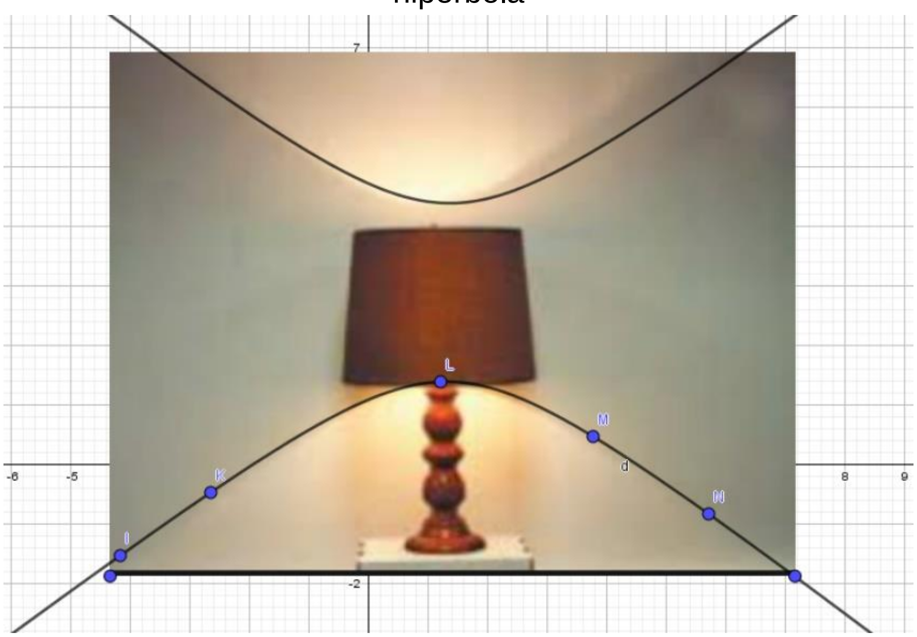
- Dada la circunferencia $x^2+y^2=5$, hallar los valores de k para los cuáles las rectas de la familia $x-2y+k=0$ son tangentes a la circunferencia.

M. Ejemplos de secciones cónicas en el entorno

hipérbola



hipérbola



Parábola

Elipse

Problemas elaborados por los docentes

Sétimo año

Problema 1: Buscando a Pedro

Prof. Dayana Calderón Prado

Conocimientos:

- Ejes cartesianos.
- Representación de puntos.
- Representación de figuras.

Habilidades a desarrollar:

- Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.

Dinámica para desarrollar

En esta actividad se debe dividir al grupo en equipos, cada integrante de los grupos tendrá una tarea distinta que realizar. El problema trata de seguir una serie de pistas para encontrar a Pedro, por lo que sería de gran ayuda que las pistas se coloquen en fichas y se entregue una distinta a cada estudiante del equipo para que trabajen en conjunto.

Situación problema

Pedro salió de su casa un día por la mañana y olvidó su celular por lo que no se ha comunicado con sus padres quienes necesitan ir a recogerlo. Sus amigos lo vieron pasar por sus casas o bien caminaron con él alguna parte del camino. En el plano cartesiano ubique la posición de cada uno de los datos para facilitar la búsqueda de Pedro. Los datos que se tienen son:

1. La casa de Pedro está en la posición (-3,1)
2. Juan dice que se encontró a Pedro en la casa de Sofía, esta está en la posición (1,1) y luego se fueron a su casa que está a 3 kilómetros al norte.

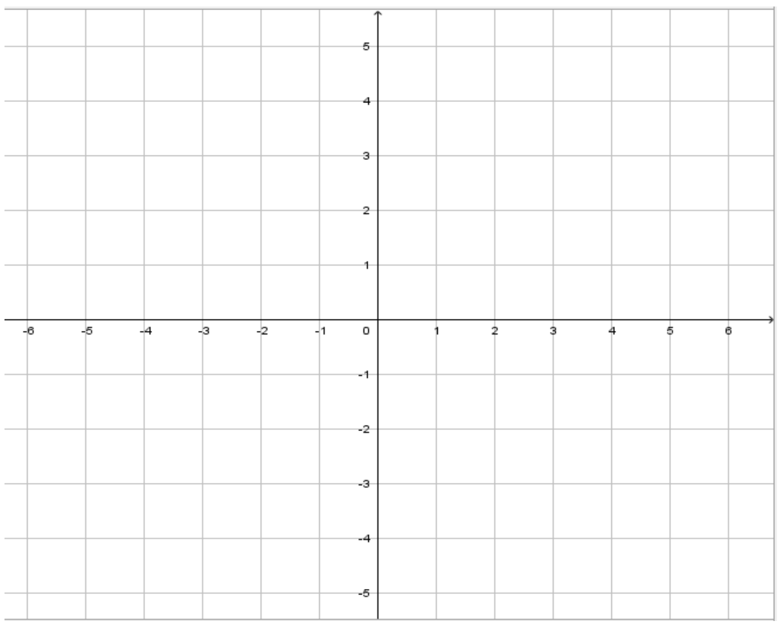
3. Roger se encontró con Pedro en el parque, y le dijo que iría donde su tía Emma.
4. El parque está a 4 kilómetros al este de la casa de Juan y la casa de la tía Emma está a 5 kilómetros al sur del parque.

¿Cuáles son las coordenadas de la posición de Pedro?

¿Cuántos kilómetros recorrió?

¿Cuál es la menor distancia entre sus padres y la casa de Emma?

De acuerdo con las pistas anteriores, determine la ubicación de Pedro en el siguiente plano cartesiano donde cada cuadrado tiene como lado 1 km:



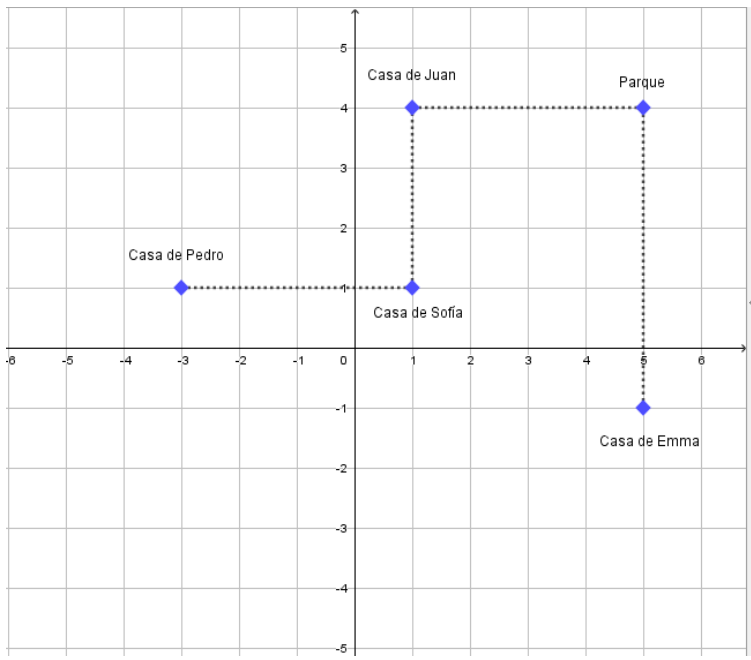
Respuestas esperadas

El estudiante ubicará los puntos en la cuadrícula y tendrá que interpretar el trayecto hasta llegar a la posición de la casa de su tía Emma.

Respuesta: (5,-1)

La distancia recorrida por Pedro es de 17 kilómetros.

La menor distancia entre los padres de Pedro y la casa de Emma es de 10 km.



Noveno año

Problema 1: Calculando alturas con la trigonometría

Prof. Nelson Ramírez Contreras

Conocimientos:

- Razones trigonométricas.
- Ángulos de elevación y depresión.

Habilidades a desarrollar:

- Aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos.
- Aplicar los conceptos de ángulos de elevación y depresión en diferentes contextos.
- Plantear problemas contextualizados que utilicen razones trigonométricas para su solución.
- Utilizar herramientas tecnológicas para la solución de problemas propuestos.

Dinámica para desarrollar

1. Se forman grupos de trabajo.
2. Cada grupo de trabajo debe descargar las aplicaciones “Transportador” (sirve para calcular ángulos utilizando la cámara del teléfono celular) y “Telémetro: Smart distance” (sirve para hallar distancias desde su ubicación hasta un punto determinado, tomando como referencia la altura o anchura real de otro objeto que aparece en la imagen, por ejemplo, la altura de una persona).
3. Debe tener acceso a “GeoGebra”.
4. Cada grupo debe elegir un edificio o estructura para analizar cuál es su altura.
5. Una vez elegido el edificio, deben tomar las medidas que crean pertinentes, tanto de ángulos como de distancias para que después, mediante el uso de razones trigonométricas, pueda hallar la altura del edificio.

6. Después de definida la altura de la edificación seleccionada se comprobará el resultado mediante el uso de GeoGebra y regla de tres.

Situación problema

Ubique un edificio y determine su altura.

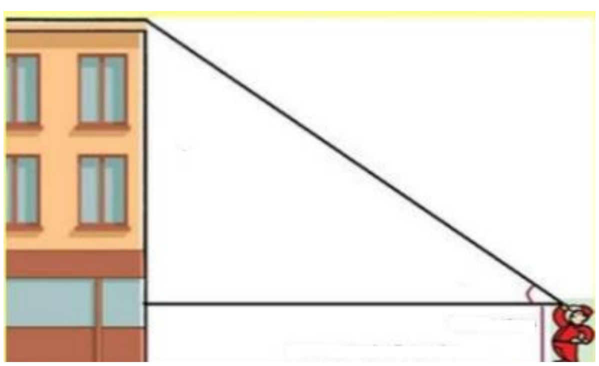
Respuestas esperadas

Primera parte:

Para poder calcular la altura de un edificio mediante el uso de trigonometría y ángulos de elevación o depresión, se necesita conocer el ángulo de elevación y la medida de uno de los lados que definen el triángulo que se forma entre el punto más alto del edificio, la base del edificio y el observador.

Primero, para hallar el ángulo, conviene tomar una posición en la que un integrante del grupo se encuentre con el observador y el edificio de frente. Se utilizará a herramienta “Transportador”.

Ejemplo:



No es necesario que el ángulo se mida partiendo de la mirada del observador. Puede ser desde sus pies.

Para hallar la distancia del observador hasta el edificio, se utilizará “Telémetro”. Entonces, un miembro del grupo se colocará junto a la base del edificio y enfocará al observador, para calibrar el medidor debe incorporarse la altura del observador en la aplicación, puesto que él será la referencia.

Una vez que se cuente con el ángulo de elevación y la distancia desde el observador hasta la base del edificio se procede a calcular la altura eligiendo una razón trigonométrica y realizando el despeje respectivo. En este caso será la tangente.

Segunda parte: Verificación mediante el uso de GeoGebra.

Un miembro del grupo tomará una fotografía del observador y el edificio desde una posición frontal (como en la primera medición).

Luego,

1. Esa fotografía la exportará a “GeoGebra”.
2. Con la herramienta “segmento”, trazará una línea desde la base del edificio hasta su parte más alta y otra desde los pies del observador hasta la parte más alta de su cabeza. La herramienta “GeoGebra” automáticamente proporcionará la medida de los segmentos.
3. Luego, utilizando regla de 3, con las medidas de los segmentos trazados y la altura real del observador podrá calcular aproximadamente la altura del edificio.

Problema 2: Distancia entre dos puntos

Prof. Karla Vargas

Conocimientos:

- Distancia entre dos puntos.

Habilidades a desarrollar:

- Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

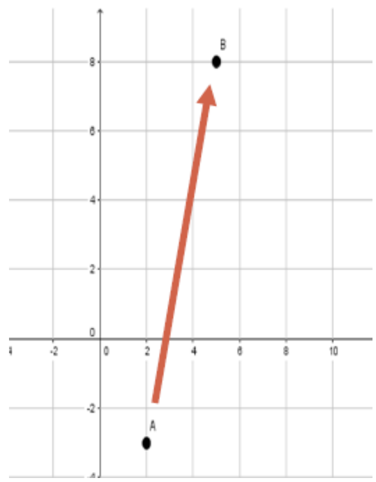
Dinámica para desarrollar

Después de que el docente lee el problema, los estudiantes de manera individual generan ideas para aportar posibles soluciones, la docente mediante un diálogo interactivo, fungiendo como moderador, comienza a establecer una discusión con respecto a la problemática.

Situación problema

En el Liceo de Tierra Blanca el subdirector representó el mapa del parque que se encuentra a un costado de la institución en un plano cartesiano con el fin de conocer la distancia en línea recta del Liceo al parque, ya que los educandos que participan en el desfile del 15 de setiembre les gusta ensayar ahí. El parque se ubica en el punto $A(2,-3)$ y el Liceo de Tierra Blanca se ubica el punto $B(5{,}8)$. Si cada unidad del plano representa un kilómetro, determine lo que se le solicita:

1. La distancia en kilómetros del Liceo de Tierra Blanca al parque.
2. El tiempo en minutos para recorrer la distancia determinada en el inciso 1, si para recorrer 10,2 Km los estudiantes tardan 6 minutos.



Respuestas esperadas

1. 11,40 km
2. 7 min

Décimo año

Problema 1: Monumentos naturales de Costa Rica

Prof. María Delfia Sigüenza Quintanilla

Conocimientos:

- Circunferencia y sus representaciones.

Habilidades a desarrollar:

- Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
- Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
- Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.

Dinámica para desarrollar

Instrucciones para el grupo que resuelve

a) Forme grupos de tres o cuatro personas.
b) Resuelva correctamente, utilizando la información que se brinda, la guía de trabajo propuesta.
c) Deben utilizar una computadora por grupo para apoyarse con la herramienta GeoGebra para hacer mediciones.

Situación problema

El círculo es una figura geométrica muy importante, que ha sido utilizada por la humanidad desde siglos atrás. Un ejemplo de ello lo puedes observar en la siguiente figura, que corresponde a una fotografía aérea del monumento nacional Guayabo", ubicado en el cantón número 5 de la provincia de Cartago: Turrialba.

Analice y responda los siguientes cuestionamientos:

a) ¿Cuántos círculos observas en la imagen anterior?
b) ¿Conoces este monumento nacional de Costa Rica?
c) Menciona por escrito, al menos tres objetos o lugares de tu vida cotidiana en los que su figura principal es un círculo.
d) Mencione por escrito, el nombre de algunos elementos de un círculo (mínimo tres tres).
e) Abre el programa GeoGebra e inserta la imagen anterior.
f) Elige uno de los círculos de la imagen y utilizando las herramientas del software determine:
    1. las coordenadas de dos puntos de la circunferencia.
    2. la medida del radio de la circunferencia.
    3. el centro de la circunferencia.
    4. la ecuación (representación algebraica), de la circunferencia.
    5. el área.
    6. el perímetro.

Respuestas esperadas

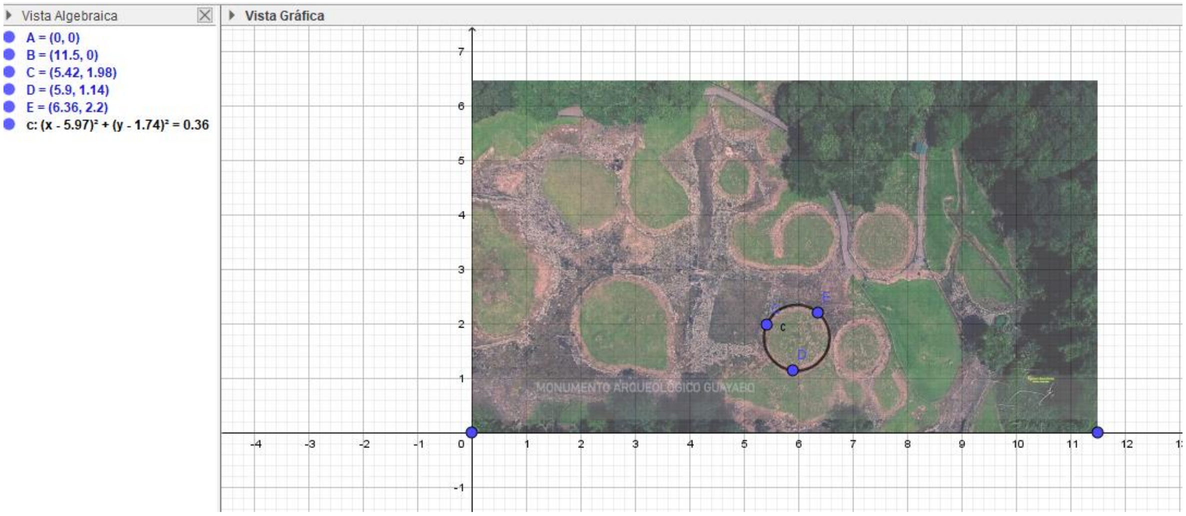
Solución a la situación problemática presentada (al menos una solución factible)

a) 5

b) Respuesta abierta

c) Llantas de una bicicleta, vaso, monedas, entre otros

d) En este caso el estudiante puede elegir cualquiera de los círculos, de la siguiente manera:



e) Con base en su elección, el estudiante puede experimentar con las herramientas de GeoGebra y con la guía del docente, buscar los datos que se han solicitado en este punto.

Problema 2: Figuras que se forman al cortar secciones planas de una esfera o un cilindro

Prof. María Delfia Sigüenza Quintanilla

Conocimientos:

- Sección plana.
- Elipse.

Habilidades a desarrollar:

- Determinar que figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.
- Reconocer elipses en diferentes contextos.

Dinámica para desarrollar

Instrucciones para el grupo que resuelve

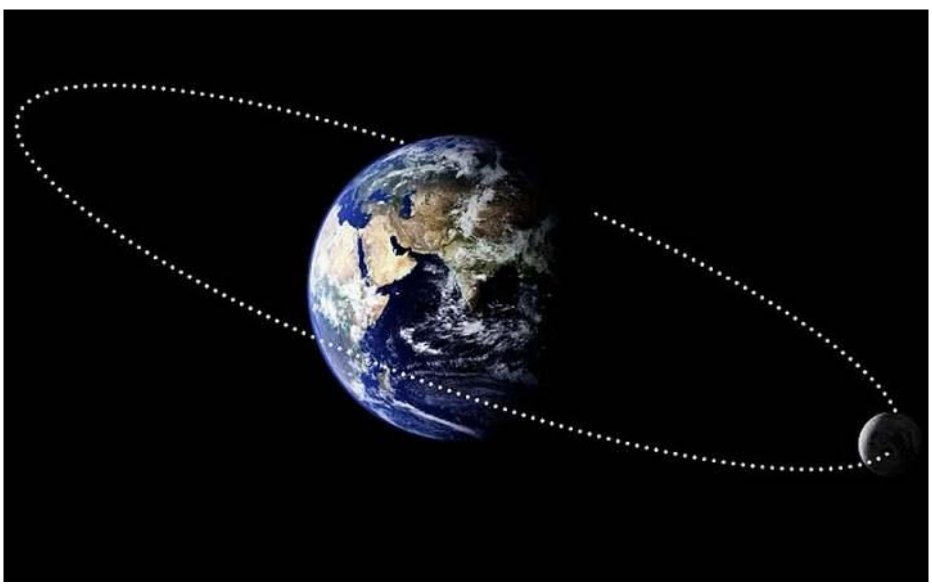
a) Forme grupos de tres o cuatro personas.
b) Resuelva correctamente, utilizando la información que se brinda, la siguiente guía de trabajo propuesta.
c) Deben utilizar una computadora por grupo para apoyarse con la herramienta Geogebra para hacer mediciones.

Situación problema

La Luna es un satélite y, por tanto, gira alrededor de la Tierra a una distancia media de 384.400 kilómetros, aunque la distancia real varía a lo largo de su órbita. La Luna gira alrededor de su eje (rotación) en aproximadamente 27.32 días (mes sidéreo) y se traslada alrededor de la Tierra (traslación) en el mismo intervalo de tiempo, de ahí que siempre nos muestra la misma cara. Tomado de:

https://www.astromia.com/tierraluna/movluna.htm

La siguiente figura muestra la forma en que la luna gira alrededor de la tierra:



De acuerdo con la información anterior, resuelva la siguiente guía de trabajo

a) ¿Has observado en tu casa o en otros lugares un movimiento similar al de rotación de la Luna? Si tu respuesta es sí, menciona algún ejemplo. Si tu respuesta es no, busca en tu celular algunas fotografías en las que aparezcan curvas parecidas a la del dibujo.

b) Abre el programa GeoGebra e inserta la imagen anterior. Elige la herramienta "cónica por cinco puntos" y utilizando dicha herramienta haz una réplica de la curva de rotación de la Luna.

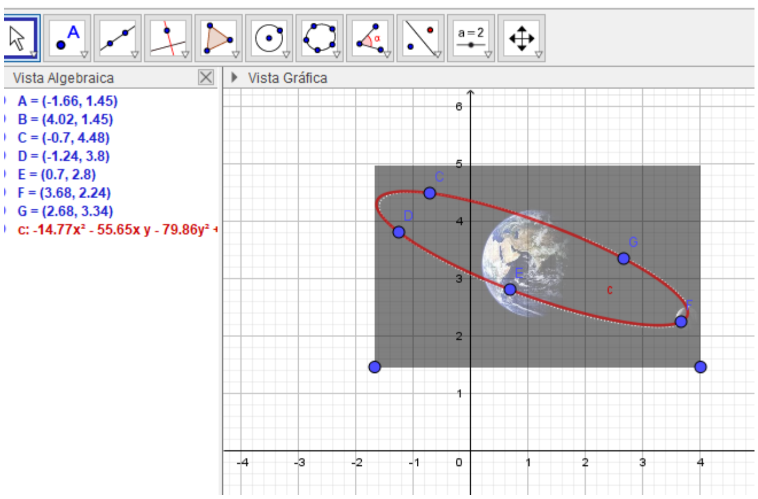
c) Averigua qué tipo de nombre recibe dicha curva.

Respuestas esperadas

Solución a la situación problemática presentada (al menos una solución factible)

a) Respuesta abierta.

b)



c) Elipse.

Problema 3: Pista de atletismo

Prof. Jessica Chacón Piedra

Conocimientos:

- Figuras no poligonales.

Habilidades a desarrollar:

- Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

Situación problema

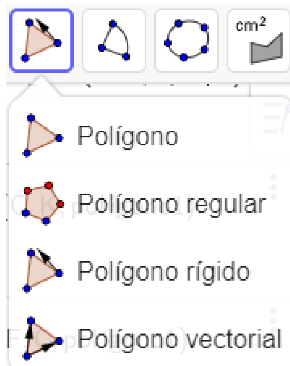
Andrés se encuentra en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, específicamente en la pista de atletismo, y desea calcular el área y perímetro de dicho lugar.

Para resolver este problema se usarán polígonos para aproximar el área de la figura para lo cual debe seguir los siguientes pasos:

1. Ingresar a calcmaps.com para obtener la imagen de la pista.

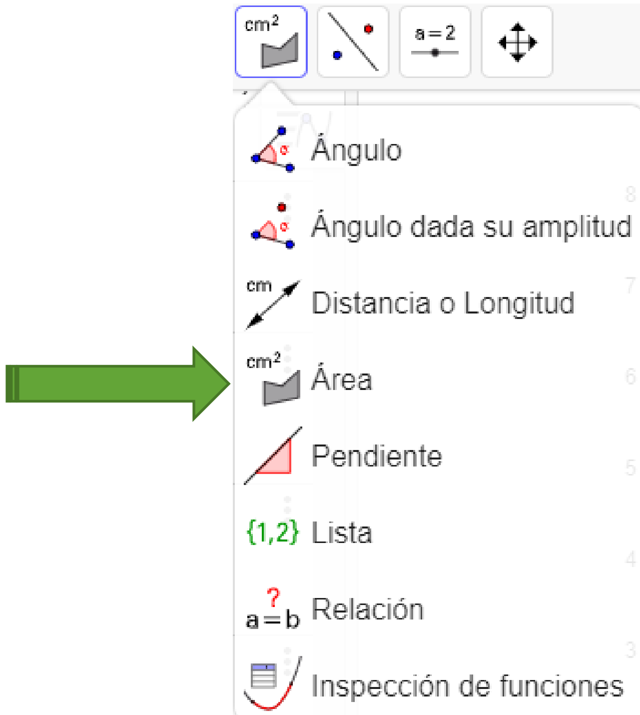
2. Utilizando el programa GeoGebra, debe insertar la imagen.

3. Explore las herramientas que le brinda el programa como la de polígono.

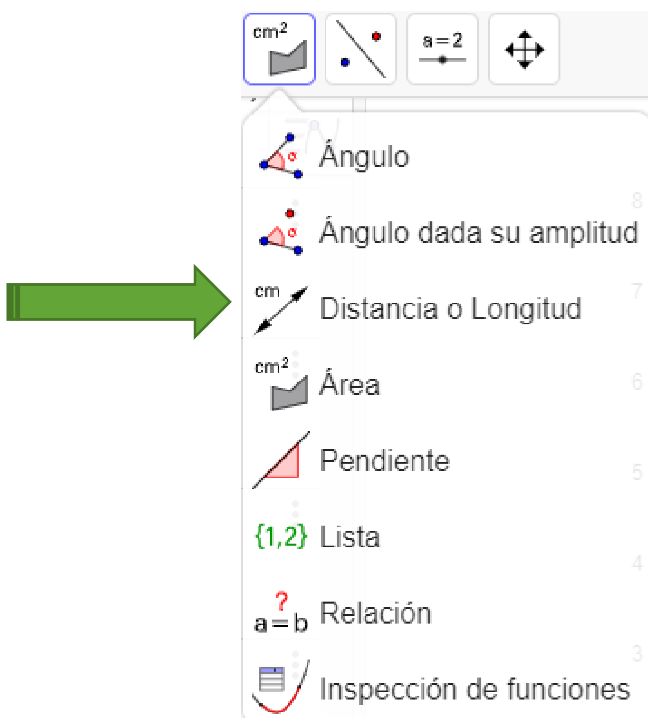


   Para delimitar el área de la imagen y de esta forma obtener su área y perímetro aproximados.

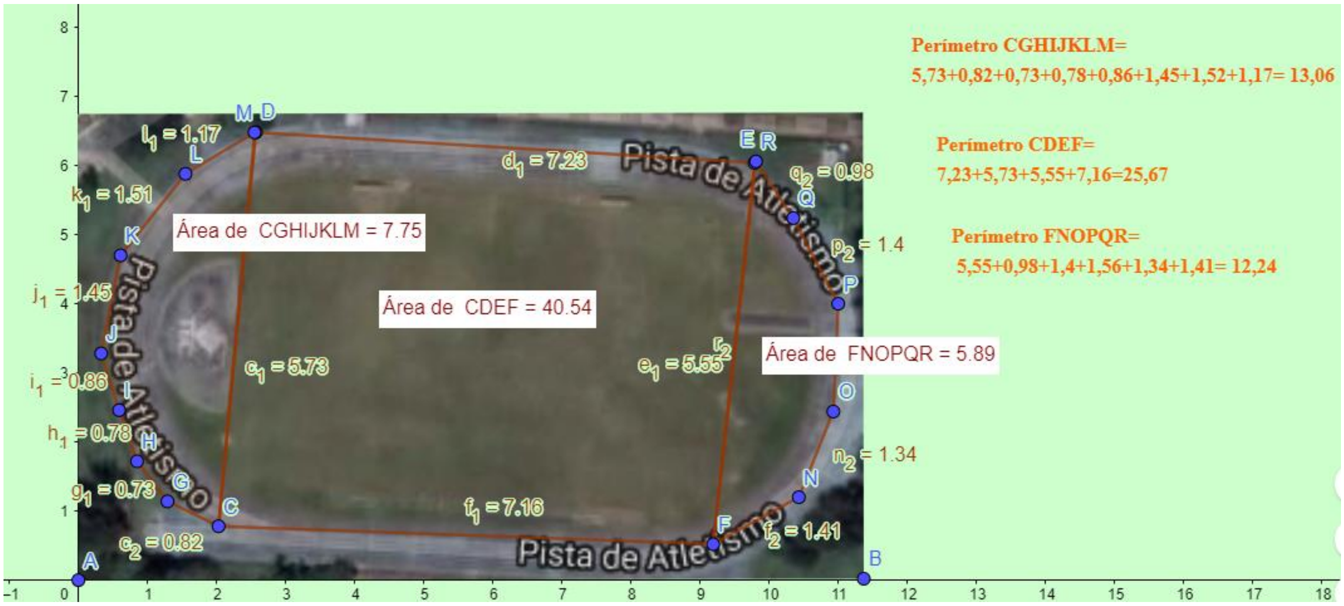
4. Con la herramienta de área puede determinar dicha medida



5. Utilizando la herramienta Distancia puede determinar la medida de cada uno de los lados del polígono, para encontrar la medida del perímetro.



Respuestas esperadas



Undécimo año

Problema 1: Construcción de puentes con parábolas

Prof. Adriana González Dobrosky

Conocimientos:

- Traslación de figuras.

Habilidades a desarrollar:

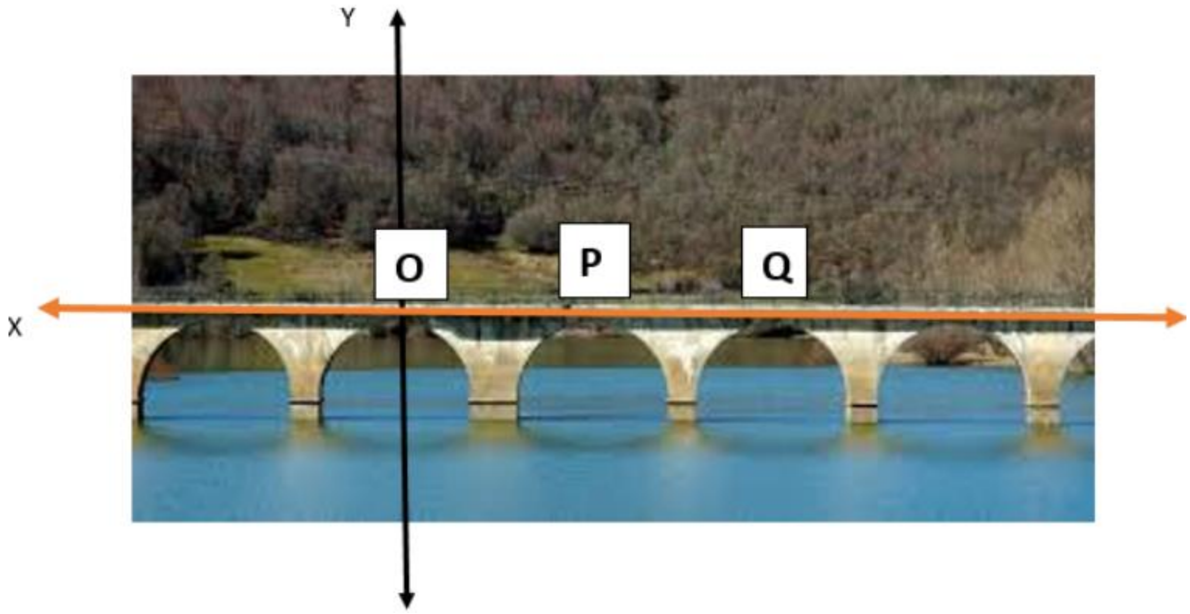
- Aplicar el concepto de traslación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas
- Identificar si una relación dada en forma gráfica corresponde a una

Dinámica para desarrollar

En grupos, analicen, cuestionen y utilicen los conocimientos adquiridos para resolver el siguiente problema.

Situación problema

Un puente está construido sobre una estructura con formas que se aproximan a parábolas congruentes, como lo muestra la figura. Para ello fue necesario precisar las ecuaciones de las tres parábolas que tienen vértices en O, P y Q, respectivamente. Si el punto $P(5, 0)$ es el vértice de la segunda parábola y la ecuación de la primera parábola a su izquierda es $x^2 = -4y$, hallar la ecuación de la parábola a la derecha del punto P.



Como guía de trabajo puede ayudarse respondiendo primero las siguientes interrogantes:

a. ¿Los arcos del puente qué forma de función poseen?
b. ¿Qué puede concluir al observar que los arcos son congruentes?
c. Si el punto $P\ (5\ ,0\ )$ es el vértice de uno de esos arcos, ¿puedes averiguar las coordenadas del punto Q?
d. ¿Pueden plantear una ecuación para la parábola del punto P y con la parábola a su derecha?

Respuestas esperadas

a. Los arcos tienen forma de parábola.
b. Significa que se trata de parábolas obtenidas por traslaciones de la primera a lo largo del eje X.
c. El punto Q tiene las coordenadas $(\ 10, 0\ )$.
d. Aplicando una traslación en el eje x, el criterio de la parábola a la derecha, es decir, la de vértice Q es de $(x-5)^2 = -4y$.

Problema 2: Transformaciones en la naturaleza

Prof. Ana Yansi Bonilla Arias

Conocimientos:

- Transformaciones.

Habilidades a desarrollar:

- Determinar ejes de simetría en figuras simétricas.
- Identificar elementos homólogos en figuras que presentan simetría axial.
- Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar que figuras se obtienen a partir de figuras dadas.
- Identificar elementos de las figuras geométricas que aparecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones.

Dinámica para desarrollar

Nota: Para determinar si una figura presenta rotación, traslación, reflexión u homotecia, y realizar la fotografía, es importante conocer las características que presentan la imagen con la preimagen y poder clasificarla.

Buscar en el medio que nos rodea (sombras, árboles, flores, etc.) imágenes en las que se presentan las transformaciones: simetría, rotación, reflexión y homotecia (inversa o directa) de figuras.

Captar una imagen en la que se muestre la transformación.

Copiar las fotografías en el computador.

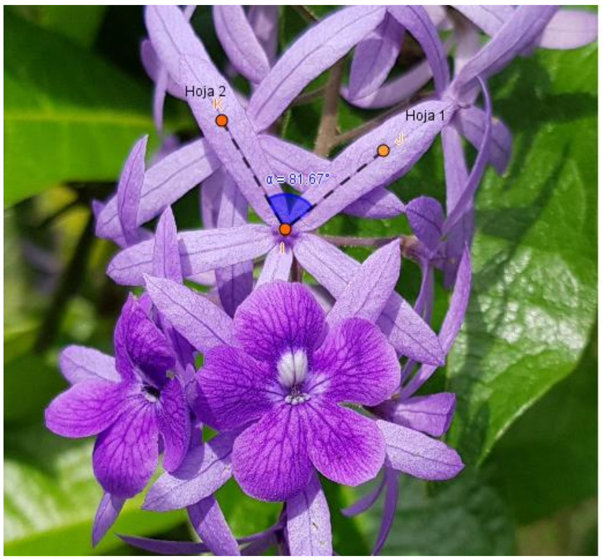
Utilizando la aplicación GeoGebra determinar lo que se solicita en cada caso:

a) Rotación: marcar un determinado punto y calcular la medida del ángulo de rotación de acuerdo al punto dado.
b) Homotecias: Encontrar el punto origen, calcular la razón de homotecia, marcar puntos homólogos.
c) Simetría axial: Trazar el eje de simetría, marcar puntos homólogos.

Cada una de las fotografías serán expuestas a sus compañeros para ser analizadas de manera grupal.

Respuestas esperadas

Rotación: marcar un determinado punto y calcular la medida del ángulo de rotación de acuerdo con el punto dado.

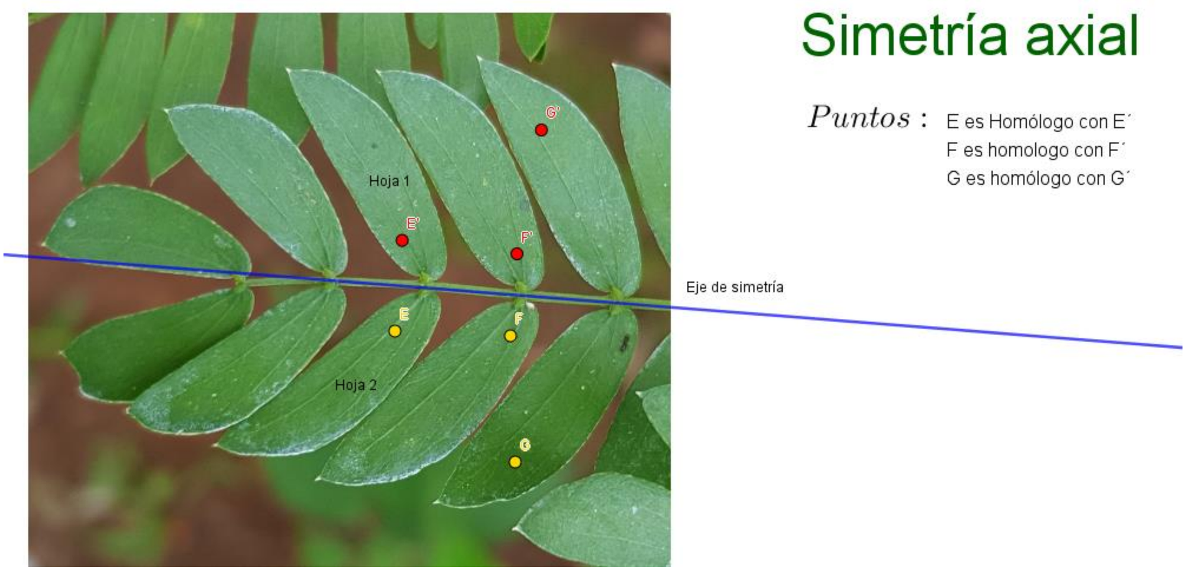


Rotación

Se rota la hoja 1 un ángulo de 81,25° respecto al punto I

Homotecias: Encontrar el punto origen, calcular la razón de homotecia, marcar puntos homólogos.

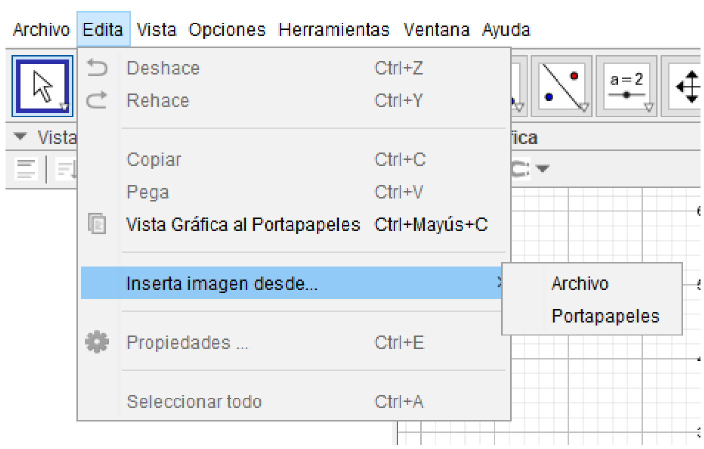
Simetría axial: Trazar el eje de simetría, marcar puntos homólogos.



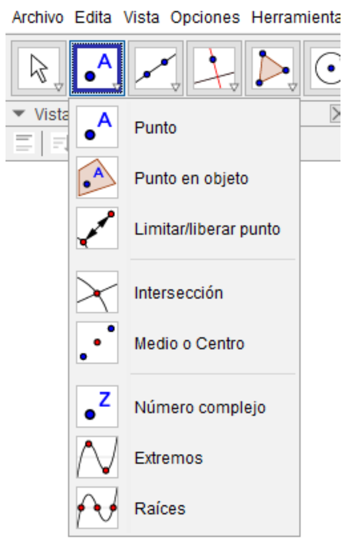
GeoGebra

a) Para insertar una imagen en la aplicación tiene dos opciones:

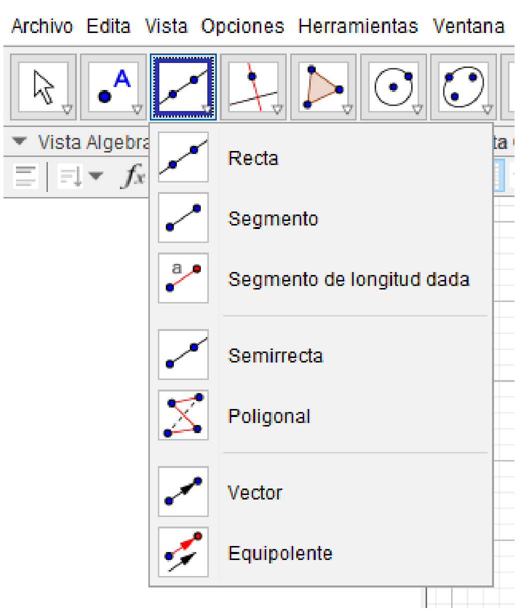
1. Arrastrar la imagen hasta la pantalla y soltarla en la misma.
2. En la pestaña edita de la aplicación selecciona, insertar imagen desde y continua según sea su caso.

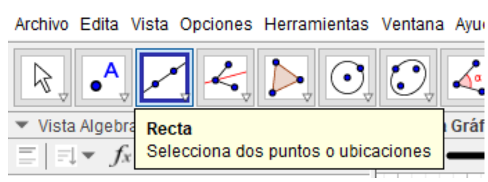


b) Para insertar un punto: al posicionarse sobre la lista desplegable de la sección de punto, selecciona la opción que necesite.

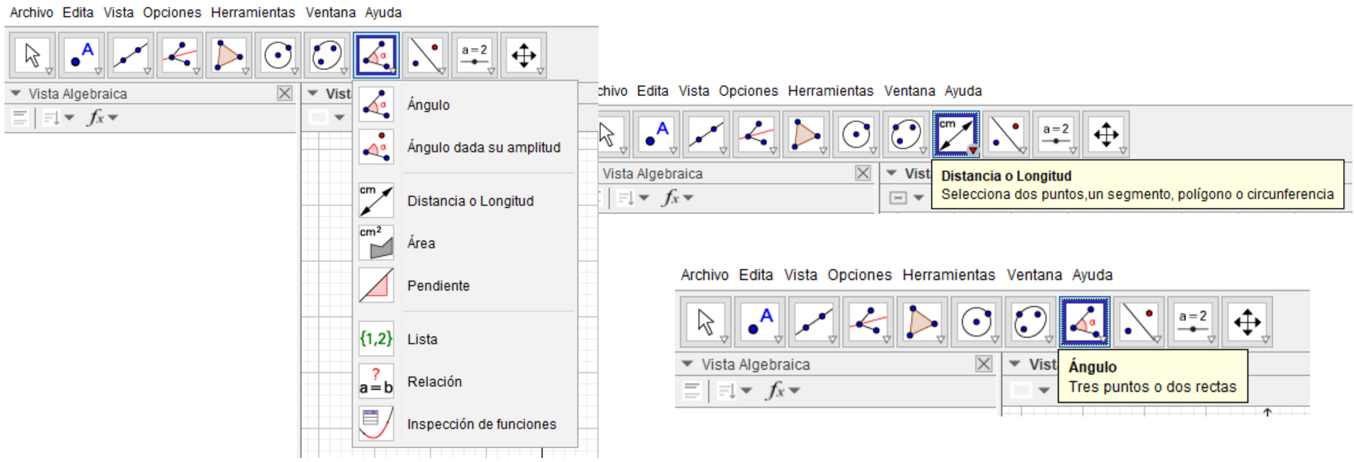


c) Para trazar rectas: seleccione de la lista que se despliega al posicionarse sobre la pestaña de rectas la opción que necesite, luego mantenga el cursor unos segundos sobre el objeto que desee, se mostrará los elementos que se requiere para realizar el trazo deseado.

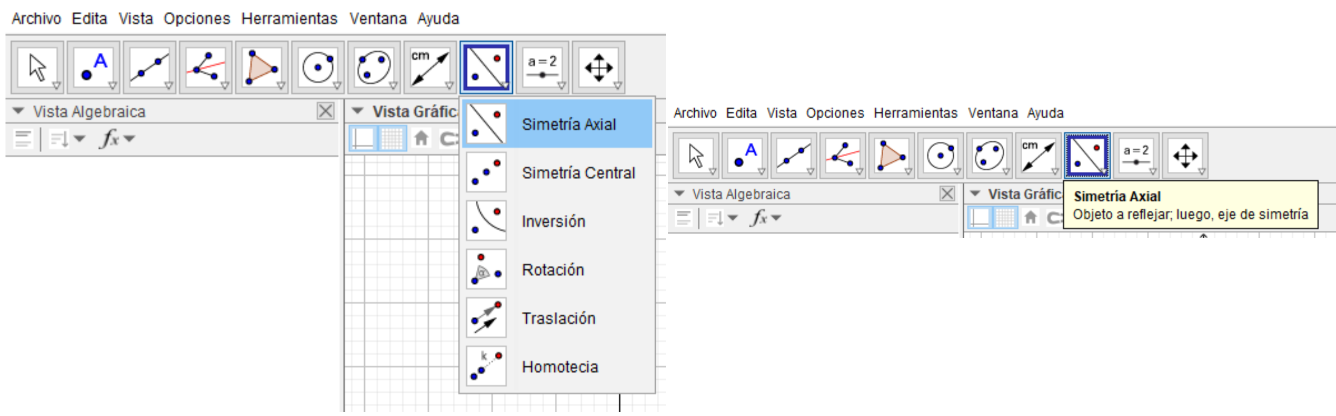




d) Para calcular medidas:



e) Eje de simetría: Trace una recta donde se considera que se encuentra posicionado el eje de simetría, si desea encontrar los puntos homólogos en una reflexión o simetría axial, construya el eje de simetría y los puntos que desee reflejar, luego seleccione la herramienta simetría axial.



Nota: En esa misma herramienta puede realizar las transformaciones que desee, en el plano cartesiano.

Estadística

¿Cómo se distribuyen los contenidos de estadística en el programa de estudios según el MEP?

Objetivos del MEP

Fortalecer: habilidades previas de recolección, resumen, presentación y análisis de información en el tercer ciclo.

Propiciar: cultura de comprensión, valoración y el uso adecuado de la información en el tercer ciclo y la capacidad de identificar, recolectar e interpretar la información necesaria para resolver problemas en el ciclo diversificado.

Profundizar: utilización de medidas estadísticas tanto de posición como de variabilidad en el ciclo diversificado.

Habilidades generales

Tercer ciclo

Las habilidades generales que deberá desarrollar cada estudiante en Estadística en el tercer ciclo son:

1. Interpretar información que ha sido generada por medio de análisis estadísticos provenientes de diversas fuentes.

2. Utilizar técnicas simples para la recolección de datos que sean insumo para un análisis de información relacionado con problemas concretos.

3. Utilizar diferentes estrategias para resumir grupos de datos en forma tabular, gráfica o con medidas estadísticas.

4. Responder interrogantes que requieran de recolección, ordenamiento, presentación y análisis de datos.

5. Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la Estadística.

6. Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto.

Ciclo diversificado

Las habilidades generales que se buscan generar en el área de Estadística en el ciclo diversificado son:

1. Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos.

2. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística.

3. Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos.

4. Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos.

5. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad

dentro de los análisis comparativos de información.

6. Utilizar las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

7. Resolver problemas vinculados con el análisis de datos dentro del contexto estudiantil.

Consideraciones teóricas

Unidad estadística

Es la entidad acerca de la cual se reúnen datos.

Ejemplo:

Si se quiere determinar el coeficiente de inteligencia de un grupo de estudiantes, la unidad estadística es cada uno de los estudiantes.

Características o variables

Cada una de las propiedades que poseen los individuos y que pueden ser objeto de estudio.

Datos u observaciones

Un dato es la información concreta sobre hechos, elementos, etc., que permite estudiarlos, analizarlos o conocerlos.

Población

Conjunto de todos los individuos sobre los que se desea realizar una investigación o estudio. Cuando la información necesaria para el estudio ha sido extraída de todos y cada uno de los individuos de la población se habla de censo. Si por el contrario no es posible acceder a todos los sujetos por falta de recursos se procede a tomar una muestra aleatoria de la población de estudio.

Muestra

Es un subconjunto o parte de una población de individuos.

Variabilidad de los datos

Nombre que se da a las diferencias en el comportamiento de todo fenómeno observable que se repite bajo iguales condiciones, debidas a cambios en factores no controlables, que influyen sobre él.

Ejemplos de población, muestra, individuo y variable

Para estudiar cuál es el candidato presidencial por el cual votarán los costarricenses en las próximas elecciones, se toma una muestra de 3500 personas de todo el país. La pregunta es la siguiente, ¿por quién votará en las próximas elecciones presidenciales?

- En este caso, la población sería la población electoral del país, es decir, costarricenses con derecho a voto.
- La muestra sería el conjunto de 3500 costarricenses que forman parte de la población.
- Un individuo sería cada uno de los costarricenses con derecho a voto.
- La variable es el candidato por el cuál votarían.

Variable cualitativa

Característica de los individuos que no puede medirse con un instrumento ni lleva asociada una unidad de medida.

Ejemplos:

- La gravedad de un accidente es una variable cualitativa ordinal, ya que registra una cualidad que pueden ordenarse de forma natural de menor a mayor severidad.
- El sexo, en cambio, es una variable cualitativa nominal porque sus categorías, masculino y femenino, no tienen un orden natural preestablecido.

Variable cuantitativa

Característica de los individuos que puede medirse con un instrumento y lleva asociada una unidad de medida.

Ejemplos:

El peso es una variable cuantitativa, además, esta variable es continua, ya que el valor del peso asignado a cada individuo puede tener tantos decimales como admita la precisión de la báscula. Otras variables cuantitativas, como el número de hijos, se denominan discretas porque entre dos valores consecutivos no existe otro intermedio, sus valores solo pueden ser números enteros, sin decimales.

Frecuencia absoluta

Es el número de veces que aparece un determinado valor en un estudio estadístico. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

Frecuencia relativa o porcentual

Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1 o 100 %.

Ejemplo:

Deporte más practicado en un grupo de estudiantes: fútbol, tenis, balonmano, tenis, voleibol, atletismo, baloncesto, fútbol, fútbol, voleibol, balonmano, fútbol, balonmano, fútbol, fútbol, tenis, atletismo.

Deporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Baloncesto	2	10%
Balonmano	4	20%
Voleibol	2	10%
Tenis	3	15%
Atletismo	2	10%
Fútbol	7	35%
Total	20	100%

Clases o intervalos

Los intervalos de clase se emplean si las variables toman un número grande de valores o la variable es continua. Se agrupan los valores en intervalos que tengan la misma amplitud y son denominados clases. A cada clase se le asigna su frecuencia correspondiente.

Recolección de datos

1. Experimentación: La experimentación consiste en el estudio de un fenómeno, reproducido generalmente en un laboratorio, en las condiciones particulares de estudio que interesan, eliminando o introduciendo aquellas variables que puedan influir en él.

2. Interrogación: Dirigirse a una persona con la intención de conocer algo u obtener alguna información que se espera de la persona a la que se dirige.

Tipos de representación de datos

1. Tabular: Cuando los datos estadísticos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas que responden a un ordenamiento lógico.

2. Gráfica: Representación visual que proporciona al lector o usuario mayor rapidez en la comprensión de los datos. Hay varios tipos:

a) Gráfico de barras: está constituido por barras rectangulares de igual ancho que se pueden graficar tanto verticalmente como horizontalmente. Se usa básicamente para mostrar y comparar frecuencias, cuando el número de ítems es reducido. Se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares, por ejemplo, para el caso de barras verticales, se colocan en el eje de las “x" los valores que toma la variable en estudio y en el eje de las “y", las frecuencias de cada barra. Se construyen los rectángulos, con base en el eje de las abscisas, cuya altura será igual a cada una de las diferentes frecuencias. Solamente la longitud de las barras y no su anchura es lo que denota la diferencia de magnitud entre los valores de la variable. Todas las barras tienen que tener una anchura igual, separadas entre sí, preferiblemente por una longitud igual a la mitad del ancho de estas o distancias iguales entre barras.

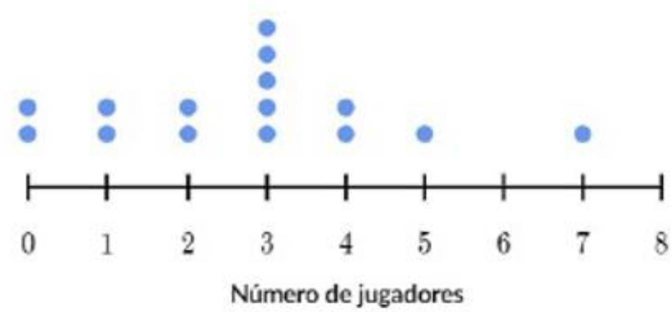
b) Gráfico circular: es una circunferencia dividida en sectores, por medio de radios que dan la sensación de un pastel cortado en porciones. Se usa para representar variables cualitativas en porcentajes o cifras absolutas. Es especialmente útil en los casos en los que existen pocas modalidades de la variable.

c) Gráfico lineal: se usa para mostrar el comportamiento de una variable cuantitativa a través del tiempo y consiste en segmentos rectilíneos unidos entre sí, los cuales resaltan las variaciones de la variable por unidad de tiempo.

d) Diagrama de puntos: es utilizado para ilustrar un número reducido de datos, lo cual permite identificar con facilidad: la localización de los datos y la dispersión o variabilidad de estos. Este diagrama muestra cada uno de los elementos de un conjunto de datos numéricos por encima de una recta numérica (eje horizontal), facilita la ubicación de los espacios vacíos y los agrupamientos en un conjunto de datos, así como la manera en que estos datos se distribuyen a lo largo del eje horizontal.

Ejemplo:

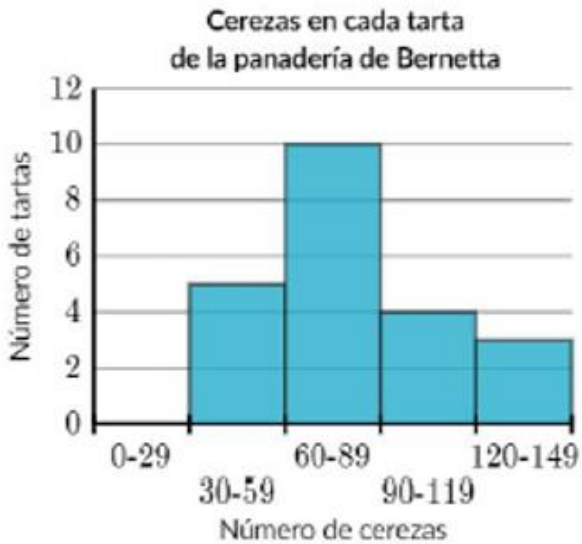
La siguiente gráfica de puntos muestra la distribución de la cantidad de jugadores en cada mesa en una sala de bingo. Cada punto representa una mesa diferente.



- ¿Cuál es el número más frecuente de jugadores en una mesa? R/3

e) Histograma: es una representación gráfica de una variable en forma de barras. Se utilizan para variables continuas o discretas, con un gran número de datos, y que se han agrupado en clases. En el eje abscisas se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo, y por altura, la frecuencia absoluta de cada intervalo. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados.

Ejemplo:



- ¿Cuántas tartas más tienen entre 60 y 89 cerezas que entre 90 y 119 cerezas? R/ 6
- ¿Cuántas tartas de cereza tienen 90 cerezas o más? R/ 7

f) Polígono de frecuencias: se utiliza básicamente para mostrar la distribución de frecuencias de variables cuantitativas. Para construir el polígono de frecuencias se toma la marca de clase que coincide con el punto medio de cada rectángulo de un histograma.

Pasos para elaborar un polígono de frecuencias:

1. Se dibuja un plano cartesiano.
2. Se traza sobre el eje de las abscisas, a distancias iguales, los puntos medios de las diferentes clases de la distribución de frecuencias.
3. Se levantan segmentos perpendiculares por cada una de las marcas de clase, con una longitud igual a la frecuencia de cada una de las clases que integran la distribución de frecuencia. Al final de cada perpendicular se marca un punto.
4. Los puntos resultantes se unen por medio de una línea recta obteniéndose una línea poligonal.
5. Con la finalidad de cerrar la línea poligonal se agrega una clase imaginaria con frecuencia cero a cada extremo de la distribución de frecuencia, por lo que ambos extremos del polígono se cortan con el eje de las abscisas.

g) Diagrama de cajas: se utiliza para representar gráficamente una serie de datos numéricos a través de sus cuartiles. De esta manera, el diagrama de caja muestra a simple vista la mediana y los cuartiles de los datos, pudiendo también representar los valores atípicos de estos.

Utilidad del diagrama de cajas

1. Proporcionan una visión general de la simetría de la distribución de los datos; si la mediana no está en el centro del rectángulo, la distribución no es simétrica.

2. Son útiles para ver la presencia de valores atípicos.

3. Permiten ver cómo es la dispersión de los puntos con la mediana, los percentiles 25 y 75 y los valores máximos y mínimos.

4. Ponen en una sola dimensión los datos de un histograma, facilitando así el análisis de la información al detectar que el 50% de la población está en los límites de la caja.

Medidas de tendencia central, posición y dispersión

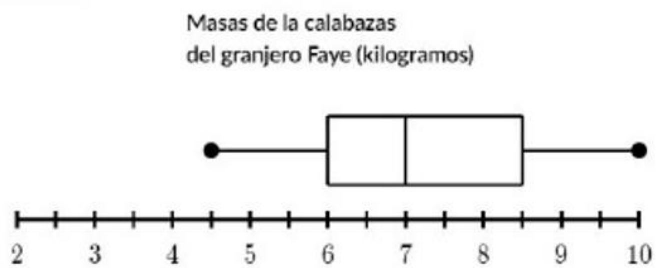
1. Moda: es el o los valores con mayor frecuencia en una distribución de datos. Si existen varios valores con esta característica entonces se dice que la distribución tiene varias modas.

2. Media aritmética: es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos. Es muy sensible a valores extremos en los datos.

3. Mediana: Es el número central de un conjunto de números ordenados. Si la cantidad de términos es par, la mediana es el promedio de los dos números centrales; si la cantidad de términos es impar, la mediana es el valor central.

Ejemplo:

Encuentre la mediana de los datos en el diagrama de caja siguiente:



R/ 7 kg

Ejemplo:

Seis miembros de un equipo de golf tuvieron las siguientes puntuaciones en su torneo más reciente: 70; 72; 74; 76; 80; 114.

- Calcule la media de las puntuaciones.

R/ 81. Representa la calificación “promedio". Si cada jugador hubiera obtenido los mismos puntos, cada uno de ellos habría obtenido los puntos del valor de la media.

- Calcule la mediana de las puntuaciones.

R/ 75. En este caso es el punto medio en el conjunto de resultados.

- ¿Cuál medida describe mejor las puntuaciones del equipo?

R/ La mediana describe mejor las puntuaciones del equipo, porque la media es más alta que casi todas las puntuaciones del conjunto de datos.

La “mejor" medida debe ser representativa de una puntuación “típica" de este conjunto de datos. ¿La mayoría de los golfistas del equipo obtuvo una puntuación cercana a la media o a la mediana? El jugador que anotó 114 está fuera de lo normal, porque su puntuación fue mucho más alta que la del resto del equipo. Al existir una puntuación que difiere por mucho del resto, la mediana es la mejor medida para describir los resultados. La media de 81 es mayor que todas las puntuaciones excepto una, por lo que no representa muy bien a esos datos.

Ejemplo:

Las calificaciones de los alumnos en un examen han sido:

70; 40; 40; 30; 70; 100; 10; 0; 20; 70; 70; 80; 50:

- Calcule la media, la moda y la mediana.
- Si usted fuese un líder estudiantil, ¿qué medida de centralidad escogería para argumentar la buena calidad del grupo?
- Si usted fuese el profesor, ¿qué medida de centralidad escogería para argumentar el mal desempeño del grupo?

R/ Media= 50. Moda= 70. Mediana= 50.

- Si fuese líder estudiantil escogería la moda; si fuese y el profesor, la media o la mediana.

4. Asimetría: es la medida que indica la simetría de la distribución de una variable respecto a la media aritmética. Existen tres tipos de curva de distribución según su asimetría:

a) Asimetría negativa: la cola de la distribución se alarga para valores inferiores a la media. Los valores se tienden a reunir más en la parte derecha de la media.

b) Simétrica: hay el mismo número de elementos a izquierda y derecha de la media. En este caso, coinciden la media, la mediana y la moda. La distribución se adapta a la forma de la campana de Gauss, o distribución normal.

c) Asimetría positiva: la cola de la distribución se alarga para valores superiores a la media. Los valores se tienden a reunir más en la parte izquierda de la media.

5. Media aritmética ponderada: es una medida de tendencia central, que es apropiada cuando en un conjunto de datos cada uno de ellos tiene una importancia relativa diferente. Se obtiene multiplicando cada uno de los datos por su ponderación (peso) para luego sumarlos, obteniendo así una suma ponderada; después se divide esta entre la suma de los pesos, dando como resultado la media ponderada.

Ejemplo:

La nota final de un curso escolar se calcula asignando distinta importancia (peso) a cada uno de los exámenes que se realicen. Los dos primeros exámenes tienen un peso o valor de 30% y 20% respectivamente, y el último del 50%. Las calificaciones respectivas obtenidas por un estudiante son de 64, 92 y 61, ¿cuál es su nota final del curso?

Datos: {61, 64, 92}

Pesos: {0,3; 0,2; 0,5}

Media aritmética ponderada: $\bar{x} = \frac{64 \cdot 0{,}3 + 92 \cdot 0{,}2 + 61 \cdot 0{,}5}{0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}5} = 68{,}1$

Observe que la media aritmética es de $72{,}33$.

6. Media aritmética para datos agrupados: se calcula sumando todos los productos de marca de clase con la frecuencia absoluta respectiva y su resultado dividirlo por el número total de datos. La marca de clase de una tabla para datos agrupados en intervalos corresponde al promedio de los extremos de cada intervalo.

Ejemplo:

En la siguiente tabla se muestran las edades de un grupo de personas:

Edad	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
$[0 - 10[$	5	3	3
$[10 - 20[$	15	6	9
$[20 - 30[$	25	7	16
$[30 - 40[$	35	12	28
$[40 - 50[$	45	3	31

De esta manera:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3 + 15 \cdot 6 + 25 \cdot 7 + 35 \cdot 12 + 45 \cdot 3}{31} = 26{,}94$$

7. Residuo: diferencia entre el valor de una variable en un momento y el valor medio de toda la variable.

8. Varianza: es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. Se calcula como el cociente de la suma de los cuadrados de los residuos dividido por el total de observaciones. También se puede calcular como la desviación típica al cuadrado. La unidad de medida de la varianza será siempre la unidad de medida correspondiente a los datos, pero elevada al cuadrado. La varianza siempre es mayor o igual que cero.

9. Desviación estándar: es la medida de dispersión más común, que indica qué tan dispersos están los datos con respecto a la media. Es la raíz cuadrada de la varianza. Es un promedio de las distancias de los datos a la media.

$$Desviación\ estándar = \sqrt{\frac{\sum|x-\bar{x}|^2}{n}}$$

Esta fórmula es válida solo si los valores con los que se trabaja forman la población completa. Si los valores, en cambio, fueran una muestra aleatoria extraída de una gran población entonces el resultado se obtendría dividiendo por $n-1$ en lugar de n en el denominador. En ese caso, el resultado de la fórmula original se denominaría la desviación estándar de la muestra. Dividir por $n-1$ en lugar de n da una estimación imparcial de la varianza de una población más grande.

Ejemplo:

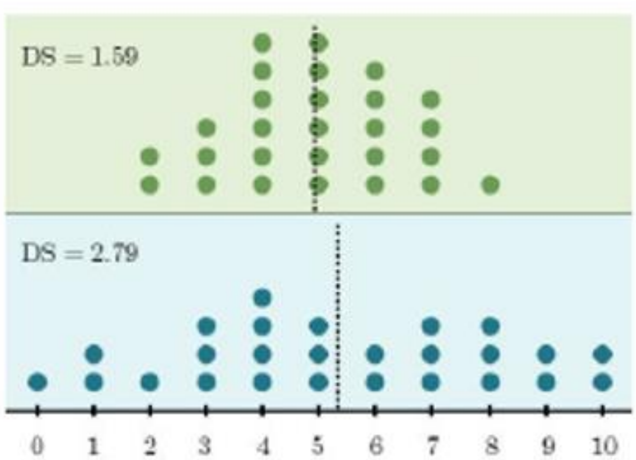
Unos niños acaban de terminar de pedir dulces. La lista de la cantidad de dulces recogidos por cada niño es la siguiente: 31; 33; 36; 41; 34

- Calcule la desviación estándar del conjunto de datos.

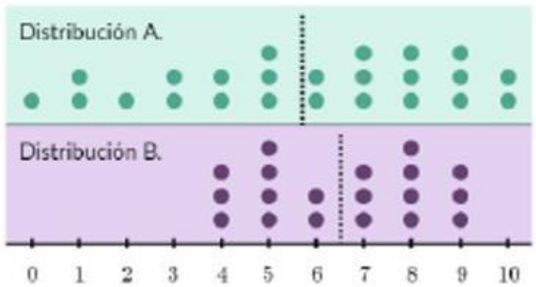
R/ 3,41 dulces.

Ejemplo:

La distribución azul en la parte de abajo tiene una desviación estándar mayor que la distribución verde de arriba:



Es interesante que la desviación estándar no puede ser negativa. Una desviación estándar cercana a 0 indica que los datos tienden a estar más cerca de la media (se muestra por la línea punteada). Entre más lejos estén los datos de la media, más grande es a desviación estándar.



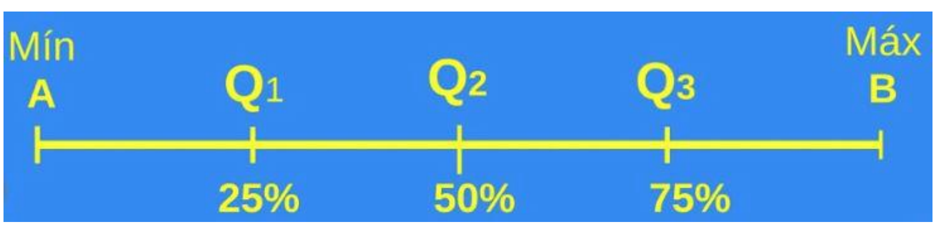
La distribución A tiene la mayor desviación estándar porque está más extendidas. En otras palabras, los puntos están más alejados de la media.

10. Mínimo: es el menor valor en un conjunto de datos.

11. Máximo: es el mayor valor en un conjunto de datos.

12. Recorrido o rango: es la diferencia entre el valor más alto y el más bajo de un conjunto de datos. Es la medida de dispersión o variabilidad más simple.

13. Cuartiles: son los tres valores que dividen un conjunto de datos ordenados en cuatro partes porcentualmente iguales Q_1, Q_2, Q_3, determinan los valores correspondientes al 25 %, al 50% y al 75% de los datos.



Dada una serie de datos ordenados en forma creciente, su cálculo podría efectuarse:

Q_1 como la mediana de la primera mitad de valores;

Q_2 como la propia mediana;

Q_3 como la mediana de la segunda mitad de valores.

Por ejemplo, para los siguientes datos ordenados $4, 5, 7, 8, 8, 9$ se tiene:

$$Q_1 = 5$$

$$Q_2 = 7{,}5$$

$$Q_3 = 8$$

Ejemplo:

En la siguiente tabla se muestra el resumen de cinco números de la cantidad de miembros en cada gimnasio de Cartago.

Mínimo	Q_1	Mediana	Q_3	Máximo
50	56	64	70	76

Aproximadamente, ¿qué porcentaje de los gimnasios de Cartago tiene 56 miembros o menos? R/ 25%

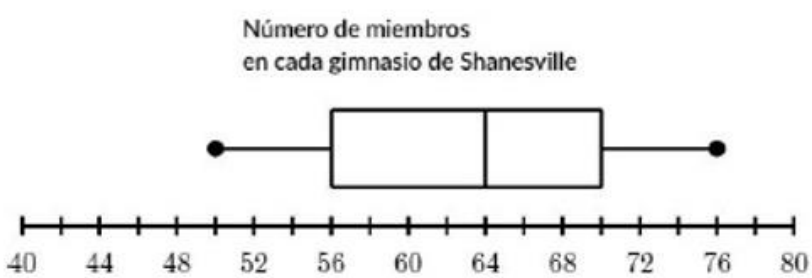
Ejemplo:

En la siguiente tabla se muestra el resumen de cinco números del número de integrantes de la banda por cada escuela en el cantón de Turrialba.

Mínimo	Q_1	Mediana	Q_3	Máximo
80	90	105	115	130

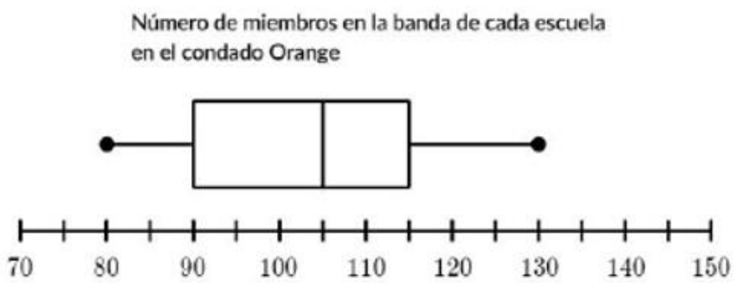
¿Qué porcentaje de las escuelas en el cantón de Turrialba tienen más de 130 miembros en su banda? R/ 0%

Ejemplo:



El diagrama de caja sugiere que alrededor de 25% de los gimnasios en Shanesville tienen más de cierto número de miembros, ¿cuál es este número? R/ 70

Ejemplo:



El diagrama de caja sugiere que alrededor del 50% de las escuelas en el condado Orange tienen más de cierto número de miembros en la banda, ¿cuál es ese número? R/ 105

14. Recorrido o rango intercuartílico: es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero. Se representa gráficamente como la anchura de las cajas en los diagramas de caja. Mide la variabilidad de la mitad central de los datos.

Ejemplo: Carlos registró las temperaturas diarias en grados Celsius, de dos ciudades diferentes de EEUU (Kansas y Paradise) en una semana. Abajo se muestran las temperaturas para cada ciudad:

Kansas:

23; 25; 28; 28; 32; 33; 35

Paradise:

16; 24; 26; 26; 26; 27; 28

- Calcule el rango y el rango intercuartílico.

El rango se calcula restando la temperatura más baja de la temperatura más alta. Esto da la dispersión entre el punto mínimo y el máximo del conjunto de datos. El rango representa qué tan alejadas estaban las mediciones de la temperatura más baja y la de la más alta en esa semana.

Rango ciudad Kansas = 12

Rango ciudad Paradise = 12

Cada ciudad tiene un rango de 12. Por lo que, de acuerdo con los rangos, las temperaturas en cada ciudad variaron lo mismo.

Rango intercuartílico

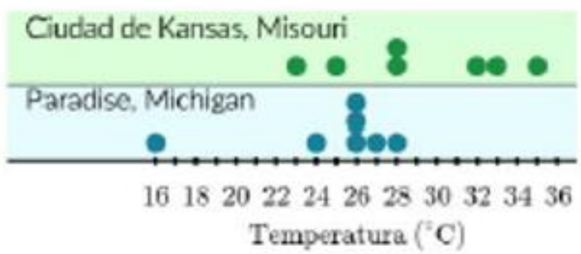
El RIQ se calcula al restarle Q_1 a Q_3. Alrededor del 50% de los datos están entre Q_1 y Q_3. El RIQ representa la cantidad de dispersión en la mitad central de los datos de esa semana.

RIQ ciudad 1: 8

RIQ ciudad 2: 3

De acuerdo con los RIQ, las temperaturas variaron más en la Ciudad 1.

Al ver la gráfica de puntos, ¿de cuál ciudad parecen variar más las temperaturas día a día?



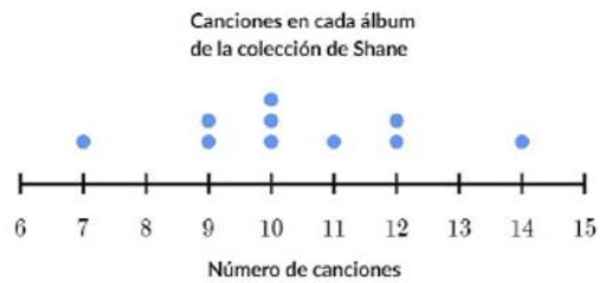
Los puntos están más dispersos entre sí en los datos de la Ciudad de Kansas, mientras que los de Paradise están más juntos. La temperatura varía más cuando los puntos están más separados. Las temperaturas en la Ciudad de Kansas, Missouri, parecen variar más día a día, porque los puntos individuales están más dispersos entre sí.

El valor atípico bajo en las temperaturas de Paradise tiene un gran impacto en el rango de ese conjunto de datos, mientras que el RIQ no se ve afectado por el valor atípico. Si ignoramos el valor atípico bajo en los datos de Paradise, el rango en las temperaturas es de solo 4 grados en lugar de 12.

El RIQ fue mayor en los datos de la Ciudad de Kansas, lo que refleja que las temperaturas generalmente parecen variar más de un día a otro en esta ciudad que en Paradise.

Ejemplo:

Encuentre el rango intercuartílico RIQ de los datos en la siguiente gráfica de puntos:



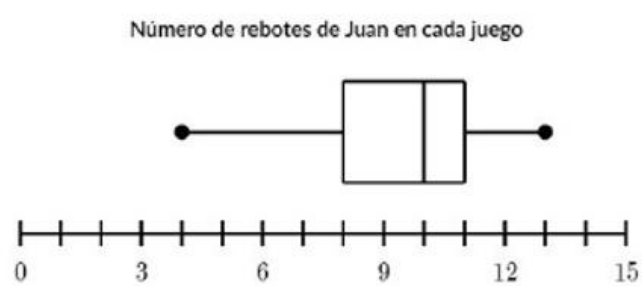
Para encontrar los cuartiles, primero encontraremos la mediana ordenando los datos de menor a mayor. La mediana es la media de los dos números centrales.

El primer cuartil Q_1 es la media de los datos a la izquierda de la mediana. El tercer cuartil Q_3 es la mediana de los datos a la derecha de la mediana.

$$RIQ = Q_3 - Q_1 = 12 - 9 = 3 \text{ canciones}$$

Ejemplo:

Observe el diagrama de caja siguiente:



- Encuentre el rango de los datos. R/ 9 rebotes
- Encuentre el rango intercuartílico. R/ 3 rebotes

Medidas relativas

1. Estandarización o normalización: proceso de ajuste de datos procedentes de diferentes muestras o poblaciones a una escala común para poderlos comparar. Centrar y reducir las variables (normalizar) permite comparaciones independientes de la unidad de medida.

- Centrar una variable consiste en restar su media a cada uno de sus valores iniciales.
- Reducir una variable consiste en dividir todos sus valores por su desviación típica.

De esta manera, una variable centrada y reducida tiene media cero y desviación típica igual a uno. Así obtenemos datos independientes de la unidad, o de la escala escogida y variables que tienen misma dispersión y misma media.

$$\text{dato estandarizado} = \frac{\text{dato} - \text{promedio}}{\text{desviación estándar}}$$

Ejemplo:

Pedro es un estudiante que está por ingresar a la universidad y realiza el examen de admisión en dos universidades. En el examen correspondiente a la universidad A obtuvo un 683 en una escala de 0 a 800; mientras que en el examen correspondiente a la universidad B obtuvo un 413 en una escala de 0 a 500. La calificación promedio y la desviación estándar de las calificaciones de todos los estudiantes que realizaron la prueba fueron:

Examen	Nota promedio	Desviación estándar
Universidad A	578	110
Universidad B	394	78

Pedro decide realizar trámites de admisión solamente en aquella universidad en la que obtuvo un mejor resultado en relación con todos los estudiantes que presentaron las pruebas, pero no sabe cómo puede realizar la comparación y efectuar la escogencia apropiada. Ayude a Pedro a resolver este problema.

R/

Universidad	Nota de Pedro	Nota estandarizada
A	683	$\frac{683-578}{110}=0{,}95$
B	394	$\frac{413-394}{78}=0{,}24$

Por lo que Pedro debe escoger la Universidad A.

2. Variabilidad relativa: grado de variación que hay en un conjunto de puntuaciones. Cuanto menor es la variabilidad, más homogénea es la muestra de sujetos en la variable.

Se calcula mediante la fórmula:

$$Coef.\, de\ variación = \frac{desviación\ estándar}{promedio} \cdot 100$$

3. Coeficiente de variación: medida de la dispersión relativa de un conjunto de datos, que se obtiene dividiendo la desviación estándar del conjunto entre su media aritmética y se expresa generalmente en términos porcentuales. El coeficiente de variación es una medida independiente de las unidades de medición, por lo cual es la cantidad más adecuada para comparar la variabilidad de dos conjuntos de datos.

Ejemplo:

En tres plantas industriales que pertenecen a una misma compañía, se producen ciertos componentes electrónicos. La producción mensual de cada una de ellas se resume en el siguiente cuadro:

	Planta A	**Planta B**	**Planta C**
Promedio mensual	140 500	83 200	254 300
Desviación estándar	45 325	33 456	63 350

El gerente de la compañía está realizando un análisis de la producción de las plantas, y desea establecer una estrategia que optimice la producción y que reduzca la variabilidad. Para iniciar el trabajo desea comparar la variabilidad en la producción de las plantas para determinar en cuál de ellas se genera la mayor dispersión, pero enfrenta el problema de que las desviaciones estándar no son comparables debido a que las producciones promedio son muy diferentes entre las plantas. Utilice sus conocimientos estadísticos para apoyar al gerente a resolver el problema.

R/ Se tiene que las medidas estadísticas absolutas no son comparables. Entonces se requiere encontrar una relación estadística que permita comparar en forma relativa la variabilidad de los datos. Si se utiliza la fórmula del coeficiente de variación para las tres plantas se tiene que:

	Planta A	Planta B	Planta C
Promedio mensual	140 500	83 200	254 300
Desviación estándar	45 325	33 456	63 350
Coeficiente de variación	$\frac{45\,325}{140\,500} \cdot 100 = 32{,}23$	$\frac{33\,456}{83\,200} \cdot 100 = 40{,}2$	$\frac{63\,350}{254\,300} \cdot 100 = 25{,}7$

De los cálculos anteriores puede notarse que en la Planta B se presenta la mayor variabilidad relativa y en la Planta C la menor.

Problemas elaborados por los docentes

Sétimo año

Problema 1: Estaturas y pesos

Prof. Paulina Coto Mata

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.

Situación problema

Los profesores de Educación Física de la Unidad Pedagógica San Diego desean conocer las medidas del peso y estatura de algunos estudiantes de sétimo año. Los profesores obtuvieron los siguientes resultados:

Estudiante	Peso (Kg)	Estatura (cm)	Edad (años)
1	37	138	12
2	42	155	13
3	46	152	13
4	45	148	13
5	46	152	14
6	47	151	13
7	48	143	13
8	49	145	12
9	52	145	12
10	51	163	13
11	43	152	12
12	44	158	15
13	41	140	13
14	43	138	14
15	37	149	15

Con base en la información anterior responda las siguientes preguntas:

1. Determine la media y la moda del peso, la estatura y la edad de los estudiantes.
2. ¿Considera usted que el promedio es la medida de tendencia adecuada para analizar el peso y la estatura en ambos casos?
3. ¿Considera que existe una relación entre el peso y las estaturas de los jóvenes de sétimo año?
4. Para usted, sería importante conocer la edad de los jóvenes. ¿Por qué?

Respuestas esperadas

1)

	Media	Moda
Peso	44,73	37
Estatura	148,60	152
Edad	13,13	13

2) Sí, no hay mucha variación.
3) Sí, a mayor altura mayor peso.
4) Sí, para determinar valores atípicos.

Problema 2: Investigo para formar mi empresa virtual

Prof. María Delfia Sigüenza Quintanilla

Conocimientos:

- Recolección de información.
- Frecuencias
- Representaciones
- Medidas de posición

Habilidades a desarrollar:

- Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
- Utilizar representaciones tabulares para resumir un conjunto de datos.
- Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.

Situación problema

Kattia es una estudiante de 9° año que ama la tecnología, y además está en una sección que participa del proyecto Labor@ institucional. En dicho proyecto, ella debe formar su propia empresa virtual, por lo que ha decidido hacer una encuesta institucional para determinar cuántos de los estudiantes del Liceo cuentan con un celular inteligente (smartphone) y así, analizar qué tan rentable es formar un negocio de venta de accesorios para celulares inteligentes y soporte técnico para los mismos. ¿Puedes ayudar a Kattia a hacer la investigación?

Actividad 1

1. Los estudiantes deben formar 5 grupos de 4 o 5 personas.
2. El docente entrega una hoja a cada grupo en la cual aparece una cuadrícula sin los datos numéricos.
3. Las aulas del colegio se dividen equitativamente y a cada grupo un bloque de aulas en las cuales deben hacer trabajo de campo e investigar cuántos estudiantes en cada grupo poseen un teléfono inteligente.
4. Al retornar al aula un representante de cada grupo debe compartir los datos con el resto de los compañeros.

La encuesta que se realizará es la siguiente:

Esta es una encuesta para determinar la popularidad el uso del celular inteligente en el cole. Por favor responde las siguientes preguntas.

1. ¿Sabes qué es un celular inteligente? ____
2. ¿tienes un celular? ____
3. ¿Qué marca de celular tienes? ___________
4. ¿Tu celular tiene acceso a internet? _______
5. ¿Te gustaría tener un lugar cercano con accesorios y soporte técnico para tu celular?

Suponga que la lista de secciones con la cantidad de estudiantes de cada una de ellas es la siguiente: *(en cada colegio estas cantidades varían)*

Sección	Cantidad estudiantes por grupo	Cantidad estudiantes con teléfono inteligente	Sección	Cantidad estudiantes del grupo	Cantidad estudiantes con teléfono inteligente
7-1	20		9-1	28	
7-2	24		9-2	28	
7-3	23		9-3	29	
7-4	24		9-4	27	
7-5	21		9-5	29	
7-6	22		9-6	28	
7-7	25		10-1	30	
7-8	20		10-2	30	
7-9	23		10-3	29	
7-10	22		10-4	30	
8-1	25		10-5	21	
8-2	26		11-1	28	
8-3	24		11-2	25	
8-4	25		11-3	24	
8-5	26		11-4	23	
8-6	24		11-5	23	
8-7	25		11-6	29	
8-8	25				
8-9	25				
8-10	24				

Actividad 2

De acuerdo con los datos de la cuadrícula anterior (**suponiendo que esos sean los datos obtenidos**), responda las siguientes preguntas:

Preguntas generadoras:

1. ¿Sabe qué es un teléfono inteligente? Explica.
2. ¿Utiliza su smartphone para estudiar (en caso de tener uno)? Si su respuesta es afirmativa, indique de qué manera.
3. Haga una cuadrícula que contemple solamente la cantidad de datos de los estudiantes que poseen un teléfono inteligente (escríbalos en orden ascendente)
4. ¿Cuál es el dato menor de los recolectados?
5. ¿Cuál es el dato mayor de los recolectados?
6. ¿Cuál es el dato que más se repite?
7. Si tuviera que decir un número aproximado de cantidad de teléfonos inteligentes por grupo, ¿cuál sería?

Respuestas esperadas de la actividad 1

1. La solución del problema depende de los datos obtenidos por los estudiantes. (suponga que esos son los datos obtenidos)

Sección	Cantidad estudiantes del grupo	Cantidad estudiantes con teléfono inteligente	Sección	Cantidad estudiantes del grupo	Cantidad estudiantes con teléfono inteligente
7-1	20	**18**	9-1	28	**25**
7-2	24	**20**	9-2	28	**27**
7-3	23	**22**	9-3	29	**25**
7-4	24	**20**	9-4	27	**27**
7-5	21	**17**	9-5	29	**26**
7-6	22	**22**	9-6	28	**28**

7-7	25	**23**
7-8	20	**20**
7-9	23	**18**
7-10	22	**22**
8-1	25	**21**
8-2	26	**23**
8-3	24	**20**
8-4	25	**24**
8-5	26	**24**
8-6	24	**20**
8-7	25	**19**
8-8	25	**21**
8-9	25	**23**
8-10	24	**20**
10-1	30	**28**
10-2	30	**29**
10-3	29	**27**
10-4	30	**25**
10-5	21	**21**
11-1	28	**26**
11-2	25	**23**
11-3	24	**24**
11-4	23	**23**
11-5	23	**20**
11-6	29	**27**

Respuestas esperadas de la actividad 2

1. Es un celular inteligente. Con funciones más avanzadas que un celular tradicional. En la actualidad la mayoría de los celulares son inteligentes
2. Respuesta abierta (si – no)
3. **Suponiendo que estos sean los datos recolectados**

17	18	18	19	20	20	20	20	20	20
20	21	21	21	22	22	22	23	23	23
23	23	24	24	24	25	25		26	26
27	27	27	27	28	28	29			

4. 17
5. 29
6. 20
7. 23 (22,92)

Problema 3: Mortalidad fetal

Prof. Karla Vargas Quirós

Conocimientos:

- La estadística

Habilidades a desarrollar:

- Analizar información estadística que ha sido resumida y presentada en cuadros, gráficas u otras representaciones vinculadas con diversas áreas.

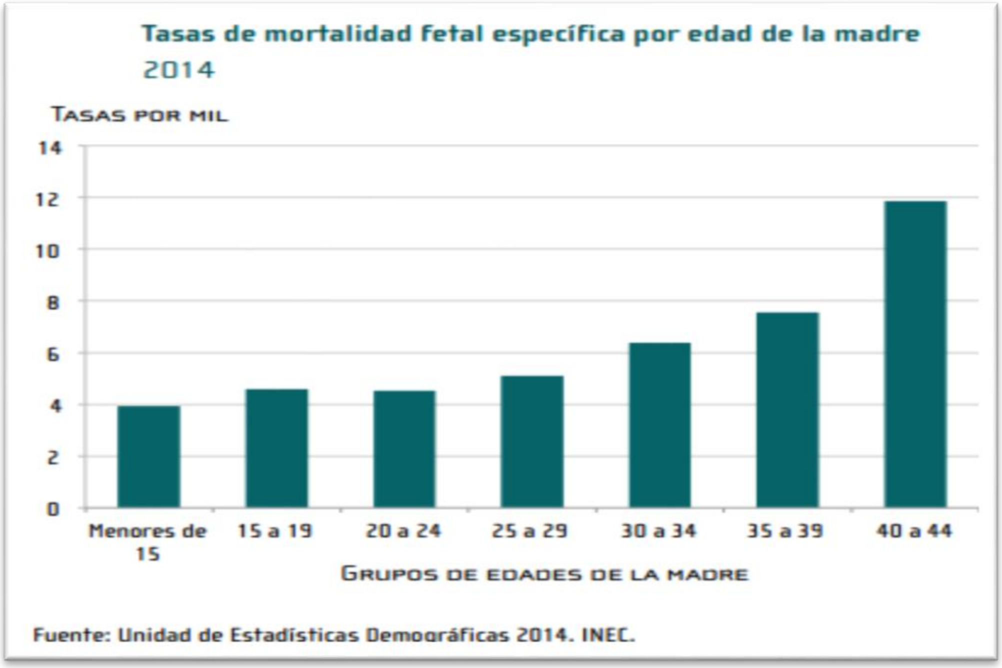
Dinámica para desarrollar

Se le presenta una guía de trabajo a los estudiantes de sétimo nivel, la cual consiste en un análisis de un gráfico. Los estudiantes de manera individual generan ideas para aportar posibles soluciones y el docente, mediante un diálogo interactivo, fungiendo como moderador, comienza a establecer una discusión con respecto a la propuesta planteada.

Es importante aclarar que se busca el trabajo estudiantil independiente, contrastación y comunicación de respuesta.

Actividad 1

1. El siguiente gráfico muestra las tasas de mortalidad fetal específica por edad de la madre.



Con base en el gráfico anterior, establezca comparaciones mediante las siguientes interrogantes:

a. Investigue qué es mortalidad fetal.
b. ¿La edad de la madre influye en los casos de mortalidad fetal? Sí o no, justifique su respuesta.
c. ¿Las mujeres entre 40 y 44 años muestran más casos de mortalidad fetal que las menores de 15? Justifique su respuesta.
d. Investigue las causas de la muerte fetal y brinde posibles explicaciones para las diferentes tasas de mortalidad fetal por rango de edad.

Respuestas esperadas

a) Respuesta abierta.
b) Sí, a mayor edad aumentan los casos.
c) Sí, se observan más casos en las mujeres entre 40 y 44 años.
d) Respuesta abierta.

Problema 4: Torneo Fútbol 5

Prof. Walter Garro Quirós

Conocimientos:

- Medidas de posición (moda, media, máximo, mínimo, recorrido)

Habilidades a desarrollar:

- Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.

Situación problema

Anualmente, en el Liceo Rural San Joaquín, ubicado en el Tuis de Turrialba, se realiza un torneo de fútbol interno en el que participaron 11 equipos. En la siguiente tabla se presentan algunos datos de los 6 equipos del grupo 1:

Equipo	Goles anotados	Goles recibidos	Tarjetas amarillas
Sétimo A	7	15	5
Décimo B	14	5	8
Décimos C	11	10	8
Noveno	8	13	6
Nimali	17	6	3
Profesores	6	14	10

De acuerdo con la información anterior, responda las siguientes preguntas:

1. ¿A cuál equipo le anotaron más goles?
2. ¿Cuál equipo anotó más goles?
3. ¿Cuál equipo ha recibido menos tarjetas amarillas?

4. ¿Cuál ha sido el número de tarjetas amarillas más frecuente?
5. ¿Cuál es la diferencia de goles anotados entre el equipo de Nimali y el equipo de profesores? ¿Puede haber una diferencia mayor entre otros dos equipos?
6. ¿Cuál es el promedio de goles anotados y de goles recibidos?

Respuestas esperadas

1. Sétimo A
2. Nimali
3. Nimali
4. 8
5. 11. No.
6. 10,5

Problema 5: Desperdicio de agua

Prof. Ana Elena Morales Granados

Conocimientos:

- Recolección y representación de datos.

Habilidades a desarrollar:

- Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
- Utilizar representaciones tabulares para resumir un conjunto de datos.

Dinámica para realizar

Se divide al grupo en tres subgrupos donde trabajarán de la siguiente manera:

Grupo 1: en una bitácora anotarán todo lo que encuentren durante el tiempo establecido por la docente con respecto a las fuentes de desperdicio de agua. Por ejemplo, buscarán en el centro educativo fugas de agua en las tuberías principales, tuberías que gotean, servicios sanitarios con el agua corriendo, fugas en tanques de recolección de agua o si hay rebasamiento. También investigarán si hay personas que hacen uso incorrecto del agua al lavarse los dientes, al lavar los platos, regar jardines, limpiar, etc.

Grupo 2: Organizar la información recolectada por el grupo 1.

Grupo 3: Representar gráficamente la información ya organizada por el grupo 2.

Respuestas esperadas

El docente puede reflexionar junto con los estudiantes acerca de los problemas de desperdicio de agua que se presentan en el centro educativo y proponer soluciones. También se les puede pedir hacer una reflexión de las malas prácticas que se podrían estar presentando en las casas.

Problema 6: Investigando el arroz en bolsa

Prof. Javier Quirós Paniagua

Conocimientos:

- Población y muestra.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar los conceptos: unidad estadística, características o variables, observaciones o datos, población y muestra, para problemas estadísticos vinculados con diferentes contextos.

Materiales a utilizar:

- Una bolsa de arroz (cualquier marca) de 95% grano entero
- Lápiz y material facilitado por el docente.

Actividad 1

1. Hacer subgrupos de tres o cuatro estudiantes.
2. El profesor entrega una medida de arroz a cada uno de los subgrupos formados.

3. Una vez con la porción de arroz, se deben separar los granos de arroz entre los enteros y los quebrados, incluyendo entre estos últimos las granzas.
4. Una vez realizada la separación, contemos la cantidad de granos que hay en cada puño de arroz escogido, iniciando por el entero. (Cuando se va a realizar el conteo de los granos quebrados, se debe tener en cuenta que un grano entero se puede formar con dos pedacitos, o bien, si estos son muy pequeños, con tres).
5. Luego de haber contado la cantidad tanto de granos enteros como de los quebrados, coloque la información encontrada en la tabla adjunta.

	Cantidad de granos contados
Granos enteros	
Granos quebrados	
Total de granos de arroz	

Actividad 2

1. Calcular el respectivo porcentaje de granos enteros y colocarlo en la tabla adjunta

	Cantidad de granos contados	**Porcentaje**
Granos enteros		
Granos quebrados		
Total de granos de arroz		

NOTA: Recuerde que para calcular el porcentaje se puede realizar de la siguiente forma: (Solo para el docente)

La cantidad de granos enteros se multiplica por 100 y este resultado se debe dividir por el total de granos de arroz encontrado.

2. Comparar el resultado obtenido por cada grupo con el resto, para esto se puede preguntar a cada grupo y anotar el resultado de cada grupo en la pizarra. Se puede dibujar en la pizarra la siguiente tabla:

	Grupo Nº 1	**Grupo Nº 2**	**Grupo Nº 3**	**Grupo Nº 4**	**Grupo Nº 5**
Porcentajes					

3. Se le pregunta al grupo en general. ¿El porcentaje de grano entero es igual o similar al que indica la bolsa? Sí ____ No ____ (En este momento se les debe enseñar el empaque con el porcentaje de arroz entero a los estudiantes.)
4. ¿Se podría determinar que cuando nuestras familias compran el arroz están realmente comprando la calidad de arroz que indica el empaque?
5. Podríamos deducir, por lo tanto, a partir de los resultados encontrados el porcentaje de grano entero de la bolsa. Sí ____ o No ____ ¿Por qué?

Respuestas esperadas

De acuerdo con lo que se presente en cada aula.

Problema 7: Preferencia de talleres especializados

Prof. Betcelí Cordero Moya

Conocimientos:

- Población, muestra, variable y frecuencia absoluta.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar los conceptos: unidad estadística, características o variables, observaciones o datos, población y muestra, para problemas estadísticos vinculados con diferentes contextos.
- Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos.

En el C.A.O.T.O.S.O anualmente ser realiza una proyección acerca de los talleres de preferencia de los futuros estudiantes de sétimo año. Para ello se visitan algunas escuelas de la zona, específicamente las secciones de sexto grado y se les pregunta cuál sería su taller de preferencia.

Para los talleres del año 2020 se determinó que: 45 decidieron Cocina Internacional, 20 Inglés Conversacional, 18 Mantenimiento en Computadoras, 18 Turismo y 5 Contabilidad.

De la situación anteriormente descrita, elabore una tabla para mostrar los datos y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la unidad de estudio?
2. ¿Cuál es la información que se pregunta?
3. ¿Cuál es el conjunto de personas que interesa interrogar?
4. ¿Se está teniendo información de todo ese conjunto de personas? ¿Por qué?
5. ¿Cuántas personas prefieren cada taller?
6. ¿Cuál es el taller con mayor preferencia?
7. ¿Cuál es el taller con menor preferencia?
8. ¿Cuáles son los talleres con igual cantidad de preferencias?

Respuestas esperadas

1) Estudiantes de sexto grado de la zona.
2) Preferencia de talleres
3) Futuros estudiantes de sétimo año del CAOTOSO.
4) No, es una muestra ya que solo se visitan algunas escuelas de la zona.
5) 45 Cocina Internacional, 20 Inglés Conversacional, 18 Mantenimiento en Computadoras, 18 Turismo y 5 Contabilidad.
6) Cocina internacional
7) Contabilidad
8) Mantenimiento en computadoras y turismo.

Problema 8: Caminando por primera vez

Prof. Rody Arrieta Solano

Conocimientos:

- Medidas de posición (moda, media, máximo y mínimo).

Habilidades a desarrollar:

- Determinar medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido, para caracterizar un grupo de datos.

Un pediatra en Turrialba registró en su bitácora la edad (en meses) en que caminaron por primera vez los niños que fueron atendidos en su consultorio durante el mes de marzo. Los datos fueron:

9, 10, 12, 12, 13, 11, 11, 12, 10, 13, 12, 11, 12.

De acuerdo con los datos anteriores responda las siguientes preguntas relacionadas a la primera vez que caminaron esos niños:

1. ¿Cuál fue la edad más temprana?
2. ¿Cuál fue la edad más tardía?
3. ¿Cuál fue la edad más común?
4. ¿Cuál fue la edad en promedio?
5. Ordene los datos de menor a mayor, ¿cuál es el dato central?
6. ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y la menor edad?

Respuestas esperadas

1) 9 meses
2) 13 meses
3) 12 meses
4) 11,38 meses
5) 12
6) 4

Problema 9: Conociendo a los compañeros (parte 1)

Estudiante MATEC José Carballo Martínez

Conocimientos:

- Variables estadísticas y representación tabular

Habilidades a desarrollar:

- Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
- Utilizar representaciones tabulares para resumir un conjunto de datos.

Dinámica para desarrollar

El profesor propone a un grupo de estudiantes de sétimo año que realicen una encuesta a sus compañeros de sección sobre temas variados. Las preguntas que formularon fueron las siguientes:

1. ¿Cuál es su color de carro favorito?
2. ¿Cuál es la profesión que le gustaría ejercer?
3. ¿Cuántos amigos tiene en Facebook?
4. ¿Cuánto mide de estatura?
5. ¿Cuál es su comida favorita?
6. ¿Cuál marca de celular tiene?
7. ¿Cuántos hermanos tiene?

Una vez terminada la encuesta, el profesor les dice a los estudiantes que organicen las respuestas en un cuadro como el siguiente:

Preguntas	Respuestas no numéricas	Respuestas numéricas
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

Respuestas esperadas

Suponga que estas son las respuestas que brinda el grupo:

1.	Azul	
2.	Profesor de matemáticas	
3.		0
4.		1,85
5.	Arroz cantonés	
6.	Huawei	
7.		5

El profesor les hace notar que ellos distinguieron entre lo que es una variable cualitativa y una variable cuantitativa, y les dice que estas son variables estadísticas. Posteriormente, les da la definición formal de cada una con algunos ejemplos concretos de dicho tema.

Problema 9: Conociendo a los compañeros (parte 2)

Prof. Rubén Álvarez Obando

Conocimientos:

- Variables estadísticas.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar el tipo de dato cuantitativo o cualitativo correspondiente a una característica o variable.

Preguntas	Respuestas no numéricas	Respuestas sin decimales	Respuestas con decimales
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Cada fila del cuadro representa una fila de pupitres del aula. A cada fila de alumnos se le hará una pregunta diferente y cada alumno de esa fila deberá poner la respuesta en la columna donde él crea (sin saber la diferencia entre variable cualitativa, cuantitativa ordinal y cuantitativa discreta) que debe ir.

Asumiendo un máximo de 6 filas se plantean las siguientes preguntas:

1) ¿Cuál es su color preferido?

2) ¿Cuántos hermanos y hermanas tienen?

3) ¿Cuánto miden (altura)? Si no sabe exactamente, dé un número aproximado.

4) ¿Cuál es el día que le gusta más para ir al cine?

5) ¿Tiempo aproximado que dura su película preferida o alguna que le guste mucho? En esta pregunta se les aclara que las películas nunca duran una o dos horas exactas.

6) ¿Cuántos cuartos hay en su casa?

7) ¿Cuál es su materia preferida?

Una vez llenado el cuadro en la pizarra, se les hace ver a los estudiantes que ellos saben distinguir entre cualidades, números discretos y números continuos, es que estos son variables estadísticas: variables cualitativas, variables continuas discretas y variables cuantitativas continuas, se les da la definición de cada una para que vean que ellos pueden distinguirlas.

Respuestas esperadas

Por ejemplo, en una fila se tuvieron las siguientes respuestas:

Preguntas	Respuestas no numéricas	Respuestas sin decimales	Respuestas con decimales
1.	Azul, negro sábado, domingo, ciencias, música.	3, 1 2, 4	1,57 m 1,60 m 1,5 horas 3 horas

Octavo año

Problema 1: Estaturas y pesos

Prof. Paulina Coto Mata

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas.
- Utilizar un software especializado o una hoja de cálculo para favorecer la construcción de cuadros y gráficos.
- Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.

Situación problema

Los docentes de la Unidad Pedagógica San Diego desean conocer la estatura de sus estudiantes de octavo, y obtienen los siguientes resultados.

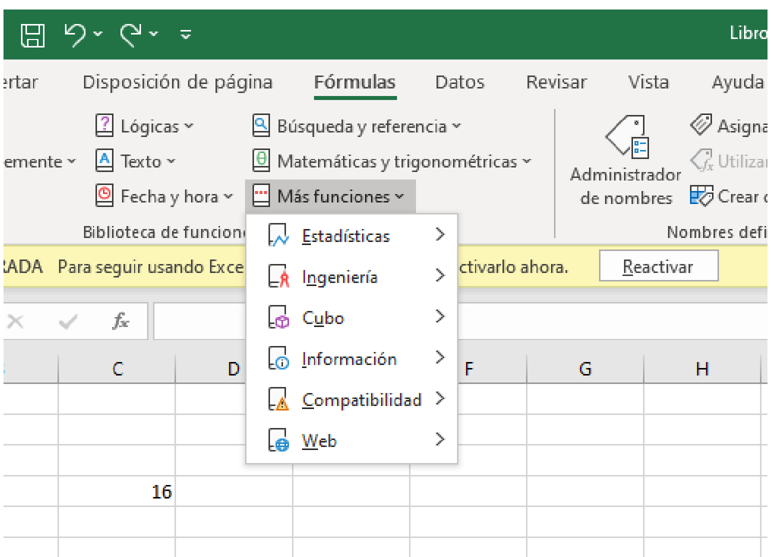
Estatura (cm)	Frecuencia
160	16
162	35
164	14
170	19
171	15
172	11

Determine la estatura promedio, la moda, la estatura mínima y máxima y por último grafique los datos.

Dinámica para desarrollar

La tecnología es una herramienta que nos permite resolver fácilmente los ejercicios por lo tanto utilizaremos el software Excel, el cual es accesible para la mayoría de las personas.

1. Abra una hoja en blanco de Excel. Guárdela con el nombre de Proy. Estadística.
2. Digite la tabla anterior tal y como está en el documento. En la columna A digite las estaturas (empezando por A1) y en la columna B digitaremos las frecuencias (empezaremos por B1).
3. En la sección de funciones, buscaremos las funciones PROMEDIO, MOD, MIN, MAX, para obtener el promedio, moda, mínimo y máximo. Se pueden guiar con la siguiente imagen. (explorar cómo calcular el promedio y la moda), aunque la moda es muy fácil de determinar solo observando cuál es la estatura que más se repite.
4. Para obtener el mínimo y máximo marcamos la columna A y damos clic a las funciones MIN, MAX.



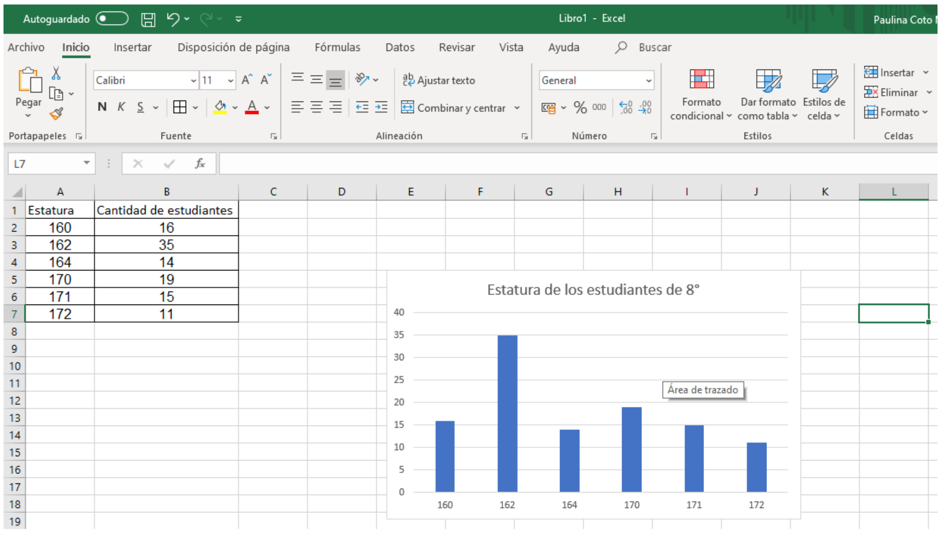
.

5. Para graficar, marcamos las columnas A y B, seguidamente agregamos un gráfico de barras, en el mismo, podemos indicar el título de dicho gráfico.

Respuestas esperadas

En Excel deben explorar y comparar resultados.

El gráfico se muestra a continuación.



Problema 2: Estaturas y pesos

Prof. Adriana González Dobrosky

Conocimientos:

- Recolección de información.
- Representaciones gráficas.

Habilidades a desarrollar:

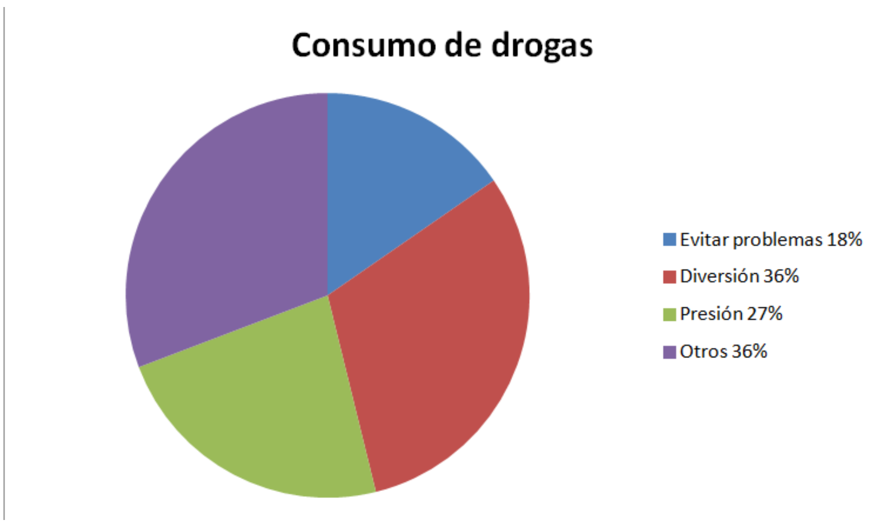
- Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación.
- Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas.

Dinámica para desarrollar

1. En parejas, hacer un pequeño cuestionario en Google Drive, máximo de 5 preguntas, donde averigüen los factores que conllevan al consumo de drogas en los adolescentes.
2. En los recesos, aplicar la encuesta a un mínimo de 10 personas de su colegio.
3. Generar los gráficos respectivos, escoja uno de ellos y haga un comentario o conclusiones sobre las respuestas obtenidas.
4. Presente al grupo el gráfico escogido, la pregunta que lo generó y comparta su comentario o conclusión con todos.

Respuestas esperadas

Por ejemplo, el siguiente gráfico es el resultado a la interrogante:



¿Cuál cree usted, es la principal causa que lleva a los jóvenes, hoy en día a consumir drogas?

a. Evitar problemas con sus compañeros
b. Diversión
c. Presión de grupo
d. Otras (familiares, depresión)

Dentro de los comentarios o conclusiones se esperaría que hagan referencia a la baja autoestima que puede tener un joven que se deja llevar en el consumo de drogas solo por ser aceptado entre sus pares.

Problema 3: Deportes favoritos

Prof. Adriana González Dobrosky

Conocimientos:

- Representaciones tabulares.
- Medidas de posición.

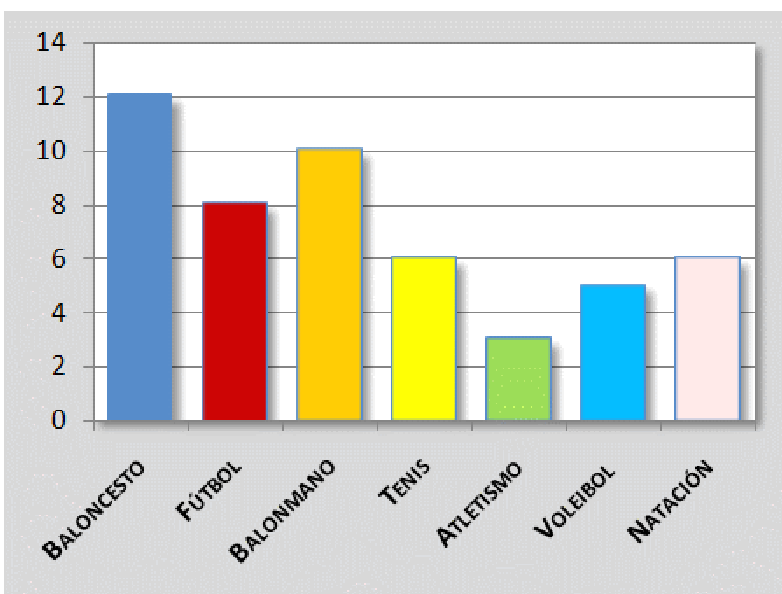
Habilidades a desarrollar:

- Utilizar representaciones tabulares con frecuencias absolutas o porcentuales simples.
- Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.

Dinámica para desarrollar

Observe la tabla y el gráfico de barras adjunto, con base en los datos presentados sobre una encuesta a estudiantes de un grupo de octavo grado, conteste las interrogantes o complete lo solicitado.

Deporte preferido	Frecuencia absoluta
Baloncesto	12
Fútbol	8
Balonmano	10
Tenis	6
Atletismo	3
Voleibol	5
Natación	6
TOTAL	50



Complete la tabla adjunta, con las frecuencias porcentuales correctas.

Deporte favorito	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia porcentual**
Baloncesto	12	
Fútbol	8	
Balonmano	10	
Tenis	6	
Atletismo	3	
Voleibol	5	
Natación	6	
TOTALES	*50*	*100*

Responda además lo que se le solicita.

1. Mencione el tipo de variable mostrado en el estudio actual.
2. Escriba el deporte menos seleccionado por los estudiantes.
3. Escriba el deporte con el máximo de preferencias.
4. Anote los deportes con igual número de preferencias.

Respuestas esperadas

1) Cualitativo
2) Atletismo
3) Baloncesto
4) Natación y tenis

Problema 4: Asistencia al acto cívico

Prof. Guisella Trejos Ramírez

Conocimientos:

- Recolección de información.
- Representación tabular y gráfica

Habilidades a desarrollar:

- Recolectar datos del entorno por medio de experimentación o interrogación
- Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas.

Situación problema

La profesora de Cívica solicitó a sus estudiantes de décimo año que investigaran sobre la cantidad de estudiantes de décimo año, por sección, que asistieron al acto cívico del día 12 de octubre.

Con la información recolectada, determine:

1. Cantidad de asistencia por sección (elabore una tabla).
2. Porcentaje de asistencia por sección (elabore una tabla).
3. Sección con mayor participación y sección con menos participación (calcular porcentajes).

Respuestas esperadas

Por ejemplo, los datos pueden recolectarlos a través de los profesores guías de cada sección de décimo año y obtener algo similar a lo que se muestra.

Asistencia por sección al acto cívico del 12 de octubre

Sección	Total de estudiantes	Total de asistentes al acto cívico
10-1	26	8
10-2	24	15
10-3	23	9
10-4	24	8
10-5	25	13
10-6	24	9
10-7	23	13
10-8	25	11
10-9	27	8
10-10	24	14
Total	245	108

2. Porcentaje de asistencia, por grupo al acto cívico del 12 de octubre

Sección	Asistencia	Porcentaje de asistencia
10-1	8	30.7
10-2	15	62.5
10-3	9	39.1
10-4	8	33.3
10-5	13	52
10-6	9	37.5
10-7	13	56.5
10-8	11	44
10-9	8	29,6
10-10	14	58,3
Total	108	44,1

La sección 10-2 tuvo mayor participación con un 62,5% y la sección 10-9 tuvo menor participación con 29,6%.

Problema 5: Canasta básica alimentaria

Prof. Tatiana Quirós Quirós

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Calcular la media aritmética en diferentes situaciones.

Situación problema

Conteste las preguntas basándose en los datos proporcionados en la siguiente tabla:

COSTO PER CÁPITA MENSUAL DE LA CANASTA BÁSICA ALIMENTARIA (CBA) 2011

Por: zona

Según: subgrupo

En colones

Setiembre 2019

Subgrupo		**Costo anterior**			**Costo actual**	
		Urbana	**Rural**		**Urbana**	**Rural**
CBA		**51 494**	**42 900**		**51 086**	**42 554**
Lácteos		5901	5330		5912	5340
Carne de res		4582	3369		4583	3370
Carne de cerdo		1960	-		1948	-
Carne de pollo		2665	2192		2692	2214
Embutidos		2299	1842		2310	1851
Pescado		3404	3139		3485	3214
Leguminosas		1278	1447		1278	1447
Hortalizas		4619	4686		4252	4314

Frutas		1613	1135		1642	1155
Tubérculos y raíces		2981	1812		2713	1648
Pan y galletas		4800	2823		4829	2840
Cereales y otros		4509	4542		4513	4546
Azúcar		2233	2690		2242	2701
Huevo		2076	1288		2109	1309
Grasas		2578	2048		2586	2054
Otros alimentos		1610	1658		1620	1668
Bebidas no alcohólicas		2386	2898		2374	2884

Nota 1: el cálculo de la CBA 2011 inició en enero de 2011, para ello se utilizó como fuente de información la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2004.

Nota 2: el costo diario se obtiene dividiendo el costo mensual entre 30.

Fuente: INEC, Unidad de Índices de Precios, 2019.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el promedio de los precios de la canasta básica actual en la zona rural?

2. ¿Cuál es la diferencia entre el promedio de precios de la canasta básica actual y la anterior, en el área urbana?

3. ¿Cuál de los productos de la canasta básica ha sufrido mayor incremento con respecto a los precios anterior?

4. Calcule el precio promedio actual de los siguientes alimentos: Lácteos, Carne de res, Pescado, Hortalizas, Frutas, Pan y galletas y Azúcar

5. ¿Por qué cree que los precios en el área rural son diferentes del área urbana?

6. Investigue que significa ¨Costo per cápita mensual¨.

Respuestas esperadas

1. 2659,68 colones

2. La diferencia es de 23,8 colones, siendo el precio más caro el del anterior.

3. Pescado

4.

Lácteos ₡5626 Carne de res ₡3976,5 Pescado ₡3349,5

Hortalizas ₡4283 Frutas ₡1398,5 Pan y galletas ₡3832,5 Azúcar₡ 2471,5

5. Respuesta Libre

6. Respuesta Libre

Problema 6: Consumo de frutas para el deporte

Prof. Ana Yansi Bonilla Arias

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.

Situación problema

El entrenador solicita a los estudiantes que consuman muchas frutas durante la semana anterior a la fecha de participación en un torneo y que anoten en una hoja la cantidad de porciones que consumen de cada fruta.

El día del evento el entrenador solicita a 8 de sus estudiantes entregar las anotaciones realizadas y realiza la siguiente tabla.

	Manzanas	Papaya	Fresas	Uvas	Melón	Sandía	Bananos
Carlos	8	12	5	4	7	9	10
José	6	12	5	9	2	4	7
Juan	4	8	10	8	8	9	5
Oscar	10	11	4	0	7	5	8
María	4	7	9	9	2	7	6
Aidé	5	7	12	10	1	2	4
Sofía	8	8	7	6	7	3	9
Glenda	0	5	9	9	10	7	6

Tome en cuenta los datos presentados en la tabla para contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas porciones de frutas consumió cada estudiante, en total?
2. ¿Cuántas porciones de cada fruta, en total, fue consumida durante esa semana por los estudiantes?
3. ¿Cuál fue la fruta que menos se consumió?
4. ¿Cuál persona consumió más fruta?
5. ¿Cuál persona consumió menos fruta?
6. ¿Cuál fue la fruta con mayor consumo?
7. Si se suman todas las porciones de frutas consumidas por cada estudiante por separado y se divide entre la cantidad de porciones. ¿Cuál es el resultado? ¿Qué representa ese valor?

8. Si se suman todas las porciones de frutas consumidas por todos los estudiantes y se divide entre la cantidad de porciones. ¿Cuál es el resultado? ¿Qué representa ese valor?

Respuestas esperadas

1.

	Total
Carlos	55 porciones
José	45 porciones
Juan	52 porciones
Oscar	45 porciones
María	44 porciones
Aidé	41 porciones
Sofía	48 porciones
Glenda	46 porciones

2.

	Manzanas	Papaya	Fresas	Uvas	Melón	Sandía	Bananos
Cantidad	45	70	61	55	44	46	55

3. Melón con 44 porciones.
4. Carlos con 55 porciones
5. Aidé 41 porciones
6. Papaya con 70 porciones
7. Si se suman todas las porciones de frutas consumidas por Oscar y se divide entre la cantidad de porciones. ¿Cuál es el resultado? ¿Qué representa ese valor?

$$\frac{Suma\ de\ todos\ los\ datos}{cantidad\ de\ datos} = \frac{55}{7} \approx 7{,}86$$

   a) El resultado es 7,86
   b) Oscar consumió un promedio de 7,86 frutas por día esa semana.

8. Si se suman todas las porciones de frutas consumidas y se divide entre la cantidad de porciones. ¿Cuál es el resultado? ¿Qué representa ese valor?
   Posibles soluciones:

   a) $\frac{Suma\ de\ todos\ los\ datos}{cantidad\ de\ datos} = \frac{45+70+61+55+44+46+55}{56} = \frac{376}{56} = 6{,}71$

   b) $\frac{Suma\ de\ todos\ los\ datos}{cantidad\ de\ datos} = \frac{55+45+52+45+44+41+48+46}{56} = \frac{376}{56} = 6{,}71$

   c) $\frac{Suma\ de\ todos\ los\ datos}{cantidad\ de\ datos} =$

$$\frac{\begin{matrix}8+12+5+4+7+9+10+6+12+5+9+2+4+7+4+8+10+8+8+9+5+10+11+4+0+7+5+8+4+7+9+9\\+2+7+6+5+7+12+10+1+2+4+8+8+7+6+7+3+9+0+5+9+9+10+7+6\end{matrix}}{56}$$

   $= \frac{376}{56} = 6{,}71$. Este valor representa el promedio de fruta consumida por cada estudiante, por día, esa semana.

Problema 7: Edades representativas en un colegio

Prof. Dayana Calderón Prado

Conocimientos:

- Medidas de posición.
- Distribución de frecuencias.

Habilidades a desarrollar:

- Utilizar representaciones tabulares o gráficas con frecuencias absolutas o porcentuales, simples o comparativas.
- Utilizar un software especializado o una hoja de cálculo para favorecer la construcción de cuadros y gráficos.
- Caracterizar un grupo de datos utilizando medidas estadísticas de resumen: moda, media aritmética, máximo, mínimo y recorrido.

Situación problema

Juan tiene como proyecto de matemáticas averiguar la edad que mejor representa cada ciclo de su colegio. Ha preguntado a cada uno de los estudiantes su edad y los ha clasificado por ciclos de la siguiente manera:

III ciclo (7mo, 8vo y 9no):

12	13	15	14	12	12	12	13	12	15	15	14	12	12	12	13
12	13	13	14	12	12	12	13	12	13	15	14	14	14	13	13
12	13	15	14	12	12	12	13	12	13	15	14	12	14	13	13
12	13	15	14	12	13	13	13	12	13	15	14	12	12	12	13
12	13	15	14	12	12	12	13	12	13	15	14	13	13	13	13

IV ciclo (10mo y 11vo)

16 17 18 16 17 17 17 17 17 16 16 16 17 18 16 16 17 17

17 17 16 16 16 17 18 16 16 17 17 17 17 16 16 16 17 18

16 16 17 17 17 17 16 16 16 17 18 16 16 16 17 16 17 16

16 17 18 16 16 17 17 16 17 16 16 16 17 18 16 16 17

1. Digite estos datos en el programa Excel, en una columna los datos del III ciclo y en otra los datos del IV ciclo.

2. Determine para cada ciclo las siguientes medidas de posición: moda, media aritmética y recorrido. Para esto utilice las funciones: =MODA(celdas), =MEDIANA(celdas), =PROMEDIO(celdas). Para el recorrido primero calcule el máximo y mínimo con las funciones =MAX (celdas), =MIN (celdas) y luego realice la resta de ambos resultados. ¿Cuál de estas medidas de posición es la que mejor representa los datos?

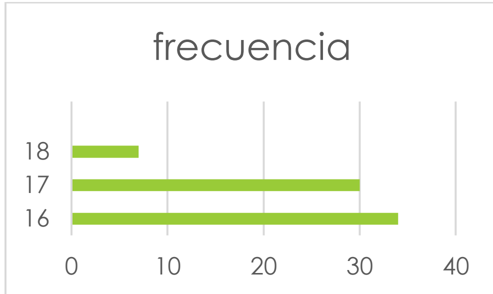
3. Utilice la función =CONTAR.SI (celdas, edad) para contar cuántos estudiantes tienen cada una de las edades. Represente esta información en una tabla creada en el programa Excel con la frecuencia relativa de cada una de las edades. (Una tabla para cada grupo de datos)

4. Explore la herramienta para crear gráficos (Insertar/ Grafico de columnas o de barras) y represente esta información mediante uno de estos. Debe crear un gráfico para cada grupo de datos.

Respuestas esperadas

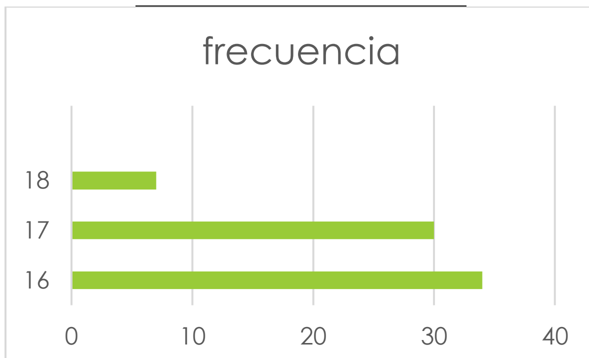
III Ciclo. Moda:12, mediana: 13, media: 13,04, recorrido: 3.

Edad	frecuencia
12	30
13	27
14	13
15	10



IV Ciclo. Moda: 16, mediana: 17, media: 16,62 , recorrido: 2.

Edad	Frecuencia
16	34
17	30
18	7



Noveno año

Problema 1: Ordenando chocolates

Prof. Dayana Calderón Prado

Conocimientos:

- Histograma de frecuencias.

Habilidades a desarrollar:

Resumir la información proporcionada por una distribución de frecuencias mediante un histograma o un polígono de frecuencias (absolutas o relativas), e interpretar la información que proporcionan estas representaciones gráficas.

Dinámica a desarrollar

A. Se formarán subgrupos en la clase y para cada subgrupo el docente repartirá revueltas: 2 botonetas rojas, 3 blancas, 4 azules, 5 verdes y dos de color café.
B. Luego, los estudiantes acomodarán las botonetas en columnas por color encima de la hoja blanca.

Para cerrar la primera parte de la actividad se realizan las preguntas:

1. ¿De cuál color hay más botonetas?

2. ¿De cuál color hay menos botonetas?

3. Construya un rectángulo para cada columna cuya altura sea la cantidad de botonetas en la columna. ¿Cuál es la altura de cada rectángulo? ¿Cuánto mide la base de cada rectángulo? ¿Todos los rectángulos tienen el mismo ancho? ¿Todos los rectángulos tienen la misma altura? Ahora dibuje los rectángulos uno a la par del otro. Esto es un histograma, y la cantidad de botonetas en cada rectángulo es la frecuencia absoluta.

Seguidamente el profesor les brindará los conceptos de frecuencia relativa y absoluta y se les enseñará cómo construir paso a paso el histograma.

Al finalizar, se propone realizar como ejercicio, un estudio de su clase realizando las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la frecuencia relativa de todos los estudiantes de la clase?

2. ¿Cuál es la frecuencia relativa de los estudiantes que tienen cabello largo en la clase?

3. ¿Cuál es la frecuencia relativa de los estudiantes que tienen cabello corto en la clase?

Respuestas esperadas

Varía según los datos recolectados.

Décimo año

Problema 1: Generando valores aleatorios con calculadora

Prof. Ana Yansi Bonilla Arias

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

Situación problema

La profesora de matemática realizó un quiz a sus 20 estudiantes, ellos obtuvieron una calificación entre 70 y 90. Usando la calculadora genere 20 posibles calificaciones de forma aleatoria y determine:

a) Moda
b) Valor máximo
c) Valor mínimo
d) Realice una tabla que resuma los datos
e) Media
f) Mediana

Respuestas esperadas

Nota: Para resolver el ejercicio utilizaremos la calculadora Casio fx-570LAX

Para determinar las calificaciones de forma aleatoria utilizaremos la calculadora con la función random.

En la calculadora científica se presionan las teclas: $“Alpha” \ y \ “,”$

Se muestra en la pantalla un letrero $RanInt\ \#($

Complete la función con los límites de notas: $RanInt\ \#(70; 90)$, utilice $“Alpha” +$ $“\ )\ ”$ para el $“\ ;\ ”$ luego presiona $“ = ”$ tantas veces como valores se requieran.

Así se van generando los valores aleatorios entre 70 y 90, y se anotan.

En este caso se requieren 20 datos para completar la tabla, **por ejemplo**, mis datos generados son los siguientes:

Estudiante	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Calificación	80	84	77	71	84	73	81	89	90	85

Estudiante	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Calificación	77	81	79	87	81	75	89	73	90	77

a) Tabla:

Nota	**Frecuencia absoluta**
71	1
73	2
75	1
77	3
79	1

80	1
81	3
84	2
85	1
87	1
89	2
90	2

Se utiliza el modo estadístico para encontrar los datos solicitados.

Con "$mode\ 6 - 1$" se presenta una tabla en la que se deben digitar los datos como se presenta en la tabla de distribución de frecuencias absolutas.

Si no se muestra la columna de frecuencias, se puede activar presionando "$shift$" + "$Mode$" y se despliega una lista, con las flechas se baja y se selecciona "$3: Satistics$" + "$1: on$"

De modo que se obtienen dos columnas en la tabla, una para los datos "x" y otra para las frecuencias.

Se completa la tabla tal y como se muestra en el punto a) de este ejercicio, utilizando los valores creados en su caso.

Una vez completada la tabla, se presiona la tecla "$OPTN$" y se selecciona "$3: 1 - Variable\ Calc$"

Así, se despliega una lista con varias medidas estadísticas entre ellos:

Promedio o media aritmética: 81,15

Mínimo: 71

Máximo: 90

Mediana: 81

La moda se determina según los datos obtenidos, en este caso es bimodal: 77 y 81, con una frecuencia de 3 cada uno.

Problema 2: Suministro de agua en Los Llanos de Santa Lucía

Prof. Tatiana Quirós Quirós

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

Situación problema

Realizar una investigación sobre el problema con el suministro del agua que afecta a la comunidad de Llanos de Santa Lucía, en la cual se le realice una pequeña encuesta de 10 preguntas a 30 personas. Se deben presentar las encuestas llenas y además realizar una presentación de Power Point en donde se analicen los datos, calculando la mediana, la moda, la media aritmética, el máximo, el mínimo y los cuartiles de los datos obtenidos en dos de las preguntas de la encuesta que considere más importantes. Estos cálculos deben realizarlos en una hoja de Excel y presentarlos a sus compañeros.

Respuestas esperadas

La respuesta varía según lo que los estudiantes elijan.

Problema 3: Tiempo en la ducha

Estudiante MATEC Dorin Morales Monge

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

Dinámica para desarrollar

El docente le pregunta a sus estudiantes cuánto tardaron en la ducha el día de hoy y anota esos números en una lista en la pizarra. Luego les realiza las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto es lo más que duró una persona en la ducha?
2. ¿Cuánto es lo menos que duró una persona en la ducha?
3. ¿Cuál es la duración más común?
4. Para dar un solo valor que resuma, sume todos los datos y divida el resultado entre el número total de datos, ¿qué representa este número?
5. Si se ordena de menor a mayor y se divide la lista de datos justo a la mitad para hacer dos categorías: los que consumen menos y los que consumen más, ¿qué valor sería el corte para esta clasificación?
6. De la misma manera, si se divide el grupo en cuatro categorías, ¿qué valores serían los cortes para esas cuatro categorías?
7. ¿Qué se puede concluir acerca del hábito de consumo de agua en la ducha de tus compañeros?
8. ¿Qué puedes concluir acerca de tu consumo de agua en la ducha?

Según un informe del AYA, en los hogares de Costa Rica se consume aproximadamente 12 litros de agua por cada minuto que permanece abierto el tubo de la ducha. ¿Necesitarás hacer un cambio en tus hábitos?

Respuestas esperadas

La respuesta varía según los datos.

4) Media 5) Mediana 6) Cuartiles

Problema 4: Repartiendo confites

Prof. Nelson Ramírez Contreras

Conocimientos:

- Medidas de posición.
- Frecuencias.

Habilidades a desarrollar:

- Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.
- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

Dinámica para desarrollar

1. Cada estudiante debe traer la cantidad de confites que desee y el profesor debe traer una cantidad considerable (por ejemplo 80).

2. Cada estudiante debe poner en su pupitre los confites que trajo y hacer una lista de las cantidades traídas con nombre en la pizarra.

3. Luego, el profesor toma todos los confites y los coloca en su escritorio.

4. Basándose en la información de la pizarra, los estudiantes responden lo siguiente:

5. De la cantidad de dulces por estudiante, ¿cuál fue la más común?

- ¿Cuál estudiante trajo la mayor cantidad de dulces?
- ¿Cuál estudiante trajo la menor cantidad de dulces?
- Si se repartieran los dulces entre todos los estudiantes de manera equitativa, ¿cuántos le tocaría a cada uno?
- Si el profesor retira los 80 confites que trajo, ¿cuántos le tocarían a cada uno?
- ¿Quién fue el estudiante que estuvo en medio, es decir, el que tuvo una misma cantidad de personas que aportaron más y menos que él?
- Complete la siguiente tabla utilizando la cantidad de dulces que trajo cada persona:

Número de dulces	**Cantidad de personas que trajo un número dulces en ese intervalo**	**Porcentaje de personas que trajeron un número de dulces en ese intervalo**
[0, 5]		
[6, 10]		
[11, 15]		
[16, 20]		
[21, 25]		
[26, 30]		
[31, 35]		
[36, 40]		
41 o más		
TOTAL		

Respuestas esperadas

Varía según los datos recolectados.

Problema 5: Uso de redes sociales

Prof. Jéssica Chacón Piedra

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.

Situación problema

Alexander desea realizar un estudio sobre la cantidad de horas que algunos de sus compañeros dedican al uso de redes sociales por día, por lo cual realizó una encuesta y obtuvo los siguientes datos: 3, 5, 8, 4, 6, 8, 2, 9, 3, 4, 6, 5, 8, 8, 7, 5, 8.

Una vez recolectada la información responda las siguientes preguntas:
1. ¿Cuánto es en promedio la cantidad de horas que dedican al uso de redes sociales?
2. ¿Cuánto es la cantidad mínima y máxima de horas que dedican al uso de las redes sociales?
3. ¿Cuántas horas dedica el 50% de los estudiantes al uso de las redes sociales?
4. ¿Cuántas horas utiliza el 25% de los estudiantes que menos uso hace de las redes sociales?
5. ¿Cuántas horas utiliza el 25% de los estudiantes que más uso hace de las redes sociales?
6. ¿Cuál es la cantidad de horas que más se repite?

Respuestas esperadas

1.)

$$\bar{x} = \frac{3+5+8+4+6+8+2+9+3+4+6+5+8+8+7+5+8}{17} = 5{,}82$$

2.) 2 y 9 horas respectivamente

3.) Acomodamos los datos: 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9.
El valor de n=17
La mediana corresponde a:

$$M_e : x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{17+1}{2}} = 6$$

La mitad de los estudiantes usan 6 horas o más las redes sociales y la otra mitad usa 6 horas o menos.

4.) Acomodamos los datos: 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9.

El 25% corresponde al Cuartil 1:

$$Q_1 : \frac{4+4}{2} = 4$$

El 25% de los estudiantes que menos horas utilizan las redes sociales lo hace por 4 horas o menos.

5.) Acomodamos los datos: 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9.

El 75% corresponde al Cuartil 3:

$$Q_3 : \frac{8+8}{2} = 8$$

El 25% de los estudiantes que más usan las redes sociales lo hacen por 8 horas o más.

6.) La cantidad de horas que más se repitió es 8.

Problema 6: Me tomo el tiempo necesario para alimentarme

Prof. María Delfia Sigüenza Quintanilla

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.
- Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.

Situación problema

Las tendencias actuales de calidad de vida nos dicen que parte del éxito en una buena salud es la alimentación adecuada. Dentro de las características de una alimentación adecuada podemos encontrar:

- Consumir vegetales
- Consumir frutas
- Tomar 8 vasos de agua diaria
- Comer despacio

Dinámica para desarrollar

1) Un estudiante debe ponerse de pie y hacer una encuesta verbal para determinar cuántos minutos dura cada uno de sus compañeros de clase y él mismo, tomando su almuerzo.
2) Seguidamente cada estudiante con los datos del aula debe elaborar una tabla de frecuencias con dos columnas: una con datos y otra con frecuencia absoluta.
3) Digite los datos en su calculadora científica y responda las siguientes preguntas:
   a) Encuentre el valor mínimo y máximo del conjunto de datos
   b) ¿Cuál es la moda? ¿Qué nos dice este dato?
   c) ¿Cuál es la mediana? ¿Por qué es importante?
   d) ¿Cuál es el promedio?
   e) Encuentre el valor de los cuartiles

Respuestas esperadas

1) La solución del problema depende de los datos obtenidos por los estudiantes. **Suponga que los datos obtenidos son**:

15	18	20	25	19	25	25	10	20	40
35	30	25	15	30	20	10	15	40	30
35	20	15	25	35	10	15	20	35	20

2)

Dato	Frecuencia absoluta
10	3
15	5
18	1
19	1
20	6
25	5
30	3
35	4
40	2
Total	**30**

3) a) Min = 10 Máx = 40

b) Mo = 20. Es el valor que más se repite.

c) Me = 20. Es importante porque nos da la ubicación del dato central.

d) 23,2

e) Q1 = 15 , Q2 = Me , Q3 = 30

Undécimo Año

Problema 1: ¿Competencia desigual entre amigos?

Prof. Guillermo Gómez Araya

Conocimientos:

- Estandarización de datos en diferentes distribuciones (cuál destaca más en las distribuciones).

Habilidades a desarrollar:

- Reconocer la importancia de emplear medidas relativas al comparar la posición o la variabilidad entre dos o más grupos de datos.

- Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.

Situación problema

Durante las pruebas para clasificar a Juegos Nacionales, José de 14 años y Ricardo de 18 años discuten cuál de los dos es mejor. Ellos participan en categorías diferentes, pero como Ricardo es más veloz que José asegura que él tiene más posibilidades para asistir a Juegos Nacionales que José, pues José es más lento. Dicha prueba consiste en dar una vuelta a un circuito de 20 kilómetros.

Una vez concluidas las pruebas:

En la categoría de José se obtuvo un promedio de 1,804 horas, una desviación estándar de 0,316 y José duró 1,7 horas en completar el circuito.

Mientras que en la categoría de Ricardo se obtuvo un promedio de 1,02 horas, con una desviación estándar de 0,17 y Ricardo tardó 1,1 horas en completar el recorrido.

Al parecer Ricardo tendrá más posibilidad de ir a Juegos porque duró menos tiempo que José en completar el circuito.

¿Cuál de los dos atletas tiene más posibilidades de asistir a Juegos Nacionales?

Respuestas esperadas

Se debe estandarizar los tiempos de José y de Ricardo en sus respectivas categorías.

$$Estandarización\ de\ José = \frac{1{,}7 - 1{,}804}{0{,}316} = -0{,}33$$

$$Estandarización\ de\ Ricardo = \frac{1{,}1 - 1{,}02}{0{,}17} = 0{,}47$$

A pesar de que Ricardo completó más rápido el circuito que José, su desempeño se alejó mucho del promedio de forma positiva, quiere decir esto que su tiempo está por encima del promedio en su categoría.
Mientras que José también se alejó del promedio de su categoría, pero de forma negativa, en otras palabras, su tiempo está por debajo del promedio.
Esto le da más posibilidades a José de ir a juegos Nacionales que a Ricardo.

Destacó más José en su categoría que Ricardo, a pesar de los tiempos.

Problema 2: Resultados en un examen de español

Prof. Orlando Solano Ramírez

Conocimientos:

- Medidas de variabilidad.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la varianza o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

Situación problema

La siguiente tabla de distribución de frecuencias representa los resultados del Examen de Español de un grupo de octavo año de un determinado colegio.

Notas	Frecuencia
27	1
28	1
30	1
45	2
50	2
52	1
59	2
60	3
67	2
75	2

78	2
80	2
85	2
93	1
Total	**24**

Calcule el promedio, la varianza y la desviación estándar usando la calculadora Classwiz fx-570X.

Pasos a seguir:

1) Presione la tecla menú y escriba el número 6.
2) Presione en lo que aparece en la pantalla el número 1
3) Aparecerán dos columnas y en la de la izquierda aparecerá un rectángulo en negro.
4) Escriba el número 27 y luego presione la tecla donde está el símbolo de =.
5) El rectángulo en negro aparecerá debajo del número 27 entonces escriba el siguiente número que es 28 y repita el proceso hasta escribir el número 93.
6) Puede presionar la tecla central superior (donde hay tres más formando con esa central superior como un óvalo) las veces que sea necesaria hasta llegar al primer número que se introdujo (27) y presione en ese óvalo la tecla que está a la derecha.
7) Repita los pasos 4) y 5) en esa nueva columna hasta escribir el último número, en nuestro caso es un 1.
8) Finalmente, presione las teclas OPTN y escriba el número 3, ya aparecerán en la pantalla los resultados esperados.
9) Observación :Otra forma de introducir los datos en las columnas es después de escribir el 27 y presionar el símbolo =; se presiona la tecla central superior y luego la que está la derecha y se escribe la primera frecuencia que sería 1; se escribe la otra frecuencia que vuelve a ser 1 y se presiona el símbolo de = ,nuevamente se presiona la tecla central superior y luego la tecla que está a la izquierda, se continua de la misma forma para introducir los demás valores hasta llegar a los mismos resultados.

Respuestas esperadas

promedio 62, varianza 332, desviación estándar 18,22.

Problema 3: Variación del tiempo de ejecución de una prueba

Prof. María José Sáenz Roda

Conocimientos:

- Medidas de variabilidad.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la varianza o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

Situación problema

Analice la siguiente información:

- **Sección 11-1**

La cantidad de minutos que tardó este grupo de estudiantes del Liceo Tres Equis en realizar una prueba fue:

28, 30, 32, 31, 34, 30, 28, 32, 31, 30, 31, 28, 30, 32, 31, 33

- **Sección 11-2**

Mientras que la cantidad de minutos que tardó un grupo de estudiantes de otra sección de la misma institución en realizar la misma prueba se describen a continuación:

25, 28, 29, 30, 27, 23, 28, 31, 34, 34, 31, 33, 29, 27, 21, 30, 29, 32 y 26.

Responda las siguientes preguntas:

1) ¿Cuál es el valor de la mediana en cada sección?
2) ¿Cuál es el valor del cuartil 1 en cada sección?
3) ¿Cuál es el valor del cuartil 3 en cada sección?
4) ¿Cuál es el rango de cada sección?
5) ¿Cuál es el rango intercuartílico de cada sección?
6) ¿Cuál sección presenta mayor variabilidad?

Respuestas esperadas

1) 31 y 29

2) 30 y 27

3) 32 y 31

4) 6 y 13

5) 2 y 4

6) Sección 11-2

Problema 4: Comparación de índices de masa corporal

Prof. Ana Elena Morales Granados

Conocimientos:

- Promedio, desviación estándar y coeficiente de variación (uso de calculadora)

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la varianza o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.
- Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.

Situación problema

Existe la creencia que los hombres tienden a pesar más y ser más altos que las mujeres. El índice de masa corporal es una medida que se basa en el peso y la altura. A continuación, se listan los valores del Índice de Masa Corporal (IMC) de hombres y mujeres elegidos de manera aleatoria.

Dados los siguientes datos:

IMC de hombres	23.8	23.2	24.6	26.2	23.5	24.5	21.5	31.4	26.4	22.7	27.8	28.1

IMC de mujeres	19.6	23.8	19.6	29.1	25.2	21.4	22.0	27.5	33.5	20.6	29.9	17.7

Calcule el promedio, la desviación estándar y el coeficiente de variación de los dos conjuntos de datos.

Usando los resultados anteriores ¿parece existir una diferencia notable entre hombres y mujeres?

Respuestas esperadas

La solución del ejercicio anterior se puede apreciar en el siguiente video

Video solución

Esta actividad se puede implementar como actividad de cierre para el tema de medidas de posición central y variabilidad, e incluso, los datos pueden ser recolectados en el aula (aunque es necesario contar con una báscula y un metro para realizar las mediciones correspondientes). Es necesario el uso de una calculadora científica para el procesamiento de los datos.

Problema 5: Comparación de casos

Prof. María José Sáenz Roda

Conocimientos:

- Coeficiente de variación (uso de calculadora)

Habilidades a desarrollar:

- Aplicar estandarización y el coeficiente de variación para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.

Situación problema

Se realizó un estudio con los estudiantes de la sección 11 – 1 y 11-2 del Liceo Tres Equis sobre el promedio obtenido en el primer periodo del año 2018. En dicho estudio se obtuvo una desviación estándar de 7,25 y una media aritmética de 82,5 para la 11-1, y una desviación estándar de 5,4 y una media aritmética de 70 para la 11-2. Utilice calculadora y responda lo que se le solicita.

1) Determine el coeficiente de variación de cada sección.
2) ¿Cuál sección presenta mayor variabilidad de notas?
3) Determine la posición relativa de un estudiante A con una calificación de 80 en la sección 11-1.
4) Determine la posición relativa de un estudiante B con una calificación de 75 en la sección 11-2.
5) ¿Cuál estudiante presenta mejor posición relativa en cuanto a su calificación: ¿A o B?

Respuestas esperadas

1) 8,78 y 7,71
2) 11-1
3) -0,34
4) 0,92
5) B

Problema 6: Comparando ligas europeas de fútbol

Prof. Jorge Jiménez Madrigal

Conocimientos:

- Cuartiles.
- Diagramas de caja.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

- Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.

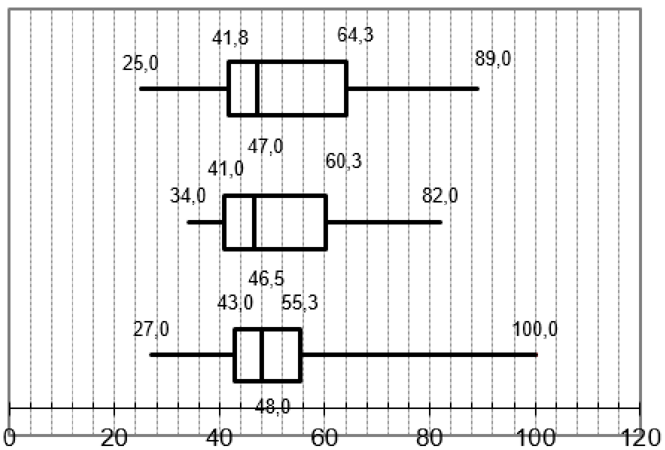
Situación problema

Se le muestra a continuación los puntos obtenidos por los 20 equipos de la liga BBVA en España, Francia e Inglaterra en las temporadas 2010-2011 y 2011-2012, además de la tabla con los puntajes se le muestran el cálculo de los cuartiles y un diagrama de estos. Analícelos y responda las siguientes preguntas.

TRES VARIABLES

Mínimo	Q1	Mediana	Q3	Máximo
27,00	43,00	48,00	55,25	100,00
34,00	41,00	46,50	60,25	82,00
25,00	41,75	47,00	64,25	89,00

Gráfico de caja y bigote para tres variables



	ESPAÑA	FRANCIA	INGLATERRA
1	100	82	89
2	91	79	89
3	61	74	70
4	58	64	69
5	56	61	65
6	55	60	64
7	54	57	56
8	52	56	52
9	50	50	52
10	49	48	47
11	47	45	47
12	47	43	47
13	47	42	45
14	46	42	45
15	43	41	43
16	43	41	38
17	42	39	37
18	41	38	36
19	37	36	31
20	27	34	25

1) ¿Cuál liga es más competitiva? ¿Por qué?
2) ¿En cuál liga el campeón tuvo menos competencia? ¿Por qué?
3) Considerando que en cada liga descienden los últimos tres lugares, ¿en cuál liga fue menos reñido saber quiénes descenderían? ¿Por qué?
4) ¿Cuántos puntos obtuvo el 75% de los equipos de la liga española con menor cantidad de puntos?
5) ¿Cuántos puntos obtuvo el 25% de los equipos de la liga inglesa?
6) ¿En cuál liga los equipos tuvieron en promedio más puntos? Justifique.

Respuestas esperadas

1) La francesa, hay menor variabilidad de puntajes.
2) La española, el bigote de la derecha es más largo en comparación a los demás.
3) La española, el bigote de la izquierda es más corto en comparación a los demás, lo que significa que los puntajes están más dispersos y no hay mucha competencia.

4) El 75% de los equipos españoles con menos puntaje obtuvo 55 puntos o menos, y el 75% de los equipos españoles con más puntaje obtuvo 43 puntos o más.
5) El 25% de los equipos ingleses con menos puntaje obtuvo menos de 42 puntos y el 25% de los equipos ingleses con más puntaje obtuvo más de 64 puntos.
6) Las ligas de España e Inglaterra obtuvieron un promedio de 52,3 puntos por equipo.

Problema 7: Tema libre con Excel

Prof. Jorge Jiménez Madrigal

Conocimientos:

- Cuartiles.
- Diagramas de caja.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

- Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.

Dinámica para desarrollar

Elija un tema de su gusto y realice una investigación que genere al menos 100 datos de tipo cuantitativo. Una vez realizada la investigación, en un archivo de Excel digite los valores encontrados (mediante encuesta o investigación), y seguidamente:

1) Calcule medidas de posición relativa

- Mínimo: En una celda en blanco, escriba +Percentil(Rango de datos;0)

=+PERCENTIL(H2:H21;0)

- Cuartil1: En una celda en blanco, escriba +Percentil(Rango de datos;;0,25)
- Cuartil2: En una celda en blanco, escriba +Percentil(Rango de datos;;0,5)
- Cuartil3: En una celda en blanco, escriba +Percentil(Rango de datos;;0,75)
- Máximo: En una celda en blanco, escriba +Percentil(Rango de datos;;1)

2) Construya el diagrama de cajas y bigotes

Acceda al link https://www.youtube.com/watch?v=HBJqIjMssb8

Siga los pasos para la creación de un diagrama de cajas.

3) Análisis de los resultados

- ¿Cuál es el resultado más común?
- ¿Para cuál valor el 25% de los datos es menor o igual?
- ¿Para cuál valor el 50% de los datos es menor o igual?
- ¿En qué rango se encuentra el 50% de los datos?
- Determine el promedio de los datos.

Respuestas esperadas

Varía según los datos recolectados.

Problema 8: Tema libre con Excel

Prof. Jessica Chacón Piedra

Conocimientos:

- Medidas de variabilidad.

Habilidades a desarrollar:

- Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.
- Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos.
- Emplear la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad.

Dinámica para desarrollar

Alison realiza una campaña de reciclaje de botellas de plástico, por lo que le solicita a sus compañeros le colaboren. Al finalizar la semana realizó el conteo de lo reciclado y obtuvo la siguiente información:

Cantidad de botellas	Número de estudiantes
De 0 a menos de 4	6
De 4 a menos de 8	8
De 8 a menos de 12	4
De 12 a menos de 16	6

Utilizando la calculadora fx-991LAX, CLASSWIZ Alison determinará las medidas de variabilidad y realizará el diagrama de cajas, de la siguiente manera:

1. Debe digitar los datos en la calculadora, por lo que se representa en forma de intervalo y se busca su punto medio (marca de clase):

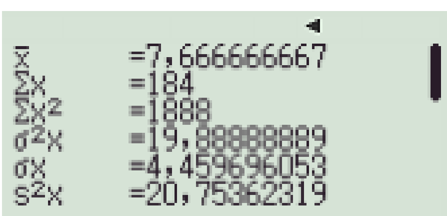
Cantidad de botellas	Marca de clase	Frecuencia
$[0,4[$	2	6
$[4,8[$	6	8
$[8,12[$	10	4
$[12,16[$	14	6

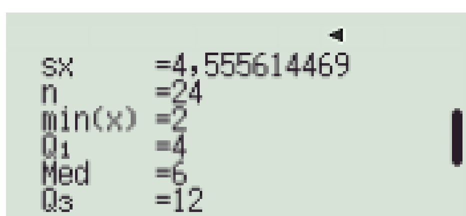
2. Se debe activar en la calculadora la opción de tabla de frecuencias:

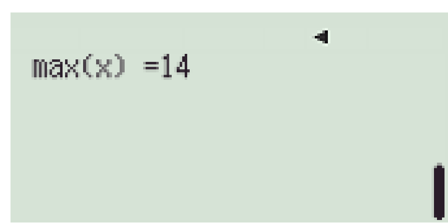
   Utilizando SHIFT MENU se selecciona en la segunda pantalla ▼ y se digita 3 después 1 y si desea desactivar la frecuencia se elige 2.

3. Ingresamos los datos, seleccionando MENU 6 1:

4. Con los datos ingresados correctamente obtenemos las medidas de variabilidad presionando AC y OPTN 2 (Cálc. 1-variable):

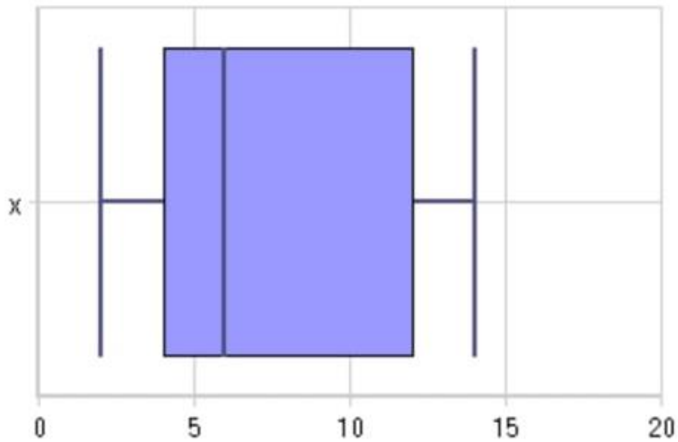






5. También se puede realizar el diagrama de cajas para estos datos, por lo que se genera un código QR al presionar 

Y se obtiene:



De acuerdo con el diagrama de cajas obtenidas debe responder lo siguiente:

a) ¿Qué tipo de asimetría presenta este conjunto de datos?

b) ¿Existe al menos una persona que recicló 14 botellas?

c) ¿La mayoría de las personas reciclaron de 1 a 5 botellas?

Respuestas esperadas

a) Positiva

b) Sí

c) No

Problema 9: Investiguemos bachillerato en matemáticas

Prof. Karla Vargas Quirós

Conocimientos:

- Medidas de posición.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos.
- Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.

Situación problema

En el comité de rendimiento académico del Liceo de Tierra Blanca está realizando una investigación sobre los resultados de la prueba de matemáticas en bachillerato; por lo cual se toma unas muestras aleatoriamente de los años 2015 y 2017; el objetivo es analizar los resultados con respecto a las medidas de posición para la toma decisiones.

Notas de Bachillerato de Matemática 2015

65	95	85	75	73	66	66	86	75	85
58	58	60	70	71	90	53	70	76	

Notas de Bachillerato de Matemática 2017

55	58	61	55	83	63	73	66	60	93
71	58	51	70	50	53	75	66	56	

Actividad 1

Para este problema en particular, puede hacer uso de la herramienta tecnológica (calculadora o la computadora) que facilite calcular las medidas estadísticas.

Responda las siguientes interrogantes:

1.1) Determine la moda para las notas del año 2015 y 2017.

1.2) Determine la media aritmética de las notas obtenidas en los años 2015 y 2017:

1.3) Determine para las notas del año 2015:

- El primer cuartil
- El segundo cuartil
- El tercer cuartil
- Recorrido Intercuartílico

1.4) Determine para las notas del año 2017:

- El primer cuartil
- El segundo cuartil
- El tercer cuartil
- Recorrido Intercuartílico

1.5) Determine para las notas del año 2015:

- La nota máxima
- La nota mínima
- Recorrido

1.6) Determine para las notas del año 2017:

- La nota máxima
- La nota mínima
- Recorrido

1.7) Determine el tipo de simetría o asimetría (positiva- negativa), para los años:

- 2015
- 2017

1.8) ¿Cuáles son las notas inferiores o iguales al 25 % de los datos del año 2015?

1.9) Determine las notas superiores o iguales al 75 % de los datos del año 2015.

1.10) Determine las notas inferiores o iguales al 50% de los datos del año 2017..

1.11) Determine las notas superiores o iguales al 75 % de las notas del año 2017.

1.12) El 50% de las notas promedio, ¿fue mayor o igual que 71?. Justifique la respuesta.

Actividad 2

Responda las siguientes interrogantes:

2.1) Si la nota promedio del año 2015 es de 72 y observando su diagrama de cajas, ¿será posible que el 65% de los estudiantes obtuvieron una nota superior a 70? Justifique su respuesta.

2.2) Comparando el año 2015 con respecto al año 2017; ¿cuál fue el año de mejor promoción que obtuvo el Liceo de Tierra Blanca? Justifique su respuesta

2.3) ¿Cree que esta información es suficiente para determinar el rendimiento de un año es mejor con respecto al otro?

2.4) Observando al diagrama de cajas; indique cuál de los años (2015-2017), tiene mayor dispersión.

Respuestas esperadas

Actividad 1

1.1)

- 2015: no hay moda
- 2017: es bimodal: 58, 66

1.2)

- 2015: $\bar{x}$ = 72,42
- 2017: $\bar{x}$ = 64,05

1.3)

- El primer cuartil: 65
- El segundo cuartil: 71
- El tercer cuartil: 85
- Recorrido Intercuartílico: 20

1.4)

- El primer cuartil: 55
- El segundo cuartil: 61
- El tercer cuartil: 71
- Recorrido Intercuartílico:16

1.5)

- La nota máxima: 53
- La nota mínima: 95
- Recorrido: 42

1.6)

- La nota máxima: 93
- La nota mínima:50
- Recorrido: 45

1.7)

- Año 2015: asimetría positiva
- Año 2017: asimetría positiva

1.8) 53, 58, 60,60 y 65

1.9) 85, 86,90 y 95.

1.10) 50, 51,53,55,56,58,60 y 61

1.11) 71, 73, 75,83 y 93

1.12) No, solo el 25% de los datos. El 50% es igual o mayor a la nota 61.

Actividad 2

2.1) No, el promedio del año 2015 es de 72,42, mientras que el 50% no aprobó la prueba. Esto ocurre porque hay una nota de 95, el cual es alta con respecto a la nota común de los demás estudiantes.

2.2) Sí, las notas del año 2015 un 50% de los educandos aprobaron la prueba de matemáticas, mientras en año 2017 aproximadamente un 25% la aprobaron.

2.3) No, porque puede ocurrir que unos pocos estudiantes obtuvieran una nota muy alta o muy baja con respecto a la nota común de la población.

2.4) El de mayor dispersión son las notas del año 2015.

2.5) Abierta

Probabilidad

¿Cómo se distribuyen los contenidos de probabilidad en el programa de estudios según el MEP?

Objetivos generales del MEP

Tercer ciclo

Reforzar: habilidades adquiridas en Primaria para identificar e interpretar la información que se genera en el entorno.

Evidenciar: que las y los estudiantes puedan resolver un problema y justificar esa respuesta ante la clase.

Utilizar: principios básicos de probabilidad para controlar las intuiciones sobre el azar y resolver problemas asociados con éstos.

Ciclo diversificado

Reflexionar: más allá de los datos, es decir, comprender el trasfondo de la información que se comunica por medio de los diferentes instrumentos de tratamiento de información que hasta ahora se han estudiado.

Formalizar: las propiedades básicas del cálculo de probabilidades y se consideran problemas relacionados con estas propiedades.

Favorecer: la capacidad de análisis sobre los datos que se generan en el entorno, y que le permitan a cada estudiante adquirir la capacidad de respaldar sus decisiones futuras con información sólida que le ofrezca una mayor posibilidad de éxito.

Habilidades generales

Tercer ciclo

- Interpretar información que ha sido generada por medio de análisis estadísticos o probabilísticos provenientes de diversas fuentes.
- Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
- Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades de las probabilidades vinculadas con el tipo de evento: seguro, probable e imposible.
- Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.
- Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en condición de incertidumbre.
- Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la Estadística y la Probabilidad.
- Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto.

Ciclo diversificado

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas.
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.

Consideraciones teóricas

Situación aleatoria

Son aquellas situaciones cuyos resultados dependen del azar.

Ejemplo:

- El resultado de la lotería nacional que se juega el domingo.
- La condición del clima del día de mañana.

Situación determinista

Son aquellas situaciones que se pueden predecir.

Ejemplo:

- Precio al pagar 10 chocolates si se sabe que su precio es de 285 colones.
- Extraer una bola roja de una canasta que solo tiene bolas rojas.

Experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es un fenómeno que tiene las siguientes características:

- Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento.
- No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá un experimento particular
- El experimento puede repetirse.

Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, se denota: Ω.

Ejemplo:

Considere el experimento “Tirar un dado”. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Eventualidad

Es un resultado particular, es decir un elemento de Ω: x es una eventualidad $\Leftrightarrow x \in \Omega$.

Ejemplo:

Considere el experimento “Tirar un dado”. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

En donde 4 es una eventualidad o punto muestral.

Evento

Es un conjunto de resultados, es decir un subconjunto de Ω: A es un evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$.

Ejemplo:

Siguiendo con el experimento de “Tirar un dado”, se pueden definir los siguientes eventos:

$\boldsymbol{A}$: el resultado del dado es impar en donde $A = \{1,\ 3,\ 5\}$.

$\boldsymbol{B}$: el resultado del dado es mayor que 4 en donde $B = \{5,\ 6\}$.

Ocurrencia de un evento

Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades. Además, un evento seguro es aquel cuyo conjunto de resultados es igual al espacio muestral y un evento imposible es aquel cuyo conjunto de resultados es vacío.

Ejemplo:

Al lanzar un dado un evento seguro puede ser “obtener un número menor a 7” y un evento imposible seria “obtener un 15”.

Eventos igualmente probables

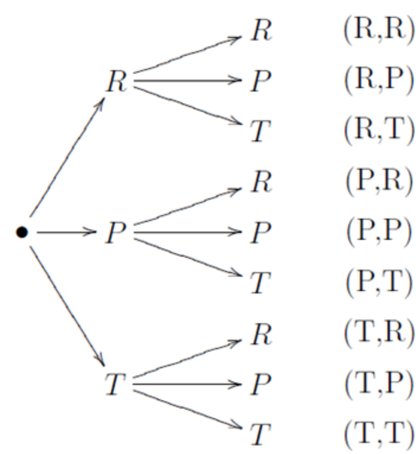
Si los puntos muestrales de un espacio muestral S son equiprobables, además A y B son eventos de S entonces se dice que A es igualmente probable que B si posee la misma cantidad de puntos muestrales que B.

Ejemplo:

En el juego de “Piedra, Papel o Tijera”, los competidores tienen 3 opciones de juego; Piedra, Papel o Tijera. Las reglas son claras, quien saca piedra vence a la tijera, pero la tijera gana al papel y el papel vence a la piedra.

a) ¿Cuántos elementos componen el espacio muestral de este experimento?
b) ¿Cuántas opciones permiten que gane el primer competidor?
c) ¿Cuántas posibles combinaciones producen un empate entre los jugadores?
d) ¿Cuál de los dos jugadores tiene más probabilidad de ganar?

Realizando un diagrama de árbol se obtienen las siguientes combinaciones:



Nota: R denota “roca”, P denota “papel” y T denota “tijera”.

Entonces se puede observar que el espacio muestral se encuentra conformado por 9 elementos. Hay tres posibilidades de que gane el primer competidor. Tres combinaciones producen un empate y ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.

Teorema (eventos compuestos)

Si A y B son eventos entonces:

$$A \cup B$$

$$A \cap B$$

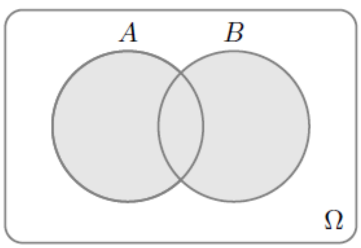
$$A - B$$

$$A \, \Delta \, B$$

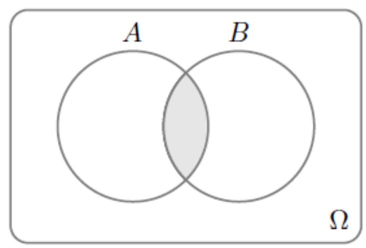
son eventos.

Estos eventos pueden interpretarse de la siguiente manera:

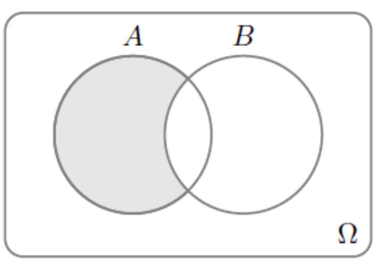
- El evento $A \cup B$ ocurre si corre A u ocurre B.
- El evento $A \cap B$ ocurre si corre A y ocurre B.
- El evento $A - B$ ocurre si corre A y no ocurre B.
- El evento $A \, \Delta \, B$ ocurre si corre únicamente uno de los dos, A o B.



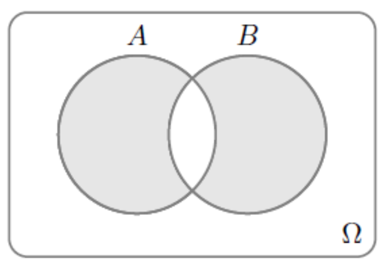
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$A \triangle B$

Ejemplo:

Se tiene una canasta con 12 bolas enumeradas del uno al doce. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas y las demás son verdes. Considere el experimento que consiste en elegir una bola al azar de la canasta. Dados los eventos:

A: la bola elegida es verde.

B: la bola elegida es roja.

C: la bola elegida tiene un número par.

Determine $B \cup C, A \cap C,\ C - A$.

Solución:

$\Omega = \{$1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R, 7R, 8V, 9V, 10V, 11V, 12V$\}$

$B \cup C = \{1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R,\ 7R, 8V, 10V, 12V\}$

$A \cap C = \{8V,\ 10V, 12V\}$

$C - A = \{2R,\ 4R,\ 6R\}$

Álgebra de eventos

Sean A y B dos eventos de una experiencia aleatoria con espacio muestral Ω; a partir de esos dos eventos se pueden definir en términos de la ocurrencia de A y B.

Evento complementario de A (A^C)

Se dice que A^C ocurre cuando A no ocurre.

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que A y B son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente, esto es $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo:

Introducimos en una bolsa las letras de la palabra **CLASE**. Sacamos una letra al azar.

Consideramos los sucesos:

X:Sacar una vocal

Y: Sacar una letra anterior a la M en el abecedario

Escriba, dando todos sus casos los sucesos $X,\ Y,\ X^C,\ Y^C,\ X \cup Y,\ X \cap Y,\ X - Y$.

Solución:

$X = \{A,\ E\} \quad Y = \{C,\ L,\ A,\ E\}$

$X^C = \{C, L,\ S\}$

$Y^C = \{S\}$

$X \cup Y = \{C, L,\ A,\ E\}$

$X \cap Y = \{A,\ E\}$

Función de probabilidad

Ley de Laplace: Si un experimento tiene n resultados igualmente probables (es decir el espacio muestral tiene n elementos) y un evento A cualquiera tiene a su favor k resultados $(k \leq n)$ entonces se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra viene dado por:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

O lo que es lo mismo:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ a\ favor\ de\ A}{Total\ de\ resultados\ del\ experimento}$$

La ley de los grandes números

Dado un experimento, sea A un evento. Si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la **probabilidad frecuencial** de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Concepto empírico de probabilidad

En una muestra aleatoria que incluye n elementos igualmente probables, de los cuales existe una frecuencia de k elementos a favor de evento A, se dice que la probabilidad de que el evento A ocurra (se representa con $P(A)$) y viene dada por la razón:

$$P(A) = \frac{frecuencia\ de\ resultados\ a\ favor\ de\ A}{tamaño\ de\ la\ muestra} = \frac{k}{n}$$

Propiedades de la función de probabilidad

Si Ω es el espacio muestral y A es un evento, entonces:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = 1$
- $P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n) = 1$; donde $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$

Teorema de la suma

Sean A y B dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

Considere el experimento "Tirar un dado". El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$\boldsymbol{A}$: el resultado del dado es par, $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

$\boldsymbol{B}$: el resultado del dado es primo, $B = \{2,\ 3,\ 5\}$

Determine la probabilidad de $A \cup B$.

Solución:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Regla de la multiplicación de probabilidades

Cuando el resultado de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento, se dice que los sucesos son independientes.

Si se tienen varios eventos sucesivos e independientes entre sí, la probabilidad de que ocurran todos ellos a la vez corresponde a la multiplicación de las probabilidades de cada uno de los eventos.

Ejemplo:

- Si se responden al azar cuatro preguntas con cinco opciones cada una, ¿cuál es la probabilidad de acertar a todas?
- La probabilidad de acierto en cada una de las preguntas es $\frac{1}{5}$. Por lo tanto, la probabilidad de acertar en las cuatro es:

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

Problemas elaborados por los docentes

Octavo año

Problema 1: La recolección de café

Prof. Ana Yansi Bonilla Arias

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad
  - La probabilidad de cualquier evento es un valor entre 0 y 1.
  - La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.

Habilidades a desarrollar:

- Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.
- Utilizar las probabilidades para la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Materiales:

- Bolsas de papel.
- Confeti de color verde y rojo.

Situación problema

Al realizar la recolección de café lo ideal es que se seleccione únicamente el grano maduro (rojo), ya que, a la hora de entregar al recibidor, si van granos de color verde, será castigado rebajando a la cantidad de cajuelas entregadas un porcentaje por el grano verde que se entregue.

Don Ramiro, un cafetalero de la zona, contactó a varias familias indígenas que viven cerca de Salitre para la recolección de café, entre ellas las familias Ortiz, Ramírez, Rojas, Acuña y Figueroa.

Dado que los granos son de diferente tamaño y los sacos también, no se puede determinar la cantidad de ellos que contiene cada cajuela. Don Ramiro, a la hora de medir el café, llena los sacos para economizar espacio.

La semana anterior Don Ramiro recibió un castigo de dos cajuelas por fanega por llevar mucho café verde, por lo que decidió investigar cuál de las familias es la que recolecta más café verde. Entonces resolvió tomar un saco por familia y sacar de él granos aleatorios de modo que se pueda detectar, por medio de la experimentación, cuál de las familias es la culpable.

Dinámica para desarrollar

Se coloca confeti de colores verde y rojo simulando los granos de café, en 5 bolsas oscuras etiquetadas con el nombre de cada familia.

El docente sabe a cuál de las bolsas le deposita más papel verde, para determinar al final, cuál de los estudiantes está más cerca de la realidad.

Cada estudiante debe sacar de las bolsas cierta cantidad de granos (confeti), para determinar cuál de los sacos contiene más café verde.

De acuerdo con los datos recolectados se debe estimar la probabilidad de tener café verde o rojo y concluir.

Respuestas esperadas

Entre más café verde tenga el saco más cerca está la probabilidad de 1.

Entre más café maduro tenga, la probabilidad se acerca a 0.

Las probabilidades oscilan entre 0 y 1.

Problema 2: Tira y corre

Prof. Dayana Calderón Prado

Conocimientos:

- Eventos más probables, menos probables e igualmente probables.

Habilidades a desarrollar:

- Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.

Materiales:

- Tableros de pista de autos (se adjunta).
- Carros pequeños (o bien fichas de colores que los representen).
- Monedas.
- Papel y lápiz para anotar.

Dinámica para desarrollar

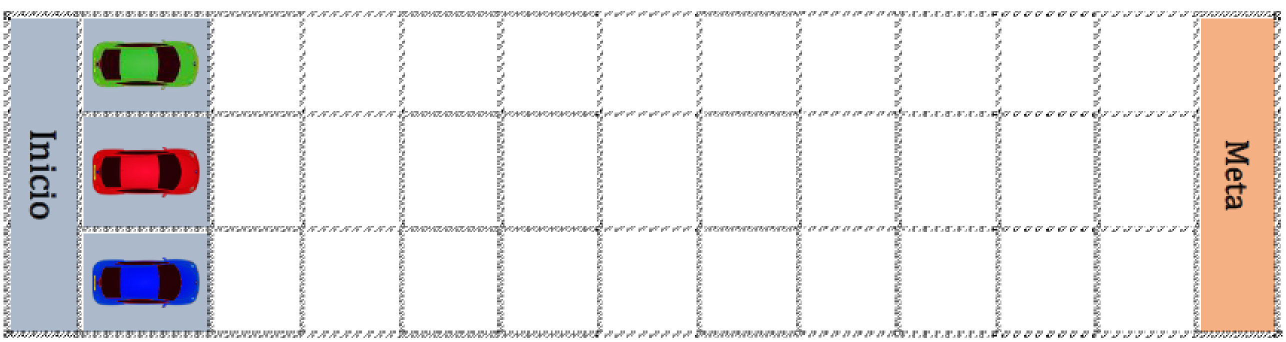
Conforman grupos de tres personas, y se les entrega un tablero, tres autos de colores distintos y dos monedas.

Situación problema

Un juego consiste en realizar una carrera de autos pero que funciona por turnos. Se tienen los 3 autos, uno rojo, uno azul y otro verde (o según los colores que se tengan de las fichas). Ellos pueden avanzar un espacio del tablero de acuerdo con los resultados obtenidos en el lanzamiento de las dos monedas:

- Escudo y corona: avanza el carro rojo
- Dos escudos: avanza el carro azul
- Dos coronas: avanza el carro verde

Lo primero será elegir cada uno un carro diferente. El tiempo que durará el juego depende de la longitud de la pista que se cree, una propuesta es crearla con 10 casillas e indicar a los estudiantes que cada casilla son 50 metros de la pista, y así se tendrá una pista de 500 metros. Gana el jugador que recorra 500 metros en primer lugar.



Al finalizar el juego, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué eligió el color de su carro?
2. ¿Cuál de los carros tiene mayor posibilidad de ganar?
3. ¿Cuál de los carros tiene menor posibilidad de ganar?
4. ¿Son justas las reglas del juego?
5. Si se empieza el juego de nuevo, ¿qué carro elegiría?

Respuestas esperadas

Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes lleguen a la conclusión de que el carro con mayor probabilidad de ganar es el rojo, mientras que el carro verde y el azul tienen la misma probabilidad de ganar. Este sería un problema para introducir la habilidad mencionada de una forma lúdica e intuitiva.

Problema 3: Juego de Dados

Prof. Jorge Jiménez Madrigal

Conocimientos:

- Tipos de eventos (seguro, probable, imposible).
- Ley de Laplace.

Habilidades a desarrollar:

- Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.
- Resolver problemas que involucren el uso de la Ley de Laplace.

Dinámica para desarrollar

Cada estudiante debe elegir un personaje de Dragon Ball Z (el de su preferencia), el juego consiste en "peleas" entre varios personajes, dependiendo del lanzamiento de dos dados, cada jugador cuenta con 20 puntos de vida. En cada partida los jugadores deberán asumir el rol de atacante y el de atacado (quien podrá defenderse), la situación dependerá de los siguientes casos:

Atacante

- Suma de los dados es menor o igual a 3: No hace daño.
- Suma de los dados es mayor a 3 pero menor o igual que 6: Hace 3 puntos de daño.

- Suma de los dados es mayor a 6 pero menor o igual que 11: Hace 5 puntos de daño.
- Suma de los dados es exactamente 12: Hace 10 puntos de daño.

Defensa

- Suma de los dados es menor o igual a 3: Recibe el daño.
- Suma de los dados es mayor a 3 pero menor o igual que 9: Recibe 3 puntos menos de daño.
- Suma de los dados es mayor a 9 pero menor o igual que 11: Hace 5 puntos de daño menos.
- Suma de los dados es exactamente 12: El atacante recibe el doble de daño o restaura el daño.
- Gana quien haga que los demás personajes pierdan todos sus puntos de vida.

Situación problema

En una partida realizada entre Andrea y María discuten acerca de que el juego es más sencillo para el atacante que para el atacado, pues consideran que es más fácil hacer daño que rebajar daño, así que le piden ayuda a Alberto para saber:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador haga 3 de daño?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador haga 5 de daño?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador reciba 5 de daño menos?

Ellas quieren saber si efectivamente el juego es equitativo. Andrea también menciona que es imposible que un jugador reciba doble daño por lo que Alberto les ayuda a saber:

4. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador reciba daño doble?
5. Además, analizando la situación se plantean si ¿es posible saber la probabilidad de que un jugador gane?
6. ¿Es posible saber la probabilidad de que un jugador haga 10 de daño y el otro jugador le devuelva el doble?

Respuestas esperadas

1. $\frac{1}{3} \approx 33\%$
2. $\frac{5}{9} \approx 55\%$
3. $\frac{5}{36} \approx 13\%$
4. $\frac{1}{36} \approx 3\%$
5. Sí es posible
6. Sí es posible.

Problema 4: Conocimientos y suerte

Prof. Ana Yansi Bonilla Arias

Conocimientos:

- Eventos más probables, menos probables e igualmente probables.
- Evento seguro, probable o imposible.
- Definición clásica (o laplaciana).

Habilidades a desarrollar:

1. Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.
2. Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.
3. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.

Situación problema

Carlos y María son dos estudiantes que desean realizar una competencia de conocimientos y suerte, para obtener un ganador deciden hacer un juego que consiste en lo siguiente:

1. Se divide la clase en dos grupos, uno para Carlos y otro para María de forma aleatoria.
2. Solicitan al profesor de matemática que coloque en una caja papelitos con varios casos, algunos con eventos más probables, menos probables o igualmente probables, además hay casos en los cuales se debe determinar la probabilidad del evento.
3. Carlos y María deben sacar de la caja un papel con una pregunta, si la contesta correctamente, el jugador en turno tiene derecho a tirar un dado que le indicará cuántas casillas avanzará. Si la contesta de forma incorrecta podrá solicitar ayuda a un integrante de su grupo.
4. Para el juego solicitan ayuda a un compañero que hará el rol de juez, mismo que tiene las preguntas con sus respectivas respuestas y dará el visto bueno para tirar el dado.
5. Los estudiantes deberán elegir cuál equipo comienza. En cada grupo los jugadores deberán ir rotando de modo que participen todos los integrantes de cada equipo hasta que uno de los dos cruce la meta.
6. La persona participante deberá contestar correctamente para poder tirar el dado.

Se utilizará como simulador del dado la aplicación, en la cual se puede observar que se indica la salida y la meta de llegada:

https://www.geogebra.org/m/Nk7zxAgb

A continuación, se presentan 30 casos de posibles preguntas, éstas deben ser depositadas en un recipiente para que los estudiantes saquen durante el concurso.

Además de las preguntas planteadas el docente debe crear más preguntas relacionadas con el entorno del estudiante, con el fin de tener un banco de preguntas amplio.

1. En la sección 7-1 hay 5 mujeres y 8 hombres, si se elige un estudiante al azar ¿Qué es más probable, que sea hombre o que sea mujer?
2. Tenemos una urna con 30 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (8 color marrón, 5 verdes, 3 rojas, 6 amarillas y 8 negras) ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una bola de la urna al azar, ésta sea de color marrón?
3. Tenemos una urna con 30 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (8 color marrón, 5 verdes, 3 rojas, 6 amarillas y 8 negras) ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una bola de la urna al azar, ésta sea de color verde?
4. Tenemos una urna con 30 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (8 color marrón, 5 verdes, 3 rojas, 6 amarillas y 8 negras) ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una bola de la urna al azar, ésta sea de color rojo?
5. Tenemos una urna con 30 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (8 color marrón, 5 verdes, 3 rojas, 6 amarillas y 8 negras) ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar una bola de la urna al azar, ésta sea de color negro?
6. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras) ¿Qué es más probable al sacar una bola de la urna al azar, que sea roja o que sea verde?
7. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras) ¿Qué es más probable al sacar una bola de la urna al azar, que sea roja o que sea negra?
8. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras) ¿Qué es más probable al sacar una bola de la urna al azar, que sea negra o que sea marrón?

9. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras) ¿Qué es más probable al sacar una bola de la urna al azar, que sea amarilla, roja o que sea marrón?
10. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras) ¿Al sacar una bola de la urna al azar, cuál color es más probable que salga?
11. Tenemos una urna con 20 bolas del mismo tamaño, pero de distintos colores, (4 color marrón, 2 verdes, 3 rojas, 7 amarillas y 4 negras). ¿Al sacar una bola de la urna al azar, cuál color es menos probable que salga?
12. Al lanzar una moneda al aire, ¿Qué es más probable que caiga hacia arriba, cara o cruz?
13. Al lanzar un dado (con números del 1 al 6), ¿Qué es más probable, obtener una cara con un múltiplo de dos o una cara con un múltiplo de tres?
14. Al lanzar un dado (con números del 1 al 6), ¿Qué es más probable, obtener una cara con un número par o una cara con número impar?
15. En un colegio hay 50 estudiantes de sétimo, 29 estudiantes de octavo y 43 de noveno. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar de ese colegio, sea de noveno?
16. En un colegio hay 50 estudiantes de sétimo, 29 estudiantes de octavo y 43 de noveno. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar de ese colegio, sea de sétimo?
17. En un colegio hay 50 estudiantes de sétimo, 29 estudiantes de octavo y 43 de noveno. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar de ese colegio, sea de octavo?
18. En un colegio hay 50 estudiantes de sétimo, 29 estudiantes de octavo y 43 de noveno. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar de ese colegio, sea de noveno o de octavo?
19. En un colegio hay 50 estudiantes de sétimo, 29 estudiantes de octavo y 43 de noveno. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar de ese colegio, no sea de noveno?

20. Al sacar al azar un ovillo de hilo de una caja que contiene hilos azules, verdes y negros, el evento que sea azul es: ¿probable, es imposible o es seguro?
21. Se saca al azar un ovillo de hilo de una caja que contiene hilos azules, verdes y negros. ¿Cuál es un evento imposible?
22. Se saca al azar un ovillo de hilo de una caja que contiene hilos azules, verdes y negros. ¿Cuál es un evento seguro?
23. Al tirar una red al mar y sacarla, el evento de que no salga un pez en ella es ¿imposible, probable o seguro?
24. Se tiene una baraja de naipes de 52 cartas, el evento de sacar, sin ver, un 6 de diamantes ¿es un evento probable, imposible o seguro?
25. Se tiene una baraja de naipes de 52 cartas, el evento de sacar, sin ver, una carta negra ¿es un evento probable, imposible o seguro?
26. En una urna hay bolas rojas, verdes y moradas. Si se saca una de ellas al azar, el evento de sacar una bola blanca, ¿es un evento seguro, probable o imposible?
27. En una urna hay bolas rojas, verdes y moradas. Si se saca una de ellas al azar, el evento de sacar una bola morada, ¿es un evento seguro, probable o imposible?

Respuestas esperadas

1. Que sea hombre.
2. $\frac{8}{30} \approx 0{,}27\ o\ 26{,}7\%\ aproximadamente$
3. $\frac{5}{30} \approx 0{,}17\ o\ 16{,}7\%\ aproximadamente$
4. $\frac{3}{30} = 0{,}1\ o\ 10\%$
5. $\frac{8}{30} \approx 0{,}27\ o\ 27\%\ aproximadamente$
6. Que sea roja.
7. Que sea negra.
8. Ninguna, son igualmente probables.

9. Que sea amarilla.
10. Color amarillo.
11. Color verde.
12. Son igualmente probables.
13. Un múltiplo de 2.
14. Igualmente probables.
15. $\frac{43}{122} \approx 0{,}352 \ o \ 35{,}24\%$ aproximadamente.
16. $\frac{50}{122} \approx 0{,}4098 \ o \ 40{,}98 \ \%$ aproximadamente.
17. $\frac{29}{122} \approx 0{,}238 \ o \ 23{,}77 \ \%$ aproximadamente.
18. $\frac{72}{122} \approx 0{,}59 \ o \ 59{,}02\%$ aproximadamente.
19. $\frac{79}{122} \approx 0{,}65 \ o \ 64{,}75 \ \%$ aproximadamente.
20. Probable.
21. Sacar un hilo que no sea azul, verde o negro.
22. Sacar un hilo que sea azul, verde o negro.
23. Probable.
24. Probable.
25. Probable.
26. Imposible
27. Probable.

Problema 5: Carreras de autos

Prof. Jorge Jiménez Madrigal

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad
    - La probabilidad de cualquier evento es un valor entre 0 y 1.
    - La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.

Habilidades a desarrollar:

- Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.
- Utilizar las probabilidades para la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Situación problema

Acceda al link:

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/no_equiprob-JS/index.html

Luis y Juan asisten a una carrera y están discutiendo sobre cual carro ganará. Cada carro avanza dependiendo del lanzamiento de dos dados.

En su conversación discuten acerca de los resultados, pues ambos tienen dudas y discuten algunas cosas:

1. Luis comenta que el carro negro tiene más probabilidades de ganar, aunque Juan no está de acuerdo, pero no sabe cómo contradecirlo. Ayude a darle un argumento a Juan para contradecir o no a Luis.
2. Después de 6 lanzamientos de dados el carro verde está a un paso de ganar y el blanco no ha avanzado nada, Luis dice que el juego debe estar arreglado. Comente si Luis está en lo correcto, argumente su respuesta.

3. Juan nota que el carro naranja no avanzó en toda la carrera, Luis le dice que puede que esté descompuesto, pero Juan le dice que es más por cuestión de suerte, pues sí avanzó en la carrera anterior. ¿Es posible que el auto no avance?
4. Al final de una carrera muy reñida todos los carros están a un lanzamiento de ganar. ¿Por cuál se debería apostar? ¿Cuál es la probabilidad de que ese carro gane?
5. Juan comenta que va a traer su carro y será el número 13, aunque Luis se ríe y le dice que nunca ganará. Explique por qué.

Respuestas esperadas

1. No, solo tiene un 3% de probabilidad de ganar.
2. Si es posible.
3. No está descompuesto, si es posible que no se obtenga el lanzamiento necesario en toda la prueba.
4. Apueste por el carro número 7, tiene un 19% probabilidad de ganar.
5. Es imposible que al tirar un dado su suma de 13.

Problema 6: Juegos de azar

Prof. Luis Fernando Piedra Morera

Conocimientos:

- El azar

Habilidades a desarrollar:

- Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas.

Materiales:

- Tarjetas con distintas situaciones cada una donde se debe identificar si es una representación de situaciones aleatorias o deterministas.

Dinámica para desarrollar

1. Se divide el grupo en cuatro equipos, los cuales serán numerados del 1 al 4.
2. A cada equipo se le va a entregar una ficha con distintas situaciones donde debe clasificarlas en deterministas o aleatorias y justificar la respuesta. Tienen un minuto de tiempo para responder. En total se trabajarán con seis fichas.
3. El docente anota en la pizarra las respuestas de cada uno de los equipos y analiza en plenaria la respuesta de cada uno de ellos.
4. Gana el equipo que obtenga mayor puntaje.

Situación problema

Ficha 1: Obtener una manzana de una canasta con 10 manzanas.

Ficha 2: Ganar el primer premio del bingo institucional de la Sección Nocturna del Liceo de Paraíso.

Ficha 3: Sacar una consonante, al azar, de una canasta con las letras del alfabeto.

Ficha 4: Seleccionar al azar, una bola amarilla de un cajón con 10 bolas rojas, 7 bolas negras y 4 bolas amarillas.

Ficha 5: Obtener una bola azul de una caja con 6 bolas azules.

Respuestas esperadas

Ficha 1: Situación determinista.

Ficha 2: Situación aleatoria.

Ficha 3: Situación aleatoria.

Ficha 4: Situación aleatoria.

Ficha 5: Situación determinista.

Problema 7: La probabilidad de ganarme una beca

Prof. María Delfia Sigüenza Quintanilla

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad

Habilidades a desarrollar:

- Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.

Dinámica para desarrollar

1. Se brinda una hoja a cada estudiante en la cual aparece una cuadrícula sin ninguna información.
2. Se le solicita a un estudiante que pregunte la edad a cada uno de sus compañeros de clase.
3. El estudiante debe dictar la información al resto de estudiantes de la clase y ellos deben llenar la cuadrícula.
4. Luego deberán responder por escrito las preguntas generadoras.

Situación problema

La profesora de ciencias de noveno año hará una gira educativa al volcán Barva, ubicado en la provincia de Heredia. La empresa con quien hizo el contrato le ha regalado una beca completa para un estudiante de ese grupo, y como todos están en igualdad de condiciones económicas, ella decide hacer una rifa. A continuación, se presenta una cuadrícula resumen con datos de sus estudiantes: (la cuadrícula está llena con los datos del grupo)

Género	Edad	Cantidad
Femenino	14 años	6
Femenino	15 años	9
Masculino	14 años	3
Masculino	15 años	12

De acuerdo con los datos de la cuadrícula anterior **(suponiendo que esos sean los datos obtenidos después de aplicar la actividad a un determinado grupo**), responde las siguientes preguntas:

1. ¿Te gustaría ganarte la beca?
2. ¿Qué probabilidad existe de que te la ganes?
3. ¿Qué probabilidad existe de que quien se gane la beca sea un hombre de 14 años?
4. Si tu mejor amiga está en otro grupo, ¿qué probabilidad existe de que se gane la beca?
5. Sin importar el género, ¿qué probabilidad existe de que quien se gane la beca sea un estudiante de 14 o 15 años?

Respuestas esperadas

1. Respuesta abierta (aunque probablemente la mayoría de las respuestas sean “si”.
2. Respuesta abierta, que depende da las condiciones de cada estudiante: (evento probable)

3. 3/30
4. Ninguna (evento imposible)
5. 1 (evento seguro)

Problema 8: Representante de baile

Prof. Guisella Trejos Ramírez

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad

Habilidades a desarrollar:

- Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.

Situación problema

La dirección de un colegio decide que cada sección debe escoger a un representante para que participe en un grupo de baile en el Festival Estudiantil de las Artes (FEA). En la sección 10-1, formada por 12 hombres y 14 mujeres, ningún estudiante se ofreció voluntariamente a participar, por lo que decidieron tomar la lista oficial y utilizar el número de cada miembro para realizar la escogencia al azar. Se depositaron en una caja de cartón, únicamente 26 papeles individuales numerados uno a uno, del 1 al 26.

1. ¿Es seguro o imposible que el papel que salga tenga un número del 1 al 26?

2. ¿Es seguro o imposible que el papel que salga este en blanco?

3. ¿Cuál es la probabilidad que el papel corresponda a un número asociado con una mujer?

4. ¿Cuál es la probabilidad que el papel corresponda a un número asociado con un hombre?

Respuestas esperadas

1. Es seguro.
2. Es imposible.
3. 54%
4. 46%

Problema 9: Andando por Costa Rica

Prof. Nelson Ramírez Contreras

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad

Habilidades a desarrollar:

- Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.

Materiales:

- Tablero que se adjunta.
- Un dado y fichas.

INICIO

1


2


3


4


5


6


7


8


9


10


11


12


13


14


15


16


17


18


19


20


21


22


23


24


25


FIN

Dinámica para desarrollar

Participantes: Máximo 4 jugadores y 1 fiscal.

Reglas:

- Cada jugador coloca una ficha en inicio (antes del espacio 1).
- Se debe lanzar un dado y avanzar la cantidad de casillas que correspondan al resultado obtenido. Cada casilla está numerada, el fiscal deberá leer lo que corresponde a esa casilla, en caso de que corresponda una pregunta, deberá verificar si la respuesta es correcta o incorrecta.
- El jugador deberá responder de forma escrita (no verbal).
- El fiscal tiene la lista de preguntas nombradas con el nombre de una provincia o historia, él deberá leer lo que corresponde.

Sentencias del tablero

1)San José (b)	6) Tira de nuevo	11) Puntarenas (a y c)	16) Vamos a recomenzar amigo (vuelve a casilla 1)	21)Guanacaste (b y c)
2) Cartago (c)	7) Alajuela (a, b y c)	12) Guanacaste (a)	17)Historia (a y b)	22) Limón (a)
3) Tiene una inmunidad	8)Cartago (a y b)	13)Avance 3 casillas.	18)El participante que sigue pierde su turno.	23) Estás a salvo
4) Heredia (a y b)	9) Historia (c)	14) Lance el dado y retroceda la cantidad de casillas según el puntaje	19) Heredia (c)	24) Limón (b y c)
5) Vaya a la casilla 11	10) Retroceda 4 casillas	15) San José (a y c)	20) Puntarenas (b)	25) Lanza el dado y retroceda el **doble** de casillas que indique el puntaje

1) San José

San José es la capital de Costa Rica, esta provincia posee 20 cantones y 111 distritos. En ella está concentrada el 32,6% de la población del país, según el INEC.

El AyA necesita realizar racionamientos de agua en algunos distritos de la provincia, después de un sorteo, la lista de posibles cantones se redujo a 4. Escazú, Desamparados, Tarrazú y Aserrí. Cada uno de ellos posee respectivamente: 3, 13, 3 y 7 distritos. Si para comenzar, se desea elegir al azar un distrito de alguno de estos cantones, responda:

a) ¿Cuál cantón tiene mayor posibilidad de que elijan uno de sus distritos al azar?
b) ¿Cuál cantón tiene menor posibilidad de que elijan uno de sus distritos al azar?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se elija al azar un distrito del cantón de Desamparados?

2) Alajuela

Alajuela concentra la segunda mayor cantidad habitantes en Costa Rica con un 19,7%. En ella se encuentra el aeropuerto más grande del país (Aeropuerto Internacional Juan Santamaría).

Según datos del periódico la nación, en promedio, al día arriban 72 vuelos internacionales, 65 viajes locales y 8 aviones de carga.

Se desea entrevistar al piloto de uno de los aviones que lleguen un día específico. Responda lo siguiente:

a) ¿Cuál es el tipo de vuelo cuyos pilotos tienen más posibilidades de ser escogidos al azar?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se elija al azar un piloto de un avión de carga?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se elija al azar un piloto de un avión que realiza un viaje local?

3) Cartago

Cartago fue originalmente la capital de Costa Rica hasta el año 1823 cuando esta fue establecida definitivamente en San José. Es una zona agrícola y montañosa. Dentro de sus principales atractivos turísticos se encuentran 4 centros religiosos, 5 parques nacionales, 3 centros de estudio y 12 restaurantes típicos.

Se desea elegir **al azar** uno de todos esos lugares para empezar un tour por la ciudad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un centro religioso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el sitio escogido sea un parque nacional o centro de estudio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja un restaurante típico para comenzar con el tour por la ciudad?

4) Heredia

Heredia es la provincia con menor extensión territorial del país, sin embargo, es una de las zonas urbanas más pobladas en Costa Rica. Esta provincia es bien conocida por sus tradiciones; cimarrona, mascarada, procesiones, fiestas y turnos en honor a sus patronos.

Los cantones de Heredia son: Heredia, Barva, Belén, Flores, San Isidro, San Pablo, San Rafael, Santa Bárbara, Santo Domingo y Sarapiquí. Si se elige al azar uno de los cantones:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este tenga el nombre de un Santo o Santa?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el nombre del cantón comience con la letra B?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que este cantón no tenga el nombre de un Santo o Santa?

5) Guanacaste

En esta provincia se concentra la menor cantidad de la población del país con un 7,6%. Es una provincia que colinda con Nicaragua, Alajuela, Puntarenas y el océano Pacífico. Es una zona muy turística.

En Guanacaste hay 106 colegios en total, 18 de esos colegios son Técnicos, 11 son colegios Rurales. Si se elige un colegio al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este sea Técnico?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un colegio al azar, este no sea Técnico?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un colegio al azar, este no sea Rural ni Técnico?

6) Puntarenas

Es la provincia más grande del país, su población es en su mayoría rural. Es una zona costera por lo que uno de sus principales motivos económicos es la pesca y el turismo de playa.

La temporada de cruceros 2018-2019 tiene prevista la llegada de 90 cruceros, de estos, 27 son de Smyth Intl, 43 de la empresa S.M.C.A., 3 de la empresa Transmares y 17 de San S.A.

Si se avista un crucero durante un paseo a la playa:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este pertenezca a la empresa S.M.C.A.?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el crucero no sea de Transmares?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el crucero sea de Smyth o de San S.A.?

7) Limón

Una de las principales características de esta provincia es su acentuada diversidad cultural, tiene una importante cantidad de pobladores afrodescendientes, así como comunidades indígenas, blancas y chinas. Es un territorio rico en flora y fauna.

Además, Limón posee los principales puertos de comercio exterior del país.

En cuanto a la temporada de cruceros 2017-2018 Limón fue visitado por 115 buques de los cuáles 19 son de Prince Cruise, 18 son de Holland América, 12 de Monarch y el resto de distintas compañías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que si se avistó un crucero en esa temporada ese haya sido de Prince Cruise?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al haber observado un crucero, este haya sido de una compañía distinta a las 3 descritas en el encabezado?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al avistar un crucero y que este sea de Holland América?

8) Historia

En Costa Rica hay 27 áreas protegidas, de las cuales 4 se ubican en Alajuela, 3 en Cartago, 7 en Puntarenas, 3 en Limón y 1 en Heredia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un área protegida esta se ubique en una provincia que no sea Puntarenas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a elegir al azar un área protegida esta se ubique en Cartago?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que a elegir al azar un área protegida esta se ubique en la provincia de Heredia?

Respuestas esperadas

San José

a) Desamparados
b) Escazú
c) $\frac{1}{2}$ o 0,5

Alajuela

a) Vuelos internacionales
b) $\frac{8}{145}$ o 0,06
c) $\frac{65}{145}$ o 0,45

Cartago

a) $\frac{1}{6}$ o 0,17
b) $\frac{1}{3}$ o 0,33
c) $\frac{1}{2}$ o 0,5

Heredia

a) $\frac{1}{2}$ o 0,5
b) $\frac{1}{5}$ o 0,2
c) $\frac{1}{2}$ o 0,5

Guanacaste

a) $\frac{9}{53}$ o 0,17
b) $\frac{44}{53}$ o 0,83
c) $\frac{77}{106}$ o 0,0,73

Puntarenas

a) $\frac{43}{90}$ o 0,48
b) $\frac{87}{90}$ o 0,97
c) $\frac{44}{90}$ o 0,49

Limón

a) $\frac{19}{115}$ o 0,17
b) $\frac{66}{115}$ o 0,57
c) $\frac{18}{115}$ o 0,16

Historia

a) $\frac{20}{27}$ o 0,74
b) $\frac{1}{9}$ o 0,11
c) $\frac{1}{27}$ o 0,04

Problema 10: Representante de baile

Prof. Karla Vargas Quirós

Conocimientos:

- Eventos más probables, menos probables e igualmente probables.

Habilidades a desarrollar:

- Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre un número de resultados favorables entre el número total de resultados.

Situación problema

En el Liceo de Tierra Blanca, se está realizando una feria institucional, en la que los estudiantes participan de un juego del dado, conocido como el **"el dado loco".** El juego consiste en utilizar la simulación https://www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm , en la que se lanza el dado 15 veces, se va sumando el número obtenido en cada lanzamiento y al final gana la persona que acumule la suma más alta de puntos.

1. Ingrese al simulador de "lanzamientos de un dado cargado".
2. Presiona la tecla "valores y ocurrencia".

3. Escriba 15 en el número de veces que quiere que se lance le dado.
4. Presione la tecla lanzar el dado.

De acuerdo con la situación problema responda las siguientes preguntas:
1) ¿Cuántos puntos tiene el espacio muestral del dado?
2) Para este dado: ¿serán los puntos muestrales igualmente probables?
3) Calcule la probabilidad frecuencial de obtener un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.
4) Compare estas probabilidades obtenidas en el inciso 3 con la probabilidad teórica: ¿se acercan las probabilidades frecuenciales a las probabilidades teóricas?
5) Lancen el dado 1000 veces y vuelva contestar las siguientes preguntas:

5.1) Calcule la probabilidad frecuencial de obtener un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.

5.2) Compare estos resultados obtenidos en el punto anterior, con la probabilidad teórica: ¿se acercan las probabilidades frecuenciales a las probabilidades teóricas?

6) ¿Considera que existe duda de que unos resultados son más probables que otros? ¿Qué cree que es lo que sucede?
7) Con base en estos valores que obtuvieron en la utilización de la herramienta tecnológica; indique si los participantes tienen probabilidad de ganar el juego, ¿es un juego justo?

Respuestas esperadas

1) Ω = {1,2,3,4,5,6}
2) Si con seguridad sabemos que el dado es correcto, pues sí.
3) Estos resultados dependen de la interacción de cada persona con la aplicación. Lo ideal es que los estudiantes realicen los 15 lanzamientos y obtener las probabilidades frecuenciales.
4) No se acercan a las probabilidades teóricas.
5) 5.1) Estos resultados varían cada vez que se lance el dado en la aplicación.

5.2) No, Tiene más probabilidad el 5 y 6.

6) Si existe duda pues no hay coincidencia de la probabilidad teórica con la frecuencial, el dado está cargado.
7) Depende de la cantidad de lanzamiento, además el juego no es muy justo pues el dado está cargado.

Problema 10: La ruleta

Prof. Adriana González Dobrosky

Conocimientos:

- Definición laplaciana de probabilidad

Habilidades a desarrollar:

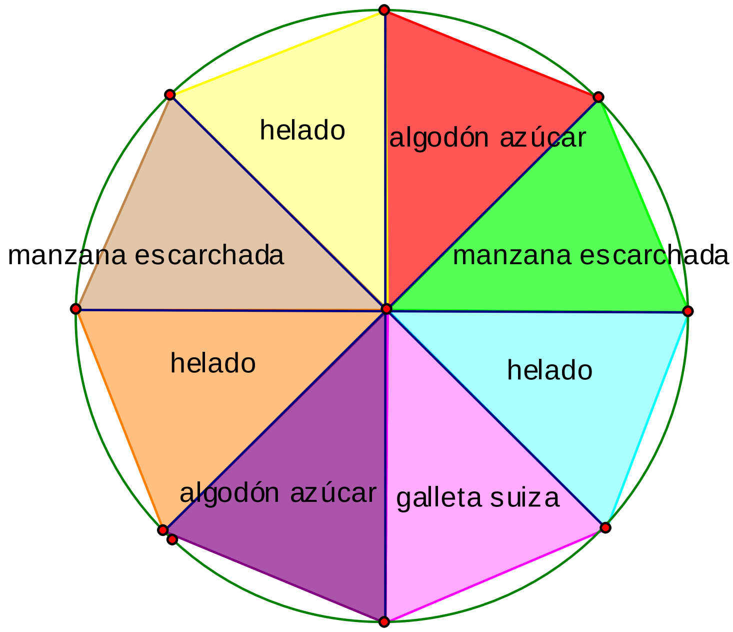
- Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el total de resultados.

Situación problema

En el colegio se acerca la celebración del día del niño, siempre se hacen actividades que involucren juegos tradicionales y como parte de las actividades se ha montado una feria. Cuando un estudiante participa y gana un juego, debe girar la ruleta para reclamar su premio.

Marcelo, después de haber ganado al juego de los dardos se acerca a la ruleta y debe girarla.

Según las condiciones de la ruleta en la figura adjunta, donde cada sector es congruente con cada uno de los otros, responda a las interrogantes:



1. ¿Cuántas divisiones tiene en total la ruleta?
2. ¿Cuál es la probabilidad de hacer girar la ruleta y obtener por premio un algodón de azúcar?
3. ¿Cuál es la probabilidad de hacer girar la ruleta y obtener por premio un helado?
4. ¿Cuál es la probabilidad de hacer girar la ruleta y obtener por premio una galleta suiza?
5. ¿Cuál de todos los premios tiene menor probabilidad de obtener Marcelo?
6. ¿Cuál de todos los premios tiene mayor probabilidad de obtener Marcelo?
7. Al girar la ruleta, ¿cuál de los premios tiene más posibilidad de salir, la manzana escarchada o el algodón de azúcar?
8. Al girar la ruleta, ¿cuál de los premios tiene más posibilidad de salir, el helado o la galleta suiza?
9. ¿Cómo sería el juego más justo?
10. Marcelo es amante de las galletas suizas y desea con todo corazón ganar ese premio, después de responder los cuestionamientos anteriores ¿qué le diría usted a Marcelo, antes de girar la ruleta?

Respuestas esperadas

1. 8 divisiones.

2. $\frac{1}{4}$

3. $\frac{3}{8}$

4. $\frac{1}{8}$

5. La galleta suiza

6. Un helado

7. Ambos premios tienen la misma probabilidad de salir.

8. El helado tiene más posibilidad de salir como premio en comparación a la galleta suiza.

9. Una manera es: de las ocho divisiones que posee la ruleta, colocar cuatro premios diferentes, cada uno ubicado, en dos sectores de la ruleta.

10. Le explicaría a Marcelo, que la probabilidad de obtener su premio deseado es la más baja de todas, pero aún, así tiene posibilidad de obtenerlo.

Noveno año

Problema 1: Chepe se baña

Prof. Nelson Ramírez Contreras

Conocimientos:

- Probabilidad frecuencial

Habilidades a desarrollar:

- Identificar eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando el concepto clásico.
- Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral.

Situación problema

Un programa de televisión en Costa Rica ha creado un juego que le permite recoger fondos para una ONG llamada "Chepe se baña". El juego consiste en que durante un segmento de 10 minutos de programa 10 voluntarios "apuestan" 1000 colones en una carrera de autos virtual, con la opción de llevarse un premio de 10 000 colones. La producción del programa tiene un auto (no paga por jugar), de manera que existen 11 autos en competencia. En caso de que gane la producción, el dinero se va para la cuenta bancaria de la organización de beneficencia. Se jugará tantas veces como sea posible durante el segmento de 10 minutos.

Generalidades:

- Se pagan los 1000 colones y se elige un auto al azar del #2 al #12 (que no sea el 7, pues ese siempre lo elige la producción).
- En la siguiente dirección se encuentra el programa que simula la carrera: https://www.geogebra.org/m/AHzyCcDb
- Se lanzan dos dados y la suma de los puntos obtenidos indica cuál es el auto que se moverá.

Suponga que durante un programa pudieron hacer 10 carreras (es decir, participaron 100 personas).

Preguntas:

1. De esas 10 ocasiones en las que se hizo la actividad, ¿cuántas veces ganó la producción?, ¿cuántas veces ganó una persona distinta a la producción?
2. ¿Cuál auto ganó en más ocasiones?
3. ¿Cuál o cuáles autos no ganaron ninguna vez?

4. ¿Por qué cree que la producción del programa siempre elige el auto número 7?
5. De los autos que no ganaron ninguna vez, ¿siempre será así o puede ser que gane alguna vez?
6. ¿Es justo el juego?
7. ¿Qué cambios haría en las reglas para que sea más justo?
8. En el primer lanzamiento de dados, ¿cuál es la probabilidad que tiene cada uno de los 11 autos de avanzar?

Respuestas esperadas

1, 2 y 3 dependen de los resultados de la animación.

4. Puesto que el 7 tiene más posibilidades de salir, ya que hay más combinaciones que dan como resultado 7 que cualquier otro resultado. Estas son $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

5. Podrían ganar, sin embargo, es menos probable, por ejemplo, para que se mueva el 2 o el 12 sólo existe una combinación posible, lo que contrasta con el 7 que tiene seis posibles combinaciones favorables.

6. No es completamente justo, puesto que todos pagan la misma cuota para participar, pero no todos tienen la misma probabilidad de ganar. Entonces va a depender de cuál número elija.

7. Existen muchas formas de hacer que el juego sea más justo, por ejemplo, disminuir el número de autos en juego, y quedarse solamente con aquellos números que su suma al lanzar los dados tenga el mismo número de combinaciones.

8. La probabilidad de que avance el auto 2 es de 1/36, la del 3 es de 2/36, la del 4 es de 3/36, la del 5 es de 4/36, la del 6 es de 5/36, la del 8 es de 5/36, la del 9 es de 4/36, la del 10 es de 3/36, la del 11 es de 2/36 y la del 12 es de 1/36.

Problema 2: Dado social

Prof. Jessica Chacón Piedra

Conocimientos:

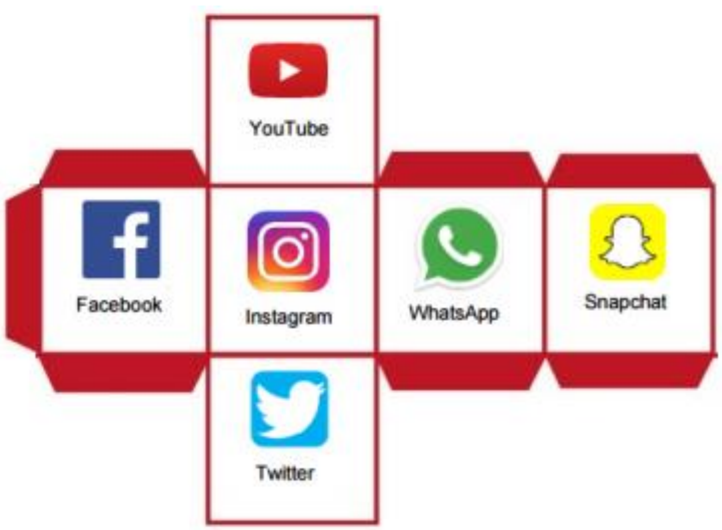
- Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico)
- Introducción a la ley de los grandes números.

Habilidades a desarrollar:

- Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral es infinito o indeterminado.

Materiales:

- Cartulina
- Tijeras
- Goma
- La imagen del dado social



Dinámica para desarrollar

1. Se formarán grupos de 4 personas y se asignarán un “Nick”.
2. Cada equipo debe elaborar el “dado social”, utilizando la cartulina y la imagen anterior.
3. Deben completar la siguiente guía:

a) Cada integrante del equipo debe lanzar el dado 4 veces y anotar los resultados obtenidos en la tabla que se presenta a continuación:

Red social	**Jug 1**	**Jug 2**	**Jug 3**	**Jug 4**
Facebook				
YouTube				
WhatsApp				
Instagram				
Twitter				
Snapchat				

¿Cuál es la red social que tiene más probabilidad de salir?

b) Si se realiza el mismo experimento, pero cada jugador aumenta la cantidad de lanzamientos a 6 y luego a 10, ¿cambiará la respuesta?

c) Cada grupo compara sus respuestas y socializa los resultados obtenidos.

d) Se le solicita a cada grupo contestar las siguientes preguntas:

d.1) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado Facebook?
d.2) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado YouTube?
d.3) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado una red social en la que se pueda mensajear (chatear)?

d.4) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado una red social en la que se pueda postear fotos?
d.5) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado una red social en la que se pueda compartir (enviar) videos?

Respuestas esperadas

a) Depende de lo que indiquen los dados al lanzarlos.
b) Si cambia la respuesta.
c) Actividad que se realiza en clase, el docente debe propiciar una discusión interactiva.

d.1) $\frac{1}{6} = 0{,}16$

d.2) $\frac{1}{6} = 0{,}16$

d.3) $\frac{2}{6} = 0{,}33$ (WhatsApp, Instagram)

d.4) $\frac{4}{6} = 0{,}66$ (Twitter, Snapchat, Instagram, Facebook)

d.5) $\frac{6}{6} = 1$ (Twitter, Snapchat, Instagram, Facebook, YouTube, WhatsApp)

Problema 3: ¿Quién inicia primero?

Prof. Orlando Solano Ramírez

Conocimientos:

- Ley de los grandes números.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar que, para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima hacia la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta.

Situación problema

Dos estudiantes de noveno año utilizan un dado para determinar cuál inicia de primero un juego, lo hará el que obtenga el número más alto al realizar el lanzamiento. Después de realizar el primer lanzamiento, les surge la inquietud de saber si conforme se lanza el dado un determinado número de veces, los resultados serán siempre iguales o variarán. El profesor de Matemáticas aprovechando la inquietud, les propone a ellos y a todo el grupo, la siguiente guía de trabajo. Se toma como punto de partida que tienen instalado GeoGebra y acceso a internet para el link que él les dará.

Antes de plantear la guía de trabajo se les dice a los estudiantes que se resolverá en subgrupos de 5 personas y que deben nombrar un relator o representante para que lea las conclusiones de lo que realizaron.

- Abrir el link https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs#material/cqdFkXpD
- Observe la tabla de la izquierda y el diagrama de la derecha. Representan los resultados de haber lanzado un dado 10 veces. Luego haga clic en el cuadro que dice ver probabilidades teóricas. Escriba en su cuaderno lo que observa.
- Escriba el número que más se repitió y el que menos lo hizo. Haga clic en el cuadro que dice “ver probabilidades teóricas”. Escriba en su cuaderno lo que observa.
- Copie en su cuaderno la tabla y el diagrama.
- Haga clic en el botón “Lanza una vez” y observe los cambios en la tabla y diagrama. Luego haga clic en el cuadro que dice “ver probabilidades teóricas”.

  Haga clic en el botón “reiniciar” y simula el lanzamiento del dado de nuevo 10 veces haciendo clic en el botón de pausa y responda las preguntas del punto 3). Vuelva hacer clic en el cuadro que dice ver probabilidades teóricas.
- Si tuviera que responder anticipadamente el número que más se repetirá después de 100 lanzamientos, ¿por cuál te inclinarías y por qué?
- Haga clic en el botón play para “lanzar muchas veces” y observa los cambios poniendo pausa hasta que se completen 100 lanzamientos. Haga clic en el cuadro que dice ver probabilidades teóricas. Escriba en su cuaderno lo que observa.

- Copia en tu cuaderno la tabla y el diagrama.
- Repite el punto 8) quitando la pausa y observa los cambios hasta que se completen 1000 lanzamientos. Haga clic en el cuadro que dice ver probabilidades teóricas. Escriba en su cuaderno lo que observa.
- Copia en tu cuaderno la tabla y el diagrama.
- Compare las tablas y diagramas de los puntos 4), 9) y 10). ¿Sucedió algo notorio con los resultados de las tablas y con los diagramas?
- Escriba detalladamente sus conclusiones.

Respuestas esperadas

En general, la actividad tiene que ver con la Ley de los grandes números que plantea que entre más veces se realice un experimento su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima a la probabilidad clásica.

Problema 4: Muestreo estadístico

Prof. Tatiana Quirós Quirós

Conocimientos:

- Muestreo estadístico.

Habilidades a desarrollar:

- Identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico.

Dinámica para desarrollar

En grupos de tres personas, se les pide a los estudiantes que escojan 5 números cualquiera del 1 al 30. Luego se les pide que vayan a tres aulas de noveno año y que busquen a las personas que tienen esos números en la lista de clase, y les pregunten su estatura. Al final deberán tener 15 datos y de ellos sacar el promedio.

Luego con el resto del grupo se comparten los resultados para saber qué tan parecidos salieron los datos.

Situación problema

Alexander desea saber la estatura promedio de los estudiantes de noveno año del Colegio Técnico Profesional Santa Lucía. Para ello quiere utilizar una muestra aleatoria de 15 personas. Según los datos recolectados, ¿cuál es la estatura promedio de estos estudiantes?

Respuestas esperadas

Se comparan todos los resultados obtenidos por los 10 grupos formados y de todos estos datos se saca un promedio general.

Décimo año

Problema 1: Decisión con moneda

Prof. Adriana González Dobrosky

Conocimientos:

- Eventos

Habilidades a desarrollar:

1. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.
2. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Situación problema

Tres amigos: Ana, Boris y Carlos tiene una entrada gratuita para un evento deportivo y quieren determinar cuál de ellos disfrutará de la entrada, para ello, deciden lanzar dos monedas al aire, usarán una simulación de un experimento aleatorio que el profesor de matemática les facilitó, ese programa cuenta las veces que cae cara al lanzar dos monedas, utilizarán 50 lanzamientos al aire.

Cada uno de ellos define un evento con respecto al espacio muestral del experimento antes descrito, con la intención de ganar esa entrada gratuita obteniendo la mayor probabilidad que le permita ganar.

Los eventos que definen son:

Ana: obtener cero caras.

Boris: obtener una cara.

Carlos: obtener dos caras.

Dinámica para desarrollar

Utilice el link adjunto, https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs#material/nUZQCReV

donde una aplicación del programa Geogebra, le ayudará a simular la situación problema antes mencionada y así poder dar respuestas a las siguientes interrogantes.

1. Anote la cantidad de veces que se obtuvieron cero caras, una cara y dos caras con ayuda del programa.
2. Anote las frecuencias relativas que se obtuvieron para los eventos obtener cero caras, obtener una cara y obtener dos caras, estas mismas vienen en la tabla de la simulación en GeoGebra".
3. ¿En probabilidad qué representan estas cantidades, obtenidas en la pregunta anterior?
4. Ustedes consideran que Ana tiene la menor probabilidad de ganar, justifique su respuesta.
5. Es cierta la afirmación: “Ana y Boris tienen la misma probabilidad de ganar”, justifique su respuesta.

6. ¿Quién creen ustedes que escogió el evento menos favorable para ganar la entrada? Justifique su respuesta.
7. Por lo tanto, ¿quién tiene más probabilidad de asistir al evento deportivo?
8. Seleccionar la casilla de "Ver probabilidades teóricas" que viene en la simulación para que pueda verificar las respuestas a las preguntas anteriores. En ella puede calcular la probabilidad del espacio muestral.
9. ¿Qué diferencia existe entre esta probabilidad teórica y la que se obtuvo en los 50 lanzamientos?

Respuestas esperadas

Nota: tome en cuenta que las respuestas variarán dependiendo lo que se obtenga al utilizar la aplicación de GeoGebra.

1. Un ejemplo con 50 lanzamientos es el siguiente:

Caras	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
0	13	0.26
1	21	0.42
2	16	0.32
Totales	50	1

2. Un ejemplo es el siguiente:

Caras	**Frecuencia relativa**
0	0.26
1	0.42
2	0.32
Total	1

3. Estos valores decimales nos ayudan a interpretar porcentualmente la situación aleatoria:

Caras	**Frecuencia porcentual %**
0	26
1	42
2	32
Total	100

4. Según el programa de simulación, para 50 lanzamientos, Ana obtiene una frecuencia absoluta de 13 aciertos de 50, una probabilidad de 0,26. Ella obtuvo la probabilidad más baja.
5. No, basándonos en los resultados anteriores, Boris obtuvo una mayor probabilidad de ganar.
6. Para contestar con mayor certeza, podríamos hacer muchas más veces el experimento, pero utilizando los datos que tenemos, sería Ana.
7. Boris, con una probabilidad de 0,42.
8. El espacio muestral es {(E,E), (C,C), (C,E), (E,C)}, la probabilidad de tener **una cara**s es de $\frac{2}{4}$, la probabilidad de **cero caras** $\frac{1}{4}$ y la de **dos caras** es de $\frac{1}{4}$.
9.

Caras	**Frecuencia relativa del experimento**	**Frecuencia relativa teórica**
0	0.26	0.25
1	0.42	0.50
2	0.32	0.25
Totales	1	1

Problema 2: La ley de los grandes números

Prof. Paulina Coto Mata

Conocimientos:

- Probabilidad.

Habilidades a desarrollar:

- Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.
- Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.
- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados.
- Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Dinámica para desarrollar

Estimado estudiante, primero que todo darle clic al enlace que se presenta a continuación:

https://www.geogebra.org/m/ZDuHq64w

Le aparecerá la siguiente imagen:

Una vez que usted abrió el programa de GeoGebra, empezaremos a trabajar.

Primero cambie el número de sectores a 6, en el sector donde indica **número de sectores.** Y responda las siguientes preguntas.

1. Tire 10 veces la ruleta, e indique en cual número cayó la flecha en cada lanzamiento.
2. ¿Considera usted que es más fácil obtener un número par o impar en el lanzamiento de la ruleta?
3. Cambie el número de sectores a 7 y nuevamente gire 10 veces.
4. Anote el número obtenido en cada lanzamiento.
5. ¿Considera usted que es más fácil obtener un número par o impar en el lanzamiento de la ruleta?
6. ¿Qué conjetura puede usted obtener al cambiar el número de sectores?
7. Determine la probabilidad de que el número sea par o impar con 6 sectores.
8. Determine la probabilidad de que el número sea par o impar con 7 sectores.
9. Determine la probabilidad que el número sea menor o igual a 4, con 6 sectores.

10. Determine la probabilidad que el número sea par o menor o igual a 4 con 7 sectores.

Respuestas esperadas

1. Depende del lanzamiento que se haya realizado.
2. Tienen la misma probabilidad.
3. Se realiza con la aplicación de GeoGebra.
4. Depende del lanzamiento que se haya realizado.
5. Es más probable obtener un número par.
6. Aumentó la probabilidad de obtener un número par.
7. $\frac{1}{2}$ para ambos casos.
8. $\frac{4}{7}$ es la probabilidad de obtener un número par y $\frac{3}{7}$ es la probabilidad de obtener un número impar.
9. $\frac{2}{6}$
10. $\frac{3}{7}$

Problema 3: Busquemos al ganador de la lotería

Prof. Jessica Chacón Piedra

Conocimientos:

- Reglas básicas de probabilidad.

Habilidades a desarrollar:

- Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Dinámica para desarrollar

Ariana desea conocer si en la lotería salen más números en los siguientes grupos:

Grupo #1	Grupo #2	Grupo #3	Grupo #4
0 al 24	25 al 49	50 al 74	75 al 99

Por lo que decide usar la aplicación "Lotería Primitiva" para generar 10 posibilidades de 6 números, por lo tanto, debe seguir los siguientes pasos:

a) Ingrese a la aplicación mediante el link:
https://www.geogebra.org/m/NACPp66v#material/RWEa2xvm

b) Para determinar las posibilidades debe seleccionar una nueva combinación de números al hacer "clic" en la parte superior de los números en "Otra combinación".

c) Debe anotar los números obtenidos en la siguiente tabla:

	Primer número	Segundo número	Tercer número	Cuarto número	Quinto número	Sexto número
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

d) Posteriormente deberá calcular las siguientes probabilidades y responder las preguntas:
   i. Determine la probabilidad que salga un número de cada grupo.
   ii. Determine ¿cuáles números son los que podría comprar?
   iii. ¿Qué números son los que menos salen?
   iv. ¿Qué números compraría si desea ganar la lotería?

Respuestas esperadas

Se están calculado probabilidades frecuenciales, por tanto, las respuestas varían cada vez al obtener una combinación de la aplicación de GeoGebra.

Problema 4: Experimento para ganar la lotería

Prof. María Delfia Singuenza Quintanilla

Conocimientos:

- Eventos excluyentes.

Habilidades a desarrollar:

- Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.

Dinámica 1

- Se brinda una hoja a cada pareja de estudiantes y una computadora del laboratorio móvil
- Se les indica a los estudiantes que lean el documento “guía de trabajo”.
- Los estudiantes deberán realizar la guía de trabajo.

Situación problema 1

Carolina es una joven de escasos recursos económicos, que sueña a diario con hacerse millonaria. Por lo que decide investigar sobre la lotería nacional e internacional.

Navegando un rato en internet, encuentra una página que habla sobre la "lotería primitiva" y ella piensa en si se podrá hacer millonaria jugando este tipo de lotería. ¿Podrías ayudarle a Carolina a investigar un poco sobre la probabilidad de ganar este tipo de lotería?

Preguntas generadoras:

1. ¿Sabes qué es la lotería primitiva? Si tu respuesta es negativa tómate unos minutos y averigua en internet
2. ¿Te gustaría jugar, sin invertir dinero este tipo de lotería?
3. ¿Cómo se juega este tipo de lotería?
4. Ingresa al siguiente link para que juegues 5 minutos: https://www.geogebra.org/m/NACPp66v#material/RWEa2xvm
5. ¿Cómo te fue? ¿Cuántas veces ganaste el juego?
6. Si Carolina juega 5 veces la lotería, ¿Qué probabilidad tendrá de hacerse millonaria?
7. ¿Conoces algún juego en Costa Rica que sea parecido al juego anterior? Descríbelo.

Respuestas esperadas 1

1. La lotería primitiva es un juego de azar que se juega en España y que consiste en adivinar 6 números.
2. Respuesta abierta.
3. Ver respuesta 1.
4. En este espacio los estudiantes juegan la lotería virtual
5. Respuesta abierta
6. Respuesta abierta

7. Lotto. Es un juego implementado por la lotería nacional que consiste en acertar 5 números del 1 al 40.

Dinámica 2

- Se brinda una hoja a cada pareja de estudiantes y una computadora del laboratorio móvil
- Se les indica a los estudiantes que lean el documento “guía de trabajo”.
- Los estudiantes deberán realizar la guía de trabajo.

Situación problema 2

Carolina decidió que preferirá jugar la lotería nacional “lotto” la cual es similar a la lotería primitiva, pero aún no está segura de cómo se juega. ¿le puedes ayudar respondiendo sus interrogantes?

Preguntas generadoras:

1. ¿Sabes cómo se juega “lotto” en Costa Rica?
2. ¿Cuáles son las reglas para jugar este juego?
3. Ingresa al siguiente link para que juegues 5 minutos adicionales: https://www.geogebra.org/m/NACPp66v#material/RWEa2xvm
4. ¿Cómo te fue? ¿Cuántas veces ganaste el juego?
5. ¿Podría caer en dos bolitas el mismo número?

Respuestas esperadas 2

1. Respuesta abierta
2. La lotería “lotto”

¡VOS TAMBIÉN PODÉS TENERLO TODO!

ES TAN FÁCIL COMO ESCOGER 5 NÚMEROS DEL 00 AL 40 O GALLO TAPADO.

¡Pedí Lotto con Revancha por solo mil colones!

Por ¢600 jugá el acumulado de Lotto y por ¢400 adicionales jugalo con Revancha.

¡Dos oportunidades, dos acumulados!

Con los mismos 5 números escogidos participás en dos sorteos. Primero se realiza el sorteo de Lotto donde se extrae cinco números del 00-40 y posterior a este sorteo, se realiza de forma inmediata el sorteo de Lotto Revancha para extraer otros cinco números del 00 al 40

Para cada sorteo, si acertás 5 números sin importar el orden, te llevarás EL GRAN ACUMULADO MILLONARIO.

Si acertás 4, 3 o 2 números, ganás premios de consolación.

Los sorteos se realizan miércoles y sábado a las 7:30 p.m. El sorteo de Revancha se realiza inmediatamente después del sorteo de Lotto. El acumulado de Revancha se incrementa de manera independiente del acumulado de Lotto.

3. En este espacio los estudiantes juegan, nuevamente, la lotería virtual
4. Respuesta abierta
5. No

Luego de analizar las respuestas con los estudiantes, la docente puede hacer preguntas abiertas sobre la rentabilidad de los juegos de azar para los jugadores y para el dueño del negocio.

Se puede abordar también, cuánto dinero se gana o pierde, dependiendo de las condiciones de cada jugada.

De igual forma se puede explicar que si tomamos dos bolas al azar del juego, en ellas nunca va a estar el mismo número simultáneamente y que a esto se le puede asociar con eventos mutuamente excluyentes en un mismo juego.

Luego se les puede pedir a los estudiantes, ya con el concepto intuitivo, que den otros ejemplos de eventos mutuamente excluyentes.

Referencias

Acuña, R. y Chinchilla, J. (2015). *Estadística y Probabilidad para profesores de matemática*. Recuperado de: https://www.drea.co.cr/sites/default/files/Contenido/Sesion%20N°4_Folleto%20con%20actividades_Actualizado%20al%2027%20junio.pdf

Asamblea legislativa de la República de Costa Rica. (1990). *Ley 7169: LEY DE PROMOCIÓN DEL DESARROLLO CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO*. Recuperado de: http://proyectos.conare.ac.cr/asamblea/20162.pdf

Benítez, S. y Benítez, L. (2013). *La resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Recuperado de: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1360.pdf

Calderón, C. y Ramírez, G. (2015). *Probabilidad*. Jornada de capacitación CIEMAC-Alajuela. Montevideo, Uruguay. Recuperado de: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1271.pdf

Consejo Nacional de Rectores (2015). *Plan Nacional de la Educación Superior Universitaria Estatal 2016-2020*. Recuperado de: http://www.siteal.iipe.unesco.org/sites/default/files/sit_accion_files/6126.pdf

Estado de la Educación. (2013). *Programa Estado de la Nación. Cuarto informe estado de la educación*. Recuperado de http://repositorio.conare.ac.cr/handle/20.500.12337/672

Estado de la Educación. (2015). *Programa Estado de la Nación. Quinto informe estado de la educación*. Recuperado de http://www.conape.go.cr/wp-content/uploads/2016/10/Investigacion-Perfiles-de-Beneficiarios1.pdf

Feliciano, A., Cuevas, R. y Feliciano, S. (2011). *Geometría analítica*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/273380432_GEOMETRIA_ANALITICA_Libro_de_texto_utilizado_en_la_UAI_de_la_UAGro

González, F. (1996). *Geometría Analítica*. Editorial UNED.

Lehmann, C. (1980). *Geometría Analítica*. México: Editorial Limusa.

Meza, G. (2003). *Hacia perfiles de cambio en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: un caso de estudio en sétimo año de un colegio oficial urbano*. Revista Virtual de Posgrado de la UNED. (Tesis de doctorado inédita). Programa de Doctorado en Educación. Universidad Estatal a Distancia.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Reforma curricular en ética, estética y ciudadanía programas de estudio de matemáticas I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Costa Rica. Recuperado de: https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Rincón, L. (2017). *Curso elemental de probabilidad y estadística*. Recuperado de: https://www.cimat.mx/~pabreu/LuisRinconI.pdf

Salazar, L. (2017). *Invención de problemas contextualizados de probabilidad: una competencia por desarrollar en profesores de Matemáticas*. Revista Comunicación, 26(2-17), 38-48. https://doi.org/10.18845/rc.v26i2-17.3443

Sánchez, M. (2000*). Una nueva mirada a los procesos de lectura y escritura*. (Tesis de doctorado inédita). Programa de Doctorado en Educación. Universidad Estatal a Distancia.

Serrano, J. (s.f.). *Ejercicios resueltos del tema de estadística y probabilidad para Bachillerato por Madurez*. Recuperado de: https://www.mep.go.cr/sites/default/files/recursos/recursos-interactivos/educ_abierta/mate_secundaria/areas/estadistica/estadistica_juanpa.pdf

Vargas, C. (2016). *Diagnóstico de necesidades sobre formación continua en personas docentes colegiadas*. DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PROFESIONAL Y PERSONAL. ÁREA DE INVESTIGACIÓN. COLEGIO DE LICENCIADOS Y PROFESORES EN LETRAS, FILOSOFÍA, CIENCIAS Y ARTES. Recuperado de: http://colypro.com/ee_uploads/noticias/Informe_sobre_encuesta_virtual_sobre_necesidades_de_capacitacion_dic_2015_1.pdf

Verdoy, P. J.; Beltrán, M. J. y Peris, M. J. (2015). *Problemas resueltos de estadística aplicada a las ciencias sociales*. Publicacions de la Universitat Jaume I. DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia100

Ejercicios de la página www.khanacademy.org