

**Instituto Tecnológico de Costa Rica**

**Escuela de Matemática**

**“Análisis de las estrategias de solución de problemas utilizadas por estudiantes de undécimo año del Liceo Daniel Oduber Quirós y su relación con los pasos que contemplan los programas de estudio de matemáticas en secundaria del Ministerio de Educación Pública”**

para optar por el título de

**ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA CON ENTORNOS TECNOLÓGICOS**

con el grado académico de

**LICENCIATURA**

Carmen Aracely Hernández López  
María Nazarelle Rojas Machado

Cartago Febrero, 2021

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado en su forma presente por el Tribunal Examinador del Programa de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado de Licenciado en la Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos.

---

Lic. Gabriela Roldán Villalobos  
Representante de dirección de la Escuela de Matemática

---

Lic. Paulo García Delgado  
Coordinador Carrera “Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos”

---

Mag. Marcela Marrero Calvo  
Lectora

---

Dr. Erick Chacón Vargas  
Lector

---

Mag. Randall Blanco Benamburg  
Director del Proyecto Final de Graduación

## **AGRADECIMIENTOS**

### **- Carmen Aracely Hernández López**

Sin lugar a dudas, el poder finalizar este trabajo es mérito de Dios en primer lugar. También es fruto del esfuerzo y dedicación de mi mamá y de mi papá, del apoyo y carisma de mis hermanos, de mi toda mi amada familia que a la distancia me brinda su fuerza, del ahínco de mis profesores de la Escuela de Matemática en su labor y del aporte de la institución educativa partícipe de este estudio. Hago especial mención de la incomparable guía de esta investigación por parte del Mag. Randall Blanco Benamburg y, sobre todo, de la extraordinaria entrega de mi amiga y compañera de toda la carrera, Nazarelle Rojas.

A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

- **María Nazarelle Rojas Machado**

Primero, quiero agradecer a Dios, por permitirme llegar a este momento tan importante de mi carrera profesional.

A mis padres y amigos, por apoyarme y motivarme a seguir hasta el final.

Al director de nuestro proyecto final de graduación, el profesor Mag. Randall Blanco Benamburg, quien nos mostró un apoyo incondicional durante todo el proceso. Con su gran conocimiento y experiencia logró que este proyecto concluyera de manera exitosa.

A los lectores de nuestro proyecto final de graduación, la profesora Mag. Marcela Marrero Calvo y el profesor Dr. Erick Chacón Vargas, que nos brindaron sus oportunas y valiosas observaciones para que este proyecto se llevara a cabo.

A mi compañera y amiga Carmen Hernández López, que siempre me ha brindado su apoyo incondicional.

A la parte administrativa del Liceo Daniel Oduber Quirós y a los estudiantes, quienes amablemente colaboraron en la realización de esta investigación.

## **DEDICATORIA**

### **- Carmen Aracely Hernández López**

*A toda mi familia*

*A la familia Rojas Machado, en especial a Juan Pablo*

*A la familia Hernández Acosta, en especial a Jade*

*A la familia Fedullo Miranda, en especial a Lydia y Salvador*

*A toda la comunidad salesiana de Cartago*

*A todas las personas que, de alguna u otra manera, me apoyaron durante mi carrera.*

### **- María Nazarelle Rojas Machado**

*Este logro lo dedico a Dios, él siempre me ha dado las fuerzas y puesto los medios para lograr superar cualquier prueba u obstáculo.*

*A mis padres, quienes son mi motivación para seguir esforzándome cada vez más.*

*A mis familiares y amigos que, de una u otra forma con su apoyo incondicional, formaron parte de este éxito.*

## RESUMEN

Esta es una investigación de tipo cualitativo que describe las estrategias de resolución de problemas utilizadas por diez estudiantes de undécimo año del Liceo Daniel Oduber Quirós, y su relación con los pasos que contemplan los programas de estudio de matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP), aprobados en 2012.

En dicha descripción fue necesario el abordaje de conceptos teóricos relacionados con la resolución de problemas. Se hizo especial énfasis en los trabajos de George Polya y Alan Schoenfeld, para luego comparar la definición de problema y descripción de las fases de resolución de problemas que brinda el MEP, con el trabajo de estos autores.

Para efectos del análisis, se tomó como base las cuatro etapas de resolución de problemas que el MEP (2012) consigna: el entendimiento del problema, diseño, control, y revisión y comprobación del proceso. Se desarrolló una entrevista cognitiva de forma individual con diez estudiantes del Liceo Daniel Oduber Quirós, en la que debían resolver cuatro problemas matemáticos verbalizando todo su proceso, y posterior a la resolución de cada problema, se realizaban preguntas sobre el desarrollo del mismo.

Según el análisis realizado se encontró evidencia de que la mayoría de los participantes aplicó la etapa de entendimiento del problema, pero no ocurrió así con el resto de las etapas. La mayor parte de los entrevistados comenzaban inmediatamente a trabajar con los datos de los problemas, sin generar un plan en la etapa de diseño. Pocos estudiantes verificaron su proceso en la etapa de control; y en la mayor parte de los problemas en donde se obtuvo respuesta, no se evaluó si era correcta.

Por lo que se concluye que la ejecución de las etapas en la resolución de los cuatro problemas no se ve reflejada, a pesar del tiempo que ha transcurrido desde la implementación, en el 2012, de los programas actuales. En consecuencia, estos estudiantes no evidencian el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas como lo proyecta el Ministerio de Educación Pública.

# Contenido

<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	3
<b>DEDICATORIA</b> .....	5
<b>RESUMEN</b> .....	6
<b>CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN</b> .....	10
<b>1.1 Justificación y problema de investigación</b> .....	10
<b>1.2 Antecedentes</b> .....	13
<b>1.3 Objetivos</b> .....	21
<b>1.3.1 General</b> .....	21
<b>1.3.2 Específicos</b> .....	21
<b>CAPÍTULO II - MARCO TEÓRICO</b> .....	22
<b>2.1 Resolución de problemas</b> .....	22
<b>2.1.1 Problema</b> .....	22
<b>2.1.2 Método Polya</b> .....	24
<b>2.1.3 Aportes de Alan Schoenfeld</b> .....	26
<b>2.2 Procesos cognitivos en la resolución de problemas</b> .....	27
<b>2.3 Programa de estudios de matemáticas</b> .....	30
<b>2.3.1 Aspectos generales</b> .....	30
<b>2.3.2 Resolución de problemas</b> .....	32
<b>CAPÍTULO III - MARCO METODOLÓGICO</b> .....	37
<b>3.1 Tipo de investigación</b> .....	37
<b>3.2 La entrevista cognitiva</b> .....	37
<b>3.2.1 Pensamiento en voz alta</b> .....	38
<b>3.2.2 Pruebas cognitivas de reporte verbal</b> .....	39
<b>3.3 Participantes</b> .....	40
<b>3.4 Diseño y validación de los instrumentos</b> .....	41
<b>3.4.1 Validación de preguntas introductorias y pruebas cognitivas de reporte verbal</b> .....	41
<b>3.4.2 Validación de los problemas aplicados en la entrevista cognitiva</b> .....	44
<b>3.4.3 Prueba piloto</b> .....	45
<b>3.5 Protocolo para el análisis de la información</b> .....	46
<b>CAPÍTULO IV - ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b> .....	47
<b>4. 1 Análisis de la información por estudiante</b> .....	48



4.1.1 Resumen.....	104
4.2 Análisis de la información por etapa .....	105
<b>CAPÍTULO V – CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y LIMITACIONES.....</b>	<b>111</b>
5.1 Conclusiones.....	111
5.2 Recomendaciones.....	114
5.3 Limitaciones .....	115
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>116</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>121</b>

# **CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN**

En el desarrollo de este primer capítulo se describen las generalidades de esta investigación, entre ellas el problema de investigación abordado, así como su debida justificación, además, de los antecedentes y los objetivos que se plantearon.

## **1.1 Justificación y problema de investigación**

La enseñanza de la matemática en Costa Rica ha enfrentado históricamente diferentes retos para abordar las problemáticas que le caracterizan. A pesar de los esfuerzos de diferentes instancias para afrontar estas dificultades, sigue siendo la asignatura con más fracaso en todos los niveles escolares y en la que el país obtiene más bajo desempeño en pruebas internacionales como SERCE o PISA (Garnier, citado por MEP, 2012, p.10).

En el cuarto informe del Estado de la Educación (2013, p.106) se muestran los resultados obtenidos a nivel nacional en las pruebas de bachillerato del año 2011, entre los cuales se señala que la promoción fue de un 66,9% con una nota promedio de examen de 69,27 y una nota promedio de bachillerato de 80,97. Esto evidencia un rendimiento pobre considerando que hubo más de 11 mil estudiantes aplazados con una nota inferior a la mínima de aprobación de 70. Analizando individualmente el rendimiento en cada materia, en matemática es donde se obtienen los peores resultados, con una nota de examen de 59,69.

A nivel internacional la situación no era diferente, en el programa PISA 2012 en la cual el énfasis fue dominio matemático, Costa Rica quedó ubicada en el puesto 56 de 65 países y economías que participaron (Fernández, 2013).

El Consejo Superior de Educación aprobó hace unos años la reforma de los planes de estudio de matemáticas, la cual se puso en práctica a partir del año 2012, donde la resolución de problemas tiene un papel principal como estrategia metodológica. El MEP (2012) asume como objetivo primordial “la búsqueda del fortalecimiento de capacidades cognoscitivas para abordar los retos de la sociedad moderna (...) aprender y resolver problemas y además utilizarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades” (p.13).

El MEP realizó la reforma curricular y adoptó la estrategia de resolución de problemas a partir de las deficiencias encontradas en el desempeño de las pruebas nacionales e internacionales, para hacerle frente a dichas carencias y, además, para generar o fortalecer ciertas capacidades cognitivas que ayudarán al estudiante a enfrentarse de manera exitosa a los retos que le presenta la sociedad actual.

Transcurridos cinco años de la implementación de la reforma curricular, en el informe nacional del rendimiento y desempeño en las pruebas de bachillerato realizadas en 2017, se detalla específicamente en la asignatura de matemáticas, un porcentaje de promoción de 73,72% con nota promedio de examen de 57,83 y una nota promedio de bachillerato de 76,28. De un total de 40 898 estudiantes examinados, 10 746 aplazaron la prueba. En los elementos de discusión de estos datos se comenta que, a nivel nacional, matemáticas fue la asignatura que presentó el menor promedio de nota de examen (MEP, 2018, p.25).

Los resultados obtenidos después de la reforma curricular no son diferentes a los que se daban años antes de su implementación, el sexto informe del Estado de la Educación

(2017) señala que los resultados obtenidos en las pruebas PISA 2015 reiteran las principales conclusiones de pruebas anteriormente realizadas. Por un lado, al comparar los resultados de Costa Rica con el puntaje promedio de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se encuentra muy lejos en las tres competencias evaluadas: matemática, lectora y científica. Por otro lado, a nivel internacional se considera que 30 puntos de diferencia equivalen a todo un año de escolarización, por lo que se concluye que existe una brecha de 3 años de formación escolar entre un estudiante de Costa Rica y un estudiante promedio de la OCDE, esto en el área de matemática (p.193).

Las universidades, por su parte, realizan pruebas de ingreso después de esta reforma y los resultados que se obtiene no son mejores. A inicios del año 2019, la Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica realizó un examen de diagnóstico a 1 052 estudiantes de nuevo ingreso, los contenidos evaluados son de un curso previo al estudio del cálculo diferencial e integral e involucraba principalmente ítems de álgebra y funciones. Según el informe presentado por esta Escuela, únicamente ocho estudiantes aprobaron el diagnóstico y la nota promedio del examen fue de 31,34. En dicha prueba, el puntaje máximo era 100 y lo mínimo para aprobarla era una nota de 70 (Soto, 2019).

Situación similar se presenta con el Examen de Diagnóstico de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica (DiMa). En el examen realizado a 3 678 estudiantes de primer ingreso en 2019, que provenían de centros educativos de secundaria, solo un 5,66 % obtuvo una calificación de 7,0 o superior, en una escala de 1 al 10. Además, el 80 % de los alumnos que realizaron la prueba de diagnóstico obtuvieron una nota inferior al 50 % (Blanco, 2019).

Los datos mencionados anteriormente indican que los primeros años de implementación de la reforma curricular no han sido suficientes para mejorar la problemática interna de rendimiento en pruebas nacionales, ni tampoco el desempeño de Costa Rica en pruebas internacionales como PISA.

Dado que el programa de estudios vigente se enfoca en la tendencia mundial de emplear la resolución de problemas como estrategia principal para la enseñanza de la matemática, es importante realizar estudios que permitan dar luz sobre el avance en este rumbo, en particular, que permita dar evidencias en cuanto al desarrollo de estrategias de resolución de problemas en los estudiantes que finalizan la educación secundaria.

Por lo anterior, este trabajo de investigación se planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo se relacionan las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes de undécimo año del Liceo Daniel Oduber Quirós con las que contemplan los programas de estudio de matemáticas en secundaria del Ministerio de Educación Pública?

## **1.2 Antecedentes**

A partir de la revisión bibliográfica, no se encontraron investigaciones costarricenses que emplearan la entrevista cognitiva para abordar la problemática desarrollada en este trabajo. Algo distinto ocurre a nivel internacional, donde sí se emplea esta herramienta metodológica para analizar algunos aspectos relacionados con las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes. A continuación, se mencionan algunos antecedentes tanto en el tema de resolución de problemas como en lo concerniente a la metodología desarrollada.

## **1. Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en la solución de problemas matemáticos**

Hernández (2002) desarrolló un trabajo de investigación en Puerto Rico, que consistió en un estudio fenomenológico sobre procesos cognoscitivos y metacognoscitivos que mostraban los estudiantes participantes de su investigación a la hora de dar solución a problemas matemáticos. Los participantes fueron estudiantes universitarios en sus dos primeros años de carrera, el estudio inició con 30 participantes, 9 mujeres (4 del primer nivel, 3 del segundo y 2 del tercero) y 21 varones (7 de cada nivel), pero se redujo a 24 (7 del primer nivel, 9 del segundo y 8 del tercer nivel).

Para la recolección y análisis de la información, Hernández (2002) utilizó la entrevista extensa con la intención de indagar sobre las creencias y formas de percibir los problemas matemáticos por parte de los estudiantes, solución de problemas en voz alta para observar a los participantes cuando estos se enfrentaban a un problema matemático no típico, y la entrevista retrospectiva en donde los estudiantes tenían la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado.

Dentro de sus conclusiones, el autor hace mención de una diferencia entre los procesos realizados por estudiantes de primer y tercer nivel; además, afirma que los estudiantes “no elaboran un plan para resolver el problema, sino que inmediatamente inician un conjunto de operaciones con los datos que provee el problema” (Hernández, 2002, p.151).

## **2. Estrategias cognitivas para resolver problemas matemáticos en alumnos de profesorado en enseñanza básica**

El trabajo de Ciucci, Nassif, Larcher y Monzón (2013) se realizó en Argentina, y tuvo como objeto el estudio de las estrategias cognitivas que usaban los estudiantes de profesorado de Enseñanza Básica en la resolución de problemas matemáticos. Como parte de la metodología, se aplicó un instrumento - prueba que constaba de tres problemas (uno aritmético, uno geométrico y uno lógico), y se acompañaba a cada participante en la resolución de los problemas preguntando e interviniendo en su trabajo. Inmediatamente después, se aplicaba una entrevista individual.

Con base en las dificultades encontradas, se hizo un instrumento definitivo haciendo correcciones al anterior. La información extraída de las nuevas entrevistas con los participantes se registró en cuadros de doble entrada y en matrices de datos que organizaban las respuestas de cada estudiante. Dentro de sus reflexiones provisionarias, Ciucci et al. (2013) manifiestan falta de lectura comprensiva de los enunciados, apego a algoritmos convencionales, dificultad de comunicar resultados y de fundamentar sus criterios cuando seleccionaban algún proceso.

### **3. Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales**

La investigación de Valencia, Sanabria y Ibañez (2012) tuvo un enfoque metodológico mixto, empleando un análisis cuantitativo sobre la comprensión de conceptos de los participantes, quienes debían resolver problemas geométricos en un ambiente computacional. La parte cualitativa se dio por medio de un análisis de protocolo, y tuvo por objeto el estudio de estrategias cognitivas empleadas por los estudiantes que intervenían en el juego computacional. El análisis se realizó por medio de la videograbación, en donde se registró la información de dos sujetos que dan solución a los mismos problemas realizados en el análisis estadístico.

Los participantes fueron estudiantes de séptimo año de educación básica, quienes tenían conocimientos básicos de geometría euclídea. Fueron divididos en dos grupos, el primero trabajó resolviendo problemas gráficos que iban de lo simple a lo complejo, y el segundo dio solución a problemas que iban de lo complejo a lo simple. Para el análisis de protocolo fueron seleccionados seis estudiantes, a quienes luego de resolver los problemas en el entorno computacional, se les hizo una entrevista retrospectiva para obtener información adicional sobre la situación de aprendizaje planteada (Valencia et al., 2012).

Dentro de sus conclusiones, los autores expresan la poca diferencia que hubo entre los grupos que resolvieron problemas de lo simple a lo complejo y viceversa. En cuanto a la comprensión de conceptos los autores afirman que el aprendizaje obtenido por medio de entornos computacionales con apoyo de guías fue mejor. Con respecto al análisis de protocolo, “se encontró acciones metacognitivas de planeación y control para lograr la



meta de completar una figura geométrica” (Valencia et al., 2012, p.63) y dichas acciones obligaron a los sujetos a razonar acerca de la manera de resolver problemas.

#### **4. Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas**

Perdomo, Camacho y Santos (2012) diseñaron un módulo de enseñanza para introducir el concepto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) a un grupo de estudiantes universitarios de Licenciatura en Química. El módulo constaba de tres problemas que hacían referencia a aplicaciones de las EDO en el ámbito de la química. Para cada problema, se comenzaba exponiendo la situación y luego se presentaba una serie de cuestiones que guiaban a los estudiantes en la solución.

Para este trabajo, a diferencia de los descritos anteriormente, se dividió a los estudiantes formando parejas y un trío. Los datos se recopilaron grabando vídeos a cada uno de los grupos durante la resolución de los problemas y dejándose una copia del trabajo hecho en papel. Cuando se tuvo todo el material se hizo una transcripción de las grabaciones y el análisis de los datos.

Los autores mencionan en una de sus conclusiones que el diseño del módulo y la dinámica de trabajo en grupos favorecieron la reflexión, justificación de respuestas y razonamientos, y la interpretación de la información entre el contexto matemático y otros contextos.

## **5. La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria**

Arteaga-Martínez, Macías y Pizarro (2020) realizaron esta investigación con el objetivo de mostrar la importancia de la resolución de problemas verbales en matemática y la regulación metacognitiva que se da durante este proceso. Para ello, trabajaron con una muestra no aleatoria de 99 estudiantes de secundaria, en un colegio concertado ubicado en el centro de Madrid. En cuanto a los estudiantes que participaron, aproximadamente el 41% era de primer año (12 años) y el 59% de tercer año (14 años).

El instrumento diseñado para recoger la información implicaba problemas verbales relacionados con los números y la geometría. Estos problemas se consideraron de nivel inferior al que debería tener el estudiante, con el fin de que la dificultad no fuera un distractor para la observación de las estrategias metacognitivas (p. 271).

Como parte de las conclusiones Arteaga-Martínez et al. (2020) mencionan que las estrategias metacognitivas con más fortaleza son las de planeación, con respecto a las estrategias de control, señalan que los estudiantes siguen de manera general los pasos de resolución y consideran que no tienen obstáculos durante el proceso. En cuanto a las estrategias de evaluación, relacionan la respuesta con la pregunta, pero no la justifican, lo cual contrasta un no entendimiento del problema (p. 276).

Estos autores plantean la necesidad de que el estudiante reciba una instrucción metacognitiva que le facilite el razonamiento desde el entendimiento del problema hasta la reflexión del proceso y la respuesta obtenida (p. 276).

## **6. Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita**

En el trabajo de Pérez, Diego, Polo y González (2019) se utilizó un enfoque de investigación mixto, en el que el análisis cualitativo se implementó para el logro de una mejor comprensión del análisis cuantitativo. La investigación propone una clasificación descriptiva de los errores cometidos por estudiantes de secundaria al resolver ecuaciones lineales con una variable, y las causas que originan dichos errores.

El estudio se realizó con una muestra de 266 estudiantes de dos colegios públicos del norte de España, divididos en cuatro grupos según su edad. El rango abarcado iba desde los 13 años, edad en la que se introducen las ecuaciones en la enseñanza obligatoria, hasta los 16 años, cuando deberían estar consolidadas, según afirman los autores.

El trabajo se realizó en dos fases. En la primera se utilizó un cuestionario como instrumento para identificar los errores cometidos en la resolución de ecuaciones lineales con una variable, en el que se solicitaban datos sobre las características de los estudiantes y luego se planteaban 6 ecuaciones lineales, tomando como referencia investigaciones previas. En la segunda fase se realizaron entrevistas cognitivas para profundizar en las causas que ocasionan los errores en el proceso de solución de las ecuaciones.

Según el tipo de errores detectados en la primera fase, se agruparon los estudiantes para la entrevista cognitiva. Esta se hizo de manera individual, pidiendo a los participantes que describieran el proceso realizado al resolver las ecuaciones y

preguntándoles cuestiones enfocadas a confirmar o refutar la posible causa de los errores.

Dentro de los resultados se expresa la clasificación de los errores en dos categorías principales, los errores relacionados con las operaciones aritméticas (operaciones con enteros, con fracciones y en la aplicación de la propiedad distributiva) y errores algebraicos propios de las ecuaciones (de incógnita-término independiente, coeficiente, de igualdad entre miembros, jerarquía de las operaciones, reglas de “pasar a”). Como conclusión los autores señalan que la mayoría de los errores propiamente de la ecuación están relacionados directamente con el método o procedimiento de resolución que se haya enseñado y recomiendan el uso de una muestra más variada para sustentar y hacer más amplia la categorización obtenida en el estudio.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 General**

Analizar las estrategias de resolución de problemas utilizadas por diez estudiantes de último año del Liceo Daniel Oduber Quirós, de acuerdo con lo establecido al respecto en los programas del MEP.

### **1.3.2 Específicos**

- Diseñar un instrumento validado por expertos que permita obtener información sobre las estrategias de resolución de problemas que aplican estudiantes de secundaria.
- Describir las estrategias de resolución de problemas utilizadas por diez estudiantes de último año del Liceo Daniel Oduber Quirós.
- Comparar las estrategias de resolución de problemas utilizadas por diez estudiantes de último año del Liceo Daniel Oduber Quirós con las que se establecen en los programas de estudio de Matemática propuestos por el MEP.

## CAPÍTULO II - MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordan los conceptos teóricos fundamentales que respaldan esta investigación. Se mencionan teorías relacionadas con la resolución de problemas, además de los procesos cognitivos involucrados y, por último, se tiene un apartado para los planes de estudio de matemática del Ministerio de Educación Pública.

### 2.1 Resolución de problemas

La resolución de problemas ha sido objeto de estudio de la matemática educativa por décadas y su concepción ha evolucionado hasta nuestros días. En este apartado se abarcará la definición de problema, se enfatizará también en los trabajos realizados por George Polya y Alan Schoenfeld.

#### 2.1.1 Problema

El concepto de problema ha sido estudiado dentro de la Matemática Educativa a través del tiempo por muchos autores. En la siguiente tabla se muestran algunas definiciones que han establecido diferentes autores para este concepto:

**Tabla 1**

*Definición de problema*

<b>Autor, Año</b>	<b>Definición</b>
González, 1956	▪ Un problema es (...) una dificultad, cuestión o estado de perplejidad que puede resolverse o tratar de resolverse mediante el pensamiento reflexivo.
Rubinstein, 1966	▪ Un problema tiene ese carácter, ante todo, porque nos presenta puntos desconocidos en los que es necesario poner lo que falta.

Autor, Año	Definición
Labarrere, 1988	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Un problema es toda situación en la cual, dada determinadas condiciones (más o menos precisas), se plantea determinada exigencia (a veces más de una). Esta exigencia no puede ser cumplida o realizada directamente con la aplicación inmediata de procedimientos y conocimientos asimilados, sino que se requiere la combinación, la transformación de estos en el curso de la actividad que se denomina solución.</li> </ul>
Fridman, 1995	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ (...) un problema es alguna exigencia, requerimiento o pregunta para la cual se necesita encontrar la respuesta apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema.</li> </ul>
Guirado, 2000	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ (...) un problema matemático es el resultado del análisis de una situación problemática que presenta una organización peculiar de las formas espaciales, magnitudes o las relaciones cuantitativas del mundo real, que necesita para ser solucionado de vías, métodos y/o procedimientos matemáticos.</li> </ul>
Albarrán, 2005	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tarea con cierto grado de complejidad que debe resolver el escolar para la cual no existe, no se conoce o es difícil aplicar un algoritmo de solución, lo que requiere busque dentro de los conocimientos que posee los que le sirven para encontrar la vía para resolverlo.</li> </ul>

**Fuente:** Pérez et al. (2016).

Por otro lado, Boscán y Klever (2012) mencionan que “Polya define un problema como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p.11).

Dada la relevancia de este autor en la temática de resolución de problemas, se profundizará en su trabajo y en los aportes de Schoenfeld en los siguientes apartados.

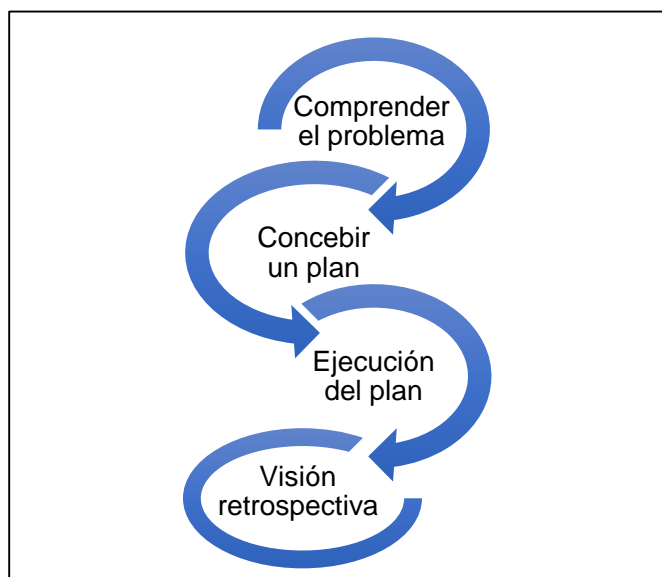
### 2.1.2 Método Polya

Uno de los primeros autores que ha estudiado la resolución de problemas es el reconocido George Polya en 1965. En su libro “*Cómo plantear y resolver problemas*” introduce los procesos heurísticos, que según Sepúlveda et al. (2009) son todas aquellas “acciones físicas o mentales que contribuyen a encontrar pistas o ideas que ayudan a resolver los problemas” (p. 82). Algunas veces son trazos, toma de valores extremos, aplicación de resultados conocidos, comparaciones, visualizaciones, descarte de posibilidades, entre otros, los cuales necesariamente se combinan con los procesos de reflexión (autorreflexión).

Polya (1965) propone cuatro fases o pasos que se deben seguir para resolver un problema, los cuales se muestran en la figura 1.

**Figura 1**

*Pasos o fases propuestos por Polya para la resolución de problemas*



**Fuente:** Elaboración propia.



A continuación, se ampliará en qué consiste cada una de las fases:

- **Comprender el problema:** en esta fase se debe preguntar cuál es la incógnita, los datos y las condiciones, replantearse el problema con sus propias palabras. Algunas veces el enunciado debe ser leído más de una vez.
- **Concebir un plan:** se debe pensar en un plan para resolver el problema, ya sea relacionarlo con problemas semejantes resueltos anteriormente, o algún teorema que pueda ser útil.
- **Ejecución del plan:** poner en práctica el plan realizado y estar en constante monitoreo del proceso de solución del problema, que los pasos que se van efectuando estén correctos.
- **Visión retrospectiva:** verificar el resultado y el procedimiento que lo llevó a este. Y, si es posible, pensar en otras formas de resolver dicho problema.

Para Polya (1965, pp. 161-163) existen diferentes tipos de problemas, los cuales se citan a continuación:

- Problemas por resolver: son aquellos que tienen como propósito encontrar cierto objeto, la incógnita del problema. En este tipo de problemas, para determinar la solución, se debe conocer de modo preciso los elementos principales: incógnita, datos y condición.
- Problemas por demostrar: tienen como fin mostrar de modo concluyente la veracidad o falsedad de cierta afirmación.
- Problemas de rutina: son todos los que se pueden resolver sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto o seguir el camino de solución de un problema viejo.

- Problema práctico: se considera que las incógnitas, los datos, las condiciones y los conocimientos necesarios para resolverlos, son presentadas con menos claridad y de manera más compleja y menos precisa.

### 2.1.3 Aportes de Alan Schoenfeld

Otro matemático cuyo trabajo en Resolución de Problemas es reconocido a nivel mundial es Alan Schoenfeld, quien amplió lo realizado por Polya. Barrantes (2006) señala que cuando Schoenfeld estaba terminando su carrera de matemática pura, se encontró con el libro de Polya y se preguntaba por qué durante su carrera no había escuchado de él. Preguntó a varios colegas que preparaban estudiantes para olimpiadas de matemática si utilizaban el libro, pero estos lo desconocían o no lo usaban porque según ellos no funcionaba (Barrantes, 2006, p.1). Así que Schoenfeld, guiado por las ideas de Polya, decide publicar en 1985 el libro *Mathematical problem solving*, en él trata de abarcar qué es pensar matemáticamente y cómo ayudar a los estudiantes a hacerlo.

Sobre el trabajo de Schoenfeld, Barrantes (2006) señala lo siguiente:

Llegó a la conclusión de que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. (p. 2)

Schoenfeld (1985), comparte con Polya que para resolver problemas se necesita hacer uso de las heurísticas, que son las técnicas generales que se requieren conocer para resolver problemas, pero además considera tomar en cuenta otros factores tales como: los recursos, el control y el sistema de creencias.

Schoenfeld llama recursos disponibles para el individuo a los conocimientos matemáticos básicos, o sea los conocimientos previos con los que se cuenta. El control se relaciona con la manera de seleccionar el recurso y cómo el individuo lo pone a su disposición. Y finalmente, se tiene el sistema de creencias pues se considera que estas influyen a la hora que el individuo se enfrenta a un problema matemático.

## **2.2 Procesos cognitivos en la resolución de problemas**

En esta sección se describen los procesos y estrategias cognitivas que actúan en la resolución de problemas. Para ello, se ha tomado como base la perspectiva psicológica y filosófica del constructivismo, que sostiene que las personas construyen gran parte de su aprendizaje (Brunner, 2004; citado por Schunk, 2012) y resalta la interacción de las personas y las situaciones en el proceso de adquisición de conocimientos y habilidades (Cobb y Bowers, 1999; citado por Schunk, 2012).

Al nacer, el ser humano tiene un cerebro inmaduro. Esta condición posibilita el modelado de estructuras y funciones del sistema nervioso, lo que brinda la capacidad de adquirir conocimientos durante un largo período y la adaptación a diferentes circunstancias que se presentan en la vida (Lupón et al. 2014). Todos los días, en cualquier actividad se pone en funcionamiento una estructura organizada de pensamiento que permite la existencia de una coordinación entre lo que se quiere hacer y aquello que se necesita para hacerlo (Castro, 2013), y es esa coordinación la que brinda la posibilidad de adaptarse a las diversas situaciones.

La información que se adquiere en el proceso de adaptación es transformada, reducida, elaborada, almacenada, recordada y utilizada nuevamente (Lupón et al., 2014). Todo lo anterior ocurre mediante los procesos cognitivos, que según las autoras se clasifican en procesos cognitivos básicos: atención, memoria y aprendizaje; y procesos cognitivos complejos: lenguaje, pensamiento e inteligencia.

Jaramillo y Puga (2016) afirman que los procesos cognitivos al ser bien aplicados desde contextos de aprendizaje incorporan de manera más significativa los conocimientos, para después aplicarlos en la solución de problemas de la vida. Específicamente en el terreno de la resolución de problemas matemáticos, Silver y Marshall (1990, citado por Hernández, 2002) sostienen que para dar solución a un problema es importante que se tenga almacenado un conocimiento adecuado.

Hernández (2002) afirma que en el momento en que una persona se enfrenta con un problema, se registran los estímulos visuales, auditivos y táctiles. No toda la información que se registra es procesada y solo una parte de ella se transporta a la memoria a corto plazo, que es un área de trabajo en la que se procesa la información que viene de los sentidos y la que proviene de la memoria a largo plazo. Este autor sostiene que es en esa misma área de trabajo en donde se construye la representación de un problema, es en este momento en donde las estrategias cognitivas comienzan a asumir su rol.

Jaramillo y Puga (2016) afirman que las estrategias cognitivas también intervienen en los procesos cognitivos. Rivas (2008) las relaciona con “los procesos de regulación y control que gobiernan los procesos mentales envueltos en el aprendizaje y el pensamiento en general, como los procesos de atención, percepción, memoria, etc.” (p.30); además se

considera que activan y focalizan el procesamiento de la información del aprendiz, afectando así la comprensión (Mayer, 1996).

En el ámbito de las matemáticas, Pifarré y Sanuy (2001) establecen cuatro categorías de estrategias cognitivas que procuran describir las acciones hechas por los estudiantes a la hora de resolver problemas matemáticos:

- **Análisis:** se divide el problema en componentes más básicos, se examinan y buscan las relaciones entre los elementos. Se leen, releen, seleccionan, anotan y representan datos del enunciado.
- **Planificación:** el estudiante organiza la manera en que se resolverá el problema. Se selecciona la estrategia general de resolución del problema, se exploran posibles acciones a seguir, se explicita un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar.
- **Ejecución:** se realiza un conjunto de acciones y procesos matemáticos para dar solución al problema. Se ejecuta un proceso matemático (sea correcto o incorrecto), se realizan cálculos y se introducen o copian datos.
- **Revisión:** el estudiante realiza acciones de control y revisión de la validez del proceso de resolución o de los resultados que va obteniendo, y detecta posibles errores. Se cuestiona verbalmente la validez de algún resultado o procedimiento, se buscan errores de forma poco sistemática, se revisan los datos introducidos, los procesos y cálculos matemáticos realizados.

En el trabajo de Ciucci et al. (2013, p.5), se categorizan de manera similar las estrategias diferenciales consideradas ante la resolución de un problema:

- **Estrategias de organización:** leer comprensivamente enunciados, identificar el problema, organizar datos, establecer prioridades, buscar relaciones.
- **Estrategias de formulación:** explorar caminos de solución, concebir un plan, realizar gráficos.
- **Estrategias de ejecución:** cálculos mentales, convencionales y no convencionales, exactos y aproximados.
- **Estrategias de validación:** comunicar resultados en distintos lenguajes.

## **2.3 Programa de estudios de matemáticas**

En este apartado se abarcan algunos aspectos relacionados con la inclusión de la resolución de problemas en los programas de estudio de Matemática aprobados en 2012, además se menciona lo que el programa de estudio de Matemática para la educación primaria y secundaria del Ministerio de Educación Pública (MEP) entiende por problema, así como las fases o pasos que se deben considerar en la resolución de estos.

### **2.3.1 Aspectos generales**

El actual programa de estudios de matemática fue aprobado por el Consejo Superior de Educación el 21 de mayo de 2012 (Ruiz, 2013, p.27). A partir del año 2013 se fue implementando paulatinamente y debido a los cambios profundos para la educación en matemáticas, se hizo necesaria la existencia de un plan piloto que se desarrolló con la participación de más de 200 docentes de Educación Primaria y Secundaria de casi todas las regiones educativas del país (Espinoza y Zumbado, 2015, p.133). Barrantes (2015)

indica que la puesta en práctica de los programas inició con un proceso de transición, que concluyó en el año 2015 y sería a partir del año siguiente que se da su aplicación por completo en todos los niveles de estudio en la modalidad académica; mientras que en otras modalidades estaría siendo implementado totalmente en el año 2017 (p. 42).

El diseño del currículo comprende una integración vertical desde el primero hasta el último nivel escolar, tanto en la fundamentación teórica como en las áreas de la matemática (Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y probabilidad).

Los planes de estudio proponen la resolución de problemas como estrategia para la construcción de aprendizajes. Para ello la acción de aula se resume en cuatro momentos: presentación del problema, trabajo estudiantil independiente, contrastación y comunicación de las estrategias empleadas en la resolución del problema y, por último, cierre o clausura de la lección. Con lo anterior se pretende no sólo el desarrollo de contenidos, si no el dominio de conocimientos y generación de habilidades en torno a los mismos (Ruiz, 2013, p. 31); y como complemento a las habilidades que deben adquirirse se brindan indicaciones puntuales (por cada habilidad específica) que sugieren ejemplos de problemas contextualizados o indicaciones para promover procesos matemáticos, uso de tecnologías, de la historia, o potenciación de actitudes o creencias positivas sobre las matemáticas (Ruiz, 2013, p. 43).

### **2.3.2 Resolución de problemas**

Los programas de estudio incluyen como estrategia promover procesos que enfatizan la participación de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su propio entorno. Lo que se busca es propiciar un acercamiento a lo concreto para pasar a lo abstracto o sea los teoremas, los modelos matemáticos, la teoría (MEP, 2012, p.11).

Este currículo asume como objetivo principal “la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza” (MEP, 2012, p.13). A raíz de esto, en la organización de las lecciones se adopta como estrategia central el aprender a plantear y resolver problemas para generar dichas capacidades.

El MEP (2012, p. 29) define problema como “un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos...”. Además, aclara que un problema debe poseer suficiente complejidad para que pueda provocar en el individuo una acción cognitiva no simple.

Por otra parte, el MEP (2012, p. 28) señala que la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos en el currículo de Matemáticas:

- ✓ Aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas.
- ✓ Aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas.



El primer propósito es de suma relevancia para este estudio, ya que es el que enfatiza en los medios que requiere un problema para ser resuelto. Así mismo, el MEP (2012) busca potenciar capacidades en el individuo “para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados... para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas” (p.25).

La tabla 2 sintetiza cuatro pasos como parte de las técnicas generales o métodos para el diseño de estrategias para resolver problemas según el MEP (2012).

**Tabla 2**

*Pasos o fases para el diseño de estrategias*

<b>Pasos o fases</b>	<b>Acción</b>
Paso 1. Entendimiento del problema	Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo
Paso 2. Diseño	Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico.
Paso 3. Control	Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso.
Paso 4. Revisión y comprobación	Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.

**Fuente:** MEP (2012, pág. 30).

En relación al segundo propósito, se plantea una acción de aula para generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico, lo que busca es el diseño de tareas

que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (MEP, 2012, p. 28).

Es importante señalar que este propósito no es el que interesa para esta investigación, pero refleja que los estudiantes estuvieron expuestos a situaciones de resolución de problemas dentro del aula, favoreciendo el desarrollo de las estrategias que se están estudiando.

Para el aprendizaje de conocimientos dentro de la organización de las lecciones, el programa propone al profesor que desarrolle cuatro momentos centrales: propuesta de un problema, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa, cierre o clausura. El MEP (2012, pág. 42) detalla estos momentos de la siguiente manera:

- En el primer momento se propone un problema, desafío inicial o actividad que provoque la indagación en los estudiantes. Se supone que la escogencia del problema es con base en los contenidos, expectativas de aprendizaje y las condiciones que presenta el grupo de estudiantes.
- El segundo momento, busca generar un espacio de trabajo individual, en parejas o subgrupos. En esta fase no hay intervención del docente, por lo que el estudiante se debe enfrentar al problema por sí mismo. La persona debe conocer una estrategia que le permita resolver el problema, pero no aquella que se base en el conocimiento que se quiere enseñar. La acción del docente debe ser apropiada, precisa y activa.

- El tercer momento pretende que, con la guía del profesor, se dé una valoración y contrastación de resultados, soluciones o elaboraciones aportadas por los estudiantes.
- Finalmente, el cuarto momento “concluye” pedagógicamente el tema, el docente ofrece un “vínculo” con el saber matemático que ha construido la comunidad profesional de matemáticas.

La definición de problema propuesta por el MEP se asemeja a la definición de Polya que citan Boscán y Klever, ambos mencionan que es una tarea o situación donde se busca una acción apropiada que permita llegar a la solución. Ambas partes concuerdan con que la situación debe tener suficiente complejidad para que no se llegue de manera inmediata a dicha solución.

Por otra parte, el MEP al igual que Polya, propone una lista de pasos que se deben considerar al momento de resolver un problema. Ambos mencionan que se debe entender el problema, diseñar un plan, monitorear el procedimiento y revisar o comprobar que el resultado obtenido sea el correcto.

Además de los pasos mencionados el MEP incluye el control, que se asemeja al factor que contempla Schoenfeld en la resolución de problemas. La etapa de control requiere un alto trabajo metacognitivo por parte del estudiante, pues es quien determina cuándo detenerse y buscar otras formas de resolver el problema, o bien, seguir con la estrategia inicial porque tiene seguridad de que su trabajo está funcionando.

Dado que en esta investigación se pretende contrastar los pasos que el estudiante realiza al momento de resolver un problema con lo que plantea el MEP y su consistencia con la

literatura revisada, se tomará como referencia la definición de problema y el proceso de resolución de problemas que se brinda en los programas de estudios oficiales.

## **CAPÍTULO III - MARCO METODOLÓGICO**

En este capítulo se detalla el tipo investigación que se realizó, se describe la técnica utilizada para la recolección de la información y los instrumentos para su aplicación. También, se hace una descripción de la población participante en este estudio y se brindan detalles del procesamiento de la información para su posterior análisis.

### **3.1 Tipo de investigación**

Cuando se busca comprender un fenómeno desde la perspectiva de los participantes, profundizar en sus experiencias y la forma en que perciben subjetivamente su realidad, se selecciona el método cualitativo (Hernández et. al 2010, p.364). Bajo la afirmación anterior se considera este trabajo dentro del marco de la investigación cualitativa, pues pretende hacer una descripción de las estrategias para plantear y resolver problemas que utilizan los estudiantes participantes en la investigación, y compararlas con los pasos o fases que el MEP propone para poder desarrollarlas en los estudiantes de secundaria.

### **3.2 La entrevista cognitiva**

Para la obtención de los datos relacionados con el uso de estrategias de resolución de problemas se utilizó la entrevista cognitiva que, de acuerdo con Smith-Castro y Molina (2011), se basa en la idea de que para dar respuesta a un cuestionario los participantes inicialmente deben comprender lo solicitado en él. Luego, comienza un proceso de recuperación de la información solicitada de la memoria autobiográfica, después realizan diferentes estrategias para encontrar la respuesta adecuada y, para terminar, brindan la respuesta elegida a partir de los procesos ejecutados (p.29).

La entrevista cognitiva consta de dos técnicas básicas: el pensamiento en voz alta y las tareas o pruebas verbales (Smith-Castro y Molina, 2011, p.49).

### **3.2.1 Pensamiento en voz alta**

Smith-Castro y Molina (2011) afirman que, al utilizar esta técnica, el investigador pide al participante verbalizar todo proceso mental que haga en el momento de llenar el cuestionario. Además, la intervención del investigador es mínima y sus pocas participaciones se dirigen a pedir al entrevistado que diga en voz alta sus pensamientos, según sea la conducta de este. Mientras el proceso se da, toda la información se registra por medio de la grabación de audio y/o vídeo (p. 49).

Willis (1999) destaca como una de las principales ventajas de la entrevista cognitiva es la libertad del sesgo que pueda ocasionar el entrevistador, pues su intervención es muy poca, y el hecho de que sea reducida puede hacer que el participante brinde información no prevista por el investigador. Además, la técnica brinda la facilidad de observar en el momento y lugar, lo que enfrenta el entrevistado cuando contesta el cuestionario (Willis, 2005, en Smith-Castro y Molina, 2011, p.51).

Esta técnica depende de las capacidades de los entrevistados para verbalizar todo lo que pasa por su mente, y esta es su principal desventaja (Smith-Castro y Molina, 2011, p.51). Además, pensar en voz alta es algo inusual para la mayoría de gente y muchos tienden simplemente a responder las preguntas que se hacen, sin una respuesta muy elaborada (Willis, 1999, p.5) y esto puede ocurrir porque consideren irrelevante decir lo que piensan en el momento, o por sentir temor a expresar lo que se les ocurre (Willis, 2005, en Smith-Castro y Molina, 2011, p.51).

Se escogieron cuatro problemas matemáticos que se entregaron a cada participante para ser resueltos. Se indicó a los estudiantes que debían verbalizar sus pensamientos mientras hacían el proceso de resolución. Durante el desarrollo de esta actividad se procuró intervenir únicamente para recordar al participante que mencionara sus procesos, en caso de que lo olvidara siguiendo la resolución en silencio.

### **3.2.2 Pruebas cognitivas de reporte verbal**

Para Smith-Castro y Molina (2011, p.52) estas pruebas son preguntas directas cuyo objeto principal es lograr evidencia sobre la manera en que los componentes del cuestionario son comprendidos, qué tanto facilitan la recuperación de la información, los procesos o acciones utilizadas para llegar a una respuesta y las dificultades encontradas en el camino hacia ella.

Como recomienda Zumbado (2019, p.113), el énfasis de la entrevista cognitiva debe estar en las pruebas cognitivas de reporte verbal, ya que permite profundizar en los conocimientos, las habilidades específicas de los programas de matemáticas y las interacciones aritméticas, geométricas y algebraicas que cada estudiante utiliza para resolver un problema.

Durante la entrevista, al terminar de resolver cada problema, los estudiantes debían responder a preguntas enfocadas en distinguir o aclarar si los participantes realizaron los procesos de comprensión del problema, el diseño de una estrategia y el control de esta, y finalmente la revisión y comprobación de la solución. Los procesos mencionados son las fases que proporciona el MEP (2012) para determinar estrategias y métodos al enfrentar un problema.

Es importante mencionar que los estudiantes participantes dieron respuesta a un breve cuestionario introductorio a la resolución de los problemas, que procuraba indagar las nociones que se tenían sobre un problema matemático, los pasos que solían hacer para resolverlos y el tiempo que consideraban se debía dedicar al mismo.

### **3.3 Participantes**

Para efectos de esta investigación no se consideró importante el rendimiento académico de los participantes. Como se mencionó anteriormente, a partir del año 2016 el programa de estudios fue implementado por completo en todos los niveles de la modalidad académica, por lo que al menos los últimos cinco años de la formación de los estudiantes participantes de esta investigación se desarrollaron mediante la metodología de aprendizaje basada en la resolución de problemas. Además, no se considera influyente el trabajo realizado por el profesor de ese año, porque se supone que llevan suficiente tiempo expuestos a dicha metodología y los aprendizajes en este campo no dependen únicamente del profesor actual.

Para el acceso al campo se procedió de la siguiente manera: Primero se contactó a la coordinadora académica quien autorizó la comunicación con la profesora de undécimo y los estudiantes con miras a participar en el estudio. Posteriormente se contactó a los estudiantes por medio de su profesora de Matemática, quien les trasladó un cuestionario en línea que sirvió para que los estudiantes con interés en participar en la investigación tuvieran contacto con las investigadoras.

El formulario fue completado por 15 estudiantes que se encontraban interesados en participar. Se les contactó mediante la dirección de correo electrónico ingresada en el



formulario, pero no se obtuvo respuesta de cinco de ellos. Por lo que se contó únicamente con la participación de diez estudiantes, seis hombres y cuatro mujeres, y cabe aclarar que, por ser la mayoría de ellos menores de edad, se tuvo que solicitar el consentimiento informado de sus padres o encargados.

### **3.4 Diseño y validación de los instrumentos**

Se diseñaron dos instrumentos, uno que consta de las preguntas introductorias y las pruebas de reporte verbal, y otro con los cuatro problemas aplicados en la entrevista. Ambos instrumentos fueron sometidos a criterio de expertos para su respectiva validación.

#### **3.4.1 Validación de preguntas introductorias y pruebas cognitivas de reporte verbal**

Las preguntas introductorias, aparte de crear un primer acercamiento entre el estudiante participante y las entrevistadoras, pretendían explorar las concepciones de los estudiantes sobre problema matemático y cuáles etapas aplicaban cuando ellos debían dar solución a dichos problemas. Los evaluadores de este cuestionario fueron cinco profesores de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, quienes asignaban un valor de tres, dos o un punto a cada pregunta si esta era considerada muy pertinente, poco pertinente o no pertinente, respectivamente.

La siguiente tabla muestra la frecuencia de los valores de pertinencia obtenidos inicialmente para cada pregunta:

**Tabla 3**

*Valoración de expertos para preguntas introductorias*

Enunciado	Valor de pertinencia		
	Muy pertinente (3)	Poco pertinente (2)	No pertinente (1)
<b>Pregunta #1</b>	4	0	1
<b>Pregunta #2</b>	5	0	0
<b>Pregunta #3</b>	3	2	0
<b>Pregunta #4</b>	1	3	1

**Fuente:** Elaboración propia.

Las preguntas con más observaciones fueron la tercera y cuarta. Ambas preguntas tuvieron un porcentaje considerable de poca pertinencia, por lo que cada una se mantuvo, pero siguiendo los cambios sugeridos por los evaluadores. El cuestionario introductorio definitivo puede consultarse en el anexo 4.

Las pruebas cognitivas de reporte verbal se desarrollaron en un cuestionario posterior al proceso de resolución de cada problema. Este cuestionario fue revisado por los mismos profesores que evaluaron las preguntas introductorias a la entrevista cognitiva, en el mismo instrumento de evaluación (ver anexo 3). De la misma manera que las preguntas introductorias, las pruebas de reporte verbal se valoraron con una escala de muy pertinente, poco pertinente o no pertinente, asignando un puntaje de tres puntos, dos

puntos o un punto respectivamente. La frecuencia para cada valor de pertinencia se muestra en la tabla 4.

**Tabla 4**

*Valoración de expertos para las pruebas cognitivas de reporte verbal*

Enunciado	Valor de pertinencia		
	Muy pertinente (3)	Poco pertinente (2)	No pertinente (1)
<b>Pregunta #1</b>	4	1	0
<b>Pregunta #1a</b>	4	0	1
<b>Pregunta #1b</b>	3	1	1
<b>Pregunta #2</b>	5	0	0
<b>Pregunta #3</b>	5	0	0
<b>Pregunta #4</b>	5	0	0
<b>Pregunta #4a</b>	3	2	0
<b>Pregunta #4b</b>	3	2	0
<b>Pregunta #5</b>	3	1	1
<b>Pregunta #5a</b>	3	2	0
<b>Pregunta #5b</b>	3	1	1
<b>Pregunta #5c</b>	3	2	0
<b>Pregunta #5e</b>	2	3	0

**Fuente:** Elaboración propia.

En general los enunciados de las preguntas posteriores a cada problema fueron valorados como muy pertinente por parte de los evaluadores. En el caso de las preguntas 1, 5, 5b y 5d se hicieron cambios en la redacción del ítem a sugerencia de los expertos para garantizar que la pregunta extrajera la información esperada, cuando el estudiante diera la respuesta. Los enunciados de las preguntas realizadas pueden encontrarse en el anexo 4.

### 3.4.2 Validación de los problemas aplicados en la entrevista cognitiva

El instrumento principal constó de cuatro problemas y fue validado por otros cinco profesores de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ver anexo 1). La escala que se utilizó asignaba tres puntos al enunciado del problema si este se consideraba muy pertinente y no necesitaba ningún ajuste; dos puntos si el enunciado era poco pertinente y requería ajustes para poder conservarlo; un punto si era considerado no pertinente y se recomendaba su eliminación. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.

**Tabla 5**

*Valoración de los expertos para elección de los problemas*

Enunciado	Valor de pertinencia		
	Muy pertinente (3)	Poco pertinente (2)	No pertinente (1)
Problema #1	2	0	3
Problema #2	3	2	0
Problema #3	3	2	0
Problema #4	4	0	1

**Fuente:** Elaboración propia.

Dentro de las observaciones que realizaron los expertos, el problema #1 fue considerado como muy básico y se mencionaba que el orden de los problemas no era el adecuado, por lo que con base en dichas sugerencias se buscó un nuevo problema para sustituir el #1. Este fue validado y aceptado por los expertos; el instrumento final se puede observar en el anexo 2.

Con base en la clasificación de Polya (1965, pp.161-163), los cuatro problemas utilizados en la entrevista cognitiva se clasifican dentro de la categoría de “problemas por resolver”, puesto que el objetivo es encontrar lo que se pide en el problema.

### **3.4.3 Prueba piloto**

Antes de la aplicación formal y como validación final de los instrumentos, se realizó una prueba piloto con consentimiento informado a dos estudiantes de undécimo año de otro centro educativo, para verificar que no hubiese inconvenientes en la comprensión de los enunciados y de las preguntas. En la aplicación piloto los estudiantes no mostraron dificultad a la hora de resolver los problemas, y no se consideró la necesidad de cambiar alguna pregunta tanto del cuestionario introductorio como de las pruebas cognitivas de reporte verbal.

A raíz de la pandemia de la COVID - 19, las entrevistas no se pudieron realizar presencialmente. Por esta razón se requirió hacer otra prueba con dos estudiantes de undécimo año diferentes a los que hicieron la prueba piloto inicial. Se utilizó la plataforma Zoom y los problemas fueron proyectados a los entrevistados, quienes iban resolviendo cada problema y tomando apuntes en una hoja de papel. Para registrar la información, al acabar la entrevista se solicitó a los estudiantes que enviaran inmediatamente una fotografía de todo lo que se anotó, y las sesiones quedaron grabadas, esta misma forma de adquirir la información se aplicó con los diez estudiantes elegidos para la investigación. A pesar del cambio de modalidad, estas pruebas no mostraron ningún inconveniente relacionado con la telepresencialidad, ni tampoco se tuvieron dificultades de comprensión en los problemas o en las pruebas cognitivas de reporte verbal.

### **3.5 Protocolo para el análisis de la información**

Con base en los autores Ciucci et al. (2013), Polya (1965), Hernández (2002, p. 93) y los resultados obtenidos de la prueba piloto se realizó un protocolo para el análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de los problemas asignados. Dicho protocolo se basa en las fases descritas por el MEP (entendimiento del problema, diseño, control y revisión y comprobación) y para cada una de estas se definieron ciertos indicadores que reflejan su cumplimiento por parte del estudiante (ver anexo 5).

Las grabaciones de las entrevistas cognitivas de los diez estudiantes se transcribieron. Se asignó un color para una de las cuatro etapas y en las transcripciones se señaló, con su color respectivo, lo que cada estudiante dijo o realizó relacionado a estas.

Después, haciendo uso del instrumento para el análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de los problemas (ver anexo 5), de acuerdo a lo señalado para cada etapa, se indicaba con una equis si el estudiante cumplía con los indicadores definidos en cada una de ellas. Además, se agregaban comentarios adicionales con aspectos importantes de la entrevista, a criterio de las investigadoras.

La información fue resumida en una tabla, donde se indica la cantidad de problemas en los que se cumplió cada indicador. Además, se incluyen comentarios hechos por los entrevistados como ejemplos que permitan respaldar el análisis de las diferentes etapas.

## **CAPÍTULO IV - ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN**

En este capítulo se presenta el análisis de la información recopilada a través de la metodología descrita en el apartado anterior. Se describe el desempeño del estudiante por etapa y dentro de dicha descripción se concluye si el estudiante cumplió la etapa, o si no fue así. Para esto, se utilizó una tabla que resume el número de veces con que cada estudiante realiza los indicadores, por etapa, en cada problema.

Las fases descritas por el MEP (2012, p. 30) son cuatro. La primera tiene por objetivo el entendimiento del problema y consiste en tener claridad de lo que trata antes de empezar a resolverlo. La segunda es la etapa de diseño, en donde se debe considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico para la resolución. La tercera es la fase de control, que consiste en monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no lleve a una solución correcta. Y como última etapa, se tiene la revisión y comprobación, cuya acción es revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.

## 4. 1 Análisis de la información por estudiante

Tabla 6

*Frecuencia con que el estudiante #1 ejecutó los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	3
Identifica los datos del problema.	4
Extrae los datos relevantes del problema.	4
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	4
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	1
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	1
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	3
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	0
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	0
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	1
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	1
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	1
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

**Fuente:** Elaboración propia.



En las preguntas introductorias, el entrevistado define un problema matemático como:

*E1: ...algo que necesita una resolución.*

La información que brinda el estudiante no es lo suficientemente amplia para poder establecer una relación entre la percepción que tiene este participante acerca de los problemas matemáticos con los tipos de problemas que Polya define.

Además, el estudiante describe los pasos para dar resolución a un problema de la siguiente manera:

*E1: Leo la información, analizo y veo las diferentes opciones que puedo usar para dichas operaciones.*

El paso que considera más importante de aplicar es:

*E1: El conocimiento de las diferentes formas de hacer la operación.*

Con base en la información de la tabla 6 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

### **Etapas 1: Entendimiento del problema**

Con respecto a la etapa de entendimiento, se podría afirmar que el entrevistado acostumbra a realizarla, puesto que dedicó tiempo suficiente a tratar de comprender el enunciado, leyendo más de una vez tres de los cuatro problemas. Además, identificó y extrajo los datos relevantes en todos los problemas y determinó correctamente lo que se le preguntaba, esto queda evidenciado en las respuestas que dio a las preguntas que se le plantearon en la entrevista después de la resolución de cada problema. Es importante señalar que el entrevistado comprendió los cuatro problemas.

## **Etapa 2: Diseño**

Según el análisis de los indicadores de la etapa de diseño se puede concluir que este estudiante no la ejecuta, ya que en ninguno de los problemas planteó posibles caminos de solución y solamente en uno generó un plan. Sin embargo, sí relaciona la resolución del problema con otros conocidos, aunque no lo expresa claramente antes de iniciar a resolverlo. En las preguntas posteriores al primer problema, cuando se le preguntó de qué manera había influido haber resuelto algunos parecidos, el estudiante hizo el siguiente comentario:

*E1: Yo pienso que todo, porque si no hubiera visto el parecido al problema no lo hubiera conocido cómo resolverlo.*

## **Etapa 3: Control**

En el trabajo realizado para resolver el cuarto problema, se puede observar que el estudiante no pone en práctica el plan que generó en la etapa de diseño, pues consideró otro más eficiente, aunque no lo menciona directamente. Lo anterior se ve reflejado en la entrevista, cuando el estudiante menciona lo siguiente:

*E1: Voy a empezar a sumar 16 después del 47. (Realiza los cálculos) lo que hice fue multiplicar 16 por 126 me está dando 2016 que está muy cerca.*

En lo anterior se puede notar que inicialmente tenía la idea de sumar, pero luego multiplica para obtener más rápido el resultado. Continuando con la etapa de control, el entrevistado verifica la correcta ejecución de cada paso únicamente en el primer problema, en donde describe:

*E1: Estoy haciendo unos arreglos, que había calculado en la calculadora. Había puesto  $10 + 13$  todo seguido... en operación combinada, entonces por eso se hizo mal.*

Sin embargo, es la única revisión que hace de los pasos que realizó. Además, solamente en uno de los ejercicios descartó el plan porque no lo llevaría a la respuesta correcta, y cabe aclarar que este plan no fue generado en la etapa de diseño y además que el estudiante no generó uno nuevo. Aun así, el estudiante no se tomó el tiempo para analizar si el desarrollo que hacía estaba correcto, y tampoco pensó otras formas de resolver el problema. Por todo lo anterior, se puede concluir que el estudiante no ejerce un control adecuado sobre los procesos que realiza.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

En ninguno de los problemas se dio revisión del procedimiento realizado, ni se verificó la respuesta usando otro método de resolución. Además, ninguno de los problemas fue verificado con base en su contexto. Cuando se le preguntó al estudiante por qué consideraba que su respuesta era la correcta, él no mencionó que se debía al hecho de revisarla o comprobarla. Por ejemplo, en el primer problema se mostró seguro diciendo que su respuesta era correcta:

*E1: Porque el promedio es igual exactamente.*

El hecho de que los promedios den igual es parte del proceso para poder encontrar la respuesta, pero esto no implica que no haya existido un error de cálculo o una confusión al momento de brindarla.

Solo el problema cuatro fue verificado sin utilizar una nueva estrategia de resolución. En el momento de concluir el problema cuatro expresa:

*E1: Entonces sería fila 253, columna 3, para que me dé 2019. Que hay un parecido, a ver... en la fila 3 está el 15- 17- 19- 21 y 23. En la columna 253, empecé con 2015 en la uno, en la dos sería 2017, en la 3, 2019. Entonces sería fila 253, columna 3.*

Al emitir la respuesta anterior el estudiante identifica un comportamiento similar en la fila 3 y la 253, esto le ayuda a asegurar que el 2019 está en la columna 3, aun así, no aplica otra forma de revisión para el número de fila que brindó.

Por lo tanto, no hay evidencia de que sea habitual en el estudiante realizar la etapa de revisión y comprobación.

**Tabla 7**

*Frecuencia con que el estudiante #2 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	1
Identifica los datos del problema.	3
Extrae los datos relevantes del problema.	3
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	4
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	0
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	4
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	3
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	3
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

**Fuente:** Elaboración propia.

Previo a la entrevista cognitiva este estudiante expresó, en relación a su definición de problema matemático, lo siguiente:

*E2: ...es donde yo veo ecuaciones, ya sea números, letras, factores y esas cosas y haya símbolos matemáticos o numéricos, “por”, potencia, más, menos, división y todo ese tipo. Es como la imaginación que yo tengo con problema matemático.*

Según los tipos de problema descritos por Polya (1965, pp. 161-163), se puede categorizar la definición de este participante como “problemas de rutina”, pues menciona procesos aritméticos o resolución de ecuaciones, habilidades que por su nivel de escolaridad está habituado a realizar.

Sobre las etapas que aplica para resolver problemas matemáticos, comentó lo siguiente:

*E2: Como paso uno, leer el problema, tener claros los números y variantes que tiene el problema, yo leo el problema y comienzo a descartar números, apuntar datos, porque me gusta ser muy ordenado. Y como paso dos, comienzo a ver alguna fórmula que me sirva o comenzar a averiguar una forma para ver cómo se plantea y resuelve el problema. Después como paso tres, comienzo a utilizar las varias formas o usar la fórmula para resolver el problema y ver si el resultado está bien.*

Aunque el entrevistado describe su proceso en tres fases, lo que menciona tiene bastante similitud con las etapas que plantea el MEP en sus programas de estudios, en cuanto a la estructura del proceso.

Con base en la información de la tabla 7 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

### **Etapa 1: Entendimiento**

Ahora bien, haciendo el análisis del desempeño en la resolución de los problemas, en la etapa de entendimiento solamente hubo uno que fue leído más de una vez, identificó y

extrajo los datos en tres de ellos y en todos determinó acertadamente lo que se preguntaba. Ninguno de los problemas fue replanteado con sus propias palabras y, dado que no compartió sus apuntes, no puede determinarse si hizo alguna representación gráfica o no. Cabe mencionar que esta es la etapa que el estudiante considera más importante. Se puede concluir que este participante sí realiza la etapa de entendimiento, aunque no le requirió mucho tiempo, puesto que comprendió rápidamente los problemas.

## **Etapa 2 Diseño**

Sobre la etapa de diseño puede decirse que sí es realizada por el entrevistado. Se observó que el entrevistado no hizo planteamiento de posibles caminos de solución, aunque sí generó un plan en los cuatro problemas. Si bien la solución que pensó inicialmente para el primer ejercicio no le brindaría por ningún camino la respuesta, es clara la acción de generar un plan cuando externo:

*E2: Entonces lo que tengo que hacer es sacar... MCD entre las fechas de las edades para en sí sacar un promedio, por así decirlo. Vamos a ver qué tal...*

Para el segundo problema, luego de dibujar la figura en sus hojas (así lo expresa en la entrevista) menciona lo siguiente:

*E2: Ok, el ángulo que hay aquí y los demás son 40 y 30. Eh... creo que, para sacar otro ángulo, era la suma de las medidas de los ángulos menos 180. Entonces sería...*

En las preguntas planteadas después de resolver el problema 3, indicó que el plan se le ocurrió inmediatamente. Eso puede concluirse también porque cuando inició la solución del problema, expresa:

*E2: Entonces lo primero que voy a sacar son la cantidad de mangos. Por cada 4 naranjas hay 5 mangos... voy a sacarlo así, vamos a ver (...) Y ahora voy a contar las manzanas.*

Finalmente, en el cuarto problema indica:

*E2: Cada siete filas se repite el mismo patrón de números. Ahí lo que tengo que hacer es evitarme esas filas. Ok.*

Lo anterior es lo que intenta hacer, aunque no logra concretarlo.

Se observó además que hizo relación entre la posible resolución con la de otros problemas ya conocidos, en tres de los ejercicios de la entrevista. Acá también es importante destacar algunas frases que resaltan este indicador, cuando se le preguntó, en el problema dos, en qué aspectos había similitud con otros contestó:

*E2: En la posición de la figura o en sí la resolución del problema.*

Además, en el problema tres, al iniciar el problema comentó:

*E2: Diría yo que... esto lo había hecho. Lo tenía malo, pero ya lo había hecho.*

El último indicador de la etapa de diseño solo se cumplió en uno de los cuatro problemas, específicamente en el segundo, al parecer utilizando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

### **Etapa 3: Control**

En la etapa de control, el estudiante puso en práctica el plan realizado en los cuatro problemas, y solamente en uno descartó un plan que consideró no lo llevaría a la respuesta correcta. Esto ocurrió en el primer problema, en el plan que antes se dijo que no tenía mucho sentido, cuando el entrevistado menciona:



*E2: Eeh voy a seguir haciendo esto, sacando el MCD. Ok ya saqué esto y sería 3 por 3, 9 ... (sigue escribiendo) este proceso no es.*

También, en ninguno de los problemas hay cambio de plan por considerar otro más eficiente y, por último, no se observa una verificación de la correcta ejecución de los pasos en ninguno de los problemas.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

Podría decirse que la etapa de revisión y comprobación no suele ser realizada por este estudiante, pues no hubo cumplimiento de sus indicadores. Lo anterior se afirma porque los problemas en los que el estudiante sí brinda respuesta, no se observa que haya realizado alguna comprobación. Por ejemplo, en el primer problema mencionó:

*E2: Yo diría que las edades de las personas que se retiraron son 17 y 16 años.*

Pero en este problema, él mismo dice que sabe que su respuesta no está bien, cuando dice:

*E2: Porque lo hice a puro análisis, pura estadística, no tengo un proceso que me afirme realmente la respuesta. No tengo nada escrito ni formulado más que un análisis mental.*

Al determinar una respuesta para el segundo problema, dice:

*E2: Entonces sería  $40+30-180=110$ . Y listo.*

Después, cuando se le preguntó por qué estaba seguro de su respuesta, afirmó:

*E2: Estoy seguro de la fórmula y ahora sí tengo algo escrito que compruebe lo que hice.*

Es decir, tiene seguridad por una fórmula, no por el hecho de revisar o comprobar. Lo mismo ocurre en el tercer problema:

*E2: Ok entonces tenemos 24 manzanas. Listo.*

Diciendo también que estaba seguro de su respuesta cuando sostuvo que:

*E2: Haber visto el mismo planteamiento del problema, me dio un análisis más rápido de lo que tenía que hacer.*

### **Tabla 8**

*Frecuencia con que el estudiante #3 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	0
Identifica los datos del problema.	3
Extrae los datos relevantes del problema.	3
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	3
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	2
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	4
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	1
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	0
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	4
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	2
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0

Indicadores	Frecuencia
<b>Etapas de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

En las preguntas introductorias a la entrevista cognitiva, el entrevistado define problema matemático haciendo alusión, según los tipos que describe de Polya (1965, pp. 161-163), a los “problemas por resolver”. Para el autor, al solucionar este tipo de problemas se necesita conocer de forma precisa la incógnita, los datos y la condición. La definición del estudiante es la siguiente:

*E3: Es como una operación de matemáticas, pero más grande, digamos como que dan más cosas para la resolución.*

También, el participante comenta sus fases de resolución de problemas refiriéndose a una manera específica de resolverlos:

*E3: Este, primero pongo digamos, busco la fórmula luego junto todos los datos de la fórmula y ya luego lo resuelvo.*

Con base en la información de la tabla 8 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

## **Etapa 1: Entendimiento del problema**

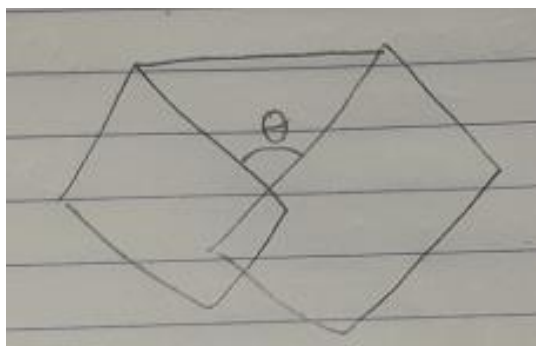
Como se muestra en la tabla 8, el estudiante no lee más de una vez ninguno de los problemas, en tres de ellos identificó y extrajo los datos importantes y, además, logró determinar correctamente lo que estos preguntaban. Por otro lado, en dos de los cuatro problemas realizó una representación gráfica o simbólica y ninguno de los problemas fue replanteado por sus propias palabras.

El estudiante rápidamente comprendió tres de los cuatro problemas, el que no logró entender fue el segundo y esto se puede observar mediante la representación gráfica que realizó (ver figura 2). No consideró relevante los datos que brindaba el problema ni los usó en el proceso de resolución del mismo.

Por lo tanto, hay evidencia para suponer que es habitual en el estudiante realizar la etapa de entendimiento, aunque no requiere dedicarle mucho tiempo a la misma para comprender los problemas.

### **Figura 2**

*Representación gráfica o simbólica del problema dos, realizada por el estudiante #3*



## **Etapa 2: Diseño**

Se puede concluir que el estudiante tiende a realizar la etapa de diseño, pero no lo hace de manera estructurada y clara. Trató de generar un plan en todos los problemas; aunque estos no describen lo que piensa realizar de principio a fin. A continuación, se muestra el plan que mencionó realizar en cada problema:

En el problema uno dijo lo siguiente:

*E3: "Primero voy a sacar la edad promedio.*

Y cuando se le cuestionó si había generado plan antes de iniciar a resolverlo, contestó que sí. En el segundo problema el estudiante no expresó el plan en voz alta; se le preguntó si se le había ocurrido alguna idea y mencionó lo siguiente:

*E3: Este... estaba buscando un ángulo recto...*

Por lo que da la impresión que su plan inicial era identificar un ángulo recto en la figura.

En el problema tres, indicó como plan lo siguiente

*E3: Entonces primero voy a buscar cuántas naranjas hay por cada cinco mangos.*

Y, en el último problema, mientras descubría el comportamiento de la tabla, mencionó lo siguiente:

*E3: Entonces, sigo el mismo, se supondría que la fila 14 vendría el 110, y así voy a seguir tratando de sacar las siguientes filas, hasta llegar a ese número.*

De los tres primeros problemas se puede concluir que sí tenía claro cómo iniciar la resolución del problema, pero no expresó qué iba a hacer después de encontrar dicha

información. No ocurre así en el último problema, donde sí mencionó que al seguir ese patrón o comportamiento que identificó, podría obtener lo que se le preguntaba.

Además, en esta misma etapa, el estudiante sólo relacionó uno de los problemas con otros ya conocidos, en la respuesta a las pruebas cognitivas de reporte verbal mencionó:

*E3: Digamos... de tratar de sacar la cantidad de cosas que habían.*

### **Etapa 3: Control**

Con respecto a la etapa de control, el estudiante pone en práctica el plan realizado en los 4 problemas; aun así, en ninguno de ellos verifica la correcta ejecución de cada paso.

Por ejemplo, al encontrar un resultado parcial en el tercer problema, dice:

*E3: Entonces multiplico ese 4 por 4, que me da 20.*

Resultado que claramente está incorrecto, pero aun así lo sigue utilizando cuando afirma que

*E3: Entonces, se supone que hay 20 naranjas...*

En uno de los problemas descarta el plan porque considera que no lo llevará a la respuesta correcta, y en el otro, toma la decisión de cambiarlo sin antes revisar el procedimiento. Para ninguno de los cuatro problemas el estudiante descartó el plan por haber considerado otro más eficiente.

Todo lo anterior permite llegar a la conclusión que el estudiante no acostumbra a aplicar un monitoreo acertado en lo que realiza; por lo tanto, no evidencia que haya desarrollado habilidades relacionadas con esta etapa de resolución de problemas.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

Por último, en la etapa de revisión y comprobación no se evidencia que el estudiante la aplica, pues obtuvo respuestas en los cuatro problemas, pero aun así no realizó ninguno de los indicadores de esta etapa.

**Tabla 9**

*Frecuencia con que el estudiante #4 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	0
Identifica los datos del problema.	3
Extrae los datos relevantes del problema.	2
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	2
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	1
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	2
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	4
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	2
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	0
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.



En el cuestionario introductorio, al definir problema matemático, el participante se refirió al hecho de encontrar una incógnita, por lo que puede relacionarse con los “problemas por resolver” según los tipos de problemas que Polya describe. La definición de problema que brindó el estudiante es la siguiente:

*E4: Es como resolver algo con una incógnita a veces.*

Cuando se le preguntó sobre los pasos o fases que aplicaba para resolver problemas, hizo alusión a una única manera de encontrar una solución, diciendo lo siguiente:

*E4: Si es con incógnita primero uso la fórmula, luego veo cuál es mi incógnita y luego comienzo a sustituir en la fórmula.*

Y en cuanto al paso más relevante sostuvo que era necesario:

*E4: Ver cuál es la incógnita, porque si no, no se puede resolver.*

Antes de iniciar la descripción del desempeño en cada etapa, se considera importante indicar que, al parecer, el estudiante no comprendió ninguno de los problemas que trabajó en la entrevista cognitiva.

Con base en la información de la tabla 9 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

### **Etapas 1: Entendimiento**

Para la primera fase puede afirmarse que el estudiante, a pesar que identificó los datos en tres de los problemas y extrajo los datos relevantes en dos, no ejecutó la fase de comprensión del problema antes de pasar a la propuesta de una estrategia de solución. Se percibió que luego de la lectura del enunciado pasa automáticamente a tratar de dar

solución al problema usando los datos, pero sin un rumbo específico. Esto se verá con más detalle en el análisis de las siguientes etapas.

Por otra parte, ninguno de los problemas se leyó más de una vez ni tampoco hubo un replanteamiento con palabras propias para cada uno. La representación gráfica solo se dio para el segundo problema, en donde el estudiante dibuja dos triángulos y en cada uno aparecen los ángulos de  $30^\circ$  y  $40^\circ$  que se brindan en el enunciado, como ángulos internos en su representación (ver figura 3). Sin embargo, esta representación gráfica no resulta muy útil para la resolución del problema, pues, aunque sí permite encontrar medidas iguales a las de algunos ángulos necesarios para determinar la medida del ángulo solicitado, el estudiante no las relaciona con el contexto del problema.

### Figura 3

*Representación gráfica o simbólica del segundo problema, realizada por el estudiante #4*



### Etapa 2: Diseño

En la etapa de diseño, el entrevistado no planteó posibles caminos de solución y solamente en dos de los problemas generó un plan. En el primero, él verbaliza:

*E4: Primero es poner las edades: 13... 9 ... 17... 10 ... 7 ... 16. La edad promedio es sacar la mitad si mal no recuerdo... Ah sí, todas divididas entre 100.*

Aunque parece que tiene un plan, no es claro que lo sea. Él mismo afirma en las preguntas posteriores, cuando se le consultó si había realizado plan para este problema, lo siguiente:

*E4: Eh, eso si no, porque lo que yo hago es anotar todos los datos y luego ya comenzar a realizar el problema. Digamos así.*

Es decir, al anotar las edades y expresar los cálculos que hará, es más una descripción del proceso, que un plan.

En el segundo problema comienza diciendo

*E4: Aquí sería identificar los ángulos opuestos que sería 90 el de arriba. Sería 90, hacer los triangulitos que forman estos ángulos.*

Aunque no se sabe exactamente qué es lo que el entrevistado pretende, él describe las acciones que hará y, además, cuando se le preguntó si había elaborado un plan, expresó.

*E4: En este sí. Primero saqué los dos triángulos que se forman a la hora de cortar el ángulo, forman dos triangulitos, dos de 90" (esto se supone que es lo que está en la figura 3).*

*E4: Y ahí comencé a sacar los ángulos, luego sumé todos esos ángulos, más otro 90 para ya sacar el valor del ángulo.*

Siguiendo con la fase de diseño en el tercer problema, sucede lo mismo que en el primero. Parece describir un plan, sin embargo, es parte del proceso y el mismo estudiante considera que no generó un plan:

*E4: Eh bueno no, este sí no.*

Incluso se le preguntó que si había comenzado directamente a resolverlo y él contestó afirmativamente. Y en el cuarto problema relata de alguna manera lo que hará, mencionando que:

*E4: En la primera hay que analizar cada columna y buscar en la que tenga el 2... el 20 más bien.*

Y aunque al final menciona que no hizo un plan, sí se observa que define un camino de solución.

En los cuatro problemas afirmó que había encontrado relación con problemas anteriores. Respecto a la consideración de un teorema para la resolución de los problemas, únicamente en el segundo se cumplió este indicador aplicando la suma de las medidas de los de ángulos internos y externos de un triángulo. Con todo lo anterior, se puede observar que el estudiante no lleva a cabo la etapa de diseño para la resolución de los problemas.

### **Etapa 3: Control**

En la fase de control, se observa que puso en práctica el plan realizado en dos de los ejercicios, específicamente en el dos y en el cuatro, que fue en los que había definido un plan. Sin embargo, no hubo verificación de los procesos realizados, no se descartó un plan en los problemas donde aplica y tampoco se cambió por otro más eficiente. Al parecer el estudiante no analizaba si las respuestas parciales que obtenía, o las operaciones a realizar, tenían alguna relación en el contexto, por ejemplo, en el problema tres afirma que:

*E4: Hay que restarle a esos 20 mangos, 5 naranjas.  $20 - 5 = 15$  naranjas*

Evidentemente, aunque numéricamente se tiene un resultado correcto, esa diferencia carece de sentido en la situación que se está trabajando. Se puede concluir que el estudiante no aplica un control en el desarrollo de los problemas.

#### **Etapas 4: Revisión y comprobación**

Por otra parte, puede afirmarse que, en estos problemas la última etapa no fue considerada por el entrevistado. En el primer problema, al llegar a la respuesta asegura:

*E4: La edad de las personas es 28,08. Listo ya lo terminé*

En esta afirmación es notorio que no verifica el sentido de su resultado con respecto a lo que el problema pregunta y tampoco hizo revisión del mismo. Además, no hace revisión de sus procedimientos y tampoco resuelve de una forma alterna para asegurar que su respuesta está correcta. La situación con los problemas restantes es la misma:

*E4: ...luego sería sumar los dos ángulos de arriba sería que sumen 360 para hallar ese ángulo y sería  $40 + 30 + 90 + 50 + 60 + 90 = 360$ . La medida de ese ángulo sería 90. Ya lo terminé (problema dos).*

*E4: ...y para sacar las manzanas. Al 15 hay que restarle 2 y sumarle 3.  $15 - 2 + 3 = 16$ , 16 manzanas. Listo, ya lo terminé (problema 3).*

*E4: Sería en la columna... 2, 2, ... 19... en la columna 4. Listo creo (problema 4).*

Es importante mencionar que el estudiante dijo creer que todas las respuestas que obtuvo estaban correctas, y que creía eso gracias a la calculadora.

**Tabla 10**

*Frecuencia con que el estudiante #5 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	4
Identifica los datos del problema.	4
Extrae los datos relevantes del problema. (no extrae los datos importantes en el dos)	4
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	4
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	1
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	2
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	2
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	1
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuando en las preguntas introductorias a la entrevista cognitiva se consultó a la estudiante sobre lo que entendía por problema matemático, se respuesta fue la siguiente:

*E5: Para mí un problema matemático es como... bueno, como... ¿Cómo te explico? como algo con números, como... a ver como algo con números donde uno tiene que realizarlo digámosle, que a vos te pongan como  $2+2$ , entonces, tenés que realizarlo. Para mí eso es como un problema matemático.*

La descripción que brinda la entrevistada hace referencia a cálculos con operaciones numéricas, por lo que no se encuentra alguna relación entre la definición brindada y alguno de los tipos de problema descritos por Polya.

Con respecto a las fases que utiliza para resolver problemas matemáticos, la entrevistada se refirió a procesos muy específicos:

*E5: depende de lo que haya que realizar, digámosle, porque si es una suma... digámosle, hay que prestar como mucha atención, puede ser suma, resta, multiplicaciones o factorizaciones y todas esas cosas y se pueden utilizar otras fórmulas y así.*

Al conversar sobre lo que consideraba más importante, se mantuvo en la idea de las operaciones básicas:

*E5: creo que más que todo como las sumas y las restas, que es muy importante. Más que todo prestar atención a eso, porque si sumas mal o restas mal, entonces el resto de pasos van a estar mal, digo del proceso.*

Con base en la información de la tabla 10 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

### **Etapas 1: Entendimiento**

Observando los indicadores que realizó esta estudiante en la etapa de entendimiento del problema, se puede concluir que es habitual en ella realizarla. En los cuatro problemas lee el enunciado más de una vez, identifica y extrae los datos importantes y, además, determina correctamente lo que el problema pregunta. Y aunque solo en uno realizó una representación gráfica o simbólica, la estudiante tiene claridad de lo que tratan todos los problemas.

### **Etapas 2: Diseño**

Con respecto a la segunda etapa, en los problemas dos y tres generó un plan de solución, aunque no tan estructurados y en el tercero no se describe lo que se piensa hacer de principio a fin. Sobre este indicador, los comentarios en cada problema fueron:

Problema 2

*E5: si a lo que yo pienso, si la medida de los ángulos tiene que dar 180, entonces podría sumar  $40 + 30$ ...*

Problema 3

*E5: Ok, entonces, lo primero que haría es sacar la cantidad de naranjas...*

Analizando los últimos dos indicadores de esta etapa, la estudiante relacionó el problema con otros que había resuelto anteriormente. En el primero de los problemas esto no le fue de mucha ayuda, ya que no recordaba la fórmula que debía utilizar para obtener el



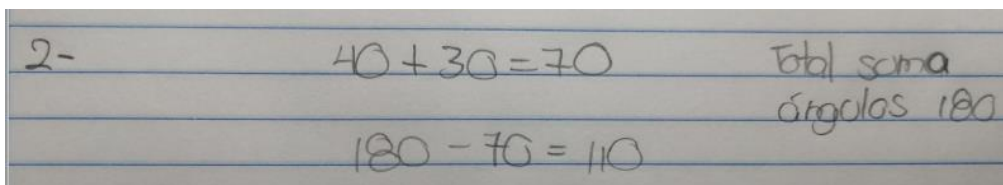
promedio y en el problema tres, cuando se le preguntó de qué manera había influido haber visto problemas como este, mencionó:

*E5: En sacar la idea lógica del problema.*

Al parecer le ayudó a comprender el problema y así poder generar el plan de solución. Sólo en uno de los cuatro problemas consideró el uso de un teorema para resolverlo, esto lo realizó en el segundo, aplicando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, aunque no lo menciona explícitamente, pero en sus apuntes lo podemos verificar (ver figura 4). No obstante, es importante señalar que la estudiante no analizó si las condiciones del teorema se cumplían para poder aplicarlo.

#### **Figura 4**

*Solución del segundo problema por el estudiante #5*



Handwritten mathematical work on lined paper. The work consists of three lines of text. The first line contains '2-' on the left, '40 + 30 = 70' in the middle, and 'Total suma' on the right. The second line contains 'ángulos 180' on the right. The third line contains '180 - 70 = 110' in the middle.

Con base en todo lo descrito, hay evidencia que la estudiante acostumbra a diseñar, propone o piensa en alguna forma de resolver los problemas antes comenzar a trabajarlos.

#### **Etapa 3: Control**

En la etapa de control, la entrevistada aplicó los dos planes generados en la fase anterior, en uno de ellos verificó la correcta ejecución de los pasos que realizó. Por otra parte, también descartó un plan, ya que consideró que no la llevaría a la respuesta correcta, cabe aclarar que este plan no fue generado en la etapa de diseño. La estudiante

acostumbra a monitorear el proceso y también abandona o desiste de un plan cuando considera que no la llevará a la respuesta correcta; por lo tanto, se puede afirmar que aplica esta etapa.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

Finalmente, en dos de los problemas donde obtuvo respuesta, no cumplió con ninguno de los indicadores. Cuando se le consultó, en las preguntas posteriores, si la respuesta obtenida en el problema dos estaba correcta, dijo que no, su justificación fue:

*E5: Porque siento que no está bien hecho... Además, de que, este... nunca he visto eso, entonces no puedo estar segura.*

Y en el problema tres, al decir que sí había contestado correctamente, justificó de la siguiente manera:

*E5: Porque si no me fallaron las sumas... eeeeh, diay, debe estar bien.*

La entrevistada no consideró la revisión o comprobación de sus respuestas, por lo que se puede concluir que no acostumbra a realizar esta etapa.

**Tabla 11**

*Frecuencia con que el estudiante #6 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	0
Identifica los datos del problema.	3
Extrae los datos relevantes del problema.	2
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	3
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	0
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	0
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	0
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	0
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

En las preguntas introductorias, cuando se le consultó a este estudiante sobre qué era un problema matemático para él, brindó una definición que se puede asociar con la clasificación “problemas por resolver” que Polya propuso, ya que el estudiante hace referencia a que debe encontrar la respuesta (incógnita) utilizando números y descifrando palabras. La definición brindada por el entrevistado fue:

*E6: Es una serie de números que te dan y algunas palabras que tenés que resolver para encontrar la respuesta.*

En la siguiente pregunta se le cuestionó acerca de los pasos que aplicaba para resolver problemas, esto fue lo que mencionó:

*E6: primero leo la pregunta, luego planteo la operación y luego lo resuelvo.*

Respecto a lo que comenta se considera que, aunque se relaciona con las etapas que el MEP establece, dicha relación no es tan estrecha. La lectura del problema no necesariamente lleva a su comprensión, además no se tiene mucha claridad si con planteo se refiere a extracción de la información relevante o a la etapa de diseño como tal. También, la fase de control podría ser considerada en el proceso de resolución que aplica, sin embargo, no se tiene certeza con lo que describe. Finalmente, el estudiante no hace mención de la etapa de revisión, por lo que se intuye que no la considera. De hecho, en ninguno de los problemas la realizó. En el desarrollo de los indicadores se verá esto con más detenimiento.

Con base en la información de la tabla 11 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

## **Etapa 1: Entendimiento**

En la fase de entendimiento, ningún problema fue leído en más de una ocasión, al menos no en voz alta. Luego de la lectura de los problemas uno y cuatro, guardaba silencio por momentos un poco prolongados, por lo que hubo necesidad de intervenir consultándole lo que pensaba o si tenía claro lo que se pedía. En el problema uno expresa:

*E6: Es que dice 'la edad promedio de las que quedaban, es la misma que la inicial'*

Lo que indica que lee el problema otra vez, pero en silencio. Posteriormente, en el mismo problema, antes de finalizarlo afirmó:

*E6: Primero apuntaría las edades... y es que ahí ya luego no sé cómo avanzar, no entiendo el problema.*

Ninguna de las etapas restantes pudo ser desarrollada luego, dado que no se cumplió la fase de entendimiento en este ejercicio, siendo este el único que no se comprendió.

Siguiendo con la primera etapa, en tres de los problemas se identificaron los datos que brindaba el enunciado y los relevantes fueron extraídos en dos de los ejercicios, específicamente en los problemas dos y tres, que de hecho fueron los que más desarrolló. Hubo tres problemas en los que determinó correctamente lo que se preguntaba. No hizo representación gráfica en ninguno de los problemas y tampoco replanteó alguno con sus propias palabras. Con lo anterior se evidencia que el estudiante no aplica esta etapa, puesto que cuando no comprende el problema rápidamente, desiste de su proceso.

## Etapa 2: Diseño

La etapa de diseño se considera que no fue aplicada por el entrevistado. El planteamiento de posibles caminos de solución no se dio en los cuatro problemas, ni tampoco se generó un plan de resolución. En el segundo problema, luego de la lectura y después de un momento de silencio, el estudiante consulta:

*E6: ¿110° da el ángulo?*

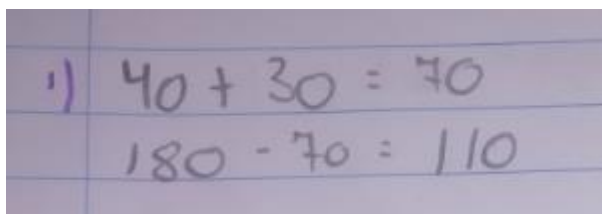
Y cuando se cuestionó sobre la manera de resolverlo, afirmó:

*E6: creo que había que sumar los ángulos de abajo y se le tenía que restar a 180 si no estoy mal.*

De hecho, lo que hace en sus apuntes se muestra en la figura 5.

### Figura 5

*Solución del segundo problema por el estudiante #6*



1)  $40 + 30 = 70$   
 $180 - 70 = 110$

Entonces si el estudiante realizó un plan, no lo verbalizó, aunque en las preguntas posteriores a la resolución de los problemas dijo que sí generó uno.

Continuando con el análisis de la segunda etapa, el entrevistado afirmó que encontró relación de dos de los problemas realizados con otros anteriores. Esto se dio en el primer

problema, en el cual el estudiante mencionó que los datos representaban una cantidad de frutas, en lugar de las edades de las personas:

*E6: ...que eran frutas. En lugar de personas eran frutas*

Es importante señalar que este es otro indicador de que probablemente no hubo comprensión del enunciado. En el segundo problema dice:

*E6: prácticamente lo mismo, ponían figuras y a investigar el ángulo.*

Sobre la consideración de un teorema, esto se dio en el problema dos y usó la suma de los ángulos internos de un triángulo, sin verificar que las condiciones del ejercicio se lo permitieran.

### **Etapas 3: Control**

Los indicadores de la fase de control no se cumplen, por lo tanto, hay evidencia que el estudiante no lleva a cabo esta etapa. Cabe aclarar que el hecho de no poner en práctica el plan en ninguno de los problemas, es consecuencia de no haber generado ninguno en la fase anterior. Por otro lado, tampoco hubo verificación de los procesos o resultados que se iban obteniendo. En el tercer problema luego de realizar unos cálculos y de preguntarle lo que hacía, respondió:

*E6: ... creo que ya tengo la respuesta de las naranjas, pero lo que no sé es las manzanas.*

Y cuando se consultó la manera en que encontró ese resultado, mencionó:

*E6: dice que la canasta tiene 20 mangos. Y por cada cuatro naranjas hay 5 mangos, lo que hice fue dividirlos (...) Dividir los 20 entre 4.*

Posteriormente no tiene mucha certeza de qué hacer con ese resultado, porque momentos después dio por finalizado el problema. Y, por último, no descartó ni cambió el plan.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

La etapa de revisión y comprobación tampoco se dio en el desarrollo de estos problemas. En el único problema en donde se obtuvo una respuesta, que fue el problema dos, más bien su manera de buscar seguridad de la misma fue consultado a la entrevistadora lo siguiente:

*E6: ¿110° da el ángulo?*

Esta es una parte de la entrevista en donde se le pregunta si su respuesta era acertada o no:

*Entrevistadora: ¿Crees que contestaste correctamente el problema?*

*E6: Mmm, no lo sé.*

*Entrevistadora: Mmm ¿Qué sería más, que sí está correcto o que no? ¿Por cuál te inclinás?*

*E6: Creo que está bien.*

*Entrevistadora: ¿Qué te ayudo a resolverlo?*

*E6: Ehh, la calculadora.*

*Entrevistadora: ¿Por qué crees que la respuesta a la que llegaste es la correcta?*

*E6: Porque a lo que me acuerdo, creo que así era que se hacía.*

En donde es claro que el entrevistado se basa en contextos similares de problemas anteriores, pero no en un proceso de comprobación.



**Tabla 12**

*Frecuencia con que el estudiante #7 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	4
Identifica los datos del problema.	4
Extrae los datos relevantes del problema. (no extrae los datos importantes en el dos)	4
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	2
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	1
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	0
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	0
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	1
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	0
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	1
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

La definición brindada por esta estudiante, en las preguntas introductorias, cuando se le consultó qué era un problema matemático para ella, no se puede asociar con la clasificación que brinda Polya, ni con la definición de problema matemático puesto que, lo que hace es comentar la aplicación en la vida cotidiana de los mismos. La respuesta que brindó fue la siguiente:

*E7: A ver, un problema matemático para mí puede ser como los problemas que vemos diariamente. Porque la mate se presenta en todo, que si vas a comprar algo, di, hay que usar la mate, de que si sumas, que si restas, que si multiplicas. Para mí es eso, lo que se aplica día con día. Es algo fundamental, en mí pensar.*

Por otra parte, cuando se le consultó sobre los pasos que aplicaba para resolver problemas matemáticos, la estudiante los describió de la siguiente forma:

*E7: dependiendo, casi siempre comienzo utilizando fórmulas básicas., ya sea la suma, la resta ... ya después trato de utilizar ecuaciones que vi el año pasado, como de ver similitudes. Ahorita algoritmos, suena raro, pero sí, a veces sí los utilizo*

Cuando se habló sobre los pasos que consideraba más importantes, se refirió a procesos muy específicos:

*E7: siento que como lo básico, saber sumar, restar, multiplicar y dividir que es como la base para empezar.*

Con base en la información de la tabla 12 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

## **Etapas 1: Entendimiento**

La estudiante, en este caso, dedica tiempo suficiente a entender los problemas puesto que los leyó más de una vez e identificó y extrajo los datos relevantes. También, en dos de ellos determinó correctamente lo que preguntaba el problema. Por otro lado, solo en el problema tres hubo representación gráfica o simbólica. A pesar de que cumple con la mayoría de los indicadores en esta etapa para cada problema, hubo tres que no se comprendieron, como se puede notar en las siguientes transcripciones de una parte de la entrevista:

### **Problema 1**

Claramente comprende la situación del problema, pero no hace la conexión con algún contenido matemático (en este caso el promedio) para poder resolver el problema. La solución la asocia con una situación social, donde los menores no pueden permanecer “hasta tarde”, aunque el contexto del problema no haga referencia al momento en que se da la reunión.

*E7: Ok, digamos las edades están desde los 7 a los 17 años, se retiran dos. A ver, si se retiran dos y están de los 7 a los 17, siento que se van como los menores, los dos menores.*

*Entrevistadora: Y ¿por qué sentís eso? o ¿por qué pensás que pudieron ser los dos menores los que se retiraron?*

*E7: Es que siento... digamos, es una reunión, las edades están desde los 7 a los 17, pero un ejemplo, que de la reunión quedara hasta tarde, por lo general siempre se van los menores, por las horas, que porque las reuniones se extienden.*

## Problema 2

En este problema, sabe que debe encontrar el ángulo, pero no tiene claro lo que este representa en el dibujo:

*E7: si lo vemos de forma general, digamos, como te dije al principio, que son 360... sería un ángulo de 290, para completar el ángulo de 360, en forma general. Pero si está pidiendo el ángulo que se está formando en estas dos figuras, o sea, ese pequeñito serían 45 grados. Pero no está especificando si es en general o no.*

## Problema 4

La estudiante cree que con los números que se observan debe formar o construir el 2019 haciendo operaciones entre ellos. No comprendió que la tabla continuaba y que debía descubrir un patrón para seguir avanzando, y poder así descubrir la posición del número:

*E7: ...para ver si entre todos los números puedo conseguir el 2019.*

## **Etapa 2: Diseño**

Para la etapa de diseño, relacionó dos de los problemas con otros que ya había resuelto. El problema tres fue uno de ellos, pues en las pruebas cognitivas de reporte verbal a este, se le cuestionó si había trabajado problemas parecidos y en qué aspectos eran similares, a lo cual contestó lo siguiente:

*E7: básicamente lo mismo, lo único que cambia es como los objetos...*

No planteó posibles caminos de solución ni verbalizó ningún plan antes de comenzar a trabajar en ninguno de los problemas, en el segundo utilizó el teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo, sin estar consciente de ello, puesto que no verificó si

las condiciones se cumplían para poder aplicarlo. Por lo que se puede concluir que esta estudiante no acostumbra a realizar la etapa de diseño con claridad.

### **Etapa 3: Control**

Con respecto a la etapa de control, solo en el problema tres verificó que cada paso lo iba realizando correctamente, en los demás no realizó ningún monitoreo del proceso realizado. Lo anterior deja en evidencia que esta estudiante no acostumbra a controlar el proceso que desarrolla.

### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

Se puede decir que no es habitual en esta estudiante revisar y comprobar las respuestas obtenidas, cabe aclarar que únicamente en el último problema no obtuvo respuesta. En el primero se devolvió a revisar el procedimiento y concluyó que mantenía su respuesta original, aunque tenía dudas. Por ejemplo, cuando se le consultó si había contestado de forma correcta en las pruebas cognitivas de reporte verbal, comentó:

*E7: Siento que no, siento que lleva otro procedimiento, pero no estoy segura*

Y la razón que brindó fue:

*E7: dice que se calcula la edad promedio de dichas personas, se retiraron dos, pero queda la misma cantidad que la inicial, entonces son como trabas que me generan mucha inseguridad a la hora en mi respuesta.*

Un detalle importante de mencionar es que el problema tres fue el que esta estudiante resolvió de una forma más completa, pues se pudieron evidenciar las diferentes etapas y fue el único donde la respuesta que obtuvo estaba correcta.

**Tabla 13**

*Frecuencia con que el estudiante #8 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	1
Identifica los datos del problema.	4
Extrae los datos relevantes del problema.	3
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	3
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	3
Replantea el problema con sus propias palabras.	1
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	0
Genera un plan de solución.	1
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	0
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	1
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	1
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	1
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

Antes de iniciar el análisis de las etapas desarrolladas por esta estudiante, es necesario mencionar lo que expresó cuando se le consultó acerca de la definición de problema matemático y sobre las fases que dijo realizar para resolverlo. Con respecto a la primera pregunta, la definición brindada se relaciona con la clasificación que da Polya de “problemas por resolver”, aunque hace referencia específicamente a las operaciones básicas, menciona que las debe realizar para encontrar la respuesta. La definición que brindó fue:

*E8: Ehmm un problema es en el que tengo que usar una operación matemática, suma, resta, multiplicación o división, para llegar a una respuesta.*

Con respecto a la segunda pregunta, la estudiante mencionó que los pasos que realizaba eran los siguientes:

*E8: Primero analizo el problema, lo leo... luego veo cuál puede ser el método, luego lo pongo en práctica, lo que haya considerado sea mejor, y de último compruebo que haya sido correcto el resultado, volviendo a realizar todo el proceso.*

Lo que describe va muy de la mano con las etapas que se están estudiando en este trabajo. Falta ver si lo descrito guarda relación con el trabajo realizado en los problemas de la entrevista.

Con base en la información de la tabla 13 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

## **Etapa 1: Entendimiento**

Hay suficientes evidencias para concluir que esta estudiante sí se toma el tiempo suficiente para realizar la etapa de entendimiento. Incluso es la etapa que más considera importante, porque cuando se le preguntó sobre ello en las preguntas introductorias, afirmó:

*E8: principalmente analizar el problema, porque por ahí se empieza, porque si uno no lo lee bien y no lo analiza bien, entonces ya todo lo demás va a estar incorrecto.*

Además, esta fase es en la que se observa el cumplimiento de más indicadores, como se puede ver en la tabla 8.

En todos los problemas se observó que identificó los datos, y en tres de ellos extrajo los datos relevantes que se brindaban. También, determinó correctamente lo que se preguntaba en los problemas dos, tres y cuatro. En cambio, en el primero, que de hecho fue el que leyó más de una vez, no lo logró. Incluso, la respuesta a este problema fue:

*E8: ...entonces creo que esa es mi respuesta. Que depende de cómo sea, o sea que uno lo vea digamos. Porque entonces no podría salir nadie, de alguna u otra forma cambiaría la edad, de los números.*

El comentario anterior, como es evidente, no va de la mano con el sentido de la respuesta esperada. Además, es importante señalar que este fue el único problema que no logró entender.

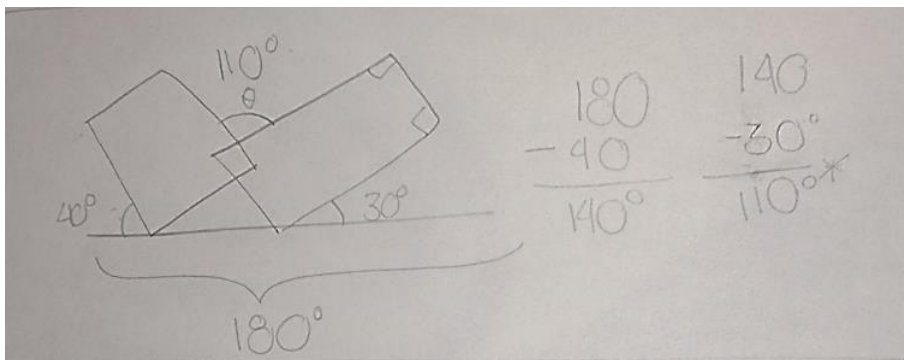
En cuanto a las representaciones gráficas, estas se dieron en los tres problemas que comprendió. En el segundo problema, hace una réplica de la figura que se presenta en



el enunciado, pero debajo de ella parece señalar que los ángulos suman  $180^\circ$  y de ahí hace sus cálculos (ver figura 6).

**Figura 6**

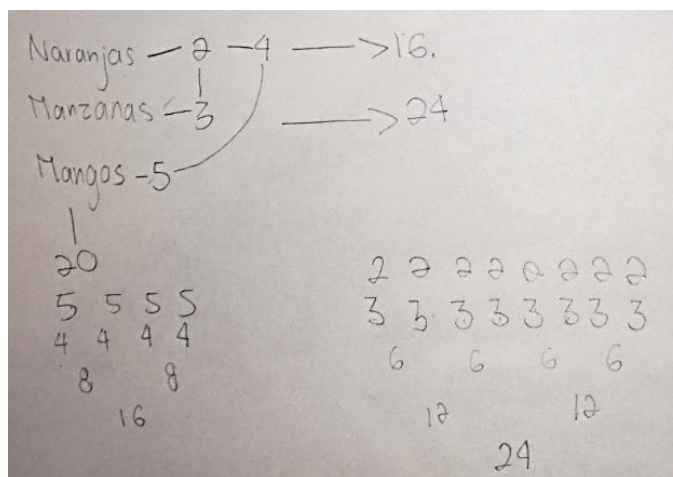
*Representación gráfica del segundo problema, realizada por la estudiante #8*



En el tercer problema, se logra apreciar una especie de esquematización de la información que el enunciado proporciona (ver figura 7).

**Figura 7**

*Resolución que brinda al tercer problema el estudiante #8.*



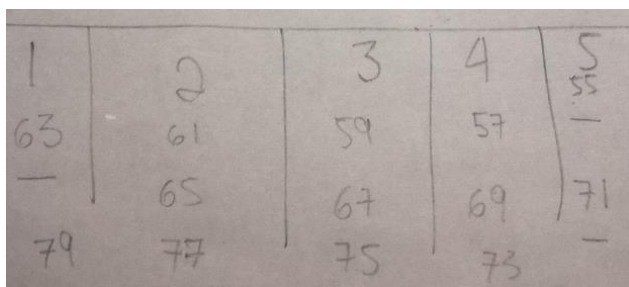
Puede notarse que la estudiante escribe la cantidad de cada fruta y hace conexiones entre esos datos, mediante líneas, para determinar las proporciones que hay entre los

productos. A partir de ese esquema realiza los cálculos para encontrar la cantidad de frutas que se busca.

En el último problema se hizo una continuación de la tabla, con números después del 55, esto se puede observar en la figura 8.

### Figura 8

*Representación gráfica del estudiante #8 del cuarto problema*



1	2	3	4	5
63	61	59	57	55
—	65	67	69	71
79	77	75	73	—

Esta representación demuestra que la estudiante comprende el comportamiento de tabla, ya que después del número 55 completa tres filas más de manera acertada.

### Etapa 2: Diseño

En la segunda etapa, el cuarto problema fue el único en el que se generó un posible camino de solución, que rápidamente fue descartado:

*E8: Digamos la única forma que se me ocurre sería como seguir bajando la columna, pero sería muy largo, después del 55. Pero estoy pensando a ver otra forma.*

Por otro lado, se generó un plan solamente en el segundo problema, esto se evidencia cuando la estudiante comenta:

*E8: siento yo que habría que restarle a 180 esos dos ángulos para saber cuál es el que está arriba.*

Además, los problemas dos y cuatro fueron en los que se relacionó la solución con la de otros conocidos. Por otra parte, la estudiante no consideró el uso de un teorema para

ninguno de los cuatro problemas, en el tercero se basó en que una vuelta completa a un círculo mide  $360^\circ$  y después realizó los cálculos a partir de la mitad del círculo (ver figura 6). Esto se evidencia en lo que mencionó, mientras analizaba el ejercicio:

*E8: si uno da una vuelta completa son 360 grados, nos están diciendo que con respecto a la línea horizontal. Significaría que llega... no... ¿cómo es?... Ajá, siento yo que habría que restarle a 180 esos dos ángulos...*

Con base en lo anterior, hay evidencias para concluir que la estudiante no acostumbra a ejecutar la etapa de diseño de estrategias de forma explícita, o valorar si esta tiene sentido, antes de resolver los problemas.

### **Etapa 3: Control**

En el problema dos, que fue donde generó una estrategia, se pudo evidenciar que sí ejecutó la fase de control. En el cuarto, aunque no generó plan inicialmente, sí se observa que descartó las estrategias que encontró porque no la llevarían a la respuesta correcta:

*E8: Ok (se queda analizando y observando la tabla). Ok tengo una forma en la que tal vez podría funcionar. Voy a ver si me sirve con la siguiente columna.*

*Entrevistadora: ¿cuál sería esa idea? Comentanos a ver.*

*E8: Este... ver digamos si siguen un patrón cada columna.*

*(...)*

*E8: El método que inventé no funcionó (lo dice riéndose).*

*Entrevistadora: ¿Y ese patrón que intentaste, por qué lo descartaste?*

*E8: Porque intenté tres filas más y no se volvía a iniciar el patrón.*

*(...)*

*E8: (hace cálculos y observa constantemente la pantalla) Ok, creo que encontré una forma. Voy a intentar sumarle a la columna 1 los números.*

Al final, la estudiante descartó la última forma que había encontrado, porque los resultados que iba obteniendo eran números pares. No determinó una respuesta para el problema.

En general, en ninguno de los problemas verificó la correcta ejecución de cada paso. No es posible concluir si aplica la etapa de control o no, dado que, de los indicadores mencionados anteriormente, solo uno de ellos se cumple en el problema dos, y otro en el problema cuatro. No se tiene información suficiente para valorar esta etapa.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

Sobre la cuarta etapa, se considera que la estudiante no la llevó a cabo en estos ejercicios. Obtuvo respuesta en tres de los cuatro problemas, siendo correctas en los problemas dos y tres. La verificación de la relación de las respuestas con el contexto solamente ocurrió en el problema tres:

*E8: no me pareció que los resultados sean muy locos por así decirlo*

El resto de indicadores no se cumplieron para esta etapa, en ninguno de los problemas. Es importante mencionar que esto no concuerda con lo que la estudiante dijo al principio, respecto a que realizaba nuevamente el proceso para revisar su respuesta.

**Tabla 14**

*Frecuencia con que el estudiante #9 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	4
Identifica los datos del problema.	3
Extrae los datos relevantes del problema.	3
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	4
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	1
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	2
Genera un plan de solución.	2
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	2
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	1
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	1
Revisa el procedimiento realizado.	1
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

Antes de iniciar con el análisis de cada etapa, es importante mencionar lo que el estudiante contestó cuando se le preguntó por la definición de problema matemático y por los pasos que utilizaba al resolver un problema. Con respecto a su definición de problema, se considera que no se puede relacionar con la clasificación que describe Polya, dado que no se distingue algún elemento que se asocie con alguno de los tipos de problemas:

*E9: Para mí es una pregunta o bueno, no necesariamente una pregunta, sino algo que nos planteamos en nuestra mente que tenga que ver con números o con algún cálculo o algo que tengamos que... ¿cómo te explico? Bueno, sí, como algo que tengamos que calcular o medir o ese tipo de cosas.*

En relación con los pasos que utiliza para resolver un problema matemático comentó:

*E9: Este... así como pasos no tanto, más que todo lo que siempre hago es leerlo bien, lo analizo. Depende, si el problema le pone varias cantidades a uno así... las ordeno. Como lo que le enseñan a uno en la escuela de lo de la estrategia, ya uno a esas alturas lo hace en la mente y lo analizo y después busco la manera de llegar al resultado y así*

Además, se le pidió que indicara cuál de los pasos mencionados no podía faltar, y a esto contestó:

*E9: La de analizar, porque si no analizamos bien no vamos a saber de qué trata o cómo tenemos que hacer para resolverlo.*

Con base en la información de la tabla 14 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

## Etapa 1: Entendimiento

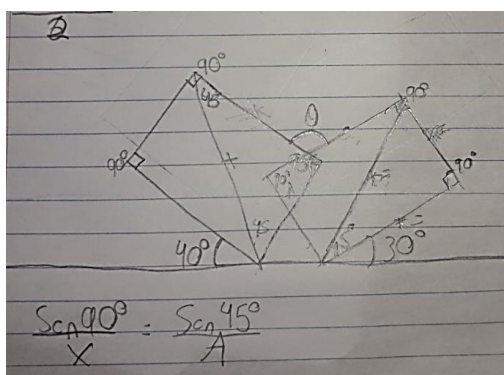
Efectivamente, este estudiante ejecuta la etapa de entendimiento, y los pasos mencionados en las preguntas introductorias, coinciden con varios de los indicadores seleccionados en esta investigación para esta etapa. Todos los problemas fueron leídos más de una vez en voz alta, en tres de ellos identificó y extrajo los datos importantes; donde no sucedió esto fue en el problema dos, ya que como se aprecia en el dibujo que realizó (copiando lo mismo que presentaba el problema) anotó los datos, pero no los contempló para resolver el problema (ver figura 9). El estudiante sí tenía claro qué era lo que preguntaban los cuatro problemas. A pesar de todo lo anterior, el único problema que no comprendió fue el último, ya que mientras observaba el enunciado, mencionó:

*E9: me imagino que hay que realizar un tipo de operación con todos estos números, para ver dónde sale el número 2019*

Lo anterior deja en evidencia que no comprendió la tabla, ya que esta continuaba y el 2019 se encontraba más abajo.

### Figura 9

*Dibujo realizado del problema dos por el estudiante #9*



## **Etapa 2: Diseño**

Con respecto a la etapa de diseño, en dos de los problemas plantea posibles caminos de solución, genera un plan claro y relaciona dicha resolución con otros parecidos. Y en uno de estos dos, específicamente en el segundo, consideró la ley de senos para resolverlo, como se aprecia en la figura 9, aunque de una forma no aportaba a la solución del problema. En los problemas tres y cuatro no menciona el plan antes de comenzar a trabajar o no lo hace de manera clara. En las pruebas cognitivas de reporte verbal al problema tres, se le preguntó si había elaborado un plan antes de comenzarlo y mencionó lo siguiente:

*E9: Sí, me basé en esto que decía aquí, 20 mangos y me fui ahí, primero, por lo de la naranja y empecé a agrupar cantidades...*

Lo anterior permite deducir que tenía un plan visualizado, aunque fuera básico y no lo lograra verbalizar. En el problema cuatro, cuando se le preguntó al estudiante qué había pensado, ya que pasó bastante tiempo en silencio, no muy convencido, contestó:

*E9: supongo que lo que te dije ahorita, lo que creo es que realizando algún tipo operación con estos números.*

Se puede concluir que el estudiante acostumbra a ejecutar la etapa de diseño, ya que tenía una idea de lo que pensaba realizar en cada uno, aunque en algunos de los problemas no fuera tan claro.



### **Etapa 3: Control**

El estudiante pone en práctica el plan generado para cada problema. Verifica la correcta ejecución de cada paso en el problema tres y no consideró descartar algún plan en ninguno de los problemas por pensar que no lo llevaría a la respuesta correcta. En el problema dos claramente su plan no era el correcto cuando mencionó:

*E9: y si saco este lado me mediría desde aquí arriba, hasta acá abajo. Pero lo que necesito es la medida del punto del centro hacia arriba y aquí igual, para sacar este ángulo.*

A pesar de que no es la medida que necesita, después indica:

*E9: sí, voy a sacar estos lados de cada uno y lo voy a intentar sacar así.*

Posteriormente se da cuenta que no lo puede resolver de esa manera, cuando dijo:

*E9: el problema que tengo es que está enredado sacar los lados de cada uno, porque sólo tengo ángulos, no tengo ni una sola medida de... Creo que se va a quedar así.*

No contaba con la información para poder aplicar el teorema que tenía planeado, pero aun así no lo descartó, más bien continuó intentando encontrar la medida de los lados para después poder aplicar el teorema.

Por consiguiente, hay evidencias de que este estudiante no acostumbra a aplicar la etapa de control, en los problemas planteados, ya que no tiene un buen monitoreo del procedimiento que realiza.

#### **Etapa 4: Revisión y comprobación**

En cuanto a la etapa de revisión y comprobación, cabe aclarar que el estudiante sólo obtuvo respuesta en el problema tres. Cuando dio la respuesta, se quedó un momento en silencio, la entrevistadora intervino y le cuestionó que qué estaba pensando, él contestó:

*E9: Lo estoy revisando, para estar seguro.*

Como sólo brindó una respuesta de los cuatro problemas no se puede concluir que acostumbra a realizarla, lo que sí es importante señalar es que esta única respuesta estaba correcta.

#### **Tabla 15**

*Frecuencia con que el estudiante #10 cumplió los indicadores de cada etapa*

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	
Lee el problema más de una vez.	1
Identifica los datos del problema.	4
Extrae los datos relevantes del problema.	3
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	3
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	0
Replantea el problema con sus propias palabras.	0
<b>Etapa de diseño</b>	
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	1
Genera un plan de solución.	2
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	3
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	1

<b>Indicadores</b>	<b>Frecuencia</b>
<b>Etapa de control</b>	
Pone en práctica el plan realizado.	2
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	1
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0
<b>Etapa de revisión y comprobación</b>	
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0
Revisa el procedimiento realizado.	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0

Fuente: Elaboración propia.

Antes de iniciar con el análisis, es importante resaltar lo que la estudiante contestó en las preguntas introductorias. Cuando se le preguntó por la definición de problema matemático, mencionó que debe pensarlo bastante para resolverlo y que los datos que se brindan no se logran identificar tan fácil. Esta definición se puede asociar a los “problemas prácticos”, donde según Polya las condiciones y los datos están presentados con menos claridad. Lo que contestó fue lo siguiente:

*E10: Ehmm... un problema matemático para mí es una serie de ejercicios en el cual tengo que darle mucha mente para darle su respuesta y muchas veces... nos dan los datos, pero uno no los ve a simple vista y uno tiene que encontrar esa respuesta.*

Con respecto a los pasos que realiza al momento de resolver un problema, contestó:

*E10: Primero, eh... leo el ejercicio, después escribo todos los datos importantes y busco la mejor resolución para dar la respuesta.*

Además, resaltó que el paso que considera nunca debe faltar es:

*E10: Escribir todos los datos importantes.*

Los dos primeros pasos hacen referencia a la etapa de entendimiento del problema y el tercero a la etapa de diseño.

Con base en la información de la tabla 15 se describe el desempeño del estudiante con respecto a cada una de las etapas.

### **Etapa 1: Entendimiento**

La entrevistada solamente leyó en voz alta más de una vez uno de los problemas, en los cuatro problemas identificó los datos, pero sólo en tres de ellos extrajo los datos importantes y logró determinar correctamente lo que se le preguntaba. Lo mencionado en las preguntas introductorias comparado con los indicadores que realizó tiene concordancia, en la figura 10 se puede observar que efectivamente anotó los datos y aunque el problema fue leído únicamente una vez en voz alta, sí logró comprender el problema y lo mismo sucede con el tercer problema (ver figura 11). El único problema que no comprendió fue el cuarto, de hecho, es el que más veces requirió leer en voz alta. Por otro lado, en ninguno de los cuatro problemas realizó representaciones gráficas o simbólicas ni tampoco replanteó el problema con sus propias palabras. Con base en todo lo anterior, se puede concluir que la estudiante acostumbra a realizar la etapa de entendimiento del problema.

## Figura 10

Resolución del problema uno por el estudiante #10

1) Personas 6  
Edades 13, 9, 17, 10, 7 y 16 /  $72 \div 6 = 12 - 2 = 10$ .  
Personas -2

7	9	10	13	16	17

## Figura 11

Datos importantes del problema tres por el estudiante #10

3) Naranjas •/c 4 naranjas hay 5 mangos  
Mangos •/c 3 mangos hay 2 naranjas  
Mangos = 20 ✓

## Etapa 2: Diseño

Con respecto a la etapa de diseño, en dos de los cuatro problemas la estudiante genera un plan. En las pruebas cognitivas de reporte verbal al primer problema, mencionó:

*E10: Y pues, de ahí hago el plan, pero no lo pienso antes de ya ponerme como a resolverlo y eso.*

Lo anterior contradice lo que externó en los problemas dos y tres, cuando se le hizo la misma pregunta:

*E10: Sí, en este sí pensé primero... Eh, había pensado todo eso, pero tenerlo en papel se me hizo más claro.*

Tres de los cuatro problemas son relacionados con otros conocidos, el único que no consiguió relacionar fue el cuarto problema; en las pruebas cognitivas de reporte verbal a los problemas, cuando se le consultó si había tenido la oportunidad de resolver problemas parecidos, contestó:

*E10: No, realmente no he tenido”*

En uno de los cuatro problemas utiliza el teorema de los ángulos internos de un triángulo, sin expresarlo de manera directa, y sin verificar que las condiciones se cumplieran para poder aplicarlo. Con base en la información anterior, hay evidencia para creer que la estudiante acostumbra ejecutar esta etapa.

### **Etapa 3: Control**

Ahora, analizando los indicadores de la etapa de control, se puede concluir que la entrevistada no acostumbra a monitorear ni controlar de manera efectiva el proceso de resolución. Aunque aplicó el plan generado en los dos problemas, se tiene que sólo en el primero descartó el plan que estaba siguiendo, cabe aclarar que este no fue generado en la etapa de diseño (ver figura 10). Además, a pesar de haber comprendido este problema, no tenía claro cómo interpretar matemáticamente el enunciado, pues calculó correctamente el promedio de las edades de las seis personas, pero como se retiraron dos, a dicho promedio le restó esa cantidad, lo cual no tiene mucho sentido. También intentó resolverlo de otra manera cuando dijo:

*E10: Pues la idea si había un patrón entre los números, pensé...*

En la figura 10 puede verse el trabajo realizado. Aun así, no verificó la correcta ejecución de cada paso, más bien descartó el plan que la podía llevar a la respuesta.

#### **Etapas 4: Revisión y comprobación**

Finalmente, no es habitual en la estudiante revisar o comprobar las respuestas obtenidas. Es importante señalar que solo en el segundo y tercer problema obtuvo respuesta y consideraba que ambas estaban correctas. No realizó ninguno de los indicadores de esta etapa y cuando se le preguntó, en las pruebas cognitivas de reporte verbal, por qué consideraba que el método utilizado en el segundo problema era el correcto, dijo:

*E10: Eh... pues, de cierta manera en ejercicios que hacía en el colegio tenía como esa claridad... Como esa idea o similitud que había hecho en figuras pasadas, supongo que eso me ayudó...*

Y cuando se le cuestionó por qué consideraba que la respuesta estaba correcta manifestó:

*E10: eh... como te digo, ese es el método que utilicé y pues que me dio como esa seguridad de cierta manera para darle la respuesta.*

Es decir, como el método ya lo había utilizado en otros problemas, su seguridad se basó en ese hecho. La respuesta que brindó en el tercer problema, a esta misma pregunta fue:

*E10: Porque... no sé, me guíe por la cantidad de mangos, con la cantidad de naranjas, supuse que así tenía que ser con el otro dato de las manzanas.*

Se entiende que cuando trabaja por grupos hay cierta seguridad y no se tiene necesidad de verificar, es decir, los 20 mangos generan 4 grupos de 5 y calcula 4 naranjas por cada grupo, resultando 16. Como ese conteo tiene cierta lógica, entonces parece que ya no es necesario devolverse y revisar cada respuesta parcial, para así verificar su respuesta final.

#### 4.1.1 Resumen

Según el análisis que se hizo por individuo de su desempeño en la resolución de los cuatro problemas de la entrevista cognitiva, se resume que de los diez estudiantes, como se puede ver en la tabla 16, ocho acostumbran a realizar la etapa de entendimiento del problema; cinco suelen diseñar o proponer diferentes formas de resolver el problema antes de comenzar a trabajarlo; solamente uno realiza un control o monitoreo de sus procesos y ninguno de los entrevistados hizo una revisión o comprobación en los problemas donde se obtuvo respuesta, teniendo en cuenta que a uno de los estudiantes no se le pudo concluir la aplicación o no de esta etapa, puesto que solo en un problema obtuvo respuesta y la revisó.

**Tabla 16**

*Cantidad de estudiantes que ejecutaron las etapas*

<b>Etapa</b>	<b>Cantidad</b>
Entendimiento del problema	8
Diseño	5
Control	1
Revisión y comprobación	0

Fuente: Elaboración propia.



## 4.2 Análisis de la información por etapa

A continuación, se presenta una tabla que resume el cumplimiento de los indicadores de los diez estudiantes según las etapas y problemas.

**Tabla 17**

*Cantidad de estudiantes que realizan cada indicador según las etapas y problemas.*

<b>Indicadores</b>				
<b>Etapa de entendimiento del problema</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>	<b>P4</b>
Lee el problema más de una vez.	5	4	4	5
Identifica los datos del problema.	8	8	10	9
Extrae los datos relevantes del problema.	7	8	9	7
Determina correctamente lo que pregunta el problema.	7	8	10	7
Representa el problema de manera gráfica o simbólica.	0	4	4	2
Replantea el problema con sus propias palabras.	1	0	0	0
<b>Etapa de diseño</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>	<b>P4</b>
Plantea posibles caminos de solución sin generar un plan claro.	1	1	0	1
Genera un plan de solución.	3	7	4	4
Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.	6	7	9	2
Considera el uso de un teorema para resolver el problema.	0	6	0	0
<b>Etapa de control</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>	<b>P4</b>
Pone en práctica el plan realizado.	3	7	4	2
Verifica la correcta ejecución de cada paso.	1	0	3	0
Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.	4	2	0	2
Cambia de plan si considera otro más eficiente.	0	0	0	2

<b>Indicadores</b>				
<b>Etapas de revisión y comprobación</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>	<b>P4</b>
Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.	0	0	1	0
Revisa el procedimiento realizado.	1	0	1	0
Verifica, sin usar una nueva estrategia de solución, que la respuesta obtenida es correcta.	0	0	0	1
Resuelve el problema de otra forma para verificar que la respuesta sea correcta.	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

### **Entendimiento**

Con respecto al trabajo realizado por los entrevistados en esta etapa se tiene lo siguiente:

- Como se observa en la tabla anterior, los indicadores de la fase de entendimiento que más se cumplieron fueron la identificación de los datos, la extracción de los datos relevantes y la determinación correcta de lo que el problema preguntaba. Cinco estudiantes cumplieron con estos tres indicadores en el primer problema y cuatro de ellos lograron comprenderlo; en el caso del segundo problema seis estudiantes lo entendieron, de los siete que dieron evidencias de estos indicadores; para el tercer problema hubo nueve estudiantes que cumplieron con los indicadores y todos ellos lo entendieron; en el problema cuatro, de los seis estudiantes que sí llevan a cabo los indicadores, cinco lograron comprender el problema. Precisamente la identificación de los datos y la extracción de los datos relevantes son parte de las estrategias de organización que consideran Ciucci et. al (2013, p.5) y las estrategias de análisis descritas por Pifarré y Sanuy (2001) cuando clasifican las estrategias de resolución de problemas.

- Con respecto a la representación gráfica, ninguno de los entrevistados realizó una para el primer problema (ver tabla 17), de los cuatro que lo habían comprendido, solo dos lo contestaron correctamente. El segundo problema fue representado por cuatro estudiantes, en donde dos de ellos no comprendieron el problema, y de los otros dos solamente uno de ellos lo resolvió correctamente. La misma cantidad de estudiantes hizo una representación gráfica o simbólica para el tercer problema, y en su totalidad lo resolvieron de forma correcta. En el caso del último problema, este fue representado y comprendido por dos estudiantes y aun así ninguno de ellos acertó la respuesta.

### **Diseño**

Con base en la tabla 17 y en relación con esta etapa se tiene que:

- La exploración de posibles caminos a seguir para resolver el problema se realizó en tres de los problemas, pero solamente un estudiante lo hizo en cada problema. Esta estrategia es considerada dentro de las estrategias de organización de Pifarré y Sanuy (2001) y dentro de las estrategias de formulación de Ciucci et. al (2013), pero muy pocos estudiantes la realizaron.
- De los seis estudiantes que comprendieron el primer problema, tres de ellos generaron un plan de solución. El segundo problema lo entendieron siete estudiantes y cinco de ellos generaron un plan. Para el tercer problema hubo nueve estudiantes que lo entendieron y de ellos, solo cuatro generaron un plan. El último problema fue comprendido por seis personas, generando un plan solamente la mitad de ellas. Una observación importante de mencionar, es que dos estudiantes generaron plan para

el segundo problema bajo la idea de haberlo entendido. Lo mismo sucedió con uno de los entrevistados en el cuarto problema.

- Se observó que siete de los diez estudiantes resolvieron el problema y mencionaron que habían visto problemas similares, o bien, no lo pudieron resolver y no habían visto problemas similares. Sin embargo, no se puede pasar por alto el hecho que cuatro de los diez estudiantes afirmaron haber visto algún problema similar y aun así no pudieron terminarlo o llegar a una respuesta correcta, en al menos dos de los problemas. Es importante señalar que, a pesar de lo anterior, hubo cuatro estudiantes que resolvieron un problema sin que este les pareciera familiar.

### **Control**

Con respecto a la tabla 17, los resultados para esta etapa son los siguientes:

- Todos los estudiantes que generaron un plan en los primeros tres problemas, lo pusieron en práctica. En el problema cuatro, uno de los estudiantes que generó plan lo descartó porque consideró uno más eficiente, y otro de los estudiantes propuso el plan, pero no supo desarrollarlo.
- De siete estudiantes que hicieron algún proceso en el primer problema, solamente uno verificó que cada paso estuviera realizado de forma correcta. En el problema tres, todos los estudiantes realizaron procedimiento, cuyos pasos fueron verificados por tres de ellos. En el problema dos todos los estudiantes desarrollaron algún proceso, mientras que para el cuarto problema solo lo hicieron seis, aun así, en ambos problemas no hubo verificación del mismo. Es importante mencionar que la validación de los resultados que se van obteniendo se contempla dentro de las estrategias de

revisión, en la clasificación de estrategias de resolución de problemas de Pifarré y Sanuy (2001) y los entrevistados no ejecutaron esta estrategia.

- De los cuatro estudiantes que descartaron un plan en el primer problema, tres de ellos lo cambiaron cuando no debían hacerlo, y solamente uno hizo lo correcto al cambiar la manera de resolverlo. En el segundo problema, de los dos estudiantes que descartaron el plan, ambos tomaron la acertada decisión de cambiarlo; sin embargo, al primer estudiante el nuevo plan no le ayudó a obtener la respuesta correcta, y el otro no generó uno nuevo. Finalmente, en el cuarto problema, de los dos estudiantes que decidieron descartar un plan, tomaron la decisión correcta.
- Por otro lado, los dos estudiantes que cambiaron un plan por otro más eficiente, acertaron en la decisión que tomaron. En este contexto es importante señalar que tres de los diez estudiantes, mientras aplicaban su plan, notaron que de alguna forma algo no encajaba en su análisis, o intentaron de muchas maneras la misma idea de solución sin ver resultados favorables, y aun así no descartaron el plan ni consideraron cambiarlo.

### **Revisión y comprobación**

Con base en la etapa 17 y lo realizado por los estudiantes en esta etapa se tiene que:

- Solo dos de las siete personas que obtuvieron una respuesta en el primer problema, la tuvieron correcta. Uno de ellos la verificó en su contexto, y se determinó que el otro estudiante obtuvo la respuesta correcta hasta que se revisó en sus apuntes, dado que la verbalizó de manera equivocada y no realizó ninguna comprobación. En el segundo problema, nueve de los diez participantes dieron una respuesta, pero

ninguno comprobó el resultado; y de esas nueve respuestas, cinco fueron correctas. Del total de entrevistados, hubo nueve que dieron una respuesta al problema tres, pero solo uno lo revisó con base en su contexto y otro examinando el proceso realizado; y de esas nueve respuestas, siete fueron correctas. En el cuarto problema hubo tres entrevistados que obtuvieron una respuesta, de los cuales solo uno de ellos la revisó para verificar que estuviera correcta sin utilizar una nueva estrategia de solución; y de esas tres respuestas solamente una fue correcta, que de hecho fue de la misma persona que la verificó.

La revisión y comprobación también se encuentra dentro de la clasificación de resolución de problemas de Pifarré y Sanuy (2001), quienes mencionan el cuestionamiento de la validez del resultado obtenido y la revisión de procesos y cálculos matemáticos realizados, pero ninguno de los estudiantes realizó estas estrategias.

# **CAPÍTULO V – CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y LIMITACIONES**

## **5.1 Conclusiones**

A partir del trabajo realizado y en referencia con el marco teórico y los antecedentes contemplados, se pudo llegar a las siguientes conclusiones:

En la entrevista introductoria, cuando se consultó a los estudiantes sobre los pasos que siguen para resolver problemas matemáticos, mencionaron principalmente: la lectura del problema, apuntar datos, hacer un análisis del enunciado y la búsqueda de maneras de resolver el problema, específicamente con el uso de fórmulas. Los primeros tres, comparados con lo que el MEP propone, coinciden con la etapa de entendimiento. En cuanto al paso de búsqueda de maneras de resolver el problema, se considera que tiene más relación con la fase de diseño. Los participantes no mencionaron ningún paso que haga alusión a la etapa de control ni a la revisión y comprobación de las respuestas obtenidas. Solo dos de los diez entrevistados dijeron comprobar la respuesta cuando resolvían un problema.

La fase de entendimiento fue concordante con el trabajo realizado por los entrevistados, pues fue la que ejecutó la mayoría de ellos. A pesar de esto, no fue fácil establecer la relación entre los elementos del problema y los contenidos o estrategias correctas para resolverlo. Se evidenció una dificultad para plantear el problema uno, en el cual se requería el uso de una definición específica, la de promedio simple. Quienes no tenían claro ese concepto no pudieron resolver el problema. En el último de los problemas se

evidenció que los entrevistados tienen dificultad para resolverlo si no conocen alguno similar.

Los entrevistados presentaron bastante dificultad para verbalizar el proceso de solución de problemas. Esto podría estar relacionado con lo mencionado por Willis (1999) al afirmar que el pensamiento en voz alta no es usual en la mayoría de las personas, lo cual puede ocurrir ya sea por considerar irrelevante lo que se piensa, o por temor a expresarlo (Willis, 2005, citado por Smith-Castro y Molina, 2011, p.51).

No se encontró evidencia de que el uso de representaciones gráficas fuera de mucha ayuda para los entrevistados en su tarea de comprensión del problema. Cuando recurrieron a este sistema de representación no lograron mejores resultados que quienes no lo hicieron.

La mayoría de los estudiantes no acostumbran a generar un plan, incluso si han entendido el problema. En los casos donde se generó uno, la mayor parte no fueron bien estructurados ni detallados de principio a fin, y cuando no se generó un plan, solía ocurrir que los entrevistados comenzaban a trabajar inmediatamente con los datos que el problema brindaba. También, casi todos los estudiantes dependieron de un modelo de resolución visto antes, para poder dar solución en al menos la mitad de los problemas de la entrevista cognitiva.

Con respecto a la etapa de control se puede concluir que, si los estudiantes generan algún plan, lo suelen poner en práctica. Sin embargo, fueron muy pocos los que verificaron la correcta ejecución de cada paso. Además, la mayoría de los estudiantes no realizan un monitoreo acertado, ya que algunos de ellos descartaron un plan cuando



no debían hacerlo, y otros, cuando debían cambiar de plan no lo hicieron. Estos últimos mostraron poca flexibilidad para cambiar de método, a pesar de que no producían ningún resultado continuaban con la misma estrategia.

Finalmente, en la etapa de revisión y comprobación, el análisis de los cuatro problemas refleja que en dos de ellos se obtuvo respuesta de casi todos los entrevistados. En dichas respuestas hubo evidencia de que los estudiantes no revisan el proceso que realizan, ni evalúan la respuesta obtenida. Incluso, los que habían mencionado revisar la respuesta cuando resolvían un problema, no lo hicieron con los problemas en los que las obtuvieron.

Como se ha mencionado en este documento, los actuales programas de estudios de matemática llevan al menos cinco años siendo implementados por completo en el sistema escolar. Por lo que los diez estudiantes que participaron en este estudio llevan ese período siendo formados bajo la metodología de resolución de problemas. A pesar de esto, el desarrollo de las etapas en la resolución de los cuatro problemas no se ve reflejado y por consiguiente, estos estudiantes no han desarrollado las habilidades de resolución de problemas como lo proyecta el Ministerio de Educación Pública.

## 5.2 Recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos en este trabajo de investigación y considerando posibles estudios que puedan complementarlo, se brindan las siguientes recomendaciones:

Desarrollar una investigación en el centro de estudios en donde se formaron los estudiantes que participaron en las entrevistas cognitivas, en la cual, por medio de la observación de clases, pueda determinarse si la metodología de enseñanza por medio de resolución de problemas es implementada.

Sería interesante replicar este trabajo en grupos con mayor cantidad de participantes y en diferentes zonas del país, que permita evidenciar el desarrollo de estrategias de resolución de problemas, tanto al inicio como al final de la secundaria, para contrastar el desempeño de los estudiantes en ambas etapas formativas.

En estudios posteriores, se puede implementar un estudio longitudinal en el que se pueda apreciar el fortalecimiento de estrategias en estudiantes, durante su formación escolar. Esto compete a los colegios e instituciones que estén interesadas en mejorar las estrategias de enseñanza bajo la metodología de resolución de problemas.

Por último, a nivel de formación docente, se recomienda incluir técnicas como la entrevista cognitiva en la formación de los futuros profesores, para que puedan posteriormente aplicarla en su labor educativa. Esto podría ayudar en el trabajo con sus estudiantes permitiendo comprender mejor sus procesos cognitivos y, además, con una

mejor verbalización de sus procesos, se lograría una mejor orientación por parte de los docentes.

### **5.3 Limitaciones**

Dada la situación con la pandemia de la COVID-19, la metodología para el desarrollo de la entrevista cognitiva tuvo que cambiar de presencial a telepresencial. Esto afectó el hecho de contar con la participación de todos los estudiantes que llenaron el formulario, ya que no hubo una comunicación fluida con ellos. Además, tuvo implicaciones en la adquisición completa de la información de la entrevista cognitiva, puesto que hubo un participante que no envió los apuntes realizados durante la resolución de los problemas.

El hecho de que los estudiantes no estaban familiarizados con el proceso de resolver el problema y verbalizarlo a la vez, también afectó la adquisición de la información. En algunos casos se descubrió, observando los apuntes realizados por los participantes, que omitieron la mención de cierta información relevante para el análisis.

## REFERENCIAS

- Arteaga-Martínez, B., Macías, J y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *UNICIENCIA*, 34(1), 263-280. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.15>
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 1. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971/6657>
- Barrantes, H. (2015). Acciones en Costa Rica para potenciar la integración de habilidades y conocimientos en la implementación curricular. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 37-52. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19143>
- Blanco, P. (2019). La mayoría de estudiantes de primer ingreso reprueban examen de diagnóstico de matemática en la UCR. *Noticias UCR*. <https://www.ucr.ac.cr/noticias/2019/04/02/la-mayoria-de-estudiantes-de-primer-ingreso-reprueban-examen-de-diagnostico-de-matematica-en-la-ucr.html>
- Boscán, M. M. y Klever, K. L. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*. 10(2), 7-12. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4496526>
- Castro, B. (2013). Procesos cognitivos que atraviesan los alumnos. *Investigación Educativa Duranguense*, (13), 86-92. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4743446>

- Ciucci, M., Nassif, Y., Larcher, L. y Monzón, L. (2013). Estrategias cognitivas para resolver problemas matemáticos en alumnos de Profesorado en Enseñanza Básica. *Memorias I CEMACYC*. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4063/1/CiucciEstrategiasCemacyc2013.pdf>
- Espinoza, J. y Zumbado, M. (2015). Planes piloto en la implementación de nuevos programas de Matemáticas. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*. (13). 133-42. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19149>
- Fernández, E. (15 de diciembre de 2013). Pruebas de PISA muestran que Costa Rica tiene una fórmula matemática por resolver. *El Financiero*. Recuperado de: <https://www.elfinancierocr.com/economia-y-politica/pruebas-de-pisa-muestran-que-costa-rica-tiene-una-formula-matematica-por-resolver/L2WAFHQGQJH5TF5FJGHYWZMOJE/story/>
- Hernández, O. (2002). *Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en estudiantes universitarios puertorriqueños en la solución de problema matemáticos no típicos* (Disertación Doctoral). Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras. Puerto Rico. Recuperado de: <https://drive.google.com/file/d/0B91YalwXq69BYk15cFR4eC1CMVk/view?ts=5fcf93dd>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

- Jaramillo, N., y Puga, L. (2016). El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (21), 31-55.
- Lupón, M. (2014). "Psicología en atención visual". Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, España.
- Mayer, R. E. (1996). Learning strategies for making sense out of expository text: The SOI model for guiding three cognitive processes in knowledge construction. *Educational Psychology Review*, 8(4), 357-371.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio de Matemáticas. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.
- Ministerio de Educación Pública. (2018). Informe Nacional de Rendimiento y Niveles de Desempeño: Bachillerato 2017. San José, Costa Rica.
- Perdomo, J., Camacho, M. y Santos, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.
- Pérez, K., Álvarez, E. y Breño, C. (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Revista bases de la ciencia*. 1(3), 25-34. Recuperado de: <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/98>
- Pérez, M., Diego, J., Polo, I. y González, M. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA* 13(2), 84-103. Recuperado de: <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/16319>

- Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(2), 297-308.
- Polya, G, (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Editorial Trillas.
- Programa Estado de la Nación. (2017). Sexto Informe del Estado de la Educación, San José. Programa Estado de la Nación costarricense. Recuperado de: <https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/assets/parte-1-capitulo-4.pdf>
- Programa Estado de la Nación. (2013). Cuarto Informe del Estado de la Educación, San José: Programa Estado de la Nación. Recuperado de: [http://repositorio.conare.ac.cr/bitstream/handle/20.500.12337/841/868.%20Desempe%C3%B1o%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20general%20b%C3%A1sica%20y%20el%20ciclo%20diversificado%20en%20Costa%20Rica\\_IV%20Informe%20Estado%20de%20la%20Educaci%C3%B3n\\_Libro%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.conare.ac.cr/bitstream/handle/20.500.12337/841/868.%20Desempe%C3%B1o%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20general%20b%C3%A1sica%20y%20el%20ciclo%20diversificado%20en%20Costa%20Rica_IV%20Informe%20Estado%20de%20la%20Educaci%C3%B3n_Libro%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Rivas, M. (2008). *Procesos cognitivos y aprendizaje significativo*. Comunidad de Madrid. Consejería de Educación. Viceconsejería de Organización Educativa.
- Ruiz, A. (2013). La reforma de la educación matemática en Costa Rica. Perspectiva desde la Praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(Especial), 7-111.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schunk, D., (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa*, México, Pearson educación.

- Sepúlveda, A., Medina, C., & Sepúlveda, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(2), 79-115.
- Soto, P. (2019). Resultados del Examen de Diagnóstico de Matemática [manuscrito no publicado]. Escuela de Matemática, Tecnológico de Costa Rica.
- Smith-Castro, V., Molina, M. (2011). La entrevista cognitiva: Guía para su aplicación en la evaluación y mejoramiento de instrumentos de papel y lápiz. *Cuaderno metodológico*, 5(1), 1-114.
- Valencia, N., Sanabria, L., Ibañez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (31), 45-65.
- Willis G. (1999). Cognitive interviewing. A “how to” guide. [https://www.hkr.se/contentassets/9ed7b1b3997e4bf4baa8d4eceed5cd87/gordon\\_willis.pdf](https://www.hkr.se/contentassets/9ed7b1b3997e4bf4baa8d4eceed5cd87/gordon_willis.pdf)
- Zumbado-Castro, M. (2019). Evaluación sumativa para la resolución de problemas en el área de Geometría. *Innovaciones Educativas*, 21(31), 101-114. <https://doi.org/10.22458/ie.v21i31.2697>



# ANEXOS

## Anexo 1

### INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN DIRIGIDO A DOCENTES DE LA ESCUELA DE MATEMÁTICA DEL TEC

Esta investigación es realizada por las estudiantes Carmen Hernández López y Nazarelle Rojas Machado, como parte del trabajo final de graduación de la carrera MATEC del Instituto Tecnológico de Costa Rica. El propósito general de este estudio es analizar las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes de undécimo año del Liceo Daniel Oduber Quirós en el año 2020. La recolección de la información se realizará con la técnica de la entrevista cognitiva. Agradecemos de antemano su colaboración y apoyo en el proceso de validación de este protocolo.

#### Datos generales

Especialidad: \_\_\_\_\_ Años de experiencia en la especialidad: \_\_\_\_\_

#### Indicaciones:

Usted debe valorar la pertinencia de los problemas que van a ser resueltos por los estudiantes en la tabla que aparece al finalizar este documento, con respecto al objetivo de la investigación.

Su respuesta se puede clasificar en tres categorías:

- Muy pertinente **(3)**: Conservar pregunta sin ajustes.
- Poco pertinente **(2)**: Conservar pregunta, pero con ajustes.
- No pertinente **(1)**: Eliminar pregunta.

Si considera que el problema es poco pertinente con el objetivo de esta investigación, agradecemos sugiera modificaciones al enunciado de este. También puede proponer un problema nuevo.

Además, se le solicita adjuntar la solución que realice de cada problema. En caso de encontrar más de un procedimiento para su solución, agradecemos que también se anexe.

Considere las siguientes definiciones para su análisis:

#### Resolución de problemas.

El Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) menciona que “Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos...”. Además, aclara que un problema debe poseer suficiente complejidad para que pueda provocar en el individuo una acción cognitiva no simple (p. 29).

#### Pasos o fases de resolución de problemas propuestas por el MEP.

Pasos o fases	Acción
Paso 1. Entendimiento del problema	Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
Paso 2. Diseño	Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico.
Paso 3. Control	Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso.
Paso 4. Revisión y comprobación	Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.

Fuente: MEP (2012, p.30)

### Problema #1

Por cada helado pagué ₡150 más que por cada galleta, por cada galleta pagué ₡100 más que por cada chocolate. Un chocolate me costó ₡ 75 y compré cinco galletas, tres helados y dos chocolates. Si pagué con ₡ 5000 ¿Cuánto dinero me quedó?

### Problema #2

En una sala están reunidas 6 personas cuyas edades son 13, 9, 17, 10, 7 y 16 años respectivamente. Se calculó la edad promedio de dichas personas. Posteriormente se retiran dos personas de la sala, y la edad promedio de quienes quedaban es la misma que la inicial. ¿Cuál es la edad de las personas que se retiraron?

### Problema #3

En una canasta hay naranjas, manzanas y mangos. Por cada tres manzanas hay dos naranjas y por cada cuatro naranjas hay cinco mangos. La canasta tiene 20 mangos. ¿Cuántas naranjas y manzanas hay?

### Problema #4

Los números impares (1,3,5,7, ...) se colocan en cinco columnas, tal como se muestra en la tabla siguiente:

	1° Columna	2° Columna	3° Columna	4° Columna	5° Columna
1° Fila		1	3	5	7
2° Fila	15	13	11	9	
3° Fila		17	19	21	23
4° Fila	31	29	27	25	
5° Fila		33	35	37	39
6° Fila	47	45	43	41	
7° Fila		49	51	53	55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

¿En qué fila y en qué columna aparece el número 2019?

## Observaciones a los enunciados de los problemas

Enunciado	Valor de pertinencia	Observaciones
Problema #1		
Problema #2		
Problema #3		
Problema #4		

## Anexo 2

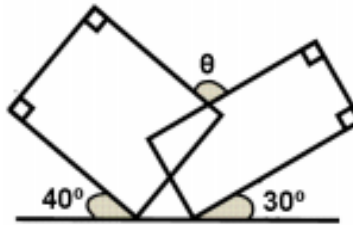
### PROBLEMAS

#### Problema #1

En una sala están reunidas 6 personas cuyas edades son 13, 9, 17, 10, 7 y 16 años respectivamente. Se calculó la edad promedio de dichas personas. Posteriormente se retiran dos personas de la sala, y la edad promedio de quienes quedaban es la misma que la inicial. ¿Cuál es la edad de las personas que se retiraron?

#### Problema #2

Dos rectángulos están inclinados respecto a la línea horizontal, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo  $\theta$ ?



#### Problema #3

En una canasta hay naranjas, manzanas y mangos. Por cada tres manzanas hay dos naranjas y por cada cuatro naranjas hay cinco mangos. La canasta tiene 20 mangos. ¿cuántas naranjas y manzanas hay?

#### Problema #4

Los números impares (1,3,5,7, ...) se colocan en cinco columnas, tal como se muestra en la tabla siguiente:

	1° Columna	2° Columna	3° Columna	4° Columna	5° Columna
1° Fila		1	3	5	7
2° Fila	15	13	11	9	
3° Fila		17	19	21	23
4° Fila	31	29	27	25	
5° Fila		33	35	37	39
6° Fila	47	45	43	41	
7° Fila		49	51	53	55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

¿En qué fila y en qué columna aparece el número 2019?

## Anexo 3

### INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN DIRIGIDO A DOCENTES DE LA ESCUELA DE MATEMÁTICA DEL TEC

Esta investigación es realizada por las estudiantes Carmen Hernández López y Nazarelle Rojas Machado, como parte del trabajo final de graduación de la carrera MATEC del Instituto Tecnológico de Costa Rica. El propósito general de este estudio es analizar las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes de undécimo año del Liceo Daniel Oduber Quirós. La recolección de la información se realizará con la técnica de la entrevista cognitiva. Para ello le solicitamos su valioso apoyo para evaluar este protocolo.

Agradecemos de antemano su colaboración y apoyo en este proceso de validación.

#### Datos generales

Nombre: \_\_\_\_\_

Especialidad: \_\_\_\_\_

Años de experiencia en la especialidad: \_\_\_\_\_

#### Instrucciones:

1. Usted debe valorar la coherencia y pertinencia de las preguntas previas a la resolución de los problemas por parte del estudiante, cuyo fin es familiarizarlo con la actividad que está por comenzar.
2. Usted debe valorar la coherencia y pertinencia de las preguntas posteriores a la resolución de los problemas por parte del estudiante, en cuanto a las cuatro fases que propone el MEP para la resolución de problemas.

Para analizar la coherencia se puede marcar con una equis (X) la fase que considere se relaciona con cada pregunta. En caso de que no encuentre relación con ninguna fase, puede dejar la casilla en blanco.

En ambos puntos su respuesta se puede clasificar en tres categorías:

- |   |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Muy pertinente <b>(3)</b>: Conservar pregunta sin ajustes.</li><li>▪ Poco pertinente <b>(2)</b>: Conservar pregunta, pero con ajustes.</li><li>▪ No pertinente <b>(1)</b>: Eliminar pregunta.</li></ul> |
|---|

3. Usted debe anotar el valor asignado en la casilla correspondiente y en los casos donde se considere poco pertinente, le rogamos que nos anote las recomendaciones para mejorar las preguntas. Igualmente, puede recomendarnos nuevas preguntas en cada bloque.
4. Considere las siguientes definiciones para su análisis:

### Resolución de problemas:

El Ministerio de Educación Pública (2012) menciona que “Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos...”. Además, aclara que un problema debe poseer suficiente complejidad para que pueda provocar en el individuo una acción cognitiva no simple (p. 29).

### Pasos o fases de resolución de problemas propuestas por el MEP:

Pasos o fases	Acción
Paso 1. Entendimiento del problema	Tener claridad sobre lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
Paso 2. Diseño	Considerar varias formas para resolver el problema y seleccionar un método específico.
Paso 3. Control	Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no resulte exitoso.
Paso 4. Revisión y comprobación	Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida.

Fuente: MEP (2012, p.30)

### Preguntas previas

Pregunta	Valor de pertinencia	Observaciones
1. ¿Qué es un problema matemático para usted?		
2. ¿Qué pasos utiliza para resolver un problema matemático?		
3. De los pasos citados, ¿cuál considera más importante?		
4. ¿Cuánto tiempo considera que debe trabajar una persona con un problema antes de decidir que no puede resolverlo?		

### Preguntas posteriores

	PREGUNTAS	Valor de pertinencia	La pregunta se relaciona con			
			Entendimiento del problema	Diseño	Control	Revisión y comprobación
1	¿Ha tenido la oportunidad de resolver problemas parecidos anteriormente?					
1.a	¿En qué aspectos eran similares?					
1.b	¿De qué manera influyó haber visto problemas parecidos antes, para resolver este problema?					
2	¿Logró identificar lo que preguntaba el problema antes de comenzar a trabajar?					
3	¿Elaboró un plan para resolverlo, antes de comenzar a trabajar?					
4	Durante el proceso de resolución del problema, ¿tuvo que cambiar de método o estrategia para resolverlo?					
4.a	¿Cómo se dio cuenta de que debía cambiarlo?					
4.b	¿Cómo supo que su método era el correcto?					
5	¿Cree que contestó correctamente el problemas?					
5.a	¿Qué le ayudó a resolverlo correctamente?					
5.b	¿Cómo supo que esa era la respuesta correcta?					
5.c	¿Qué le impidió resolverlo correctamente?					
5.d	¿Qué le impidió resolverlo correctamente?					
5.e	¿Qué elementos (información, conocimiento o destreza) le hubiese ayudado a resolver el problema?					

## Anexo 4

### Preguntas introductorias

1. ¿Qué es un problema matemático para usted?
2. ¿Qué pasos utiliza para resolver un problema matemático?
3. De los pasos citados en el punto anterior, ¿cuál considera que nunca debe faltar al resolver un problema matemático?
4. ¿Cuánto tiempo considera que debe trabajar una persona con un problema matemático, antes de decidir que no puede resolverlo?

### Prueba cognitiva de reporte verbal

1. ¿Ha tenido la oportunidad de resolver problemas parecidos anteriormente? (en relación al problema que el estudiante acaba de desarrollar)
  - a. (Si responde afirmativamente) ¿En qué aspectos era similar?
  - b. ¿De qué manera influyó haber visto problemas como este anteriormente, para resolver este problema?
2. ¿Logró identificar lo que preguntaba el problema antes de comenzar a trabajar?
3. ¿Elaboró un plan para resolverlo, antes de comenzar a trabajar?
4. Durante el proceso de resolución del problema, ¿tuvo que cambiar de método o estrategia para resolverlo?
  - a. (Si responde afirmativamente) ¿Cómo se dio cuenta que debía cambiarlo?
  - b. (Si más bien no cambió de método) ¿Cómo supo que su método era el correcto?
5. ¿Cree que contestó correctamente este problema?
  - a. (Si responde afirmativamente) ¿Qué le ayudó a resolverlo?
  - b. ¿Por qué cree que la respuesta a la que llegó es la correcta?
  - c. (Si piensa que no logró resolverlo de forma correcta) ¿Qué le impidió resolverlo correctamente?
  - d. (Dado el caso en que sí haya terminado el problema) ¿Por qué cree que la respuesta a la que llegó no es la correcta?
  - e. ¿Qué elementos (información, conocimiento o destreza) le hubiese ayudado a resolver el problema?



## Anexo 5

### Protocolo para el análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de los problemas

Fases	Indicadores	Sí	No
<b>Entendimiento del problema</b>	Lee el problema más de una vez.		
	Identifica los datos del problema.		
	Extrae los datos relevantes del problema.		
	Determina correctamente lo que pregunta el problema.		
	Representa el problema de manera gráfica o simbólica		
	Replantea el problema con sus propias palabras.		
<b>Diseño</b>	Genera un plan de solución.		
	Plantea posibles caminos de solución.		
	Relaciona la posible resolución del problema con la de otros conocidos.		
	Considera el uso de un teorema para resolver el problema.		
<b>Control</b>	Pone en práctica el plan realizado.		
	Verifica la correcta ejecución de cada paso.		
	Descarta un plan si considera que no lo llevará a la solución correcta del problema.		
	Cambia de plan si considera otro más eficiente.		

<b>Revisión y comprobación</b>	Verifica que la respuesta obtenida tiene sentido en el contexto del problema.		
	Revisa el procedimiento realizado.		
	Resuelve el problema de otra forma para verificar la respuesta.		
	Comprueba la solución de más de una forma.		