

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos



Actividades didácticas para fortalecer el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad

Proyecto de graduación para optar por el grado académico de
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos

Dayana Calderón Prado

Cartago Junio, 2021



Este trabajo final de graduación está bajo una [licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Este Proyecto de Graduación fue aprobado por el Tribunal Examinador de la Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica, como requisito para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos.

M.Sc Félix Núñez Venegas
Profesor Asesor

Mag. Randall Blanco Bernamburg
Profesor Lector

M.Sc Giovanni Sanabria Brenes
Profesor Lector

Lic. Paulo García Delgado
Coordinador de la Carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Ph. D. Jorge Monge Fallas
Representante del Director de la Escuela de Matemática

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación con un enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo) donde se construyen la propuesta de actividades didácticas para el fortalecimiento del Conocimiento sobre la Enseñanza de la Matemática (KMT) y la propuesta de un perfil del profesor que enseña probabilidad en el área de secundaria.

Para el desarrollo de esta investigación se utilizó como marco teórico el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y los criterios de Idoneidad Didáctica dirigidos a la enseñanza de la probabilidad.

Se documentaron videos de lecciones de probabilidad a los cuales se les aplicó la Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP) propuesta por Vásquez y Alsina (2019) y el Instrumento de Observación de Clases de probabilidad (IOC-PROB) propuesto por Vásquez, et al. (2020), donde se logran identificar elementos importantes que forman parte de los conocimientos del profesor que imparte el tema de probabilidad. Algunos fragmentos de estos videos fueron tomados para la construcción de las actividades didácticas mencionadas.

La finalidad de las actividades propuestas es apoyar a los docentes de matemática en formación con actividades que incluyen videos cortos de clases de probabilidad donde se puedan observar aspectos importantes sobre Conocimiento sobre la Enseñanza de la Matemática. Se espera que estas actividades puedan ser utilizadas especialmente para la reflexión sobre el uso de materiales y recursos por los futuros profesores de matemática que en algún momento enseñarán probabilidad.

Palabras clave: probabilidad, conocimiento del profesor, perfil del profesor, pensamiento estocástico, idoneidad didáctica, formación docente, actividades didácticas.

Abstract

In this paper, an investigation with a mixed approach (quantitative and qualitative) is presented, where is built the proposal of didactic activities to strengthen Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) and the proposal of a profile of the teacher who teaches probability in high school.

For the development of this research, the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) and the Didactic Suitability criteria oriented to the teaching of probability were used as a theoretical framework.

Videos of probability lessons were documented, which were applied the *Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad* (POSP) proposed by Vásquez and Alsina (2019) and the *Instrumento de Observación de Clases de probabilidad* (IOC-PROB) proposed by Vasquez, et al. (2020), where it is possible to identify important elements that are part of the teacher's knowledge that teaches probability. Some fragments of these videos were taken for the construction of the didactic activities mentioned.

The objective of the proposed activities is supporting mathematics teachers in training with activities that include short videos of probability classes where important aspects of Knowledge of Mathematics Teaching can be observed. It is expected that these activities can be used especially for reflection on the use of materials and resources by future mathematics teachers who at some point will teach probability.

Keywords: probability, teacher's knowledge, teacher's profile, stochastic thinking, didactic suitability, teacher training, didactic activities.

*A mi madre, Donay Prado.
Por su paciencia, comprensión
y apoyo durante toda mi carrera,
por siempre estar orgullosa de mí
y animarme para no darme por vencida*

*A Alexander.
Por motivarme e inspirarme,
por todo su apoyo para
mi crecimiento profesional*

Agradecimientos

Agradezco profundamente el apoyo que me ha brindado mi asesor de tesis M.Sc. Félix Núñez Vanegas, quien ha sido el motivador de este trabajo. A los profesores lectores al guiarme con correcciones y sugerencias sumamente valiosas para la realización de este trabajo: M.Sc Giovanni Sanabria Brenes y Mag. Randall Blanco Benamburg. A los tres les agradezco por su orientación, paciencia y comprensión en este proceso y por ser parte importante de mi formación a lo largo de mi carrera.

A los profesores M.Sc. Rebeca Arce Núñez, Bach. Nelson Ramírez Contreras y Lic. Jorge Jiménez Madrigal, por su valiosa colaboración y participación en este proyecto.

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de tablas	IV
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Justificación del problema de investigación	3
1.2.1. Objetivos	5
1.3. Antecedentes	6
1.4. Aspectos relacionados a la enseñanza de la matemática	14
1.4.1. Sistema Educativo Costarricense	14
1.4.2. Enseñanza de la Matemática en Costa Rica	17
1.4.3. La enseñanza de la probabilidad en Costa Rica	22
1.4.4. Estrategias didácticas y recursos para la enseñanza de la probabilidad	28
1.4.5. Herramientas tecnológicas para la enseñanza de la probabilidad . .	37
1.5. La probabilidad y su enseñanza	39
1.5.1. Historia de la probabilidad	39
1.5.2. Significados de la probabilidad en educación secundaria	42
1.5.3. Pensamiento Estocástico	44
1.5.4. Conclusiones sobre el razonamiento probabilístico	49
1.6. Conocimiento del profesor de matemática	57
1.6.1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)	60
1.6.2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) .	61
1.6.3. El MTSK en el dominio estadístico	68
1.6.4. Modelo TPACK	71
1.7. Idoneidad Didáctica en Probabilidad	75
2. Marco Metodológico	81
2.1. Tipo de investigación	81
2.2. Recolección de información	82
2.2.1. Revisión bibliográfica	82
2.2.2. Documentación y análisis de videos de clases de probabilidad	83
2.3. Construcción de las propuestas del trabajo	85

3. Resultados y análisis	87
3.1. Análisis de las observaciones realizadas a videos de lecciones de probabilidad	87
3.1.1. Análisis de la aplicación del instrumento POSP	90
3.1.2. Análisis de la aplicación del instrumento IOC-PROB	93
4. Propuestas del trabajo	107
4.1. Diseño de actividades para la reflexión sobre conocimientos del profesor . .	107
4.2. Propuesta del perfil del profesor de probabilidad	115
5. Conclusiones y recomendaciones	118
5.1. Conclusiones	118
5.2. Recomendaciones	119
6. Referencias	120
7. Anexos	129
7.1. Anexo 1: Solicitud de permiso para la grabación de lecciones de probabilidad	130
7.2. Anexo 2: Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP)	132
7.3. Anexo 3: Instrumento de Observación de Clases de Probabilidad (IOC- PROB)	135

Índice de figuras

1.1. Experimento de la bandeja de Piaget e Inhelder Godino et al. (1987)	50
1.2. Experimento de la bandeja de Piaget e Inhelder Batanero (2013)	50
1.3. Urnas con fichas de colores.	51
1.4. Posibles distribuciones de puntos en un embaldosado.	54
1.5. Aparato de Galton	55
1.6. Dispositivo utilizado para el experimento de Piaget.	55
1.7. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)	61
1.8. Modelo MTSK	67
1.9. Ciclo PPDAC	69
1.10. Modelo TPACK	74
1.11. Idoneidad Didáctica	76
2.1. Sugerencias de ubicación de la cámara	83

Índice de tablas

1.1. Elaboración propia con información de la DGECC (2017, 2018, 2019 y 2020)	11
1.2. Dificultad de las habilidades de estadística y probabilidad según el año . . .	13
1.3. Organización del Sistema Educativo Costarricense	15
1.4. Universidades públicas con carreras de formación docente en el área de matemática.	20
1.5. Universidades privadas con carreras de formación docente en el área de matemática.	21
1.6. Habilidades y contenidos en probabilidad a nivel de secundaria en la edu- cación costarricense.	24
1.7. Diferencias pedagógicas entre dos esquemas cognitivos de enseñanza cons- tructivista y tradicional	29
1.8. Herramientas tecnológicas para la enseñanza de la probabilidad	38
1.9. Elementos que caracterizan los significados de la probabilidad	45
1.10. Estrategias utilizadas por niños para comparar probabilidades	53
1.11. Relación entre los niveles de razonamiento y significados de probabilidad. .	56
1.12. Indicadores específicos para la idoneidad epistémica en probabilidad	77
1.13. Indicadores específicos para la idoneidad cognitiva en probabilidad	79
3.1. Presencia del Significado Intuitivo en videos de clases de probabilidad ob- servados	90
3.2. Presencia del Significado Clásico en videos de clases de probabilidad obser- vados	91
3.3. Presencia del Significado Frecuencial en videos de clases de probabilidad observados	92
3.4. Presencia del Significado Axiomático en videos de clases de probabilidad observados	92
3.5. A1. Gestión de recursos de enseñanza-aprendizaje: situaciones cotidianas, materiales manipulativos, juegos, experimentación, recursos tecnológicos, libros de texto, fichas, etc.	94
3.6. A2. Contextos probabilísticos: social, personal, ocupacional, científico o relativo a la experimentación y juegos de azar.	94
3.7. A3. Reto cognitivo: coherencia entre los conocimientos previos y el nuevo contenido.	95

3.8. A4. Procedimientos y estrategias: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.	95
3.9. A5. Significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático.	96
3.10. B1. Andamiaje: ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra o interdisciplinares, etc.	97
3.11. B2. Argumentación probabilística: ejemplos y contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos, etc.	97
3.12. C1. Conexiones con otros contenidos matemáticos: geometría, aritmética, álgebra y/o medida	98
3.13. C2. Conexiones con niveles de escolaridad anteriores y/o posteriores	99
3.14. D1. Comunicación: interacción, negociación y diálogo en torno a las ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos de los estudiantes	99
3.15. D2. Contribuciones de los estudiantes: preguntas, explicaciones, ideas incorrectas, ideas incompletas, ideas correctas, etc.	100
3.16. E1. Lenguaje verbal: términos y expresiones verbales vinculados con la escala cualitativa de posibilidades de ocurrencia de un suceso	101
3.17. E2. Lenguaje numérico: representaciones cuantitativas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso	102
3.18. E3. Lenguaje simbólico: símbolos para comunicar información relacionada con la probabilidad de ocurrencia de un suceso, así como para facilitar cálculos en operaciones algebraicas	103
3.19. E4. Lenguaje tabular: distintos tipos de tablas para la representación de datos	103
3.20. E5. Lenguaje gráfico: representaciones gráficas	104
3.21. E6. Tránsito entre los distintos tipos de lenguaje	104
3.22. Lista de comprobación de aspectos complementarios observados	105
4.1. Elementos KMT en probabilidad	109
7.1. Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP)	132
7.2. Instrumento de Observación de Clases de Probabilidad, IOC-PROB	135

Capítulo 1

Introducción

Introducción

La educación es un proceso utilizado por la sociedad para transmitir conocimientos y habilidades de una generación a otra, por lo tanto se encuentra ligada a las necesidades de los seres humanos que varían constantemente. En particular, en los últimos años, el interés por la educación estocástica ha ido en aumento, debido a que cada vez es más necesario contar con personas que sean capaces de interpretar datos en diversas representaciones, entre las que destacan las tablas y las gráficas estadísticas, y también personas capaces de analizar y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

En Costa Rica, en el año 2012, el Consejo Superior de Educación realizó una reforma en los programas de estudio en la asignatura de matemática en donde se propone dar un enfoque distinto al que utilizaban los profesores en ese momento, este enfoque está orientado a la resolución de problemas. Según De Faria (2016) “este nuevo currículo incorpora elementos recientes de la investigación en educación matemática y se espera que en los siguientes años las universidades formadoras aporten docentes con competencias adecuadas para su implementación” (p.426).

El Ministerio de Educación Pública (2012) se menciona que una de las perspectivas que separan los programas aprobados en 2012 de los anteriores es la “potenciación del lugar de estadística y probabilidad desde el primer ciclo hasta el diversificado” (p.50). En este programa se brinda una especial atención a la enseñanza de la estadística y la probabilidad, y de la importancia de su enseñanza para la formación de ciudadanos que deban tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Aunque estos contenidos se encontraban presentes en algunos niveles en el programa anterior, Jiménez y Jiménez (2005) indican que no eran evaluados en las pruebas nacionales de conclusión de ciclo, lo que provocaba que muchos docentes los dejen de lado (p.1), por lo que es importante concientizar a los docentes en su enseñanza no como un contenido, sino como una necesidad cultural.

Por otro lado, algunos docentes no estaban conformes con el enfoque de resolución de problemas, al no tener claridad en cómo aplicarlo en sus clases y además existía una

resistencia de los temas de estadística y probabilidad, ya que en la formación docente que recibieron, los cursos sobre estas disciplinas eran escasos.

El Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica brindó capacitaciones y apoyos a los docentes en ejercicio. Según Chaves (2018), desde el año 2011 se realizaron esfuerzos para implementar esta reforma de una forma novedosa. Entre los esfuerzos realizados menciona: la implementación gradual del programa, realizando programas de transición entre 2013 y 2017, también se brindaron apoyos para los docentes con ejemplos sobre los conocimientos, habilidades, procesos, ejes disciplinares, metodología basada en la resolución de problemas con énfasis en contextos reales. En cuanto a capacitaciones, estas se realizaron de forma bimodal para docentes entre los años 2011 y 2015, funcionaban en dos etapas: “la primera capacitaban a docentes y funcionarios líderes de las 27 regiones educativas, en la segunda estos líderes lo ejecutaban en todo el país con apoyo logístico de algunas dependencias centrales del MEP (Ruíz, 2013 citado en Chaves, 2018). Se utilizó la tecnología buscando un equilibrio y consistencia en los distintos niveles de la capacitación, para esto se diseñaron los cursos virtuales para los docentes con la modalidad *Massive Open Online Courses* (MOOC), implementados entre 2014 y 2015, la ventaja de estos es que cada profesional podía llevar el curso a su ritmo sin necesidad de ausentarse en su labor. En el 2013, se brindó capacitación sobre el uso de la tecnología digital y el uso de la historia de las matemáticas (De Faria, 2016. p.428). En el año 2016 se diseñaron y ejecutaron cursos en la misma modalidad MOOC para estudiantes. Se continuó con capacitaciones bimodales regionales entre 2017 y 2019, reforzando las zonas donde se requería preparación.

Sin embargo, el tema de la formación docente debe estar ligado no solo a la metodología que utiliza y a los contenidos, sino también a un modelo de conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas acerca de la enseñanza de la matemática. La presente investigación se centró en un subdominio del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, mejor conocido como MTSK por sus siglas en inglés (Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge), específicamente en el Conocimiento Didáctico de Contenido (PCK, Pedagogical Content Knowledge) en el área del Conocimiento sobre la Enseñanza de la Matemática (KMT: Knowledge of Mathematics Teaching). El KMT se define como el conocimiento que tiene el profesor sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza (Escudero, 2015). En este trabajo, se realizó una investigación centrada en el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de la matemática, específicamente en el área de probabilidad a nivel de secundaria, brindando un material de apoyo a la formación de futuros profesores de enseñanza de la matemática bajo el modelo MTSK. A continuación, se propone el problema de investigación y sus respectivos objetivos.

Justificación del problema de investigación

La enseñanza de la probabilidad se ha convertido en un tema de importancia en los últimos años, pues se ha incorporado de forma progresiva en el programa de estudios de diferentes países. En Costa Rica, en años anteriores a la última reforma realizada por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en el 2012, la enseñanza de la estadística y la probabilidad no era el interés principal de los docentes porque no se evaluaba en pruebas nacionales (Jiménez y Jiménez, 2005. p.2). Además, no era un área fuerte en el programa de estudios pues en la secundaria solo se impartían algunos conceptos de estadística descriptiva, dejando de lado la importancia de educar a los estudiantes en el manejo de análisis de datos y la incertidumbre (Jiménez y Jiménez, 2005. p.2).

A partir del año 2013, se comenzó a implementar de forma paulatina el programa de estudio de matemática, aprobado en el año 2012. Con el fin de lograr un mejor aprendizaje de las matemáticas, en éste se propone el modelo de resolución de problemas como principal estrategia metodológica y pretende fortalecer contenidos en las áreas de estadística y probabilidad en todos los años lectivos, orientadas a la organización de la información en entornos diversos y preparación para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (Ministerio de Educación Pública, 2012. p.12), y además se dice que “La Estadística y Probabilidad son parte obligatoria de los conocimientos que debe tener un ciudadano en nuestro escenario” (MEP, 2012. p.15).

Sin embargo, lograr la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad, según el programa del MEP, no es tarea fácil, pues como señala Vásquez y Alsina (2013):

Estos cambios exigen, cada vez, una mayor preparación por parte de los profesores para ejercer la enseñanza en los distintos ciclos educacionales que conforman el sistema escolar. Tal es el caso de la probabilidad, que durante los últimos veinticinco años aproximadamente se ha ido incorporando fuertemente en los currículos de matemática tanto a nivel parvulario, básico, medio y superior en gran parte de los países desarrollados (p. 1).

De aquí la importancia de la formación docente pertinente y de la necesidad de capacitación a los docentes en ejercicio.

En el año 2010 se realizó una prueba diagnóstica a los profesores de matemática de Costa Rica. Los resultados se clasificaron en tres niveles. En el nivel III se presentan los docentes que tienen una alta probabilidad de contestar correctamente todos los ítems y tienen una alta probabilidad de dominar los procesos medidos en la prueba. El nivel II corresponde a los docentes que tienen baja probabilidad de contestar correctamente los ítems que se encuentran en el tercer nivel y baja probabilidad de dominar los procesos asociados al tercer nivel. Por último, en el nivel I se encuentran los docentes que tienen una baja probabilidad de contestar correctamente los ítems que se encuentran en el segundo y tercer nivel y que con esto se evidencia que tienen problemas con el dominio de los conocimientos matemáticos y los procesos que se contemplaban en el programa de estudios de educación

secundaria vigente en ese año. Los resultados de dicha prueba diagnóstica son confiables pues el valor del Alfa de Cronbach fue de 0.936. Un 50 % de los docentes de matemática evaluados se encuentra en el nivel III, un 20 % en el nivel II y el restante 30 % se encontraba en el nivel I. (MEP y DGEC, 2010. p.33)

Luego de estos resultados, el MEP y el CONARE (Consejo Nacional de Rectores) firmaron un convenio para capacitar a docentes con cursos ofrecidos por docentes de las universidades públicas UCR, UNA, TEC y UNED. Estos cursos eran presenciales, el primer curso abarcó contenidos de álgebra y números reales, el segundo curso no se llevó a cabo pues en el 2011 el MEP decidió finalizar el convenio (De Faria, 2016. p.428). De esta forma se deja de lado la capacitación de los docentes de matemática que requerían apoyo.

Uno de los problemas más comunes al implementar el programa vigente donde se incluyen contenidos de estadística y probabilidad es la falta de dominio de contenido por parte de algunos docentes y esto es consecuencia de la formación recibida, en algunos programas de formación de docentes de matemática, carecen de cursos en el área de estadística y probabilidad. Según Chaves (2007) citado en Alpízar et al. (2015): “los docentes cuentan con poca preparación, no tienen formación en principios teóricos, en aplicaciones y en su enseñanza”. Además, Alpízar et al. (2015) menciona que “la formación recibida en la universidad es fundamental en el desempeño profesional. En el ámbito educativo, la preparación académica juega un papel fundamental en los salones de clase, pues es ahí donde los conocimientos adquiridos se ponen en práctica.” (p.4)

Por esta razón, la responsabilidad en la calidad de la formación de futuros docentes recae en las universidades que forman docentes de matemática, por lo que se evidencian esfuerzos por mejorar las mallas curriculares de estas carreras en universidades públicas tomando en cuenta los intereses del MEP. No solo se ven cambios en los contenidos de los cursos, también se ve la incorporación de didácticas específicas. Recientemente, en algunas universidades costarricenses se ha adoptado esta práctica. Por ejemplo, la carrera de Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos que brinda el Instituto Tecnológico de Costa Rica y la carrera de Enseñanza de la Matemática que ofrece la Universidad Nacional, imparten el curso de Didáctica de la estadística y la probabilidad. Esta práctica apoyará sin duda alguna la enseñanza de la matemática de forma significativa, sin embargo, aún queda mucho por hacer pues el profesional docente requiere de actualización continua.

A raíz de esta problemática, se desea brindar apoyo a la formación docente con material que pueda ser utilizado por estudiantes en formación como docentes de matemática, en la comprensión del *Conocimiento sobre la Enseñanza de la Matemática* (KMT), subdominio del PCK del modelo MTSK, dirigido al área de probabilidad en secundaria. De esta forma se desea responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué perfil debe tener el profesor en el área de probabilidad a nivel de secundaria sobre el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)?
- ¿Qué actividades didácticas se pueden utilizar para fortalecer el conocimiento de

la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad en educación secundaria?

Para dar respuestas a estas preguntas, se realizó una investigación planteando los siguientes objetivos para orientar el proceso:

Objetivos

Objetivo general

Realizar una propuesta de actividades didácticas que puedan ser utilizadas para fortalecer el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad en educación secundaria.

Objetivos específicos

- Registrar y analizar por medio de videos algunas clases de probabilidad impartidas por profesores en el área de secundaria.
- Diseñar actividades didácticas en las que se usen fragmentos de videos de clases de probabilidad, que permitan fortalecer el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad en educación secundaria.
- Realizar una propuesta de perfil del profesor de matemáticas en el área de probabilidad a nivel de secundaria.

Antecedentes

En esta sección se describen las investigaciones realizadas nivel nacional e internacional en los últimos años sobre la formación docente en el área de estadística y probabilidad e investigaciones relacionadas al conocimiento del profesor de matemáticas.

Hace aproximadamente 9 años se realizó la reforma más reciente al Programa de estudio de Matemática por parte del Ministerio de Educación Pública (MEP). Entre otras cosas, lo primero que promueve es romper el mito del miedo de los estudiantes hacia la matemática, tratando de hacerla más cercana y agradable. Además, se propone como principal metodología la resolución de problemas, este punto se tratará más adelante. En cuanto a contenidos, esta reforma ha dado especial interés a Estadística y Probabilidad, tal y como se menciona en MEP (2012) donde enumera la modificación en cuanto a contenidos “el fortalecimiento de la Estadística y Probabilidad en todos los años lectivos, áreas orientadas a la organización de la información en entornos diversos y una preparación para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre” (p.12)

Si bien es cierto, los programas de estudio de matemática del año 1995 sí contemplaban contenidos de probabilidad, en estos no se realizaba una distribución a lo largo de los años escolares y en muchos casos, los docentes los dejaban de lado, pues no se evaluaban en pruebas nacionales, tanto la que se realizaba al finalizar la primaria (prueba que se eliminó para el año 2007) como en la prueba nacional de bachillerato al finalizar la secundaria (prueba que se modificó en 2019). Al fortalecer estos contenidos, se espera una mejor asimilación por parte de los estudiantes desde primaria hasta secundaria de forma gradual, pues como bien se menciona también en MEP (2012) “La Estadística y Probabilidad son parte obligatoria de los conocimientos que debe tener un ciudadano en nuestro escenario”.

En las últimas décadas, en diversos países se ha realizado este tipo de reformas donde se introduce la Probabilidad y la Estadística desde edades tempranas (NCTM, 1989, 2000; National Curriculum, 1999; CCSSI, 2010 citado por Alsina y Salgado, 2018). Las razones parecen coincidir con la formación de ciudadanos críticos en situaciones de incertidumbre y en análisis de datos que se presentan en el mundo real y que implican tomar decisiones. Según Godino, Batanero y Cañizares (1997) citado por Alsina y Salgado (2018), “la probabilidad proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los alumnos cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales”. Dado que la principal metodología propuesta por el MEP es la resolución de problemas, se hace importante la enseñanza de la probabilidad con situaciones cotidianas, cercanas al diario vivir del estudiante.

En el caso de Costa Rica se han realizado diferentes investigaciones sobre lo referente a la enseñanza de la probabilidad, planteando además la necesidad de una didáctica específica tanto para estadística como para probabilidad. A continuación, se mencionan algunas de estas publicaciones:

En Núñez et al. (2004) trabajo titulado “Sobre la Probabilidad, lo Aleatorio y su Pedagogía”, se realiza una reflexión acerca de la importancia de la probabilidad, sus apli-

caciones, la problemática que existe en Costa Rica con su enseñanza, y la necesidad de la incorporación de la probabilidad en los programas de estudio de una manera eficaz, tomando en cuenta su pedagogía. Además, los autores mencionan que “cada egresado de la Enseñanza General Básica debería ser capaz de entender y cuestionar la información y análisis de datos que se le ofrecen, con gráficos incluidos, acerca de un determinado estudio” (p.2) haciendo énfasis en la importancia que tienen en el aprendizaje de la educación costarricense. Estos autores afirman que

la NCTM presenta una visión de la educación de las matemáticas descrita en principios y estándares para las matemáticas escolares altamente ambiciosas. Su puesta en marcha requiere planes de estudios sólidos de las matemáticas, profesores competentes y bien informados, las salas de clase con el acceso listo a la tecnología, y una consolidación a la equidad y a la excelencia (p.5).

Analizando la situación actual, luego de la reforma de los programas de matemática del MEP, es notorio que ya se realizaron mejoras ofreciendo capacitaciones hacia docentes, se realizaron cambios en los programas de algunas carreras universitarias que forman profesores de matemáticas de secundaria (en universidades públicas), y realizando una revisión de los informes sobre los resultados de la Prueba Nacional de Bachillerato, las habilidades asociadas a contenidos de probabilidad y estadística se han evaluado en las pruebas nacionales de los últimos cuatro años (2016, 2017, 2018 y 2019) (MEP, 2017; 2018; 2019 y 2020), asegurando así que se imparta en las lecciones de matemática los contenidos correspondientes a esta área. Sin embargo, a pesar de ser notorios los cambios, hace falta más conciencia por parte de los docentes de complementar la metodología de resolución de problemas que propone el MEP con la didáctica de la probabilidad y la estadística.

Otro artículo en la línea de la enseñanza de la probabilidad es titulado: ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? en Jimenez y Jimenez (2005), en el cual los autores reflexionan sobre la enseñanza de conceptos relacionados a la incertidumbre en primaria y secundaria, y proponen algunos ejercicios para abordarlos. Se expone además la importancia de la enseñanza de la probabilidad, haciendo énfasis que en futuras investigaciones se realicen preguntas como ¿qué enseñar de probabilidad y qué peso debe tener en el currículo? y también ¿cuál es la formación que se debe brindar a los futuros profesores de matemática?

En Núñez (2013) trabajo titulado “Consideraciones sobre la didáctica de la probabilidad y de la estadística” y realizado luego de la reciente aprobación de la reforma del programa de estudios de matemática costarricense. El autor indica que la propuesta metodológica del MEP está basada en la Teoría de Situaciones de Brousseau. Además, evidencia la deficiencia de los conceptos de probabilidad como es el caso de la Ley de los grandes números, en estudiantes universitarios de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del TEC.

En Sanabria (2013), titulado “¿Cómo abordar la enseñanza de la probabilidad? se proponen algunas reflexiones y un esquema para abordar la enseñanza de la probabilidad

realizando una caracterización de diferentes niveles de desarrollo del concepto de probabilidad, a través de situaciones problema.

La investigación realizada por Núñez (2019), llamada “Algunos aspectos relacionados con la didáctica de la probabilidad y de la estadística en secundaria en Costa Rica”, estudia los resultados de la prueba nacional de bachillerato aplicada en los años 2016 y 2017, esto con las habilidades evaluadas de estadística y probabilidad, concluye que aún hace falta mejorar en el área de didáctica de la probabilidad y la estadística, y además, se ejemplifican los conceptos involucrados en la Teoría de Campos Conceptuales por medio de situaciones problema.

Según Núñez (2019) uno de los esfuerzos de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica es la organización de eventos que fortalezcan la enseñanza de la matemática. En esta área se encuentra el congreso internacional EDEPA (Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos), donde se reflexiona sobre la didáctica de la estadística y la probabilidad. Además, realiza la Escuela de Verano EDEPA, donde se imparten talleres y actividades dirigidos a futuros profesores de matemática.

En cuanto a investigaciones relacionadas a las estrategias utilizadas en el aula, se encuentra la realizada por Alfaro et al. (2010) denominada “Estrategias didácticas para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en I y II Ciclo de la Educación General Básica”, en esta se presentan estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística, entre las estrategias presentadas en el área de probabilidad se encuentran la resolución de experimentos y el cálculo de probabilidades con actividades lúdicas y simulaciones. Otra investigación es realizada por Alfaro y Alpízar (2011) llamada “Estrategias Didácticas para Enseñar Estadística y Probabilidad en Primaria: Validación en el Aula”, donde se muestran las evidencias de la experiencia de aula que se pusieron en práctica a nivel de cuarto grado, en estas actividades se muestra la participación activa de los estudiantes. Los autores coinciden que en Costa Rica falta más por hacer al respecto en cuanto a la mejora de la enseñanza de la probabilidad, consideran que es importante la capacitación y la actualización docente. Además, se citan las recomendaciones para el docente propuestas por Batanero y Godino (2001):

- Tomar en cuenta el desarrollo cognitivo del estudiante, pues permite diseñar problemas que involucren situaciones prácticas y cotidianas acordes con su capacidad
- Emplear proyectos y asignaciones que estimulen la experimentación
- Planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones a situaciones concretas
- Propiciar estrategias metodológicas que favorezcan el aprendizaje mediante modificaciones de conductas y creencias, que permitan generar habilidades, esto con la participación activa del estudiante.

En Font et al. (2019) se realiza la descripción del taller “Uso de algunos constructos del modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos para el estudio de

informes de práctica de futuros profesores de matemáticas”, en este se utilizan algunos elementos teóricos y constructos del modelo CCDM para el estudio de los conocimientos y competencias de los futuros profesores de matemáticas.

El trabajo realizado por Chaves et al. (2020) se propone el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la probabilidad en el ciclo diversificado de la educación costarricense, tomando en cuenta la reforma en el programa de estudios con respecto al área de estadística y probabilidad. La problemática se centra en las necesidades que presentan los profesores en el uso de materiales que les facilite planear sus clases de probabilidad, esto en el nivel de décimo, que es donde se imparten los contenidos de probabilidad en este ciclo. La unidad didáctica está fundamentada en el Análisis Didáctico, y para su elaboración se realizó un análisis conceptual y de contenido sobre la probabilidad, un análisis cognitivo para detectar los posibles problemas de aprendizaje en el área de probabilidad, y un análisis de instrucción para el diseño de la unidad didáctica. Se generó una versión para el profesor y otra para el estudiante.

Ampliando el tema con investigaciones fuera de Costa Rica, se mencionan algunas de las realizadas en los países de España, Chile y México, donde se realizan diversas investigaciones acerca de la didáctica de la probabilidad y de la estadística, así como investigaciones sobre modelos de conocimiento del profesor de matemáticas. A continuación, se citan algunas de ellas.

Batanero (2001) en el Departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada publica su libro “Didáctica de la Estadística”, dirigido a alumnos del curso Didáctica de la Estadística. En este libro se aborda el tema de estadística como ciencia, herramienta de investigación didáctica y otras áreas y para la formación de niños, profesionales, investigadores y profesores. Propone ejemplos de proyectos para la enseñanza de estos contenidos tanto para secundaria como primeros años de universidad. En el desarrollo del libro se puede consultar temas sobre la aleatoriedad y la probabilidad. Este libro representa un gran aporte para la enseñanza estocástica y la formación docente en esta área.

La tesis doctoral de Ortiz (2002) titulada: “La probabilidad en los libros de texto”, en esta se realiza un análisis de los libros de texto de secundaria utilizados en España, esto basándose en marco teórico de Godino y Batanero sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos y la teoría de Transposición Didáctica del autor Chevallard, en el trabajo se indica que:

En la actualidad se ha producido un cambio importante en la enseñanza de la probabilidad, donde han influido diversos autores, entre ellos Fischbein, Green y Shaughnessy, quienes defienden que la enseñanza de la probabilidad se puede y se debe iniciar en edades mucho más tempranas, mediante una aproximación más intuitiva. El cambio propuesto no se refiere sólo a los contenidos, sino a la metodología de enseñanza, que debe basarse en la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios y huir de una formalidad excesiva. (p. 8)

Vásquez (2014) realiza su tesis doctoral en la Universidad de Girona titulada: “Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo”, de la cual se derivan ocho publicaciones sobre la formación docente y los desafíos que se presentan en la enseñanza de la probabilidad. En este trabajo la autora construye y valida un instrumento de evaluación que permite indagar sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Con los resultados se busca desarrollar acciones que permitan mejorar la formación docente en Chile. La investigación se lleva a cabo bajo el Modelo Didáctico Matemático, el cual se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Se construye entonces el Cuestionario CDM-Probabilidad, aplicado a 93 profesores chilenos de primaria y obteniendo como resultado que poseen un conocimiento didáctico-matemático insuficiente, y la necesidad de una mejora en los libros de texto chilenos en educación primaria para el área de probabilidad (p.32).

Vásquez y Alsina (2015) publican el artículo llamado “Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de educación primaria”, en este se describe el diseño, construcción y validación de la Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP). En esta investigación, se considera que “la observación de clase es una herramienta clave para indagar en los conocimientos del profesor” (p.3), y es por esta razón que se propone el instrumento para identificar episodios de la clase en los que se observan prácticas ligadas a los distintos significados de la probabilidad.

Vásquez et al. (2020) realizan la publicación “Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad” donde se detalla las fases de construcción del instrumento y su validación, y luego de aplicarlo los autores realizan una reflexión sobre la funcionalidad: mejorar el conocimiento del profesorado de matemáticas acerca de la enseñanza de la probabilidad y promover su desarrollo profesional, diseñando planes de intervención que contribuyan a mejorar la enseñanza de la probabilidad.

Climent et al. (2015) realizan la investigación titulada “Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de videos” en la cual tres estudiantes en formación para maestro analizan el video de una clase donde una docente trabaja con contenidos de geometría para primaria. Con este análisis y la discusión de los estudiantes en formación para maestro se pretende generar conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas. Se utiliza el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) como sustento teórico, con el subdominio de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). El estudio se centra en ¿qué y cómo se construye KFLM durante el análisis de un video de enseñanza? (p. 87).

Por otro lado, se tiene la investigación de León, Sosa y Díaz (2019) llamada “Conocimiento matemático de probabilidad que ponen en acción profesores de bachillerato”. En este trabajo los autores plantean un cuestionario de preguntas abiertas para la evaluación del Conocimiento de los Temas (KoT) para la enseñanza de la probabilidad, aplicado a

profesores en ejercicio de bachillerato en Colombia. Se utiliza como fundamento teórico el modelo MTSK. Con la aplicación del cuestionario se reconoce que los profesores en el estudio poseen desempeños bajos en los temas de probabilidad y se identifican elementos importantes sobre el KoT para la enseñanza de la probabilidad.

Una investigación relacionada a el uso del video en la formación docente puede verse en Climent, et al. (2016), donde se analiza el cómo influye el análisis de videos en el conocimiento de los docentes en formación al efectuar una reflexión didáctica. En esta investigación tres docentes en formación (llamados estudiantes para maestro), observan el vídeo en conjunto y luego se les brindó una copia de este. Se les pidió que completaran con mayor detalle un instrumento proporcionado por los investigadores. Un mes después eran citados para una entrevista, donde se formulaban preguntas con el fin de escuchar sus respuestas más amplias. Con sus respuestas según las explicaciones del docente y acciones de los estudiantes, se logran clasificar los conocimientos sobre las características del aprendizaje de las matemáticas que tiene el docente de la clase observada.

Estas investigaciones demuestran el interés existente en distintos países sobre el mejoramiento en la enseñanza de la probabilidad y en la formación docente, por lo que a lo largo de estos años es un tema de preocupación que debe investigarse, y Costa Rica no debe ser la excepción.

Por otro lado, en Costa Rica según los informes de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC, 2017; 2018; 2019; 2020), los resultados en las Pruebas Nacionales de Bachillerato (PNB) en el área de estadística y probabilidad, no son lo esperado. De las 19 habilidades que se evaluaban en las PNB de matemática, siete correspondían a habilidades en el área de Estadística y Probabilidad. En el documento Distribución de ítems Matemáticas de cada año, se muestra el número de ítems por habilidades generales del programa de estudio. Las habilidades evaluadas en las PNB entre los años 2016-2019 se muestran en la siguiente Tabla 1.1 con la cantidad de ítems que se incluyeron de cada una según el año de aplicación:

Tabla 1.1

Elaboración propia con información de la DGEC (2017, 2018, 2019 y 2020)

Habilidad número	Habilidad General	2016	2017	2018	2019
13.	Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos.	3	3	3	3
14.	Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos.	2	2	3	3
15.	Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística.	2	2	3	3

Sigue en la página siguiente.

Habilidad número	Habilidad General	2016	2017	2018	2019
16.	Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información.	2	2	2	2
17.	Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas.	3	3	3	3
18.	Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.	2	2	2	2
19.	Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.	2	2	2	2
	Total, ítems en el área de estadística y probabilidad	16	16	18	18

Nota: Elaboración propia con información de la DGEC (2017, 2018, 2019 y 2020)

En estas PNB se tiene un total de 60 ítems, en los años 2016-2017, 16 corresponden al área de estadística y probabilidad, un 26,66 %; y en los años 2018-2019, son 18 los que corresponden al área de estadística y probabilidad, es decir, un 30 % de la prueba. El peso de estas habilidades en la PNB es más alto en los dos últimos años de aplicación, al aumentar dos ítems (habilidades 14 y 15) con respecto a las pruebas de los años 2016-2017.

En los informes de la DGEC (2017; 2018; 2019; 2020) se publican los resultados de las PNB, estableciendo cinco categorías sobre la dificultad de cada ítem según las respuestas obtenidas por los estudiantes. Estas categorías de dificultad por habilidad general se establecen de la siguiente forma:

- Muy fácil: 90 % o más de los estudiantes responden correctamente
- Fácil: el porcentaje de estudiantes que responden correctamente es igual o superior al 60 % e inferior al 90 %
- Intermedio: el porcentaje de estudiantes que responden correctamente es igual o superior al 40 % e inferior al 60 %
- Difícil: el porcentaje de estudiantes que responden correctamente es igual o superior al 10 % e inferior al 40 %
- Muy difícil: cuando el porcentaje de estudiantes que responden correctamente es inferior al 10 %

En los últimos cuatro años que se aplicaron las PNB, las habilidades presentaron el siguiente nivel de dificultad:

Tabla 1.2*Dificultad de las habilidades de estadística y probabilidad según el año*

Habilidad en estadística y probabilidad	Nivel de dificultad según el año			
	2016	2017	2018	2019
13	Intermedio	Intermedio	Difícil	Difícil
14	Fácil	Fácil	Intermedio	Intermedio
15	Intermedio	Intermedio	Intermedio	Intermedio
16	Intermedio	Intermedio	Intermedio	Intermedio
17	Difícil	Intermedio	Intermedio	Fácil
18	Intermedio	Intermedio	Difícil	Fácil
19	Fácil	Difícil	Difícil	Fácil

Nota: Elaboración propia con datos de la DGEC (2017; 2018; 2019; 2020)

Como se observa en la Tabla 1.2 el nivel de dificultad en la mayoría de los casos es de intermedio, pero no por la dificultad de los ítems sino por el rendimiento de los estudiantes, lo que muestra que no hay un dominio de culturalización de la materia estocástica.

Si bien en algunos casos se muestran mejorías en el desempeño de las pruebas, el dominio por parte de los estudiantes en estas habilidades correspondientes al área de estadística y probabilidad aún no es el esperado luego de cuatro años de aplicación de la PNB evaluando habilidades correspondientes al área de estadística y probabilidad del Programa de Estudios de Matemática.

Estos resultados son esperables si se compara con el estudio realizado por el Séptimo Informe del Estado de la Educación (2019), el cual consistió en observaciones de aula y aplicación de pruebas con ítems tomados del banco de preguntas utilizado para la PNB, al inicio y al cierre del curso lectivo en el décimo nivel. El objetivo de la investigación fue “buscar relaciones entre el rendimiento de los estudiantes y las dinámicas en que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje” (p. 292). Según los resultados presentados en dicha investigación “las lecciones muestran un divorcio entre lo solicitado en el programa y lo observado; los datos revelan el predominio de clases magistrales, poco participativas y sin uso de la tecnología como recurso didáctico” (p. 57). Se muestra un esfuerzo por parte del MEP de mejorar la calidad de la educación haciendo uso de la metodología de resolución de problemas, pero no se muestra por parte de los docentes una aplicación correcta de la misma, esto podría tratarse de un factor que influye en el rendimiento de los estudiantes y de la asimilación de los contenidos.

Marco Teórico

El presente capítulo está compuesto por cuatro secciones. En la primera sección se mencionan aspectos relacionados a la enseñanza de la matemática, detallando la organización del sistema educativo costarricense, la enseñanza de la matemática en Costa Rica centrándose en la formación docente y la estructura de los contenidos sobre probabilidad presentes en el Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP), se agregan algunas estrategias y herramientas tecnológicas que pueden ser utilizadas para la enseñanza de la probabilidad. La segunda sección aborda el tema de la probabilidad y su enseñanza. La tercera sección se dedicará al tema del conocimiento del profesor de matemáticas. Se finaliza con la cuarta sección donde se incluyen los indicadores de Idoneidad Didáctica en probabilidad.

Aspectos relacionados a la enseñanza de la matemática

Sistema Educativo Costarricense

La educación costarricense está organizada por medio de ciclos. Los dos primeros ciclos corresponden a la educación primaria con una duración de seis años (3 años por ciclo). La educación secundaria incluye al tercer ciclo y el ciclo diversificado. La Educación General Básica está compuesta por los tres primeros ciclos y corresponde a la educación obligatoria. La Educación Diversificada tiene una duración de dos años en las ramas académica y la artística o de tres años en la rama técnica. Tanto el sector público como el privado ofrecen estos niveles, en las instituciones del MEP la educación es gratuita. Con la aprobación de la educación diversificada, se puede optar por la Educación Superior, ya sea en universidades estatales o privadas, o instituciones con educación parauniversitaria. Esta información se presenta en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3*Organización del Sistema Educativo Costarricense*

Educación Preescolar	Ciclo Materno Infantil Ciclo de Transición			
Educación General Básica	I Ciclo (primer, segundo y tercer nivel) II Ciclo (cuarto, quinto y sexto nivel) III Ciclo (séptimo, octavo y noveno nivel)			Educación Primaria
Educación Diversificada	Ciclo Diversificado	Ramas:	Academia (décimo y undécimo nivel) Artística (décimo y undécimo nivel) Técnica (décimo, undécimo y duodécimo nivel)	Educación Secundaria
Educación Superior	Parauniversitaria Universitaria			

Nota: Elaboración propia con datos de la página www.cse.go.cr

El sistema educativo es administrado por el MEP hasta la Educación Diversificada, además, existe un Consejo Superior de Educación (CSE) que: “es el Órgano de carácter constitucional responsable de orientar y dirigir desde el punto de vista técnico, los diferentes niveles, ciclos y modalidades del Sistema Educativo Costarricense, (...) define la política educativa, evalúa y promueve cambios pertinentes para el mejoramiento de la Calidad, la Equidad y la Eficacia de la Educación en sus diferentes niveles, ciclos y modalidades”. (MEP, 2013a. como se citó en Ruiz, 2013).

En el año 1957 se publica la ley N° 2160 denominada “Ley Fundamental de Educación”, en el primer capítulo que trata sobre los fines de la educación costarricense define en su primer artículo que “todo habitante de la República tiene derecho a la educación y el Estado la obligación de procurar ofrecerla en la forma más amplia y adecuada” (p.1)

La educación costarricense se ofrece de forma pública o privada desde preescolar hasta la universidad buscando siempre su calidad. Además, también se ofrecen oportunidades de estudio a personas que por diferentes situaciones abandonan el sistema regular y necesitan otra modalidad como la educación abierta, los colegios nocturnos, los colegios bajo la modalidad CINDEA, entre otros, que procuran que no se excluya a ninguna persona. En general, la educación costarricense se enfoca en la formación de ciudadanos bajo los fines establecidos en el artículo 2 de este mismo capítulo de la Ley 2160, los cuales se espera que se alcancen a lo largo del proceso de formación. Esos fines se presentan a continuación:

Son fines de la educación costarricense:

- a) La formación de ciudadanos amantes de su Patria, conscientes de sus deberes, de sus derechos y de sus libertades fundamentales, con profundo sentido de responsabilidad y de respeto a la dignidad humana;

- b) Contribuir al desenvolvimiento pleno de la personalidad humana;
- c) Formar ciudadanos para una democracia en que se concilien los intereses del individuo con los de la comunidad;
- d) Estimular el desarrollo de la solidaridad y de la comprensión humanas; y
- e) Conservar y ampliar la herencia cultural, impartiendo conocimientos sobre la historia del hombre, las grandes obras de la literatura y los conceptos filosóficos fundamentales. (p.1)

En el artículo 3 de la Ley Fundamental de Educación (1957) establece que la escuela costarricense procurará:

- El mejoramiento de la salud mental, moral y física del hombre y de la colectividad.
- El desarrollo intelectual del hombre y sus valores éticos, estéticos y religiosos.
- La afirmación de una vida familiar digna, según las tradiciones cristianas, y de los valores cívicos propios de una democracia.
- La transmisión de los conocimientos y técnicas, de acuerdo con el desarrollo psico-biológico de los educandos.
- Desarrollar aptitudes, atendiendo adecuadamente las diferencias individuales.
- El desenvolvimiento de la capacidad productora y de la eficiencia social.

Por otro lado, a pesar de que la educación en Costa Rica tenga una buena cobertura, existe el reto de mantener a la población en las aulas y se tienen situaciones de desigualdad social por situación económica. Según la OCDE (2017):

Costa Rica fue uno de los primeros países de América Latina en lograr una cobertura universal en educación primaria y que la mayoría de los estudiantes se matriculen en la secundaria. El reto es asegurarse que todos los estudiantes se beneficien de una enseñanza de calidad y de un ambiente de aprendizaje positivo, que completen al menos los 9 años de educación básica y que adquieran sólidas habilidades. Casi un tercio (30 %) de los jóvenes de 15 años ya ha abandonado la escuela, mientras que un tercio (33 %) de los que siguen carece de competencias básicas en ciencias, lectura y matemáticas. Al finalizar la educación básica, los estudiantes de familias pobres se desempeñan dos años por debajo de sus pares de hogares más ricos y pocos harán la transición a la educación universitaria o a un buen trabajo. Lograr un crecimiento económico más inclusivo y de mejores posibilidades en la vida para todos en Costa Rica requerirá de un énfasis mucho mayor en la calidad de la educación básica y en los resultados del aprendizaje, con un enfoque particular en los estudiantes y

comunidades menos favorecidas. Esto significa fijar estándares más altos para docentes y escuelas, al mismo tiempo que se les da el apoyo que necesitan para mejorar las prácticas de aprendizaje respaldados por un liderazgo estratégico del gobierno central con el objeto de establecer la dirección del cambio. Todos los factores del sistema tienen que hacerse corresponsables de la mejora. (p. 10)

En Costa Rica, según el Programa Estado de la Nación (2019), entre el año 2018 y 2019 “El crecimiento económico, el mercado laboral, el crédito, el ingreso de las familias y la pobreza mostraron regresiones importantes.” (p.35). De aquí la preocupación en la formación de docentes de forma humana e integral, que contribuya con la mejora de la educación, especialmente en la calidad y acceso.

En la educación costarricense, para al finalizar la Educación Diversificada anteriormente se realizaban pruebas nacionales en las asignaturas de Español, Matemática, Estudios Sociales, Educación Cívica, Idioma (inglés o francés) y Ciencias (Biología, Física o Química). Estas pruebas fueron reintroducidas en 1988 pues antes de esta fecha estaban suspendidas. Además eran utilizadas como un instrumento de calidad y uniformidad en el sistema escolar. Las pruebas eran compuestas por ítems de selección única. (Ruiz, 2013. p.10). En el año 2019 el MEP cambió estas pruebas por las Pruebas Nacionales para el Fortalecimiento de Aprendizajes para la Renovación de Oportunidades (FARO), estas se aplican en el nivel de quinto de primaria y en el nivel de décimo año de secundaria o en el duodécimo año en el caso de la rama técnica. Según el MEP (2020):

Las Pruebas Nacionales FARO miden el dominio de habilidades, lo cual supera el modelo empleado por Bachillerato en el que se buscaba determinar si un estudiante tenía o no un conocimiento específico. Además, alinea el sistema de evaluación con los programas de estudio aprobados por el Consejo Superior de Educación. También permitirá obtener información sobre los procesos de aprendizaje en el aula, las áreas de mejora de cada estudiante y centro educativo y fijar las acciones necesarias para realizar correcciones.

Debido a que aún no se ha realizado una aplicación de las Pruebas FARO, no se tienen resultados a la fecha de este estudio, por lo tanto, se realizará énfasis en los resultados obtenidos en las últimas Pruebas de Bachillerato donde se han incorporado las áreas de Estadística y Probabilidad.

Enseñanza de la Matemática en Costa Rica

En la educación costarricense, el documento “*Programas de Estudio de Matemáticas*” corresponde a los lineamientos sobre el currículo dirigidos a la Enseñanza General Básica y la Educación Diversificada, es decir los ciclos I y II que se imparten en Primaria y los ciclos III y IV que corresponden a Secundaria (ver Tabla 1.3).

El Programa de Estudio de Matemáticas, MEP (2012), se organiza por medio de áreas matemáticas y habilidades, dirigidos al desarrollo de la competencia matemática. Las cinco áreas matemáticas son las siguientes:

- Números
- Medidas
- Geometría
- Relaciones y Álgebra
- Estadística y Probabilidad

Por otro lado, también se incluyen los procesos matemáticos entendidos como “actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos” (MEP, 2012. p.24). Estos procesos se proponen con el fin de apoyar el desarrollo de las habilidades. Según el MEP (2012) se identifican cinco procesos:

- Razonar y argumentar
- Plantear y resolver problemas
- Comunicar
- Conectar
- Representar

Como parte de la mediación pedagógica, el MEP (2012) plantea la resolución de problemas como un instrumento para lograr el desarrollo de habilidades y la realización de procesos. Además, se menciona:

Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas:

- * que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad,
- * que se enfrenten a los problemas sin que se hayan mostrado soluciones similares,
- * que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto. (MEP, 2012. p.29)

Los problemas propuestos son basados en contextos reales, sin dejar de lado problemas abstractos, pues en algunos casos no se encuentra el sentido del contenido en un contexto real. Sin embargo, estos problemas entrenan habilidades como el justificar respuestas, demostración, uso de lenguaje matemático, razonamiento riguroso abstracto. (MEP, 2012. p.30)

En MEP (2012) se distinguen dos etapas en el desarrollo de las lecciones: la primera es el aprendizaje de conocimientos nuevos, la segunda es la movilización y aplicación de los conocimientos, que puede realizarse en cualquier momento posterior. Se propone un estilo de organización donde se realiza la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos siguiendo cuatro momentos:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre.

Durante las lecciones se espera que se den interacciones entre estudiantes y el docente, de esta forma construyen el conocimiento. El docente tendrá el papel de facilitador del proceso, incentivando la participación de los estudiantes en construir su aprendizaje.

En el programa también se brindan indicaciones generales sobre el uso de tecnologías, actitudes y creencias, y sobre el uso de la historia de las matemáticas. Para los docentes corresponde a sugerencias y orientación que se puede usar de forma flexible y creativa al emplear diferentes actividades.

A partir del 2013, se comenzó a implementar el programa de estudios con programas de transición, para el 2016 se comenzó a aplicar Pruebas de Bachillerato con este programa. Según MEP (2017) “las primeras pruebas de Bachillerato con base en los nuevos programas empezaron a realizarse apenas en el 2016 para la modalidad académica y en la técnica-profesional se aplicaron en el 2017” (p. 10).

En el año 2016 junto con la reforma de los programas, se inició con la inclusión de preguntas de respuesta corta, pues no solo se trata de un cambio de contenidos sino de metodología, se propone la resolución de problemas como la metodología principal y en estas preguntas se incluyen ejercicios que implican más razonamiento y no solo la aplicación de un algoritmo o respuesta a un concepto.

La aplicación de las matemáticas en el contexto real es importante para visualizar la utilidad de un concepto y así despertar el interés del estudiante. A pesar de que el enfoque propuesto en el programa de estudios vigente es la resolución de problemas, en los procesos de enseñanza predomina la enseñanza tradicional. Para el Informe del Estado de la Educación (2019), se realizó un estudio con observaciones de aula sobre la implementación de la reforma del programa de matemáticas mencionada anteriormente. En los resultados

se menciona que “no se encontró evidencia significativa, en las aulas observadas, de la aplicación de la principal estrategia metodológica propuesta por el MEP: la resolución de problemas”. (p.59)

Además, se menciona que en las lecciones observadas predominan las lecciones tradicionales donde se realizan exposiciones magistrales y se atienden consultas, existe poca participación de los estudiantes (p. 58). Con la aplicación de una prueba en el nivel de décimo año compuesta por ítems de bachillerato quisieron comparar los conocimientos iniciales y los que debieron adquirir hasta el final del curso lectivo, los cambios fueron poco significativos y afirman que no se muestra una mejora de los conocimientos que se debían adquirir.

En Costa Rica, la formación de profesores de secundaria en el área de matemática está en manos de cuatro de las universidades públicas: Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional, Universidad Estatal a Distancia y el Instituto Tecnológico de Costa Rica, a esto se suman 5 universidades privadas que colaboran en la formación de profesores de matemática en un menor plazo. En la Tabla 1.4 se muestra el detalle de las universidades públicas mencionadas con el nombre de la carrera y los grados académicos que imparten actualmente.

Tabla 1.4

Universidades públicas con carreras de formación docente en el área de matemática.

Universidad	Nombre de la carrera	Grados académicos acreditados por SINAES	Grados académicos no acreditados
Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC)	Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos	Bachillerato Licenciatura	
Universidad Nacional (UNA)	Enseñanza de la Matemática	Profesorado Bachillerato Licenciatura	
Universidad Estatal a Distancia (UNED)	Enseñanza de la Matemática	Profesorado Bachillerato	Licenciatura
Universidad de Costa Rica (UCR)	Enseñanza de la Matemática		Profesorado Bachillerato Licenciatura
Universidad de Costa Rica (UCR)	Educación Matemática		Bachillerato Licenciatura

Nota: Elaboración propia con información de los sitios web de cada universidad.

Según el Sistema Nacional de Acreditación de la Educación Superior (SINAES), tres de las universidades públicas tienen acreditación e incluso reacreditación en estas carreras, en la UNED se muestra que el grado académico de Licenciatura no se encuentra bajo la

acreditación. La Universidad de Costa Rica imparte dos carreras en esta línea, y ninguna de estas se encuentra acreditada por SINAES. Todas estas universidades imparten hasta el grado académico de Licenciatura, y la UCR posee además una Maestría Académica en Matemática Educativa y una Maestría Académica en Matemática Aplicada.

En cuanto a las universidades privadas que participan en esta labor, en la siguiente tabla se presenta el nombre de la universidad, nombre de la carrera y los grados académicos que imparten, cabe destacar que ninguna de estas universidades cuenta con acreditación de la carrera por parte de SINAES en sus grados académicos.

Tabla 1.5

Universidades privadas con carreras de formación docente en el área de matemática.

Universidad	Nombre de la carrera	Grados académicos
Universidad Internacional San Isidro Labrador (UISIL)	Educación con Énfasis en la Enseñanza de la Matemática	Bachillerato Licenciatura
Universidad Americana (UAM)	Enseñanza de la Matemática	Bachillerato Licenciatura
Universidad San José	Educación Secundaria con énfasis en Matemática	Bachillerato Licenciatura
Universidad Católica	Ciencias de la Educación con énfasis en la Enseñanza de la Matemática	Bachillerato
Universidad Adventista de Centro América (UNADE-CA)	Educación en Matemáticas	Bachillerato Licenciatura

Nota: Elaboración propia con información de los sitios web de cada universidad.

La formación de docentes de secundaria en Costa Rica es variada, al brindarse entre universidades públicas y privadas, y con diferencias marcadas como la duración, en universidades privadas se obtiene un título en menor tiempo que en las públicas. Las carreras que se han sometido a procesos de acreditación son de universidades públicas.

La oferta de carreras con programas más cortos hacen que los docentes graduados en universidades públicas deben competir con docentes que logran una categoría más alta en menor tiempo. Esta situación genera un problema en el proceso de contratación vigente para el Ministerio de Educación Pública (MEP). Según el Séptimo Informe del Estado de la Educación (2019), el proceso es realizado por la Dirección General de Servicio Civil, quien realiza una convocatoria pública y posteriormente realiza un concurso para conformar un registro de elegibles donde se asignan puntajes según la valoración de los atestados, en este informe se afirma que “este sistema enfrenta debilidades importantes para identificar a los docentes con mejor formación” (p. 134), a pesar de ser un proceso complejo, se deja guiar por los atestados antes de las habilidades o la idoneidad para el puesto como docente.

La enseñanza de la probabilidad en Costa Rica

En el programa de estudios del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), se definen los objetivos de cada nivel por medio de habilidades, organizadas como habilidades generales, para cada ciclo educativo y habilidades específicas, para cada uno de los niveles que componen esos ciclos. Según MEP (2012) la *habilidad específica* se define como “una capacidad o un saber hacer en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento)” (p. 22), estas habilidades se esperan alcanzar en un corto plazo al desarrollar el contenido en la clase. Luego se generaliza para cada ciclo educativo y se definen las habilidades generales como las capacidades a alcanzar en mediano plazo y por último se establece la *competencia matemática* la cual se toma de forma general como las capacidades a alcanzar a largo plazo.

El término *competencia*, según el Diccionario de la Lengua Española puede ser tomado como “Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado” (RAE, 2020). La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD, por sus siglas en inglés), define competencia como:

Capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz. (OECD, 2005a. p. 4)

Costa Rica participa en el *Programa Internacional de Evaluación de los Aprendizajes* (PISA, por sus siglas en inglés) realizado por la OECD. Este estudio tiene como objetivo evaluar los sistemas educativos de todo el mundo probando las habilidades y conocimientos de los alumnos de 15 años (OECD, 2020). En este programa se desarrollan pruebas en el área de Lectura, Matemáticas y Ciencias, evaluando la aplicación de los conocimientos de los estudiantes en situaciones de la vida real. En este estudio, la competencia matemática es de suma importancia, pues las personas en el contexto real, en algún momento, tendrán la necesidad de enfrentar situaciones donde se debe aplicar algún conocimiento, de esta forma PISA define la *competencia matemática* como:

La capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (OECD, 2003. p.24)

En esta línea, Rico (2005) afirma que enseñar mediante el desarrollo de competencias matemáticas es centrarse en “cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido” (p. 50).

Actualmente, los contenidos de estadística y probabilidad se desarrollan de forma paulatina a lo largo de los niveles. En primaria se adquieren destrezas sobre el análisis de datos y habilidades para la recolectar, resumir y presentar información. Se realiza un análisis intuitivo sobre situaciones aleatorias y el cálculo de probabilidades a nivel básico. (MEP, 2012. p.351). Para el tercer ciclo se pretende reforzar las habilidades adquiridas en la primaria. Se menciona además que “no se pretende formar especialistas en el análisis estocástico (Estadística y probabilidad), sino propiciar una cultura en la comprensión, la valoración y el uso adecuado de la información”. (MEP, 2012. p.351).

A continuación, se detallan las habilidades generales que se trabajan en los niveles de secundaria, tomadas del programa vigente del MEP (2012):

Habilidades Generales para tercer ciclo en probabilidad:

- Interpretar información que ha sido generada por medio de análisis estadísticos o probabilísticos provenientes de diversas fuentes.
- Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
- Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades de las probabilidades vinculadas con el tipo de evento: seguro, probable e imposible.
- Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.
- Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en condición de incertidumbre.
- Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la Estadística y la Probabilidad.
- Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto

Para el ciclo diversificado, los contenidos de probabilidad se trabajan en décimo año. Aquí se desea que el estudiante sea capaz de identificar, recolectar e interpretar información para resolver situaciones y para el manejo de situaciones aleatorias simples. Además de reconocer la importancia de la estocástica como herramienta de diferentes áreas del conocimiento. (MEP, 2012. p.431)

Habilidades Generales para ciclo diversificado en probabilidad:

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas.

- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.

En la Tabla 1.6 se muestran las habilidades y contenidos de probabilidad que se imparten en cada nivel de secundaria. En los niveles de séptimo y undécimo se trabajan contenidos de estadística, sin embargo, en la Tabla 1.6 se prioriza únicamente los contenidos de probabilidad que se imparten en los niveles de octavo, noveno y décimo que corresponden a las habilidades generales citadas anteriormente en tercer ciclo y ciclo diversificado.

Tabla 1.6

Habilidades y contenidos en probabilidad a nivel de secundaria en la educación costarricense.

Nivel	Conocimientos	Habilidades Específicas
Octavo	El azar <ul style="list-style-type: none"> ■ Aleatoriedad ■ Determinismo Espacio muestral <ul style="list-style-type: none"> ■ Espacio muestral, puntos muestrales y su representación ■ Resultados favorables a un evento ■ Eventos simples y compuestos ■ Evento seguro, evento probable, evento imposible Probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> ■ Identificar la presencia del azar en situaciones aleatorias. ■ Identificar diferencias entre situaciones aleatorias y deterministas. ■ Identificar el espacio muestral y sus puntos muestrales como resultados simples en una situación o experimento aleatorio y representarlos por medio de la numeración de sus elementos o de diagramas. ■ Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria. ■ Clasificar eventos en simples o compuestos. ■ Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.
	<ul style="list-style-type: none"> ■ Eventos más probables, menos probables e igualmente probables ■ Definición clásica (o laplaciana) 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados. ■ Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.

Sigue en la página siguiente.

Nivel	Conocimientos	Habilidades Específicas
	<p>Reglas básicas de probabilidad</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 ■ La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la teoría de probabilidad. ■ Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible. ■ Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades. ■ Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.
Noveno	<p>Muestras aleatorias Probabilidad frecuencial</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico) ■ Introducción a la ley de los grandes números 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Identificar la importancia del azar en los procesos de muestreo estadístico. ■ Identificar eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando el concepto clásico. ■ Utilizar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación al concepto de Probabilidad, en eventos en los cuales el espacio muestral es infinito o indeterminado. ■ Identificar que las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con evento seguro, probable e imposible también son válidas para la definición frecuencial. ■ Identificar que, para un evento particular, su frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima hacia la probabilidad clásica conforme el número de observaciones aumenta. ■ Resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios dentro del contexto estudiantil.

Sigue en la página siguiente.

Nivel	Conocimientos	Habilidades Específicas
Décimo	<p>Eventos</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Relaciones entre eventos <ul style="list-style-type: none"> • Unión \cup • Intersección \cap • Complemento ■ Eventos mutuamente excluyentes <p>Probabilidades</p> <p>Reglas básicas de las probabilidades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A ■ Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0 ■ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes <p>Otras Propiedades</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes ■ Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: unión, intersección y complemento e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio. ■ Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos. ■ Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares. ■ Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades. ■ Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento. <ul style="list-style-type: none"> ■ Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados. ■ Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Nota: Elaboración propia con información de MEP(2012).

Las habilidades que se trabajan a nivel de secundaria corresponden a herramientas de análisis de información y de resolución de situaciones simples donde se muestren eventos aleatorios. Según el MEP (2012), con la resolución de problemas se debe realizar la construcción del conocimiento y la importancia al dar respuesta preferiblemente a situaciones que sean de interés del estudiante. Los programas de estudio de matemática del MEP, están acorde a los Principios y Estándares para la Educación Matemática propuestos por

NCTM (2000) y citados en Núñez et al. (2004):

- ✓ Diseñar encuestas, observaciones y experimentos en un grado simple. Contestar preguntas como ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra y las variables?
- ✓ Entender el concepto de sesgo en encuestas, reducción, muestras aleatorias.
- ✓ Tomar en cuenta la naturaleza de las mediciones y la selección de las unidades del experimento.
- ✓ Entender que una muestra es la más probable que represente a la población cuando ella ha sido aleatoriamente escogida.
- ✓ Comprender que una de las metas de un experimento es que sus conclusiones sean ampliamente aplicadas a toda la población.
- ✓ Describir el centro, la forma y la propagación de los datos tanto en el análisis univariado y bivariado. Usar histogramas, boxplots, diagramas tallo, hoja y cajas de dispersión.
- ✓ Esclarecer las diferencias entre medidas de centro (tal como media, mediana) y propagación (tal como desviación estándar, rango). Por ejemplo: la media y la mediana.
- ✓ Identificar la categoría del dato.
- ✓ Aplicar su conocimiento de transformaciones lineales de álgebra y geometría a transformaciones lineales de datos.
- ✓ Aplicar los métodos de representación a datos bivariados donde una variable es categórica o discreta y la otra es continua.
- ✓ Utilizar los diferentes gráficos y representaciones para comparar grupos. Ejemplo: los diagramas de dispersión de las calorías de los “perros calientes” según los tipos de carne.
- ✓ Analizar las relaciones entre dos conjuntos de datos. Por ejemplo, en los diagramas de dispersión, determinar cuál es la función que más se adapta al modelo.
- ✓ Determinar la recta de mejor ajuste y usar los residuos para mejorarla.
- ✓ Usar tecnología para computar la ecuación de regresión lineal y el coeficiente de correlación (no causa y efecto. Por ejemplo: problemas del ojo y sensibilidad de la gente).
- ✓ Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones sobre un modelo para un conjunto de datos. Por ejemplo, a partir de la recta de mejor ajuste, predecir otros datos.
- ✓ Un parámetro es un número sencillo que describe algún aspecto de una población íntegro, y una estadística es una estimación computada a partir de los valores de una muestra de la población. Por ejemplo: expectativa de vida es un parámetro.

- ✓ Entender que los parámetros de una población no pueden aplicarse a las muestras.
- ✓ Entender los conceptos: probabilidad condicional y eventos independientes
($P(A|B) = P(A)$)
- ✓ La probabilidad de un evento compuesto. Por medio de probabilidades condicionales.

Estrategias didácticas y recursos para la enseñanza de la probabilidad

Durante las últimas décadas se ha dado gran importancia en la actualización en los modelos de enseñanza de aprendizaje, esto con el fin de lograr un aprendizaje significativo en una sociedad de constante cambio y con un avance tecnológico acelerado, el cual se debe aprovechar. Los futuros profesionales deben prepararse para constantes cambios y ser parte de un entorno laboral complejo, donde necesitarán resolver problemas que se presentarán en el momento. La necesidad de cambios y mejoras en educación según Miranda (2007) ha tomado importancia desde la década de los años ochenta, pues “la expansión de los cambios que se manifiestan en todos los órdenes del sistema social impone al sistema educativo respuestas a este fenómeno creciente en ese periodo, con marcadas tendencias de crecimiento en las décadas venideras” (p. 183).

El constructivismo es propuesto por las tendencias en investigación en psicología y educación, en este se encuentran las teorías de Piaget, Vygotsky y Ausubel. En el constructivismo se considera al estudiante como un personaje activo y protagonista del proceso de aprendizaje pues es quien construye su conocimiento, con ayuda del facilitador, que en este caso es el docente. Según Calero (2009) “Una actitud pedagógica constructivista debe procurar que los alumnos no sean receptores conformistas sino agentes activos de su propia educación”. El aprendizaje se puede construir partiendo de los conocimientos previos del estudiante, por medio de las actividades propuestas por el docente para este fin, en el momento que exista un conflicto entre lo que el estudiante sabe y lo que está aprendiendo es cuando se produce el aprendizaje, según Gutiérrez (2003):

El aprendizaje consiste, en realidad, en una interacción continua entre lo que está afuera y lo que está al interior del sujeto que aprende, tomando en cuenta que tal dimensión interior es la que determina el éxito del proceso de aprendizaje. (p. 41)

Algunos puntos importantes del enfoque constructivista de la enseñanza se mencionan a continuación: (Fallas y Trejos, 2014 y Ñeco, 2005)

- Se centra en el sujeto que aprende, el cual tiene un papel esencialmente activo para aprender.

- El conocimiento no es una copia fiel de la realidad sino una construcción del ser humano.
- El punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos previos. Se da importancia a los conocimientos previos, pero también a las creencias y la motivación del estudiante.
- El aprendizaje se produce cuando entran en conflicto lo que es estudiante sabe con lo que debería saber.
- El conocimiento es el resultado del aprendizaje, por esta razón, los modelos educativos deben buscar la propia construcción y organización del conocimiento del individuo.

El objetivo entonces es que los estudiantes sean personas activas que aprovechen experiencias propuestas por el docente, de forma que busquen información para resolver problemas y reorganicen lo que saben para lograr un nuevo aprendizaje. El constructivismo busca un aprendizaje activo y dinámico, esto se puede lograr con la aplicación de metodologías activas, para evitar que se vea el aprendizaje como una transmisión de conocimientos como se propone en la metodología tradicional, donde el estudiante es receptor y observador, aunque existirán momentos donde eso ocurra.

Ñeco (2005) considera que la construcción del aprendizaje se produce de las siguientes formas:

- a) Cuando el sujeto interactúa con el objeto del conocimiento (Piaget, 1997)
- b) Cuando lo realiza interactuando con otros (Vygotsky, 1978)
- c) Cuando es significativo para el sujeto (Ausubel, 1978)

El autor agrega que en esta metodología se considera que el aprendizaje es siempre una construcción interior y subjetiva, lo que se logra alcanzar es resultado de la capacidad particular para adquirir conocimiento que le permiten anticipar, explicar y controlar la realidad que lo rodea.

Tabla 1.7

Diferencias pedagógicas entre dos esquemas cognitivos de enseñanza constructivista y tradicional

CONSTRUCTIVISTA	TRADICIONAL
Los resultados son impredecibles, múltiples y diversos	Los resultados son predecibles
El currículo parte de la realidad o entendimiento del estudiante	Los objetivos son predefinidos, la estructura es formal
La secuencia varía de acuerdo con el estudiante y su proceso	Existe una secuencia en la instrucción y las destrezas

Segue en la página siguiente.

CONSTRUCTIVISTA	TRADICIONAL
El docente provee el ambiente y las actividades; el uso del ambiente depende del estudiante	Las actividades son planificadas y definidas por el docente
El estudiante estructura los datos, no de lo obtenido por información externa	Los datos responden a información externa y sobre estudiantes
Los estudiantes resuelven los problemas según los confrontan	Los problemas los provee el texto o docente
Promueve el aprendizaje cooperativo para la solución de los problemas y su interpretación	Cada estudiante realiza su trabajo
El conocimiento como interpretación de la realidad	Existe un conocimiento oficial que debe ser aprendido
La evaluación está basada en el desarrollo personal	La evaluación está basada en la comprensión de datos

Nota: Tomado de McNeil, J. Currículum: teacher's initiative (1995) como se citó en Ñeco (2005). (p.4)

Al aplicar este enfoque, como se puede ver en la tabla anterior, el papel del profesor cambia, convirtiéndose en un facilitador del proceso, si bien es quien plantea las actividades, también es un integrante del proceso. Para crear las actividades y poder crear ambientes de aprendizaje provechosos, el docente debe conocer o investigar sobre los intereses de sus estudiantes, la cultura, costumbres, diferencias entre ellos y contextos en los cuales viven. Ñeco (2005) menciona que entre las características que debe tener un docente constructivista están:

- Estimula y acepta la iniciativa y autonomía (independencia) del educando.
- Utiliza información de fuentes primarias, además de recursos materiales físicos, interactivos y manipulables.
- Usa terminología cognitiva, a saber: clasificar, analizar, predecir, crear, inferir, deducir, elaborar, pensar, etcétera.
- Permite que el estudiante dirija el aprendizaje, cambie la estrategia y cuestione el contenido.
- Investiga la comprensión de conceptos que tienen sus alumnos, previo a compartir con ellos su propia comprensión de los conceptos.
- Fomenta el diálogo y la colaboración de los alumnos, entre ellos y con el maestro.
- Estimula la curiosidad e interés del estudiante a través de preguntas amplias y valorativas; igualmente, induce al alumno a inquirir.
- Insiste en que el educando repiense, elabore y complete su respuesta inicial.

- Crea situaciones y experiencias que “contradigan” la hipótesis original, a fin de estimular la reflexión.
- Permite al estudiante “pensar” antes de contestar.
- Provee tiempo al estudiante para establecer relaciones y crear metáforas.
- Alimenta la curiosidad de los estudiantes a través del uso frecuente del modelo de aprendizaje

El docente tiene un papel muy importante pues es el coordinador, moderador, mediador, facilitador de las actividades que propone, y también puede ser participante de estas. Además, cumple funciones asociadas a la selección de estrategias y técnicas de enseñanza, y estas se llevan a cabo en dos momentos diferentes. En el primer momento el docente se dedica a plantear y diseñar las experiencias y actividades necesarias para adquirir criterios para la selección de estrategias y técnicas didácticas y en un segundo momento facilitar, guiar, motivar y ayuda a sus estudiantes durante su proceso de aprendizaje, y conducir el curso hacia los objetivos establecidos, haciendo uso de las estrategias y técnicas adecuadas (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, 2014).

Para poder guiar a los estudiantes hacia el logro de objetivos deseados, se sugiere que el docente en cada clase pueda:

- Especificar con claridad los propósitos de la clase. Brindar las instrucciones tanto de forma verbal como escrita. Explicar claramente la actividad que se quiere realizar y la estructura, especificar cuál es el fin o producto final.
- Ubicar con certeza a los alumnos en el grupo. Tener claros los grupos en los cuales van a trabajar y asignar los roles antes de iniciar la actividad, esto en caso de aplicar trabajo cooperativo.
- Monitorear el trabajo, participar para evitar atrasos, tomar en cuenta el tiempo que pueda llevar cada actividad.
- Evaluar continuamente el nivel de logros de todos los alumnos. Esto se puede aplicar con las herramientas de autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación o bien con listas de cotejo sobre los objetivos logrados.

Por otro lado, Ñeco (2005) aporta que sin importar cuál sea la asignatura que enseñe, el docente debe tener presente las siguientes destrezas cognitivas por su importancia en la construcción del conocimiento:

- *Enseñar a pensar*: promover el desarrollo de competencias cognitivas que les permita a los estudiantes optimizar sus procesos de razonamiento.

- *Enseñar sobre el pensar*: estimular en los estudiantes la toma de conciencia de sus procesos y estrategias mentales para lograr controlarlos, mejorando su rendimiento y eficacia en el proceso personal de aprender a aprender (metacognición y autonomía)
- *Enseñar sobre la base del pensar*: incorporar objetivos de aprendizaje relativos a las habilidades cognitivas, dentro de currículo.

Con estos aspectos, se quiere que el estudiante se convierta en responsable de su propio aprendizaje, presentando autonomía y siendo una persona activa y comprometida en el proceso, también fomentar el pensamiento crítico de las situaciones cotidianas y analizarlas haciendo uso de las habilidades que desarrolle con lo aprendido y que al presentar sus resultados e ideas sea un buen comunicador. Además, se promueve el trabajo cooperativo, pues parte de la construcción del conocimiento la obtendrá en la interacción con sus compañeros y en el momento de la comunicación al compartir sus experiencias y escuchar a sus compañeros.

Como parte del constructivismo se proponen diferentes alternativas de trabajo que se pueden aplicar en la clase de matemáticas. Entre estas alternativas están: método de casos, aprendizaje basado en problemas (ABP), aprendizaje basado proyectos (ABPr), técnica de debates, juegos y simulaciones, investigación, entre otros.

En la actualidad se debe apostar por una educación donde se desarrollen habilidades, actitudes y valores, incorporándolas como parte de los objetivos del aprendizaje de las matemáticas. Implementar estas alternativas no solo ayuda al desarrollo de las habilidades matemáticas, sino que también logra la atención del estudiante al ser una situación de su interés. Para esta tarea el docente de matemática debe conocer cuáles son los intereses del grupo de estudiantes, el contexto en el que viven, entre otros aspectos.

Para el diseño de actividades dentro del marco del constructivismo, se propone seguir los lineamientos de la *Teoría de las Situaciones Didácticas*, a fin de procurar el desarrollo de la competencia matemática que se quiere. En esta teoría, Brousseau (1986) propone tres tipos de situaciones: acción, formulación y validación, estas se describen a continuación:

- ✓ **SITUACIONES DE ACCIÓN**: en estas situaciones se plantean problemas al estudiante cuya solución sea el concepto que se quiere enseñar. En el caso de conceptos de probabilidad y el azar se deben proponer situaciones en las cuales el estudiante deba construir el concepto por medio de decisiones o experimentación, es decir, poner a los estudiantes a construir un modelo probabilístico implícito.
- ✓ **SITUACIONES DE FORMULACIÓN**: en estas los estudiantes expresan el modelo intuido intercambiando información con otros de sus compañeros, serán situaciones donde algunos estudiantes harán el papel de emisores y otros de receptores.
- ✓ **SITUACIONES DE VALIDACIÓN**: estas pretenden que el estudiante trate de probar la validez de su modelo ante su docente. Se espera que con esta situación el estudiante dé un paso más avanzado en el proceso de aprendizaje.

Luego de las situaciones propuestas, el autor denomina *institucionalización* al proceso donde se nombra el concepto que ya fue construido, formulado, validado y aceptado por los estudiantes.

Los conceptos probabilísticos no serán desarrollados por los estudiantes de forma espontánea, se necesita despertar las intuiciones primarias para que los estudiantes construyan el conocimiento a partir de la experiencia, las secuencias didácticas que se diseñen deben ser orientadas a favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje y así lograr un desarrollo óptimo de las habilidades que se proponen en cada nivel, en el caso de este trabajo, interesan las habilidades que se desean desarrollar en el área de probabilidad mencionadas anteriormente, y así encaminar al estudiante al desarrollo de competencia matemática en esta área, y que pueda emitir juicios sobre análisis de datos, incertidumbre, cálculo de probabilidades aplicados a contextos que se presenten a lo largo de su vida.

Aprendizaje basado en problemas (ABP)

En los últimos años se ha vivido en un proceso de cambio en las técnicas de enseñanza desde diversas disciplinas, esto con la finalidad de mejorar los procesos de enseñanza, por esta razón el Aprendizaje Basado en Problemas ha tomado especial importancia.

En Escribano et al. (2015) se realiza una descripción de este sistema didáctico, donde mencionan que requiere de la participación activa del estudiante para que pueda dirigir su propio aprendizaje. Barrows (1986) como se citó en Escribano et al. (2015), define el ABP como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para adquisición e integración de los nuevos conocimientos” (p.14). El ABP promueve la autoregulación del aprendizaje y responde a principios del constructivismo. A continuación se mencionan las características fundamentales del ABP, que están basadas en el constructivismo.

- El aprendizaje está centrado en el alumno.
- El aprendizaje se produce en pequeños grupos.
- Los profesores son facilitadores o guías de este proceso.
- Los problemas son el foco de organización y estímulo para el aprendizaje.
- Los problemas son un vehículo para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.
- La nueva información se adquiere a través del aprendizaje autodirigido

El Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (2014), destaca los siguientes términos sobre el ABP:

- El entendimiento con respecto a una situación de la realidad surge de las interacciones con el medio ambiente.
- El conflicto cognitivo que se provoca al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje.
- El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales que se hacen sobre la misma realidad, situación o fenómeno.

Así, el ABP promueve el aprendizaje integrado al responder las preguntas del qué, cómo y para qué se aprende. (Escribano et al., 2015. p. 15). Al proponerse como enfoque metodológico aplicado a contexto reales, resulta importante el conocimiento de la población para que el docente pueda generar problemas contextualizados para el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, se debe tomar en cuenta que según Calvo (2008):

Una de las áreas de la matemática de mayor dificultad es la resolución de problemas; los niños y las niñas son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas (suma, resta, multiplicación y división), pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que solo se les ha enseñado a actuar de forma mecánica y repetitiva. (p.124)

Resulta importante el análisis y el diseño de actividades que resulten ser agradables para el estudiante, para poder apoyar a los estudiantes que presenten dificultades en la resolución de problemas. Apoyando esta razón Calvo (2008) afirma que:

Los y las estudiantes deben ser introducidos de forma agradable a los conocimientos matemáticos, con actividades que mantengan el interés en la materia y evite abstracciones que conllevan a la desmotivación ante la falta de comprensión de los diversos conceptos. (p.124)

Por esta razón, las actividades que proponga el docente pueden diseñarse aprovechando los intereses de sus estudiantes, de esta forma incentivar el desarrollo del pensamiento crítico, la discusión y argumentación en el proceso de resolución de problemas. Dichas actividades deben diseñarse sin perder de vista el objetivo de aprendizaje, es decir, no solo serán para motivar y generar interés en el estudiante, sino que se busca darle sentido al contenido que se enseña.

La resolución de problemas es parte importante de la aplicación de las matemáticas. Históricamente se mencionan descubrimientos luego de la solución de alguna situación que en su momento necesitaban resolver. Es importante diferenciar entre un problema y un ejercicio, respecto a esto en MEP (2013) se especifica que:

Un problema debe poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva no simple. Si se trata esencialmente de acciones rutinarias, no se conceptualizarán como problemas. Se puede poner en los siguientes términos: una tarea matemática constituye un problema si para resolverla el sujeto debe usar información de una manera novedosa. En el caso que el individuo pueda identificar inmediatamente las acciones necesarias se trata de una tarea rutinaria. Si una tarea matemática propuesta no tiene esas características, se consignará aquí como un ejercicio. (MEP, 2013. p.29)

Entre las propuestas sobre la teoría de resolución de problemas se encuentra George Polya, para este autor la resolución de problemas se compone de cuatro momentos: comprender el problema, crear un plan para resolver el problema, ejecutar el plan y comprobar el resultado obtenido (Polya, 1965). Para este autor la habilidad para resolver problemas no solo se adquiere resolviendo muchos problemas ni conociendo distintas fases de resolución sino familiarizándose con una gama de técnicas cognitivas denominadas por él como heurísticas. Las etapas o momentos que propone el autor se describen a continuación:

1. **Comprender el problema:** identificar cuál es la meta y qué datos brinda el problema, se recomienda en algunos casos realizar dibujos para facilitar la comprensión de los datos que se tienen y qué se debe responder.
2. **Crear un plan de acción:** tomando en cuenta los datos y condiciones del problema, pensar en algunas situaciones similares que haya resuelto en anteriormente.
3. **Ejecutar el plan:** llevar a cabo el plan propuesto y verificar que cada paso sea correcto y analizando la coherencia de la solución obtenida.
4. **Visión retrospectiva:** este momento es conocido por Polya como “mirar atrás”, pues se trata de verificar el resultado del problema o su razonamiento, esto permite la comprensión de la solución o incluso mejorarla.

Otro de los autores que realizó trabajos en resolución de problemas es Allan Schoenfeld, retomando algunas de las ideas de George Polya y profundizando en el análisis del término heurística.

Para Schoenfeld (1992) el proceso de resolución de problemas involucra cuatro dimensiones:

- a) Primera dimensión: conformada por el conocimiento o recursos básicos incluyendo definiciones, hechos, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un tema.
- b) Segunda dimensión: es lo que el sujeto conoce y su forma de aplicar los conocimientos ante el problema al que se enfrentará, el conjunto de estrategias cognitivas o

heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Por ejemplo: dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos, etc.

- c) Tercera dimensión: las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?), es decir el conocimiento sobre las estrategias necesarias para resolver un problema.
- d) Cuarta dimensión: compuesta por las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

En la propuesta metodológica del MEP basada en la resolución de problemas se incentiva a los docentes a realizar un ambiente dinámico en el proceso de aprendizaje donde el estudiante sea el centro de atención, el estudiante tiene una gran responsabilidad en su formación y el profesor cumple el rol de facilitador del proceso. Según MEP (2013)

Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza. Desarrollar este propósito supone al menos dos cosas: por un lado, que cada estudiante asuma un compromiso con la construcción de sus aprendizajes, y por el otro, que haya una acción docente crucial para generar aprendizajes en las cantidades y calidades que implica el escenario actual. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. El desafío intelectual le es consubstancial, un nutriente para una labor de aula inteligente y motivadora. (p.28)

El éxito de esta metodología depende no solo de la formación docente, sino también de las actualizaciones que personalmente realice sobre las nuevas tendencias en la enseñanza. Se debe brindar a los estudiantes actividades que permitan desarrollar habilidades, donde puedan analizar situaciones, justificar, y brindar una solución, incluso identificar si existe más de una solución. Además, la formación pedagógica, matemática y tecnológica en conjunto llega a ser una herramienta primordial para saber adaptar las actividades a la población o la modalidad en la que se trabaja.

Herramientas tecnológicas para la enseñanza de la probabilidad

La enseñanza de la probabilidad y el desarrollo del razonamiento probabilístico ha estado relacionado con la realización de experimentos de forma manual o con el uso de herramientas tecnológicas que faciliten el proceso. Las situaciones propuestas con el uso de tecnología motivan a los estudiantes y refuerzan el interés al mismo tiempo que hacen conexiones con situaciones cotidianas, apoyando también el método constructivista y la resolución de problemas que se propone para generar conocimiento significativo. Los recursos digitales o virtuales que permiten simulaciones son recomendados pues proporcionan una mayor comprensión de conceptos abstractos. Este tipo de recursos didácticos pueden plantear problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión matemática. Los recursos con animaciones facilitan la comprensión, la representación e interpretación, y al observar un número elevado de simulaciones se favorece la dinámica del debate y ritmo de la clase. Estos recursos son una valiosa herramienta en la práctica docente para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje (Contreras, et al., 2019).

En Contreras et al. (2019) se ha realizado una selección de recursos que pueden apoyar la enseñanza de la probabilidad con el uso de internet, donde según Contreras (2011) los recursos virtuales presentan un alto grado de idoneidad emocional estos intrigan e interesan a la vez que muestran los elementos probabilísticos que la componen.

Otra propuesta de recursos con animaciones que apoyan la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad se pueden encontrar en el sitio www.geogebra.org/t/probability, contiene una amplia galería de recursos y además, el sitio permite la creación de una clase virtual para agregar contenidos para que los estudiantes invitados puedan explorarlos.

Las simulaciones juegan un papel importante en el aprendizaje de la probabilidad, especialmente en su significado frecuencial. Las potencialidades que se pueden obtener del uso de una hoja de cálculo puede significar dificultades en la comprensión del programa y es por eso que se debe planificar las actividades con el conocimiento del programa por parte del docente, para poder ayudar a sus estudiantes en la simulación de experimentos.

Entre las herramientas que se pueden utilizar para la creación de simulaciones y actividades que facilitan el aprendizaje de la probabilidad se destacan:

Tabla 1.8

Herramientas tecnológicas para la enseñanza de la probabilidad

Herramienta	Descripción
	GeoGebra es una herramienta dirigida a distintas ramas de las matemáticas (Aritmética, Geometría, Álgebra, Trigonometría, Cálculo, Estadística, Probabilidad). Permite realizar diferentes simulaciones y comprender conceptos de forma visual e interactiva. Contiene hoja de cálculo. Software educativo gratuito disponible en https://www.geogebra.org/
	Microsoft Excel y Hojas de Cálculo de Google Drive, permiten de forma visual analizar datos, calcular resultados, representar de forma gráfica (histogramas, diagramas de barras, diagramas de caja, etc). Microsoft Excel es parte del paquete de Office por lo que requiere de licencia. Hojas de Cálculo de Google Drive es una herramienta gratuita.
	Seeing Theory fue propuesto por la Universidad de Brown en Rhode Island, Estados Unidos. En esta página se encuentran de forma interactiva los conceptos de probabilidad y estadística para educación secundaria. Utilizan elementos visuales y ejemplos. Disponible de forma gratuita en https://seeing-theory.brown.edu/es.html#firstPage
	La plataforma común de análisis de datos en línea (CODAP) es un software educativo gratuito y de código abierto para el análisis de datos. Permite explorar, visualizar y aprender de análisis de datos. Se ha diseñado para el aprendizaje, sigue la estructura de los paquetes de software estadístico Fathom y TinkerPlots. Disponible en https://codap.concord.org/

Nota: Elaboración propia con información de los sitios web indicados.

Este tipo de materiales ayudan y motivan el aprendizaje de los estudiantes al utilizar el programa en lugar de un cuaderno, lo ideal es complementar los materiales y no sustituirlos. El uso de las TIC en la educación permite modelar situaciones con un gran número de posibilidades, sin embargo, para implementar una metodología con el uso de estas se requiere de formación de docentes que complementen sus conocimientos de contenidos, con los conocimientos de la enseñanza de la matemática y las tecnologías (modelo TPACK), para que puede seleccionar o diseñar adecuadamente las actividades que requiera según el nivel educativo.

La probabilidad y su enseñanza

En esta sección se desarrollará un análisis epistemológico sobre el origen de la teoría de probabilidad, presentando algunos de los acontecimientos más relevantes a lo largo de la historia. También se realiza una síntesis sobre los significados de la probabilidad y sobre estudios realizados asociados al desarrollo del pensamiento estocástico desde edades tempranas.

Historia de la probabilidad

A continuación se describen los principales hechos que permiten describir el desarrollo de la probabilidad expuestos en Fernández (2007).

En la antigüedad se utilizaba la palabra latina *probabilis* para referirse a “algo merecedor de aprobación”. Se atribuye el origen de los conceptos de azar y probabilidad a los juegos de azar que se presentaban en las antiguas civilizaciones. Algunas de las pruebas más antiguas aparecen en las culturas egipcia y griega, y algunos descubrimientos arqueológicos en Sumeria y Asiria muestran evidencias sobre la práctica de los juegos de azar, los cuales eran practicados utilizando el hueso del talón de animales corredores, conocido como *astrágalo* o *talus*, al ser lanzado sobre una superficie plana sólo puede caer en cuatro posiciones distintas. Se dice que estos huesos fueron los antecesores de los dados. Además, se encontraron evidencias en tumbas egipcias donde se muestran astrágalos y tableros donde se registraban resultados, también restos de estos huesos en lugares como Francia, Italia y Grecia donde se utilizaban dados fabricados en materiales como metal. Otro dato interesante es que hace más de 4000 años en Irak utilizaban dados de forma cúbica, de cerámica, donde el orden de los puntos era distinto a la habitual.

Herodoto (1500 a.C.) relata en sus estudios que en la antigua Libia se presentó una época de hambruna que duró cerca de 18 años, para combatirla utilizaban la estrategia de jugar durante todo el día para no sentir hambre, al día siguiente comían y no se jugaba. También se evidencia el juego llamado “*perros y chacales*” en el antiguo Egipto (1800 a.C.), este consistía en un tablero en el que colocaban punzones con cabeza de perro o chacal según lo indicaban los astrágalos.

Los juegos de azar llegaron a ser muy populares y hasta buscados por las personas de la época, tomando tanta importancia que en países como Roma llegó a prohibirse en varias ocasiones, fueron censurados por el cristianismo y también por el rey Luis XI de Francia en 1255, prohibiendo incluso la fabricación de dados. El azar era utilizado por algunos para la toma de decisiones, incluso asimilado a la voluntad de los dioses, un ejemplo era la elección de nuevos sacerdotes por medio de sorteos, confiando en que el resultado era un plan de los dioses.

En la época del Renacimiento en el siglo XV se comienzan a dejar de lado las explicaciones teológicas, impulsando el estudio de la ciencia. El surgimiento de la imprenta facilita la

expansión del conocimiento, ayudando en el estudio de la probabilidad. Es en esta época donde el interés de los estudios es descubrir leyes y teorías sobre los juegos de azar, para predecir sucesos en los juegos de azar, esto dio origen al estudio probabilístico. Es de esta forma como se comienza a contabilizar el posible número de resultados al realizar un experimento, como una necesidad para repartir ganancias en los juegos cuando se finalizaban antes de tiempo, con el fin de repartir equitativamente las apuestas o bien ver las posibilidades de ganas y ventajas para obtener mayores ganancias.

Durante el Renacimiento el *Problema de la división o reparto* fue estudiado por distintos matemáticos, entre ellos Luca Pacioli (1445-1517), Tartaglia (1499-1559) y Girolamo Cardano (1501-1576). Cardano fue quien escribió la primera obra relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar llamada: "*Liber de Ludo Alae*" (libro de los juegos de azar), en este libro se realiza un estudio de los cálculos de las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados, utilizando el recuento de las posibilidades y el concepto de ganancia media. Para la resolución de problemas trabajó ideas asociadas a la definición clásica de probabilidad, aunque no le dio este nombre específico. Cardano asignó valores de probabilidad entre 0 y 1 a un suceso tomando en cuenta el total de resultados y el número de resultados favorables y propuso lo que ahora se conoce como la *ley de los grandes números*, afirmando que si un suceso con probabilidad p se realizaba n veces (con n un número grande), se apostaría que ocurriría cerca de np veces. El matemático consideraba que estos procedimientos eran más que todo aritméticos, por lo que no le daba importancia como una medida de ocurrencia de un suceso aleatorio, como lo conocemos actualmente. Otro de los matemáticos que tuvo interés en problemas relacionados con el azar fue Galileo Galilei (1564-1642), quien escribió un tratado llamado *Sopra le Scoperte dei dadi* (sobre los descubrimientos del dado) y también inventó una teoría de la medida de errores, clasificándolos en dos tipos: sistemáticos y aleatorios, contribuyendo a la creación de las ramas fundamentales de la estadística y probabilidad que ahora se conoce.

Hasta este punto se muestran estudios realizados en Italia, sin embargo, en Francia es donde se promueve desarrollar la teoría de la probabilidad. Los juegos de azar comenzaron a ser un entretenimiento importante en el siglo XVII en Francia, donde se realizaban grandes apuestas, por lo que surge la necesidad de calcular las probabilidades de forma racional. Los matemáticos que realizaron aportes en esta época fueron Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665).

En el año 1654 Pascal realizó un viaje con un jugador considerado profesional en juegos de dados, conocido como el Caballero de Meré, quien creyó que había encontrado una falsedad en los números al analizar el juego de dados, pues el comportamiento era diferente cuando se utilizaba un dado que cuando se utilizaban dos. La falsedad a la que se refería era una comparación errónea entre las probabilidades de sacar un seis con un solo dado o de sacar un seis con dos dados, el problema se debió a que Meré no tomó en cuenta que con dos dados se tenía que calcular una probabilidad compuesta. Pascal había enviado una carta a Pierre de Fermat en donde además de contarle esta anécdota, le decía: "el caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra, esto es, como sabéis un gran defecto". Meré le comparte a Pascal varios problemas sobre dados y cartas y por esta razón Pascal

se comunica nuevamente con Fermat y comienzan a probar el desacuerdo con Meré.

Cardano solo resolvió unos cuantos problemas mientras que Pascal concibió toda una ciencia: las matemáticas del azar. Por esta razón se considera que Pascal y Fermat fueron quienes comenzaron a formalizar la teoría moderna de la probabilidad.

Christian Huygens (1629-1695) realiza una introducción del concepto de esperanza matemática a partir de la noción de juego equitativo formando la base del estudio de las pensiones y seguros de vida. En 1657 publica un tratado titulado “*De Ratiocinnis in ludo aleae*” (sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados), basado en los resultados de Pascal y Fermat. Entre otros estudios relacionados se encuentra el John Graunt (1620-1674) quien se consideraba el padre de la demografía moderna al crear censos que explicaban el comportamiento de algunos problemas de salud pública. Estas ideas fueron tomadas por William Petty (1623-1687) que realizó un análisis comparativo entre la mortalidad de Londres y la de París y Edmund Halley (1656-1742) quien realizó una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslau, donde se encuentran, aunque no explícitamente, las bases de teoremas de la suma y multiplicación de probabilidades y de la ley de los grandes números. Para esta época los juegos de azar eran considerados como retos intelectuales donde participaban mentes científicas, no solo era eran pasatiempos.

Jacques Bernouilli (1654-1705) propuso diversos problemas en el área de la probabilidad, entre ellos descomponer un suceso en sucesos elementales, creando bases en la probabilidad estadística. También extendió el estudio de la probabilidad a aspectos sociales, morales y económicos.

Thomas Bayes (1702-1761) intentó establecer leyes para explicar los sucesos que ocurrían al querer demostrar la existencia de Dios, introduce el concepto de probabilidad inversa luego de obtener las probabilidades de las causas por las que pudo haber sido producido el suceso que observaba. Francis Galton (1882-1911) desarrolló el concepto de correlación con la observación de diferentes aspectos hereditarios entre padres e hijos.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) formuló la teoría clásica de la probabilidad. En 1812, Laplace publicó un libro llamado *Théorie Analytique des Probabilités* en el cual hace un desarrollo riguroso sobre aplicaciones de la probabilidad en problemas demográficos, jurídicos, sociales y astronómicos. En diferentes obras publicó la resolución de diferentes problemas, entre ellos el de puntos, método de mínimos cuadrados y la probabilidad bayesiana. En una de sus publicaciones Laplace escribió: “en el fondo de la teoría de las probabilidades es sólo sentido común expresado en números”. Gracias a Laplace el cálculo de las probabilidades y la estadística se fusionan siendo la probabilidad la base matemática para la estadística.

Entre las personas que continuaron con estudios en probabilidad están el francés Simeón Denis Poisson (1781-1840) y los rusos Pafnuti Chebyshev (1821-1894) y Andrey Kolmogorov (1903-1987), este último definió axiomáticamente la probabilidad tal y como se enseña mundialmente en los sistemas de educación.

Significados de la probabilidad en educación secundaria

Durante el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad los distintos matemáticos se encontraron con una serie de desafíos que para dar respuesta a distintas situaciones que se presentaban, es de esa forma que contribuyeron con el avance de la teoría de la probabilidad. Según Batanero et al. (2005) esto provoca que surjan diversas interpretaciones en torno a sus significados.

Batanero (2005) afirma que a lo largo del desarrollo histórico se asociaron diferentes significados al concepto de probabilidad, y que estos todavía coexisten en el proceso educativo. Según Batanero et al. (2005), “estos significados determinan implícitamente los comportamientos y respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de azar en las que deben poner en práctica sus intuiciones y conocimientos probabilísticos”. Estos significados deben estar claros para el profesor, pues durante su práctica necesita comprender los obstáculos que puedan presentar los estudiantes en el proceso de construcción del aprendizaje (Vásquez y Alsina, 2019. p.3). Los significados mencionados son: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático.

- ★ **Significado Intuitivo:** este significado se basa en las experiencias que se presentan en la vida real ligadas al azar y la probabilidad. Batanero (2005) menciona que las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar aparecen en todas las civilizaciones primitivas, y se desarrollan en personas que no han estudiado probabilidades pero que utilizan algunas frases asociadas a su grado de creencia de que ocurra algún suceso incierto. Generalmente las ideas asociadas a la probabilidad surgen por los juegos de azar, ganancia de estos y apuestas, y la idea de juego equitativo. El concepto de probabilidad recibe diversas interpretaciones y es objeto de debates filosóficos centrados en su naturaleza objetiva y subjetiva (Hacking, 1975 como se citó en Batanero, 2005). Según Vásquez y Alsina (2019) las ideas iniciales que puede presentarse en una persona sobre la probabilidad podrían llevar a desarrollar ideas equivocadas sobre el azar y la probabilidad, es por esta razón que Fischbein (1975) recomienda que se enseñe desde las primeras edades sobre las nociones iniciales del azar, de esta forma los niños alcanzan una estructura conceptual organizada y que sea la base para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico.
- ★ **Significado Clásico:** este significado es conocido también como enfoque laplaciano, es la primera definición formalizada sobre el concepto de probabilidad. Si bien algunos matemáticos como Fermat y Pascal (1637-1654) resuelven problemas ligados al azar y Huygens (1629-1695) halla el valor esperado de un juego donde los jugadores tienen diferentes ventajas, es hasta la publicación de De Moivre (1667-1718) que se tiene una definición (Batanero, 2005; p.7). Esta definición es la siguiente: “si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de oportunidades con la que el suceso podría ocurrir y el denominador es el número de oportunidades con las que el suceso puede ocurrir o fallar, esta fracción será una verdadera definición de la probabilidad de ocurrencia”. Esta definición fue formulada por Laplace (1749-1827)

y es conocida como la Regla de Laplace: “la probabilidad de un suceso corresponde a la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables”. Esta es la definición más utilizada en el proceso de enseñanza, sin embargo, fue considerada como inadecuada pues no puede aplicarse en un número infinito de posibilidades. Godino et al. (1987) señalan que “además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; solo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos”.

- ★ **Significado Frecuencial:** debido a las controversias que se presentaron con el significado clásico, surge el significado frecuencial de la probabilidad permitiendo analizar el comportamiento de los experimentos. Bernoulli (1713) sugiere asignar probabilidades a los sucesos aleatorios a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones del experimento, esto fue aceptado como una demostración de la Primera Ley de los Grandes Números, el teorema permite estimar el valor de la probabilidad teórica repitiendo el experimento gran número de veces. Este enfoque soluciona dificultades que se presentaban en el significado clásico, permite además realizar una conexión entre la estadística y la probabilidad. Entre las limitaciones que se presentan con este significado están la imposibilidad de realizar un experimento una infinita cantidad de veces en las mismas condiciones y se desconoce cuántas veces debe repetirse un experimento para considerarlo una buena estimación, además de obtener aproximaciones y no un valor exacto (Batanero, 2005). Para poder realizar el experimento un gran número de veces es recomendable utilizar algún software que permita la simulación y además puede ser útil para cambiar la dinámica de la clase y se puede ampliar en las aplicaciones de la probabilidad.
- ★ **Significado Subjetivo:** en este enfoque se tiene la regla de Bayes, permite transformar las probabilidades a priori en probabilidades posteriori. Según Vásquez y Alsina (2019), en este enfoque la probabilidad pierde su carácter objetivo y se entiende como el grado de creencia en que asigna una persona a un suceso, que puede ser distinta a la estimada por otra persona. Además, Vásquez y Alsina (2019) mencionan que este significado contribuyó en el desarrollo de la estadística inferencial pues amplía el campo de aplicación de la probabilidad permitiendo que se pueda realizar el estudio de la probabilidad con experiencias vividas por los estudiantes. Con la aplicación de la regla de Bayes ya no es necesaria la repetición del experimento para dar sentido a la probabilidad, pero aplica a todo tipo de sucesos inciertos.
- ★ **Significado Axiomático:** durante el siglo XX diferentes autores contribuyeron a formalizar la teoría de probabilidad. Kolmogorov (1903-1987) utiliza la teoría de conjuntos y la medida y logra conectar la probabilidad con la matemática moderna. El autor propone representar los sucesos como conjuntos, siendo subconjuntos del conjunto total llamado espacio muestral. Así, se considera que la probabilidad es un valor de cero a uno, definido sobre los conjuntos mencionados. Según Batanero

(2005), es desde este momento que la probabilidad es considerada como un modelo matemático que se puede utilizar en gran cantidad de situaciones.

En esta descripción de significados, Batanero (2005) indica que todos los significados comparten razonamientos de tipo deductivo, los razonamientos de tipo empíricos están ligados a la probabilidad frecuencial y los inductivos a la probabilidad subjetiva, el significado axiomático responde a la probabilidad de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad. Es importante que un profesor en ejercicio conozca y tome en cuenta estos significados de la probabilidad para su enseñanza en los diferentes niveles, y de esta forma apoyar las dificultades que podrían presentar los estudiantes, incluyéndolos desde las ideas intuitivas que presenten los estudiantes sobre sus ideas en el tema de azar. Según recomienda la autora, se debe realizar un “tránsito flexible” entre los distintos significados durante el proceso educativo planificado y distribuido entre los distintos niveles educativos.

En la Tabla 1.9 se muestra de forma resumida cada uno de los significados, donde se muestra la diferencia en cada uno de los elementos del significado.

Pensamiento Estocástico

En este apartado se analizarán algunas investigaciones sobre el pensamiento estocástico o razonamiento probabilístico, tanto desde el punto de vista psicológico como desde la educación estadística.

Es necesario tomar en cuenta que los seres humanos comienzan su aprendizaje desde edades tempranas, los niños aprenden no solo en la escuela sino en sus vivencias familiares y sociales modificando sus ideas y razonamientos sobre diferentes situaciones que viven en el transcurso de su vida.

A diferencia de otras áreas como la geometría o los números, el azar y la aleatoriedad son nociones abstractas que no necesariamente están ligadas a la experiencia directa, no es posible manipular los fenómenos para mostrar un resultado específico y tampoco se puede revertir el conjunto de resultados para iniciar nuevamente el procedimiento. Por esta razón, se plantea la importancia de analizar los razonamientos de los niños ante situaciones asociadas a la probabilidad. Un profesor no solo debe dominar el contenido y las nociones probabilísticas sino también entender cómo desarrollar el pensamiento estocástico en un estudiante y así poder realizar su planeamiento proponiendo actividades y utilizando materiales que apoyen este desarrollo.

Para comprender las teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico en niños se hace referencia a la caracterización realizada por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975).

Tabla 1.9*Elementos que caracterizan los significados de la probabilidad*

Significado de la probabilidad	Campos de problemas	Algoritmos y procedimientos	Elementos lingüísticos	Definiciones y propiedades	Algunos conceptos relacionados
Intuitivo	Sorteos Situaciones donde se quiere adivinar	Situaciones donde se genera el azar: juegos con dados y cartas	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible Creencia	Suerte Destino
Clásico	Cálculo de esperanza o riesgos en juegos de azar	Combinatoria Proporciones Análisis a priori de la estructura de un experimento	Triángulo aritmético Listados de sucesos Fórmulas combinatorias	Cociente de casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones	Registro de datos estadísticos a posteriori Ajuste de curvas matemáticas Análisis matemáticos Simulación	Tablas y gráficos estadísticos Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Límite de las frecuencias relativas Carácter objetivo Basado en la evidencia empírica	Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
Subjetiva	Mejora el conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomático	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	Teoría de conjuntos Álgebra de conjuntos Teoría de la medida	Símbolos conjuntistas	Función medible	Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

Nota: Tomado de Batanero (2005) p.256

Etapas de desarrollo según Piaget

En la teoría de Piaget (1969) citada en Bravo y Saldarriaga (2017), se muestra el desarrollo cognoscitivo como un proceso en el cual el individuo construye esquemas mentales de forma permanente. Desde el punto de vista del constructivismo, cuando se presenta un desequilibrio provocado por una actividad o vivencia, el individuo reconstruye su esquema mental para lograr nuevamente el equilibrio. Esto ocurre por la naturaleza del aprendizaje, donde la persona aprende por la comprensión del entorno, analizando situaciones y realizando operaciones que necesita para esto. Este desarrollo ocurre en una serie de etapas o estadios, definidos por el orden en el que suceden y la jerarquía de las estructuras intelectuales que representan una evolución. Cada uno de los estadios tiene sus límites de edad, pero estos pueden variar de una población a otra dependiendo del contexto en el

que el individuo se desarrolle.

Estos autores ven el aprendizaje como un proceso lento y gradual en donde el individuo se enfrenta a una nueva situación o problema donde se produce el desequilibrio al tratar de darle solución con los conocimientos previos. La experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje, el conocimiento es construido activamente y no recibido pasivamente. Por lo tanto, la posibilidad de aprender depende de los conocimientos previos y del desarrollo intelectual del estudiante, que sigue una serie de etapas.

Las etapas se componen de fases, de modo que dos sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar y la progresión de una etapa a otra sigue un cierto patrón. (Piaget, 1975 como se citó en Batanero, 2013).

En el caso de la probabilidad, Piaget e Inhelder (1951) realizaron un análisis basado en las etapas propuestas anteriormente por Piaget, etapas en donde se puede dar la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, razonamiento combinatorio, distribución y convergencia y también la capacidad de calcular probabilidades. Estas se describen a continuación:

- Período sensorio motor (0-2 años). Describe el razonamiento de los bebés, movimiento y sensaciones. Se comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor, etc.). Cerca de los 5 meses discrimina conjuntos de 2-3 ítems; y cerca de los 10 meses discrimina conjuntos de 3-4 ítems.
- Período pre-operacional (2-7 años). Necesidad de manipular objetos para aprender un concepto, pues se apoya en vivencias empíricas para comprender. Entre preescolar y primaria, comprende la organización de un espacio situando y desplazando objetos (dentro, fuera, encima, debajo, delante, detrás, arriba, abajo). Descubre y compara propiedades físicas de objetos al manipularlos (longitud, distancia, cantidad). Comprende el concepto de cardinalidad y cuenta cantidades pequeñas de objetos. Contrasta magnitudes comparando, estima por una cantidad, longitud, volumen y peso. Ordena sucesos en el tiempo. Resuelve problemas sencillos con operaciones aditivas.
- Período de las operaciones concretas (7-11 años). En este periodo el niño progresa a lo largo de la primaria. Comprensión de la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios que no necesitan ser aprendidos por la experiencia. Comprensión operaciones reversibles en aritmética. Compara y cuantifica magnitudes y formas en geometría. Comprensión del sistema métrico decimal y representación de datos de forma gráfica. Agrupar objetos en función de las propiedades aditivas o multiplicativas, ordenar elementos en función de una cualidad variante (peso, color). Comprensión del sistema de numeración y operaciones con números. Comprensión de conceptos espaciales (espacio y desplazamiento), operaciones temporales y cinéticas (orden en sucesión de objetos en el espacio). Los

materiales son elementos importantes, y aún no se tiene la comprensión de una operación en forma abstracta.

- Período de las operaciones formales (11-15 años). Último paso del desarrollo intelectual y de adquisición de habilidades cognitivas y sociales. Relaciones entre representaciones simbólicas, formular hipótesis y establecer conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Características del pensamiento formal:
 - a) se contempla lo real como parte de lo posible;
 - b) se acentúa lo hipotético-deductivo frente a lo empírico-inductivo;
 - c) se depura el pensamiento proposicional;
 - d) se acentúa la diferencia entre inteligencia práctica y especulativa;
 - e) se incrementa la cantidad y calidad de las estrategias de procesamiento de la información; f) se potencia y acentúa el análisis crítico frente a las percepciones globales; g) se depura y da carácter sistemático al método de análisis; h) se desarrollan y amplía el razonamiento combinatorio.

En las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) se ve la idea de azar en el niño complementaria a la de la relación causa-efecto, afirmando que sin esta idea no hay forma de identificar fenómenos aleatorios, y por esta razón en la etapa de operaciones concretas aún no existe comprensión de la idea de azar.

Para Inhelder y Piaget (1955), la adquisición de operaciones formales está caracterizada por el razonamiento combinatorio, la lógica de las proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico, la probabilidad y la correlación, que para ellos es el último paso en la comprensión de la probabilidad.

Investigaciones realizadas por Fischbein sobre las intuiciones

Fischbein (1975) estudió el efecto de la enseñanza en el desarrollo de nociones probabilísticas en niños, afirmando que por medio de la instrucción se pueden alcanzar esquemas en la etapa de operaciones concretas, lo cual según Piaget e Inhelder (1951) solo podía alcanzarse en la etapa de operaciones formales.

Según Batanero (2013), Fischbein (1975) concede una gran importancia a la intuición como componente de la inteligencia y menciona que el conocimiento intuitivo “no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente”. Para este autor, las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales y tienen las siguientes características:

- **Inmediatez:** las intuiciones no son reflexivas, surgen con frecuencia en forma espontánea.
- **Globalidad:** oposición al carácter analítico o descomposición en partes
- **Capacidad** extrapolatoria: van más allá de un caso particular, tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones.
- **Estructurabilidad:** se relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento.
- **Auto-evidencia:** parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración.

Además, se diferencia entre intuiciones primarias y secundarias:

- ✓ **Intuiciones primarias:** se adquieren con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. En el caso de probabilidad un ejemplo es el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.
- ✓ **Intuiciones secundarias:** se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Un ejemplo de una intuición errónea es la llamada “falacia del jugador”, por la cual, después de lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido caras, el sujeto tiende a predecir que la próxima vez es más probable que salga cruz (una mala interpretación de la ley de los grandes números). Sin embargo, una intuición secundaria no se trata de una fórmula aceptada o utilizada, sino que llega a ser una convicción, creencia, o una idea de evidencia, no se forma a partir de la información obtenida de una lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual.

Otras investigaciones realizadas sobre el desarrollo probabilístico son citadas por Vásquez (2014):

Fischbein et al. (1970a) elaboran una serie de lecciones experimentales para niños entre 12 y 14 años, con el objetivo de trabajar los conceptos de suceso, espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como medida del azar, frecuencia relativa análisis combinatorio. Con ellos se comparó el razonamiento probabilístico de un grupo al cual se aplicaron las lecciones con un grupo control que no recibió instrucción. Como resultado se mostraron resultados positivos del proceso de instrucción, pues mejora el razonamiento probabilístico del grupo experimental. También se concluye que se debe enseñar probabilidad a partir de los 10 años, aunque existe la ausencia de proporcionalidad, tomando en cuenta que si se quiere enseñar a comparar probabilidades se debe enseñar comparando fracciones.

Fischbein y Gazit (1984) continúan con estos estudios sobre la instrucción en las intuiciones y concepciones probabilísticas de un grupo de niños entre 10 y 13 años para lo cual

se diseñaron 12 lecciones donde los niños debían calcular probabilidades en situaciones de incertidumbre utilizando dados, monedas y urnas con bolas. Los experimentos estaban asociados a los conceptos de suceso seguro, posible e imposible; sucesos en un experimento aleatorio; posibilidades; probabilidad y frecuencia. En este estudio se observó que los alumnos entre 10 y 11 años no presentaron nociones básicas de los conceptos de suceso seguro, posible e imposible, pero los alumnos de 11 a 12 años sí comprendían y aplicaban correctamente los conceptos al igual que los alumnos de 12 a 13 años sin ninguna dificultad. Se concluye así que al aplicar un programa de instrucción sistemático se mejora el razonamiento probabilístico en los alumnos. Con esta investigación también se pudo examinar algunos errores sobre la asignación de probabilidades y el lenguaje probabilístico, los cuales se presentaban con mayor frecuencia en niños entre 9 y 14 años.

Conclusiones sobre el razonamiento probabilístico

Las etapas de desarrollo propuestas por Piaget, son parte de un análisis realizado desde el punto de vista psicológico, el cual aporta al docente conocimiento sobre cómo se desarrolla la noción de probabilidad y azar en el estudiante y así ayudar al docente en la creación de actividades acordes a los conocimientos que desea lograr según la edad o etapa en la que se encuentran los estudiantes, de esta forma se podrá tomar en cuenta las dificultades que se pueden presentar.

Algunas de las conclusiones mencionadas en Batanero (2013) son: la aceptación del azar, la estimación de la frecuencia relativa, la estimación de probabilidades y noción de probabilidad, la distribución y convergencia; y la convergencia de la distribución normal. Estas se describen a continuación:

1. Aceptación del azar

Al enseñar probabilidad, una de las preocupaciones es sobre la comprensión del concepto de azar. Según Batanero (2013) “El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad” (p.5). Desde los primeros años, el azar es parte de la vida de las personas, sin embargo, Piaget e Inhelder (1951) aseguran que los niños a pesar de vivir estas experiencias no desarrollan una intuición del azar. Para ellos el significado del azar es muy complejo, pues es complementario a la relación causa-efecto. Definen el azar como el resultado interferencia y relación de causas que actúan y presentan un resultado inesperado. El azar es considerado como complemento a la composición lógica de operaciones reversibles las cuales requieren de un razonamiento combinatorio para tomar en cuenta las distintas posibilidades que pueden darse en un fenómeno aleatorio (p.5). En las primeras edades no se tiene razonamiento combinatorio, por esta razón no consideran que se pueda obtener una intuición de azar ni posee un marco de referencia para identificar fenómenos aleatorios. Según

estos autores, el razonamiento combinatorio, sería adquirido en la etapa de las operaciones formales, por tanto, es en esta etapa donde se puede adquirir la idea de azar y probabilidad.

Uno de los experimentos realizado por Piaget es el llamado “Experimento de la bandeja”, este consistía en mostrar a los niños una bandeja con dos compartimientos, en uno de los cuales hay 8 bolas blancas y en las otras 8 bolas negras (ver Figura 1.1). Si la bandeja se apoya en un soporte de tal forma que se pueda hacer bascular al repetir el movimiento varias veces las bolas blancas y negras se mezclan al azar. Con los niños de la etapa preoperacional, al realizar preguntas como ¿qué sucederá con las bolas blancas y negras si repetimos muchas veces el movimiento de la bandeja? los niños afirman que luego de repetir el movimiento muchas veces, las bolas volverán a su lugar original o que las bolas negras quedarán en el lugar de las blancas y las blancas en el lugar de las negras.

Figura 1.1

Experimento de la bandeja de Piaget e Inhelder Godino et al. (1987)

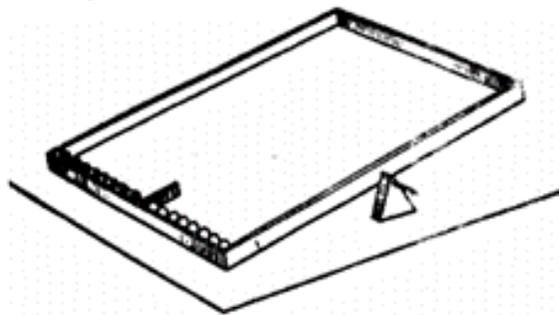
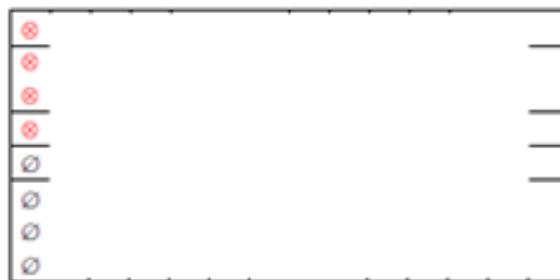


Figura 1.2

Experimento de la bandeja de Piaget e Inhelder Batanero (2013)



Es por esta respuesta que los autores afirman que el niño antes de los 7 años no es capaz de comprender la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria por su pensamiento que aún es determinista, que impide comprender que las bolas se mezclaron de forma aleatoria. Además, aún no se tiene un pensamiento combinatorio complejo por lo que no hay capacidad de reconocer las distintas permutaciones que existen entre las bolas blancas y negras. Como conclusión se dice que durante esta etapa

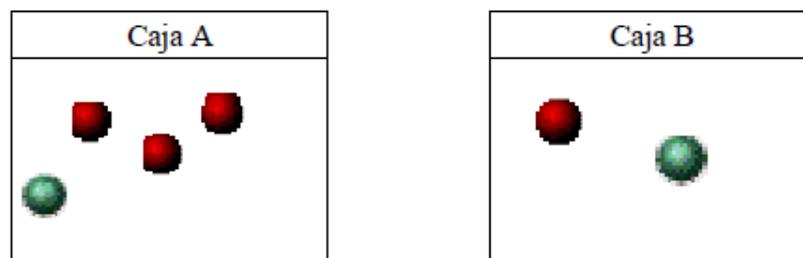
no se cuenta con una apreciación correcta del azar, es decir, no existe una intuición innata en el niño sobre el azar.

A partir de los 7 años en la etapa de operaciones concretas, se adquiere esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, se alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible aunque aún no se comprende completamente (Batanero, 2013. p.6). En esta edad aún se tiene un aprendizaje ligado al material concreto, sin embargo, se comienza a comprender los sucesos impredecibles y lo irreversibles que son los experimentos aleatorios, pero necesita comprender la relación causa-efecto pues si no es así no llega a construir la idea de azar. Con esta teoría, la idea de azar y probabilidad no puede ser totalmente adquirida, según Piaget e Inhelder (1951), hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de operaciones formales, en esta etapa “el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos” (Godino et al. (1987). p.45), logrando la comprensión adecuada del concepto de probabilidad.

Fischbein (1975), por su lado, indica que sí existe una intuición parcial del azar a edades tempranas que se desarrolla poco a poco, pero siendo necesaria la enseñanza pues si no es de esta forma, se llegará a las operaciones formales con una pobre percepción del azar. Sin embargo, es importante reconocer que el aprendizaje estará influenciado por las experiencias y tradiciones culturales, esto orientará el pensamiento a explicaciones deterministas. Este autor se refiere a la intuición primaria del azar, la capacidad de distinguir entre un fenómeno aleatorio y uno determinista, la cual en su teoría se encuentra presente antes de los 7 años sin instrucción previa, pues si se observa el comportamiento de los niños en la práctica de juegos de azar sencillos, son capaces de realizar algunos juicios probabilísticos para elegir la opción con mayor probabilidad de ganar. En Batanero (2013) se muestra como ejemplo el presentar a los niños una situación en la que deba elegir entre dos cajas con diferente contenido y preguntar en cuál de las dos cajas A y B, es más fácil sacar la bola roja con los ojos cerrados (Figura 1.3), el niño podrá acertar siempre y cuando el número de casos desfavorables es igual en ambas cajas y el número de casos es bajo.

Figura 1.3

Urnas con fichas de colores.



Nota: Tomado de Batanero (2013)

En este tipo de experimentos es interesante comparar las respuestas que se obtienen

si la pregunta se realiza como: si se quiere obtener una bola roja, ¿de cuál de las cajas se debe realizar la extracción?, a partir de un experimento como éste se ve la capacidad de establecer operaciones con sucesos equiprobables de forma intuitiva. La autora señala que luego de los 7 años, los niños alcanzan poco a poco una estructura conceptual organizada como respuesta a la enseñanza que ha recibido, lo que es muy importante para el desarrollo correcto del razonamiento probabilístico, intuiciones secundarias. De esta forma, por medio de la instrucción se pueden alcanzar esquemas en la etapa de operaciones concretas, las que según Piaget e Inhelder (1951) solo se podían alcanzar en la etapa de operaciones formales.

2. Estimación de la frecuencia relativa

Batanero (2013) plantea que suponiendo que el estudiante en edades tempranas sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, “el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia”.

Además, la autora menciona que entre los experimentos que han realizado los psicólogos se encuentra presentar al estudiante dos luces de color diferente, una roja y otra blanca, se encienden intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia (en este experimento 70 % y 30 % del tiempo respectivamente). Con los resultados del experimento se concluye que en el periodo preoperacional se adapta las predicciones a las probabilidades de sucesos que se le presentan como estímulo. Con esto se demuestra que los niños logran visualizar las diferentes frecuencias relativas producto de los resultados de un fenómeno aleatorio.

La estimación de la frecuencia relativa se desarrolla como consecuencia de las experiencias acumuladas con situaciones aleatorias donde sea necesaria la estimación de las frecuencias relativas, mejorando así en el periodo de operaciones concretas. Al llegar al periodo de las operaciones formales se han realizado progresos en comparación a las etapas anteriores sobre la intuición de la frecuencia relativa, esto en casos donde las predicciones un tienen resultado práctico.

3. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

Como se mencionó anteriormente, Piaget e Inhelder (1951) indican que en el periodo pre-operatorio no es posible obtener una comprensión correcta de la probabilidad de un suceso pues el niño no posee el conocimiento necesario para lograr la estimación, estos conocimientos serían: habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, concepto de proporción y razonamiento combinatorio. Fischbein (1975) indicaba que, a pesar de esto, el niño es capaz de estimar probabilidades sencillas o al menos compararlas. Para el periodo de operaciones concretas se podrían proponer problemas donde se necesite la comparación de probabilidades de un mismo suceso en dos experimentos diferentes, donde el número de casos favorables o el número de casos no favorables es igual en ambos experimentos. Luego pasan a resolver problemas en los casos donde se puede realizar una proporción. En esta etapa realizan rápidamente el

cálculo de probabilidades incluso cuando las fracciones que se tienen para comparar tienen diferente denominador.

Los niños realizan diferentes estrategias para comparar probabilidades, en la Tabla 1.10 se muestra una síntesis de estas estrategias:

Tabla 1.10

Estrategias utilizadas por niños para comparar probabilidades

Estrategia	Edad	Descripción
Comparación del número de casos posibles	2-3 años	Elegir la caja que contenga mayor número de bolas
Comparación del número de casos favorables	4 años	Elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
Comparación del número de casos desfavorables	7 años	Elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
Estrategias aditivas	8-11 años	Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos, pero no se usan proporciones.
Estrategia de correspondencia	12-13 años	Establecer la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando el número hay una proporción sencilla (por ejemplo 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra.
Estrategias multiplicativas	12-14 años	Aplicar la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas.
Otros tipos		Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etc.

Nota: Tomado de Cañizares (1997) como se citó en Batanero (2013) p.8.

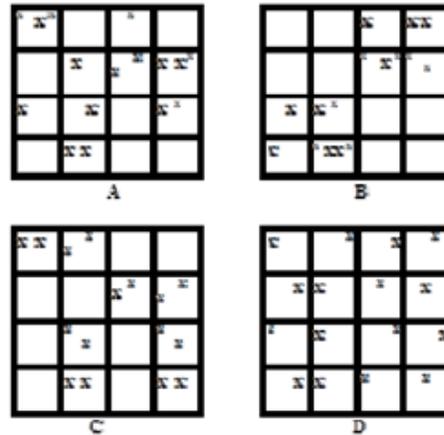
4. Distribución y convergencia

Parte de la investigación realizada por Piaget e Inhelder se trata de comprensión de los niños sobre las “distribuciones uniformes” (distribuciones de Poisson en el plano). El ejemplo que describen es el de la experiencia que tiene el niño de observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado, aquí se pide al niño que haga una predicción de donde caerán las gotas de lluvia sucesivas y cómo se van a distribuir (ver Figura 1.4).

En la etapa de preescolar saben que por el comportamiento de la lluvia las gotas caerán por todos los cuadros, pero no por comprender que la distribución es aleatoria y cada vez más regular. Si se les pide a los niños distribuir las gotas, ellos tratarán

Figura 1.4

Posibles distribuciones de puntos en un embaldosado.



Nota: Batanero (2013) p.9

de reproducirla sistemáticamente, rellenando uno a uno los cuadros para lograr un patrón uniforme, esto dominado por el deseo de regularidad. En el periodo de las operaciones concretas, los estudiantes aceptan la irregularidad de la distribución, pero si aún se tiene un cuadro sin gotas, toman este como el más probable para recibir la siguiente gota, tienen una comprensión de la Ley de los grandes números solo de forma intuitiva y empírica. Para el periodo de operaciones formales se comprende la convergencia progresiva, cuando se incrementa el número de gotas, la diferencia de gotas entre los cuadros disminuye en forma relativa, se comprende la Ley de los grandes números en los aspectos combinatorio y proporcional. Según Batanero (2013), es en esta etapa donde aparece el razonamiento proporcional, donde Piaget e Inhelder creen que se logra la comprensión de la Ley de los grandes números.

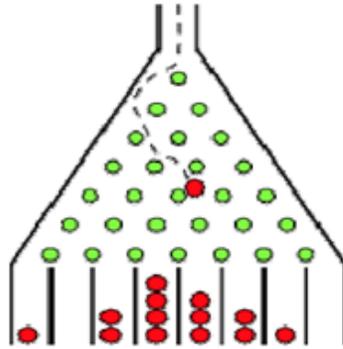
5. Convergencia a la distribución normal

Otro de los problemas que estudiaron Piaget e Inhelder es sobre la comprensión de la convergencia y la distribución que se produce de forma progresiva.

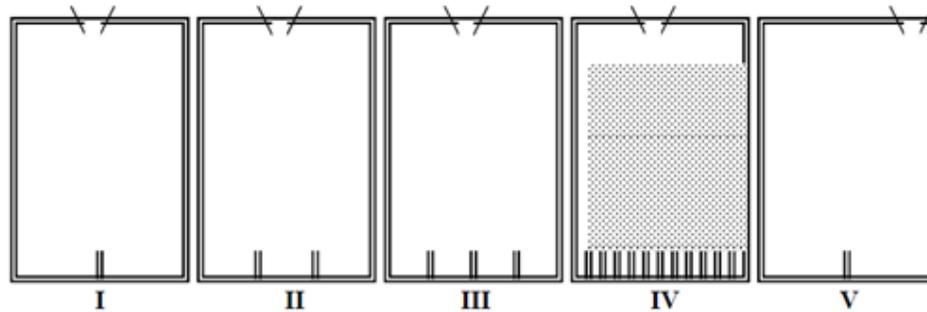
El ejemplo planteado es cuando bolas caen en un Aparato de Galton como el presentado en la Figura 1.5, tiene la forma de plano inclinado de madera donde se coloca clavos regularmente espaciados. Cuando se dejan caer bolas en el orificio superior, estas se dispersan y se caen al final del plano inclinado. Según Piaget se tenía que comprender muy bien el mecanismo de esta distribución pues las trayectorias de las bolas al caer tenían la misma posibilidad de orientarse hacia la derecha o izquierda, sin embargo, las casillas centrales reciben más bolas y la disposición es simétrica, por lo que indica que dicha distribución corresponde a la curva normal.

Piaget realiza un experimento con 5 aparatos más simplificados (ver Figura 1.6), cuatro de ellos tienen una abertura superior en la parte central y el último en la esquina superior derecha.

En cada uno se inicia introduciendo una bola y preguntando al niño donde cree

Figura 1.5*Aparato de Galton*

Nota: Tomado de Batanero (2013) p.10

Figura 1.6*Dispositivo utilizado para el experimento de Piaget.*

Nota: Tomado de Batanero (2013) p.11

que va a caer y porqué, lo mismo con la segunda y tercera, luego le pide al niño que explique la forma que tendría la distribución si se dejaran caer más bolas. Para finalizar la actividad se introducen las bolas y se pide al niño que interprete la distribución que se obtuvo. Con este experimento, se obtienen varios resultados: en el primer estadio se tiene una ausencia de la idea de distribución, en la etapa de operaciones concretas se muestra un principio de distribución que aún no es correctamente cuantificada pues aún no conocen la Ley de los grandes números. Para el tercer estadio ya se presenta la cuantificación de la distribución y la notable comprensión de la Ley de los grandes números.

Para Batanero (2013) los niños pueden adquirir nociones probabilísticas, utilizando los juegos de azar para favorecer su adquisición intuitiva. Utilizar en un inicio experiencias sencillas facilita una comprensión progresiva de otras nociones más complejas. Es importante una correcta selección de actividades por parte del docente, que faciliten este proceso y la comprensión de estas nociones. El razonamiento combinatorio es importante desarrollarlo en los estudiantes, pues este es fundamental para la comprensión de las posibilidades que tienen un estudiante sobre los resultados de un experimento o situación.

Sanabria (2015) realiza una propuesta para abordar la enseñanza de la probabilidad de acuerdo con los niveles de razonamiento de probabilidad, esta es realizada bajo la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986), la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991) y los Significados de Probabilidad (Batanero, 2005). Este autor parte del supuesto de que cuando un concepto evoluciona de lo cualitativo a lo cuantitativo, pasa por una serie de niveles de desarrollo (los niveles superiores no anulan los anteriores, los enriquecen). La relación entre los niveles planteados y los significados de la probabilidad se muestran en la Tabla 1.11:

Tabla 1.11

Relación entre los niveles de razonamiento y significados de probabilidad.

Significado	Nivel cualitativo	Nivel discreto	Nivel relativo	Nivel algebraico	Nivel numérico
Intuitivo	x	x	x	x	x
Laplaciano		x	x	x	x
Frecuencial					x
Subjetivo					x
Teórico				x	x

Nota: Tomado de Sanabria (2014) p. 234

En la Tabla 1.11 se muestra en qué niveles se desarrolla en cierto grado un significado. El autor indica que un significado no se desarrollará de forma total en algunos niveles y además realiza una descripción de cada nivel que se muestra a continuación:

✓ PRIMER NIVEL: CUALITATIVO

Se incluyen los contenidos de enseñanza con situaciones aleatorias y deterministas, concepto de espacio muestral, situaciones improbables, poco probables y muy probables. Se propone la discusión del azar al ser un tema que puede despertar curiosidad en los estudiantes y no formalizar demasiado los conceptos pues se trata de una etapa intuitiva y natural. La repetición de experiencias aleatorias y observación de distintos resultados y que el estudiante presente sus ideas al modelar situaciones. El principal interés es que el estudiante pueda calificar la probabilidad en términos cualitativos, como la posibilidad de que ocurra un evento (improbable, poco probable o muy probable) realizándolo de forma intuitiva, de forma a-didáctica. “El objetivo principal de la probabilidad es orientar en los procesos de decisión, esto se puede introducir desde este nivel”. (p. 235)

✓ SEGUNDO NIVEL: DISCRETO

Entre los contenidos de enseñanza propuestos se menciona el de espacio muestral y eventos, calificación de la probabilidad de que ocurra un evento sobre un espacio finito equiprobable, comparación de la probabilidad de eventos de un mismo espacio muestral, simulación de situaciones de la realidad con objetos concretos. Se pretende ver la probabilidad en términos relativos donde no se recurra a fracciones sino a

valores enteros ligados a un componente cualitativo. Se propone establecer un paso intermedio entre una probabilidad cualitativa y una probabilidad según la Ley de Laplace. Calificando la probabilidad de que ocurra un evento como:

- Improbable: si no incluye por lo menos uno de los resultados.
- Poco probable: si abarca menos de la mitad de los resultados.
- De un 50 %: si abarca la mitad de los resultados.
- Muy probable: si abarca más de la mitad de los resultados.
- 100 % probable: si abarca todos resultados.

La recomendación del autor es no dar las definiciones de forma directa, sino introducir las en situaciones problemas para su análisis y discusión.

✓ TERCER NIVEL: RELATIVO

Los contenidos de enseñanza que abarca son la Regla de Laplace, Comparación de probabilidad de eventos de distinto espacio muestral. La probabilidad es dada por la Ley de Laplace, la cual se puede introducir por medio de problemas para comparar la probabilidad de eventos en distintos espacios muestrales.

✓ CUARTO NIVEL: ALGEBRAICO

Incluye las propiedades de las probabilidades. Se pretende desarrollar el concepto de aproximación al valor de una probabilidad.

✓ QUINTO NIVEL: NUMÉRICO

Incluye la probabilidad frecuencial.

En estos dos últimos niveles Sanabria (2014) indica que pueden ser desarrollados de forma conjunta y que también que el nivel numérico puede iniciar antes que el algebraico.

Conocimiento del profesor de matemática

En esta sección se realiza una recopilación del avance en las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. En la primera parte se estudiarán los modelos MKT (Conocimiento Matemático para la Enseñanza), el MTSK (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas) basados en Shulman (1987) con su propuesta del modelo PCK (Conocimiento Pedagógico de Contenido), por último se describe una extensión del MTSK en el dominio estadístico. Finalmente se hace referencia al modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido) para complementar el modelo MTSK.

En las últimas décadas se han desarrollado distintas investigaciones donde el interés es la formación docente. La pregunta que se ha propuesto en algunas de estas investigaciones

en la actualidad es sobre ¿qué conocimiento debe tener un profesor? Uno de los principales investigadores de esta área fue Lee Shulman, quien empieza a cuestionarse sobre qué conocimientos necesita un profesor, hasta empezar a construir sus propias conclusiones realizando observaciones a profesores con experiencia. De esta forma, determinó que además del conocimiento de los contenidos y el psicopedagógico, los docentes desarrollan un conocimiento sobre la forma de enseñar su materia, a este conocimiento lo denominó el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).

“Las nuevas propuestas de reforma contienen supuestos acerca del conocimiento base para la enseñanza: cuando los partidarios de la reforma sugieren que sería preciso aumentar las exigencias en la formación del profesorado y prolongar los períodos de práctica, suponen que existe algo esencial que debe aprenderse. Cuando recomiendan elevar los estándares e introducir un sistema de exámenes, presumen que debe haber un acervo de conocimientos y destrezas que es preciso analizar”. (Shulman, 2005. p.7)

Pino y Godino (2015) afirman que el PCK es considerado como “aquel que vas más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza. . . es la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza”.

Shulman (1987) propone el modelo PCK, y menciona que si se logra comprender cuál es el conocimiento base para la enseñanza, de dónde obtenerlo y cuáles son las complejidades del proceso, habrá más docentes con la formación adecuada (siguiendo como modelo uno de los docentes observados). Shulman (2005) organiza estos conocimientos de la siguiente forma:

- conocimiento del contenido (del área que se enseña);
- conocimiento didáctico general (especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura);
- conocimiento del currículo (con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente);
- conocimiento didáctico del contenido (con una amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional.);
- conocimiento de los alumnos y de sus características;
- conocimiento de los contextos educativos (desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas);

- conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

El PCK incluye las formas de representar y formular el tema, haciendo que sea más comprensible. (Pino y Godino (2015). p.89). Con esto, el profesor puede utilizar el contenido como objeto de enseñanza y aprendizaje, por esta razón es importante conocer el contenido a enseñar.

Estos conocimientos pueden obtenerse de las siguientes fuentes del conocimiento base (Shulman, 2005. p.12):

- *Formación académica en la disciplina a enseñar:* el saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los escolares. Se apoya en dos bases: la bibliografía y estudios acumulados, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento de la materia.
- *Estructuras y materiales didácticos:* los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado proporcionan una fuente de conocimiento a los profesores que actúan bajo estos elementos (currículos, libros de texto, organización escolar y la financiación, funciones de la profesión docente).
- *Literatura educativa especializada:* la investigación sobre la escolarización, enseñanza y aprendizaje; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores.
- *La sabiduría que otorga la práctica misma:* esta fuente guía la práctica de los profesores competentes

Con esta propuesta, Shulman inspira a otros investigadores para continuar con esta interrogante. Pino y Godino (2015) citan las investigaciones realizadas posteriormente por Grossman (1990) y por Ball y colaboradores. Grossman (1990) considera los siguientes cuatro componentes principales:

- *Conocimiento pedagógico general:* Incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza.
- *Conocimiento del contenido:* Se refiere a los conceptos y hechos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos.
- *Conocimiento pedagógico del contenido:* compuesto de cuatro componentes centrales: concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido, conocimiento de la comprensión de los estudiantes, conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias instruccionales
- *Conocimiento del contexto:* los profesores deberían basarse en su comprensión del contexto particular en el que enseñan para adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y de cada uno de los estudiantes.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

Ball y colaboradores desarrollaron diversos trabajos en este campo apoyándose en las ideas de Shulman sobre las nociones del conocimiento del contenido y del conocimiento pedagógico de contenido (Ball, 2000; Ball et al., 2001; Hill et al., 2004; Ball et al., 2005; Ball et al., 2008; Hill et al., 2008). De esta forma, proponen el “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT, por sus siglas en inglés), y lo definen como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill et al., 2008 como se citó en Pino y Godino, 2015. p.91).

Ball et al. (2008) deducen que el aporte principal es la inclusión de un subdominio de conocimiento especializado como parte del conocimiento matemático, que sólo es útil y necesario al profesor de matemáticas.

Este modelo está conformado por dos grandes categorías, y estas a su vez por otras subcategorías del conocimiento:

Conocimiento del contenido

Este conocimiento corresponde al conocimiento de la materia a enseñar, en este caso matemáticas. El profesor debe dominar tres tipos de conocimiento: el conocimiento común de contenido (CCK), pues los profesores deben ser capaces de hacer el trabajo que asignan a sus estudiantes, el conocimiento especializado de contenido (SCK) el cual corresponde al conocimiento del contenido requerido para la enseñanza, más allá del conocimiento común del contenido, y el conocimiento en el horizonte matemático refiriéndose al conocimiento ampliado sobre los contenidos de las matemáticas que enseña (Ball et al., 2008; Markworth et al., 2009 y Godino, 2009 como se citó en Carrillo et al., 2014, p.73).

- a) *Conocimiento común de contenido (CCK)*: es el conocimiento usado en la enseñanza de forma común a como se utilizaría en otras áreas que usan matemáticas.
- b) *Conocimiento especializado de contenido (SCK)*: conocimientos y habilidades sobre matemáticas exclusivos para la enseñanza.
- c) *Conocimiento en el horizonte matemático*: conocimiento ampliado y superior sobre los contenidos que se enseñan. Permite al profesor enseñar los temas como fundamentación o base para los temas posteriores y además sobre la relación de los temas con otras disciplinas.

Conocimiento pedagógico del contenido:

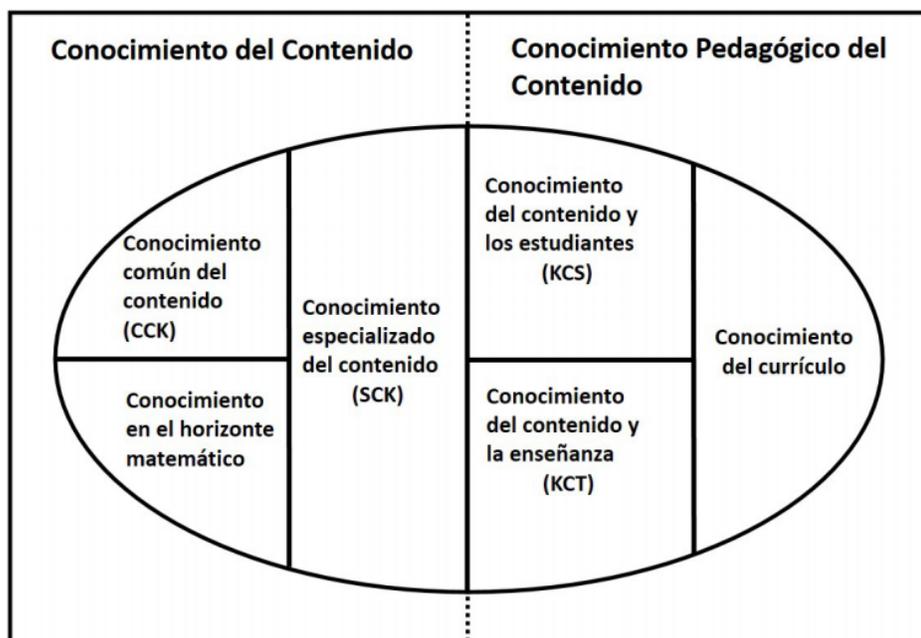
Se asocia al conocimiento didáctico del contenido, este el conocimiento particular de un profesor.

- a) *Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)*: se trata del conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conocen y aprenden ese contenido.
- b) *Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)*: conocimiento sobre la enseñanza y las matemáticas.
- c) *Conocimiento del currículo*: conocimiento del profesor sobre los materiales, objetivos de la clase, actividades apropiadas y sobre los criterios y formas de evaluar el aprendizaje.

La organización de este modelo se puede observar en la Figura 1.7.

Figura 1.7

Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)



Nota: Tomado de Hill et al. (2008). p.377

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

En Climent et al. (2014), mencionan que en el MKT se considera el conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática estrechamente ligado al contenido matemático y se evidencia a partir de situaciones de enseñanza. Entre los aportes fundamentales del modelo MKT se encuentran las dimensiones referidas al conocimiento de contenido. La especialización se refiere a la tarea de la enseñanza, no a lo avanzado del conocimiento matemático necesario, además se muestra la importancia de la estructura de los contenidos y la relación con contenidos de otras materias. Climent et al. (2014) se basan en el modelo MKT por considerar la especificidad del conocimiento en matemática y que puede

ser utilizado como una herramienta en investigación sobre el conocimiento del profesor y orientar la formación del profesorado.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) surge como respuesta a las dificultades que detectaron en el MTK, toma como base las potencialidades de éste y de otros modelos que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2013 como se citó en Carrillo et al. 2014). Este modelo ha sido desarrollado luego de años de reflexión e investigación sobre el desarrollo y el conocimiento profesionales del profesor de matemáticas por el grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática) en la Universidad de Huelva, España.

Se han apoyado en Shulman (1986) y Ball et al. (2008) para desarrollar el MTSK (Carrillo et al., 2018). El modelo considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral y evita hacer alusión a referentes externos o bien el conocimiento de otras profesiones. Se mantiene la separación que hace Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento y dota de contenido a cada uno de estos con tres subdominios y categorías a éstos. (Carrillo, et al 2014, p. 71). Según Carrillo y Martín (2019):

El MTSK no pretende ser un modelo de todo el conocimiento del profesor, sino de aquel conocimiento que está determinado por la matemática. De este modo, en el modelo se consideran tres dominios: dominio del conocimiento matemático, dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático y dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. (p.1)

Se deduce que, con la estructura inicial del modelo PCK propuesto por Shulman (1986), con el MTK se realiza la inclusión del conocimiento en matemática, específicamente. El modelo MTSK mantiene la estructura inicial y los avances del MTK incluyendo el dominio de creencias y concepciones que tienen los profesores sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo cual resulta un elemento importante tomando en cuenta que estos conocimientos se adquieren con la práctica de los profesores en su labor. La estructura del modelo MTSK se puede analizar de la siguiente forma de acuerdo con Carrillo, et al (2014):

Conocimiento Matemático (MK)

Se refiere al conocimiento del profesor de la propia disciplina que enseña, en este caso las matemáticas. Los autores plantean como objeto de investigación saber qué y cómo conoce o debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. La forma de conocer matemáticas por parte de los profesores debe ser diferente a como la conocen los que no lo son. Se consideran entonces tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático: el conocimiento profundo del contenido matemático en sí (*conocimiento de los temas matemáticos*), de su estructura (*conocimiento de la estructura matemática*) y

de cómo se procede y produce en matemáticas (*conocimiento de la práctica matemática*), estos se describen de la siguiente manera:

a) *Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)*

Es el conocimiento que el profesor debe tener de los contenidos que enseña. Se refiere al conocimiento de los contenidos y significados de manera fundamentada, incluyendo el contenido que se quiere que aprenda el estudiante y el conocimiento de profundización mayor al que se espera de los estudiantes. Se considera como referente las propuestas del NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los temas de estas ramas varían de acuerdo con el currículo de cada país. Las categorías que caracterizan al KoT son:

- FENOMENOLOGÍA: conocimiento sobre los modelos atribuibles a un tema que pueden servir para generar conocimiento, además el conocimiento sobre usos y aplicaciones de un tema.
- PROPIEDADES Y FUNDAMENTOS: estos sobre un tema o procedimiento.
- REGISTROS DE REPRESENTACIÓN: conocimiento acerca de las distintas formas de representar un tema (numérica, gráfica, verbal, analítica, etc.)
- DEFINICIONES: sobre las propiedades que hacen posible definir un objeto matemático y las formas alternativas que podría utilizar para definir.
- PROCEDIMIENTOS: el cómo, cuándo y porqué realizarlos o utilizarlos.

b) *Conocimiento de la estructura matemática (KSM)*

Conocimiento sobre las conexiones entre los temas matemáticos, es decir, sobre las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos, dentro del mismo curso o con contenidos de otros cursos o niveles. Es el conocimiento sobre las ideas y estructuras de la matemática, tomando esta como un sistema unificado. Se proponen cuatro categorías de conexiones matemáticas de las cuales el profesor debe tener conocimiento.

- * *Conexiones de complejización*: se relacionan los contenidos a enseñar con contenidos posteriores, visión de la matemática elemental desde el punto de vista avanzado.
- * *Conexiones de simplificación*: se relacionan los contenidos a enseñar con contenidos anteriores, en este caso la visión de la matemática avanzada desde el punto de vista elemental.
- * *Conexiones de contenidos transversales*: conexión de contenidos que poseen una cualidad común que les relaciona y las formas de pensamiento asociadas a los temas evidencian esa característica común.

- * *Conexiones auxiliares*: utilizar un contenido como auxiliar en otro contenido donde se necesite.

Un ejemplo de este conocimiento es el utilizar el tema de teoría de conjuntos para calcular probabilidades de eventos compuestos.

c) *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*

El profesor no solo debe conocer los contenidos sino también las formas de generar el conocimiento en matemática. Incluye el conocimiento de cómo se hace matemática (elaborar definiciones, demostraciones, establecer conexiones, correspondencias, equivalencias, argumentar, razonar, generalizar) y el conocimiento sintáctico (razonar matemáticamente y los tipos de razonamientos y en qué contextos aplicarlos). Se presentan dos categorías:

- * *Prácticas ligadas a la matemática en general*: conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado. Se usa para trabajar genéricamente en matemáticas, pero provee al profesor de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de las matemáticas.
- * *Prácticas ligadas a una temática en matemáticas*: conocimiento de algún concepto o procedimiento utilizado en otra área donde se utiliza pero que la persona que lo utilice no tenga un dominio completo del tema.

Este conocimiento es importante pues permite al profesor ser crítico en los razonamientos matemáticos de sus estudiantes para aceptarlos o corregir en caso de ser necesario. Ejemplo de este conocimiento es el conocer definiciones y demostraciones de algunos resultados y cómo llegar a ellos, no solo memorizar la demostración.

Conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Se caracteriza como un conocimiento propio del profesor, se incluye el PCK dentro del MTSK para reconocer la importancia del conocimiento que debe tener un profesor del contenido matemático desde el punto de vista de un contenido a enseñar, de un contenido a aprender y desde una visión general de los estándares de aprendizaje que se quieren alcanzar. Para obtener estos conocimientos se desarrollan de la siguiente forma:

a) *Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)*

Corresponde a los conocimientos sobre las características del aprendizaje de contenido matemático, donde el estudiante no es el foco principal del proceso sino el contenido matemático como un objeto de aprendizaje. En este caso el interés se muestra en las características de la interacción del estudiante con el contenido matemático. Se puede categorizar de la siguiente manera:

- * *Formas de aprendizaje:* conocimiento sobre las estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante.
- * *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje:* conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática.
- * *Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático:* conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes y sobre el lenguaje o usado comúnmente al abordar un contenido.
- * *Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas:* conocimiento sobre las expectativas e intereses de los estudiantes por las matemáticas.

b) *Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)*

En este subdominio se incluye el conocimiento acerca de los recursos, materiales, modos de presentar el contenido y también el conocimiento de los ejemplos adecuados para cada contenido, la intención o el contexto en el que se aplican. Se incluyen los conocimientos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza, se excluyen estrategias de enseñanza pues son potentes, pero desde la visión de la pedagogía en general. Se consideran tres categorías dentro de este subdominio:

- * *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza:* un profesor en ejercicio tiene conocimiento de las teorías de enseñanza utilizadas específicamente en el campo de la Educación Matemática, como lo es por ejemplo el conocimiento sobre la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986): Acción, Formulación, Validación e Institucionalización; bajo las cuales pueden diseñarse actividades para el aula y ambientes de trabajo matemático para las actividades. Los conocimientos que se consideran en este apartado son los de la potencialidad y los alcances que pueden tener las actividades, estrategias o técnicas de enseñanza de la matemática, además del conocimiento de los ejemplos adecuados, explicaciones, analogías, metáforas, etc.
- * *Recursos materiales y virtuales:* otro de los conocimientos que tiene un profesor es sobre los materiales y herramientas o recursos virtuales con los que puede apoyar la enseñanza de la matemática. También incluye el conocimiento sobre los beneficios y dificultades o limitaciones que se pueden presentar en el proceso de enseñanza. Estos conocimientos se obtienen tanto por la investigación como por la experiencia previa del profesor con el material.
- * *Actividades, tareas, ejemplos, ayudas:* conocimiento del profesor sobre el objeto material o herramienta virtual en sí, saber en qué momento ayudar a los estudiantes, cuales ejemplos son más potentes en cierto contenido.

c) *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*

En este subdominio se considera el conocimiento que tiene un profesor acerca de los contenidos que aprenderá el estudiante según el nivel en el que se encuentra. Shulman (1987) lo considera en la categoría Conocimiento curricular del PCK y por otro

lado Ball et al. (2008) consideran este conocimiento curricular en el Conocimiento pedagógico de contenido, uno de los subdominios del MTK. Sin embargo, ambos autores coinciden en que se trata del conocimiento de los materiales y programas que sirven como herramientas de trabajo en la enseñanza. En el caso de los docentes de matemática costarricenses en el área de secundaria se trata del programa vigente y de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas según las edades de los estudiantes.

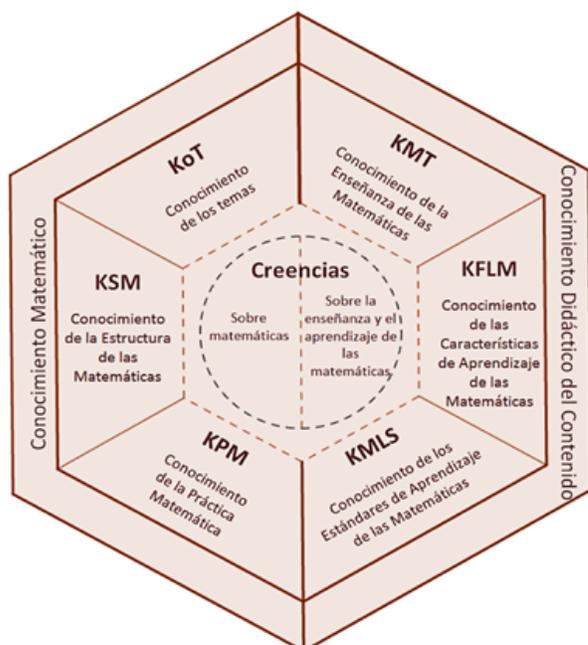
El KMLS incluye los conocimientos que tiene un profesor de matemática sobre lo que el estudiante debe alcanzar o desarrollar en un nivel o curso y también lo que ha alcanzado antes o alcanzará posteriormente. Se consideran tres categorías de conocimiento, estas se mencionan a continuación:

- * *Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar:* estos van a depender del nivel educativo en el que se desempeñe el profesor, puede ser adquirido por un documento oficial que indique cuáles son esos contenidos o como abstracción de las capacidades matemáticas que requiere desarrollar en ese momento en sus estudiantes. Por ejemplo, el profesor puede consultar los estándares de la NCTM (2000) en el tema de probabilidad, y utilizará su conocimiento para determinar cuáles son los contenidos que debe impartir para desarrollar las habilidades que estos proponen.
- * *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado:* se refiere al conocimiento de lo que un estudiante debe haber desarrollado en cierto nivel escolar. Un ejemplo sería saber cuál sería la respuesta esperable de un estudiante de décimo nivel de secundaria al preguntarle sobre una probabilidad de que ocurra un evento.
- * *Secuenciación de diversos temas:* conocimiento que tiene el profesor sobre la secuencia de los tópicos ya sea en el nivel o curso que imparte o en el anterior y posterior a este, conociendo así los conocimientos previos del estudiante como las habilidades a desarrollar en el presente para lo que enfrentará a futuro.

Carrillo et al. (2014) indican que el enfoque del MTSK ha sido dirigido a la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas, donde dicho conocimiento tiene sentido para el profesor como una integración de distintos dominios de conocimiento, en las distintas formas en que el profesor interactúa con el conocimiento matemático para su enseñanza, al realizar esta integración el profesor utiliza tanto conocimientos en pedagogía como en matemática para desarrollar las actividades del proceso de enseñanza y aprendizaje. Este modelo, diferencia estos conocimientos de otros que son más generales. Se propone como una herramienta que permite la investigación sobre los conocimientos que son útiles para la labor del profesor de matemáticas. Además, este modelo incluye las concepciones que tiene el profesor a cerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Esta integración de conocimientos se puede observar en la Figura 1.8.

Figura 1.8

Modelo MTSK



Nota: Tomada de Carrillo et al. (2013)

Las creencias en el modelo MTSK

En este modelo también se incluyen las creencias del investigador sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje que influyen en la toma de determinaciones y análisis e interpretación de los resultados, y además las creencias del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en su práctica docente. Estas creencias se considera que están presentes en cada una de las categorías del conocimiento. En Carrillo, et al (2014) explican que estas concepciones son colocadas en el MTSK al centro del esquema, indicando que se deben considerar que las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, influye en el conocimiento que tiene en cada uno de los subdominios. De esta forma, al igual que los demás subdominios y elementos del modelo, las concepciones son consideradas con fines analíticos.

Relaciones entre los subdominios del MTSK

El MTSK en su estructura, no pretende mostrar el conocimiento del profesor como una estructura particionada, se considera que el conocimiento del profesor tiene todos los subdominios de forma integral (Carrillo, et al, 2014). A continuación, se muestran algunas relaciones que los autores proponen para facilitar la visión de esta integración:

- **Relación KMS-KMLS:** La secuenciación de temas tiene aspectos similares con las ideas de complejización. Las relaciones entre conocimientos previos o posteriores

promueven reflexiones entre ambos subdominios, donde las justificaciones matemáticas son parte del KSM y las didácticas parte del KMLS.

- **Relación KoT-KMLS:** Esta relación se genera cuando se considera secuenciación del KMLS. Se relaciona con el KoT cuando esta secuenciación responde de forma matemática, a conexiones intraconceptuales, un ejemplo es el conocimiento del mínimo común múltiplo como tema anterior a la suma y resta de fracciones, o las propiedades de las potencias como tema previo a la multiplicación y división de monomios.
- **Relación KFLM-KMLS:** Cuando se da la interpretación o elaboración de algunas propuestas curriculares, pues es esto puede tener relación directa con la búsqueda del desarrollo cognitivo adecuado por parte del que aprende.
- **Relación KFLM-KMT:** Para fines analíticos, en el KFLM se considera el conocimiento que sustenta las explicaciones acerca del propio proceso de apropiación del objeto matemático, mientras que en el KMT consideramos las herramientas (técnicas y de recursos) que emplea el profesor para lograr esos fines.
- **Relación KoT-KPM:** Las prácticas que se consideran en el KPM dan sustento a la generación de conocimiento que se contempla en el KoT. Un ejemplo sería que en el KPM considera el conocimiento que tiene el profesor sobre qué y cómo es una demostración, mientras que el KoT es el conocimiento para realizar demostraciones.
- **Relación MK-KMT/KFLM:** Se puede observar que los dominios KFLM y KMT no contienen conocimiento matemático, pero al pertenecer al MTSK requieren de él para funcionar. Es decir, para diseñar actividades se involucra conocimiento de características de aprendizaje, recursos y ejemplos aptos para enseñar un contenido específico, y así es como se relaciona con el conocimiento de contenido.

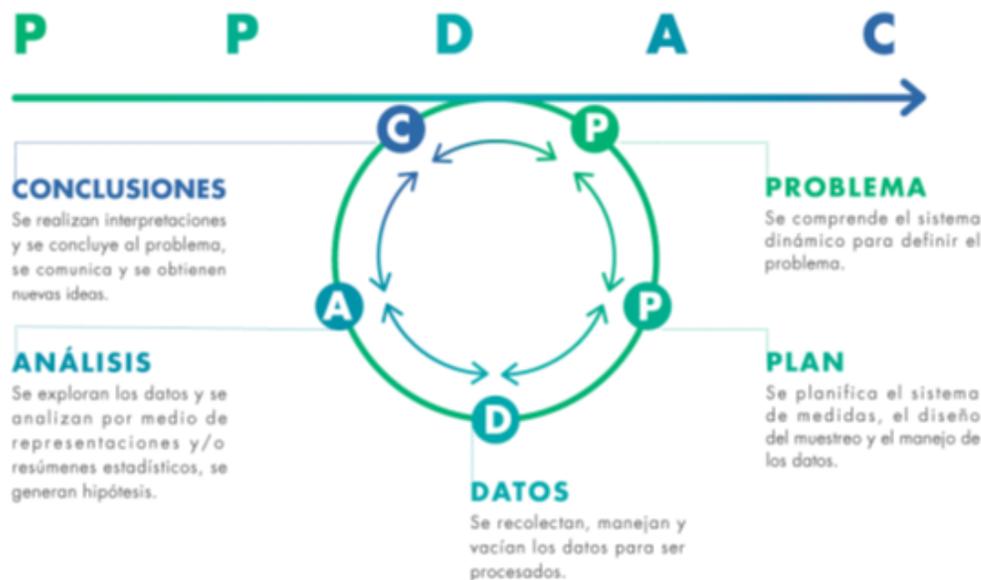
El MTSK en el dominio estadístico

El MTSK es un modelo de conocimiento dirigido a la enseñanza de la matemática, sin embargo, en el área de la estadística y la probabilidad se realiza un análisis más específico ligado también a la Didáctica de la Estadística y al ciclo investigativo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones). De esta forma Vidal y Estrella (2019) proponen el modelo una extensión del modelo MTSK ajustándolo a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística con el fin de contribuir a la exploración analítica del conocimiento del profesor de matemática que enseña estadística. Las preguntas que se plantean ¿qué conocimiento estadístico y qué conocimiento didáctico del contenido estadístico podrían desarrollarse en la formación del profesor de matemática? Y también ¿qué conocimiento especializado podría considerarse para la formación del profesorado de matemática que enseña estadística?

El ciclo investigativo PPDAC: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones; es un proceso estadístico y una metodología de enseñanza que permite estructurar una clase estadística, en este se contempla un problema que requiere un plan que permita obtener los datos reales para ser respondido, dando inicio al EDA, con la elaboración de representaciones y obtención de distintas medidas de resumen, se analizan los datos y se consiguen conclusiones para dar respuesta al problema propuesto inicialmente o surgen nuevas interrogantes (Vidal y Estrella, 2019. p.3). Esta estructura se puede observar en la Figura 1.9:

Figura 1.9

Ciclo PPDAC



Nota: Tomado de Vidal y Estrella (2019)

El rol del estudiante en dicho modelo se trata de ser un investigador y este modelo permite que las ideas iniciales del estudiante se contrasten con el comportamiento de los datos analizados, cambiando quizás las ideas iniciales, ya sea para progresar, cambiar la forma de comprensión de los datos o generando nuevas interrogantes sobre el problema.

Vidal y Estrella (2019) indican que existen otros modelos de conocimiento especializado en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, sin embargo, hacen falta modelos que hagan referencia a la formación de profesores que enseñen estadística desde edades tempranas, en cuanto al conocimiento especializado que se requiere para abarcar la alfabetización estadística y promover el razonamiento estadístico en aprendices que inician su formación escolar. Los autores realizan un estudio del Análisis Exploratorio de Datos (EDA, por sus siglas en inglés) y el ciclo investigativo PPDAC, indican que el Análisis Exploratorio de Datos permite explorar el comportamiento de los datos: pensar, conjeturar y aprender desde los datos, impulsando el análisis exploratorio para un tratamiento flexible y un uso amplio de distintas representaciones. También promueve la búsqueda de regularidades interesantes pues se tiene una exploración de archivos sin restricciones, este análisis está

basado en los datos estudiados y solo aplicaría a los individuos y las circunstancias en las cuales se recolectaron, resultando conclusiones informales. (Tukey, 1977, 1980 como se citó en Vidal y Estrella, 2019).

Propuesta de extensión del modelo MTSK al dominio estadístico

Vidal y Estrella (2019) ajustan el modelo MTSK de acuerdo con la Didáctica de la Estadística y el modelo PPDAC presentando la siguiente propuesta de extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. En esta extensión se consideran los dominios Conocimiento estadístico (SK) y el Contenido didáctico del contenido (PCK).

1. Conocimiento estadístico (SK: Statistical knowledge) Vidal y Estrella (2019) subdividen este dominio de la siguiente manera:

- 1.1. *Conocimiento de los temas estadísticos (KoT estadístico)*: Se trata del conocimiento de los temas estadísticos considerando aspectos fenomenológicos, significados de conceptos y ejemplos específicos de un tema estadístico en particular. Se toman como transversales a los temas estadísticos la variabilidad, la incertidumbre y el contexto de los datos. Los autores hacen referencia a Wild, Utts y Horton (2018) quienes indican que la estadística es esencialmente interdisciplinaria, pues los estadísticos o los usuarios de la estadística requieren pensar de forma estadística, matemática y computacional.
- 1.2. *Conocimiento de la estructura estadística (KSS)*: incluye el conocimiento de la estructura estadística sobre la conexión conceptual considerando las distintas medias (centro, dispersión, forma, ...) y las distintas representaciones de los datos con las respectivas conexiones en el contexto específico. Para activar este conocimiento se requiere de un razonamiento estadístico para conectar un concepto a otro, combinar ideas acerca de los datos y el azar, comprender y ser capaz de explicar e interpretar exactamente los procesos y resultados estadísticos (Ben-Zvi y Garfield, 2004 como se citó en Vidal y Estrella, 2019. p.4).
- 1.3. *Conocimiento de la práctica de la estadística (KPS)*: se refiere al conocimiento sobre la práctica de la estadística precisa sobre el quehacer estadístico, reflejada en el ciclo PPDAC para una investigación empírica con datos. Como ejemplo se propone el caso de Pfannkuch y Wild (2000) quienes realizan una investigación en el que reportan sobre el quehacer estadístico de profesionales o usuarios de la estadística y precisan al ciclo PPDAC como una dimensión del modelo 4-dimensional del pensamiento estadístico.

2. Conocimiento didáctico del contenido (PCK: Pedagogical Content Knowledge) Este dominio se subdivide en los siguientes subdominios según Vidal y Estrella (2019):

- 2.1. *Conocimiento de la enseñanza de la estadística (KST)*: este conocimiento toma en cuenta los paradigmas del análisis exploratorio de datos (EDA), la estadística informal y la modelación de sus relaciones y también las sugerencias del informe GAISE. En este conocimiento se toma al ciclo PPDAC como referente de diseño de enseñanza con diferentes propósitos formativos, promoviendo el trabajo con datos reales.
- 2.2. *Conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística (KFLS)*: es el conocimiento que tiene el profesor acerca del proceso de comprensión de los estudiantes de los contenidos, los errores, dificultades y obstáculos que se asocian a los conceptos o el lenguaje que utilizan para expresar sus ideas sobre los contenidos estocásticos. Un ejemplo que mencionan los autores es el reporte de Ben-Zvi y Garfield (2004) donde los estudiantes vinculan la estadística con la matemática y se enfocan en números, cálculos, fórmulas y una única respuesta correcta; esto hace que se sientan incómodos con el desorden de los datos, las diferentes interpretaciones por los diferentes supuestos y el uso de escritura y habilidades de comunicación.
- 2.3. *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística (KSLS)*: el objetivo de este conocimiento es prolongar el conocimiento de los objetivos y estándares de aprendizaje de lo local a lo global, con el fin de mejorar la práctica del profesor que enseña estadística. Por ejemplo, las recomendaciones para crear un diseño de enseñanza estadístico que responda a las necesidades propias de los aprendizajes locales.

Esta propuesta considera dominios que se refieren al conocimiento estadístico, y con los subdominios se permite además de especificarlos, ver la interconexión entre los subdominios. Con este modelo se diseña una propuesta para la formación del profesorado en el área específica de la estadística y se realiza la exploración del conocimiento del profesor que enseña estadística y probabilidad. Además, al tratarse de una extensión del MTSK incluye también las concepciones que posee un profesor respecto a la estadística, su enseñanza y su aprendizaje (Vidal y Estrella, 2019. p.5). El análisis de este modelo permitirá una mayor reflexión en el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en este caso el que enseña estadística y probabilidad.

Modelo TPACK

El modelo de Conocimiento en Tecnología, Pedagogía y Contenido (TPACK, por sus siglas en inglés), es formulado en Estados Unidos luego de darse a conocer los problemas que presentan los profesores en la utilización de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), ya sea por falta de capacitación, formación o bien limitación de recursos tecnológicos en el campo de la educación. En respuesta a esta problemática diferentes autores como Koehler y Mishra (2006, 2008); Schmidt et al. (2008); Schmidt et al. (2009), entre otros, formularon este modelo. Se plantea que todo profesor debe tener tres tipos

de conocimiento básicos: tecnológicos, pedagógicos y de contenidos, sin embargo, estos conocimientos no funcionan en la práctica de enseñanza de forma aislada, debe existir una interacción entre ellos. (Cabero, 2014. p.19).

Si bien es cierto, algunos profesores no se sienten capacitados para el uso de la tecnología en el aula, otros simplemente no pueden utilizarla pues no cuentan con los recursos propios o en la institución para la que laboran. Se debe tomar en cuenta que aun teniendo a mano la tecnología, no se garantiza el éxito en la enseñanza, entran en juego muchos factores para lograrlo o simplemente dependiendo del tema no se adapta de la mejor manera para mejorar la enseñanza. La tecnología no solo se utiliza al aplicarla en el aula, sino desde la creación de materiales, es decir, puede que un profesor no cuente con recursos necesarios en aula, pero en su casa a la hora de organizar las lecciones sí la utilice.

El uso de la tecnología en el aula debe ir más allá de la innovación al presentar un contenido, debe convertirse en una herramienta de construcción de conocimiento que involucre a los estudiantes. Según Cabero et al. (2014) el creer que el uso de la tecnología es algo inútil o que no aporta ningún cambio a la enseñanza, muchas veces son consecuencia del tipo de formación del profesor. El crecimiento tecnológico que ha dado en los últimos años hace que algunos de los docentes que se encuentran laborando desconocen la variedad de herramientas y recursos tecnológicos que se pueden utilizar para apoyar la enseñanza e incluso facilitar la práctica docente. Para los docentes que comenzaron su práctica años atrás, es necesaria la capacitación o actualización de conocimientos sobre las TIC, pues para muchos profesores varía el concepto de tecnología, según su edad, una novedad pudo ser dejar de utilizar pizarra de tiza, lo que para otros profesores más jóvenes es algo común, pues desde un inicio utilizan pizarra acrílica.

Para adoptar los conocimientos que se proponen en el TPACK se necesita tener una formación sobre las nuevas tecnologías y un conocimiento sobre los materiales y equipos con los que cuentan los profesores en su lugar de trabajo, además de capacitaciones para actualización. Toda población es distinta, por lo que no se puede planear una clase con tecnología sin conocer el tipo de población a la cual va dirigida, por esta razón el conocimiento del contexto o cultura entra en juego en el TPACK. Cabero et al. (2014) menciona que para su comprensión es necesario conocer cada una de las definiciones presenten en su estructura. A continuación, se presentan las definiciones más importantes a la hora de integrar los componentes de este modelo.

Definiciones modelo TPACK

1. **CONOCIMIENTO DE CONTENIDO (CK):** Es el conocimiento que posee el profesor deben conocer los contenidos que debe enseñar, es decir, de la disciplina que enseña. Por lo tanto, puede ser diferente de un profesor a otro si imparten materias diferentes. Por ejemplo, en el caso de un profesor de matemáticas conocimiento sobre contenidos de geometría, estadística, álgebra, y otras áreas incluyendo conceptos, definiciones, historia, etc.

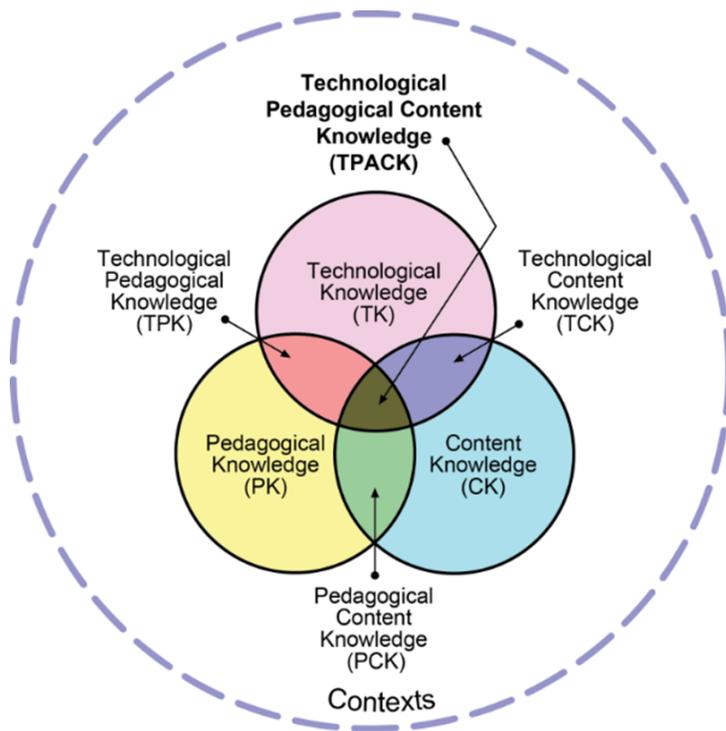
2. **CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO (PK):** Conocimiento del profesor sobre las actividades pedagógicas que puede utilizar en las clases, además de los procesos y prácticas de métodos de enseñanza. Incluye actividades que pueden ser aplicadas en todos los dominios del contenido. Un ejemplo es el conocimiento de diferentes tipos de actividades con aprendizaje cooperativo, aprendizaje por proyectos, aprendizaje basado en problemas, entre otras.
3. **CONOCIMIENTO TECNOLÓGICO (CT):** Es el conocimiento tecnológico que tiene el profesor para utilizarlo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de su especialidad, incluyendo las ventajas, desventajas o dificultades que puede presentar. Se incluye tecnologías de las más elementales y tradicionales hasta las más novedosas. En el caso de un profesor de matemáticas un ejemplo es el conocimiento en el uso de herramientas computacionales como el programa GeoGebra para el análisis de datos, pero además requiere que el estudiante aprenda a utilizarlo, esto permite que el profesor lo tome en cuenta en la planificación de su clase y las dificultades que pueda presentar dependiendo de los dispositivos a utilizar.
4. **CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO Y CONTENIDO (PCK):** Es el conocimiento pedagógico que debe tener el profesor sobre el contenido que enseña, pero se enfoca en los contenidos específicos. El profesor debe conocer los errores comunes y la forma de evitarlos, los conocimientos previos, estrategias alternativas de enseñanza, etc.
5. **CONOCIMIENTO TECNOLOGÍA Y CONTENIDO (TCK):** El desarrollo de la tecnología siempre debe acoplarse con el desarrollo del contenido. Se debe conocer y entender el cambio que realizará la tecnología en el conocimiento del tema y viceversa, es crítico para utilizar la tecnología para enseñar. Se debe saber cuáles tecnologías se adaptan mejor a los contenidos que se quieren enseñar, pues no siempre funcionará lo mismo en cada clase.
6. **CONOCIMIENTO TECNOLÓGICO PEDAGÓGICO (TPK):** Es la comprensión del cómo la enseñanza y el aprendizaje puede cambiar cuando se usa una tecnología de una cierta manera. Busca cambiar la forma en la que se enseña, y la motivación de los estudiantes, en algunos casos se utiliza sin un fin educativo. Un ejemplo para la enseñanza de la matemática sería proyectar los experimentos en una presentación con el uso de un proyector, lo cual no cambiaría el impacto en la enseñanza, diferente sería utilizar un software para modelar los experimentos y así facilitar la visualización y comprensión por parte de los estudiantes.
7. **CONOCIMIENTO TECNOLOGÍA, PEDAGOGÍA Y CONTENIDO (TPACK):** Es el conocimiento que se obtiene de la interacción entre los tres anteriores: tecnología, pedagogía y contenido. Representación de conceptos utilizando tecnología, técnicas pedagógicas que usan la tecnología de forma constructiva para enseñar contenidos. Sin embargo, no hay una solución tecnológica que le sirva a todos los profesores, pues como se mencionó anteriormente, cada población de estudiantes es distinta. Se dice

que es el conocimiento didáctico de contenido donde se aplican los conocimientos que necesitan los profesores para integrar la tecnología en la enseñanza.

La integración de estas definiciones se puede observar en la Figura 1.10:

Figura 1.10

Modelo TPACK



Nota: Tomado de www.tpack.org

Aunque este modelo se propone de forma general y no específicamente para el docente de matemáticas, al integrarse con al modelo MTSK constituye una serie conocimientos que debe tener el profesor de matemáticas donde se incluyen el uso de tecnologías en la práctica y el quehacer docente, pues tanto el TPACK como el MTSK aportan los conocimientos que se considera que debe tener un profesor para su labor. Esto fortalece la investigación sobre la formación docente pues en la actualidad la educación posee distintas modalidades, ya no se trata de solo las clases presenciales sino de cursos autogestionados, clases en modalidad virtual o plataformas donde se lleva el control de actividades y tareas donde es imprescindible el uso de la tecnología y el conocimiento del profesor tanto de su disciplina como de la tecnología.

Idoneidad Didáctica en Probabilidad

La noción de idoneidad didáctica es utilizada para responder a interrogantes como ¿qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas?, ¿cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos? ¿qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje?. Según Godino (2011) esta noción es introducida en el EOS como una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa, a una didáctica normativa, es decir, una didáctica que permite al profesor realizar intervenciones efectivas en el aula.

En la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID), según Godino et al. (2006) y Godino (2013) se propone sistematizar principios, indicadores o criterios, sobre los que existe un consenso en la comunidad educativa de un campo específico, y según Beltrán et al. (2018) su aplicación puede ayudar a alcanzar niveles altos de idoneidad de los procesos instruccionales. No se trata de una receta a seguir, pero sí de un mínimo de criterios o consideraciones para alcanzar la idoneidad en la enseñanza.

Godino et al. (2007) definen la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como la articulación coherente y sistémica de las facetas: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. Además Font et al. (2010) mencionan que al identificar estas idoneidades en un proceso de instrucción, se le considera como un proceso “idóneo”. Estos Indicadores ayudan al docente a analizar qué aspectos de su práctica puede mejorar, ya sea desde el diseño, en la implementación o como evaluación. Es por esta razón que los criterios de idoneidad didáctica son utilizados en investigaciones orientadas al análisis y valoración de la idoneidad didáctica del currículo, planeamientos, actividades propuestas para la enseñanza, etc.

Las componentes que conforman la noción de idoneidad didáctica se muestran a continuación según Godino et al. (2007) y Font et al. (2010):

- **Idoneidad epistémica:** Valora si las matemáticas enseñadas son “buenas matemáticas”.
- **Idoneidad cognitiva:** valora si lo que se quiere enseñar está a una distancia ra-

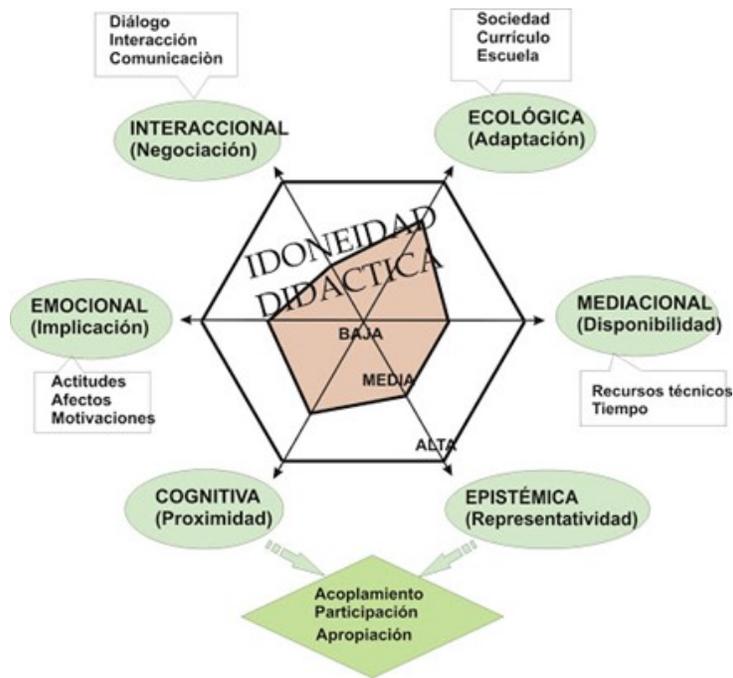
zonable de los conocimientos de los estudiantes y luego del proceso valora si los aprendizajes están cerca de lo que se pretendía enseñar.

- **Idoneidad interaccional:** valora si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, en otras palabras, si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
- **Idoneidad mediacional:** valora la adecuación de recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- **Idoneidad afectiva:** valora la implicación (interés, motivación, . . .) de los alumnos durante el proceso de instrucción. Se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historial escolar.
- **Idoneidad ecológica:** grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, al currículo, entorno social y profesional.

La integración de los componentes de la noción de idoneidad didáctica se pueden observar en la Figura 1.11.

Figura 1.11

Idoneidad Didáctica



Nota: Tomado de Godino (2011), p.6

Los indicadores de idoneidad específicos para los procesos de estudio de la probabilidad son propuestos por Beltrán et al. (2018) basados en Godino (2013).

Indicadores de idoneidad en probabilidad

* Indicadores de idoneidad epistémica

Según Beltrán, et al. (2018) en la faceta epistémica se toma en cuenta una caracterización de los significados de la probabilidad en los que se enfoca la probabilidad en los años de primaria y secundaria (subjetivo, frecuencial y clásico) y el lenguaje cotidiano empleado. También se toman en cuenta algunas consideraciones de la faceta ecológica. En la Tabla 1.12 se muestran los indicadores específicos de idoneidad epistémica para el área de probabilidad.

Tabla 1.12

Indicadores específicos para la idoneidad epistémica en probabilidad

Componentes	Indicadores
Situaciones problema	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). 2. Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos etc. 3. Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados. 4. Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.
Lenguajes	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos etc.), señalando las relaciones entre las mismas. 2. Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario. 3. Se emplean términos precisos, como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos. 4. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.

Sigue en la página siguiente.

Componentes	Indicadores
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ol style="list-style-type: none"> 1. Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 2. Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. 3. Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas 4. Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. 5. Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. 6. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. 2. Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. 3. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	<ol style="list-style-type: none"> 1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) se relacionan y conectan entre sí. 2. Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).

Nota: Tomado de Beltrán et al. (2018)

* Indicadores de idoneidad ecológica

Beltrán et al. (2018) mencionan que las actividades que propone el docente o secuencias didácticas tienen como finalidad ser implementada en un centro educativo, por esta razón se consideran algunos aspectos para valorar el grado de adecuación al entorno, tanto normativo, que se refiere a la adaptación al currículo, como social. Los indicadores ecológicos son esencialmente generales, habrá que considerar la normativa curricular, aspectos socioculturales y de innovación, y las conexiones con otras disciplinas.

* Indicadores de idoneidad cognitiva y afectiva

En Beltrán et al. (2018) se afirma que se deben tener presentes los sesgos cogniti-

vos que presentan los estudiantes, el diseño de actividades debe estar orientado a facilitar el desarrollo del razonamiento probabilístico. Se debe tomar en cuenta herramientas como la propuesta por Green (1982) sobre la evaluación del razonamiento probabilístico en niños y adolescentes, con un instrumento compuesto por tres partes: combinatoria, verbal y probabilística. Además, se propone incluir preguntas específicas de evaluación del razonamiento combinatorio, justificadas a partir de las teorías de Piaget e Inhelder (1951), quienes indican que primero se debe desarrollar las estructuras operatorias del pensamiento formal.

En la Tabla 1.13 se muestran los indicadores propuestos para la faceta cognitiva en el área de probabilidad.

Tabla 1.13

Indicadores específicos para la idoneidad cognitiva en probabilidad

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	<ol style="list-style-type: none"> 1. El alumnado ha estudiado anteriormente o el profesor planifica el estudio de: <ol style="list-style-type: none"> a) Situaciones-problema en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinguiendo lo aleatorio de lo determinista y el empleo de la frecuencia relativa. b) Registros apropiados para la representación de información, como diagramas de barras y tablas. c) Definiciones de suceso elemental y utilización de la regla de Laplace en casos sencillos.
	<ol style="list-style-type: none"> 2. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes. 3. La secuencia didáctica planifica actividades donde puedan ponerse de manifiesto los sesgos de razonamiento más comunes: <ol style="list-style-type: none"> a) En torno a la heurística de la representatividad: sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra u otras concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias. b) Sesgo de equiprobabilidad. c) Enfoque en el resultado aislado.

Nota: Tomado de Beltrán et al. (2018)

* Indicadores de idoneidad interaccional y mediacional

Las interacciones juegan un papel fundamental en el proceso de instrucción (Godino et al., 2006 como se citó en Beltrán et al., 2018), corresponden a pilares del Interaccionismo Simbólico y la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. Se refiere a la importancia de articular los significados de la probabilidad y de plantear

el aprendizaje tomando en cuenta las creencias e intuiciones de los estudiantes (Batanero, 2015). Se propone el uso de materiales manipulativos e informáticos como indicador general, siguiendo a Godino et al. (1987) el uso de material probabilístico, y además simuladores virtuales de experiencias aleatorias. Es esencial el papel de la experimentación, el modelado y las simulaciones, incluyendo series largas de ensayos, uso de software.

Capítulo 2

Marco Metodológico

En este capítulo se describe el marco metodológico utilizado en la investigación, este incluye el tipo de investigación, la descripción de la técnica utilizada para la grabación de videos y el proceso que se llevó a cabo para el cumplimiento de los objetivos.

Tipo de investigación

La presente investigación posee un enfoque mixto, según Hernández, Fernández y Baptista (2010) “el enfoque mixto es un proceso de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio o serie de investigaciones para responder a un planteamiento del problema”, es decir, posee una combinación de los enfoques cuantitativo y cualitativo.

El alcance de la investigación podría definirse de tipo descriptivo y exploratorio, al existir pocas investigaciones relacionadas al tema. Hernández, Fernández y Baptista (2010) se refieren sobre los estudios exploratorios de la siguiente manera:

Cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes. Es decir, cuando la revisión de la literatura reveló que tan solo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas. (p. 79).

Los autores mencionados señalan que los estudios descriptivos:

Buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro tipo de fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, únicamente pretenden medir o recoger

información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o variables a las que se refieren, esto es, su objetivo no es indicar cómo se relacionan estas. (p. 80).

En este caso se desea observar diferentes componentes presentes en una lección de probabilidad, especialmente sobre los materiales y recursos que utilizan los docentes en dichas lecciones, esto haciendo referencia al *Conocimiento de la enseñanza de la matemática* (KMT), subdominio del MTSK. Para ello se realizó la grabación de videos de clases de probabilidad y su respectivo análisis con instrumentos destinados a la observación de elementos probabilísticos. Estos videos se utilizaron para la creación de actividades didácticas que apoyan la formación de futuros profesores de matemática, en el área de probabilidad en secundaria. Además con la construcción del marco teórico se realizó una propuesta de perfil de profesor de probabilidad con algunos elementos asociados al MTSK.

Participantes de la investigación

Las observaciones de clase se realizaron en dos instituciones en el área de secundaria. La primera ubicada en San José, la grabación se realizó a un profesor con tres grupos de octavo nivel. La segunda institución está ubicada en Cartago, se trata de una institución con horario nocturno, se trabajó con dos grupos de octavo nivel. La escogencia de estas instituciones y de los profesores que colaboraron en este proyecto, se ha realizado por conveniencia tomando en cuenta el horario y cercanía de las instituciones.

Al tratarse de una serie de grabaciones para un proyecto de graduación universitario, el coordinador de la carrera Licenciatura en Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos del Tecnológico de Costa Rica envió cartas a las dos instituciones involucradas para solicitar el permiso para la grabación de las clases (Anexo 7.1). En ambas instituciones se brindó el permiso, la información solo podrá ser utilizada para fines educativos de este trabajo, manteniendo su anonimato.

Recolección de información

Para la recolección de información se realizaron diferentes etapas, estas se describen a continuación.

Revisión bibliográfica

Para iniciar el proceso de investigación, se construyó un marco teórico que apoyara el proceso. Se realizó una revisión de investigaciones relacionadas al tema de formación docente en el área de probabilidad, el conocimiento del profesor de matemáticas y sobre los instrumentos utilizados en la mayoría de investigaciones realizadas. Esta información fue

recolectada por medio de páginas de internet, revistas digitales, artículos, tesis, memorias de congresos, etc. Toda esta información ha sido el sustento del presente trabajo.

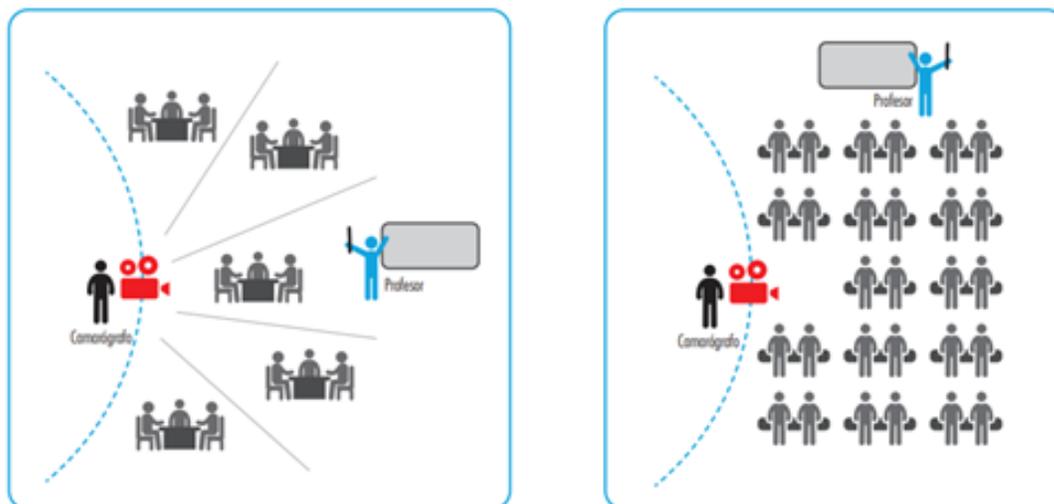
Documentación y análisis de videos de clases de probabilidad

Para documentar la información del ambiente de las lecciones de probabilidad, primero se procedió a la grabación de los videos de clase pues el período lectivo estaba justo en el tema de probabilidad. Para esto, se investigó sobre los requerimientos de grabación de video de aula y la forma de proceder. Se tomó en cuenta algunas pautas establecidas en ICEFES (2017; 2019). La estrategia para la documentación de las grabaciones que se ha utilizado se detalla a continuación:

- Utilizar una cámara con una resolución mínima de 360 p (640 x 360 pixeles) para garantizar la calidad de los videos. En este caso se utilizó una cámara dual de dispositivo móvil una con resolución de 12MP + 5MP, obteniendo una resolución de 4000 x 3000 megapíxeles, por lo tanto, los videos realizados poseen una calidad aceptable.
- Formato FLV o MP4. Todos los videos tienen formato MP4.
- Se recomienda utilizar un trípode y micrófono. Para la grabación en el aula se utilizó un trípode manual que facilitó la ubicación de la cámara según las recomendaciones, no se utiliza un micrófono, se desea captar tanto la voz del docente como la de los estudiantes. Se realizaron pruebas antes de la grabación para poder determinar la calidad de sonido.

Figura 2.1

Sugerencias de ubicación de la cámara



Nota: Tomado de ICEFES (2017)

- Consentimiento de los involucrados.
- En cada inicio de la lección a grabar, se informó a los estudiantes sobre la grabación y se trató de no enfocar directamente sus rostros pues en la mayoría se trató de menores de edad. Se ha seguido la recomendación en la posición que se muestra en la Figura 2.1
- Se controló el tiempo de grabación de la clase pues solo se grabaría al grupo específico.
- El espacio físico debía tener las condiciones para realizar la grabación. Afortunadamente en cada lección se utilizó el aula habitual, por lo que no se tuvo problemas de iluminación.
- Revisar el ángulo de la cámara, la iluminación y la posición de la pizarra para obtener una grabación nítida. En algunos casos se aprecia de forma nítida y en otros no mucho, pero la finalidad del fragmento de clase no se pierde y se logra apreciar correctamente.
- Se mantiene el anonimato de los estudiantes y profesores involucrados.

Como primer paso se seleccionaron los docentes y se ha analizado el espacio del aula y se realizaron pruebas de iluminación y sonido. Se coordina con el profesor cuales segmentos se deben grabar de la lección.

En total se grabaron 10 videos de lecciones con una duración entre 40 y 80 minutos. Para la aplicación del instrumento se han tomado 10 videos de 40 minutos de clases de probabilidad en el nivel de octavo, donde se abordan los mismos contenidos y habilidades del programa del MEP, esto para garantizar que los resultados obtenidos sean comparables, esto siguiendo la aplicación de los instrumentos realizada por sus autores Vásquez y Alsina (2019) y Vásquez et al. (2020).

Durante la grabación, se mantuvo el perfil de observador-no participante. Para Chávez (2000), la observación no participante es aquella en la que el investigador es ajeno al grupo, mediante una autorización permanece en este y observa los hechos que requiere. Chávez (2000) señala algunas características importantes: el investigador tiene un plan referente a qué se debe observar y por lo tanto qué tipos de datos deben ser recolectados, la incorporación del investigador no es indispensable, y que permite poner a prueba más adecuadamente hipótesis referente al problema de investigación.

Para el análisis de los videos de las lecciones de probabilidad, estos se dividieron en segmentos de 7,5 minutos de duración aproximadamente, esto por los lineamientos de Praetorius et al. (2014) citados en Vásquez y Alsina (2019) y también siguiendo a Joe, et al. (2015) citados en Vásquez, et al. (2020), pues afirman que en estos fragmentos de tiempo se presenta una menor variabilidad en la observación.

Se utilizó la Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP) propuesta por Vásquez y Alsina (2019) y el Instrumento de Observación de Clases de probabilidad (IOC-PROB) propuesto por Vásquez et al. (2020).

El primer instrumento (POSP) permite indagar en el conocimiento profesional del profesor. Los autores plantean que la finalidad del instrumento es identificar episodios de la clase de matemáticas en los que se observan prácticas de enseñanza ligadas a los diversos significados de la probabilidad, se analiza la presencia de elementos que caracterizan los significados de la probabilidad, se utilizan indicadores donde se asigna una puntuación de uno (1) si hay presencia del indicador o cero (0) si está ausente, el instrumento está compuesto por 30 indicadores correspondientes a los distintos significados de la probabilidad: intuitivo (7), clásico (6), frecuencial (6), subjetivo (6) y axiomático (5). La POSP fue realizada para la observación de maestros de primaria, sin embargo, se utilizará en la observación en docentes de secundaria pues no pierde el fin de la observación de la presencia de los significados de la probabilidad, presentados inicialmente por Batanero (2005) para educación secundaria (Anexo 7.2).

En el segundo instrumento (IOC-PROB) el objetivo de los autores es mejorar el conocimiento de los docentes acerca de la enseñanza de la probabilidad, los autores describen este instrumento basado en tres fundamentos: “conocimiento matemático profesional del profesor (Blömeke et al., 2016), significados de la probabilidad (Batanero, 2005) y principios para una enseñanza y aprendizaje eficaz de la matemática (NCTM, 2014)” (p. 34). En este se incluye la observación sobre el uso de los recursos por parte del docente para la enseñanza de la probabilidad, siendo este conocimiento importante para los objetivos de este trabajo. Al ser un instrumento dedicado a lecciones de probabilidad está enfocado al lenguaje y las tareas probabilísticas que se dan en la clase. El instrumento está organizado por cinco dimensiones, la primera trata sobre las tareas probabilísticas, planteando cinco puntos de observación; la segunda sobre el razonamiento probabilístico y posee dos puntos, la tercera sobre las conexiones probabilísticas y se observan dos puntos, la cuarta dimensión trata sobre la comunicación probabilística donde también se observan dos puntos y la quinta dimensión se trata del lenguaje probabilístico, donde se tienen seis puntos de observación. Cada uno de los puntos que se encuentra en cada dimensión posee una descripción de valoración de forma cualitativa (bajo, medio bajo, medio alto y alto). Por último, se encuentra una lista de verificación (llamada en el instrumento como *check list*) sobre los recursos utilizados para la enseñanza de la probabilidad y sobre la organización que utiliza el docente en la clase: individual, parejas, en grupos, entre otros. (Anexo 7.3).

Construcción de las propuestas del trabajo

En este trabajo se plantean como objetivos el diseño de actividades didácticas y la propuesta del perfil del profesor de probabilidad.

Para el diseño de las actividades se destacaron elementos importantes del MTSK y las

relaciones entre sus subdominios. Además se toma en cuenta la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas con el uso del vídeo, siendo el objetivo de este trabajo el uso de fragmentos de video para la creación de actividades para el aprendizaje de futuros profesores de matemáticas sobre la enseñanza de la matemática. Las propuestas realizadas en este trabajo, serán entregadas a la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

En la propuesta del perfil del profesor de probabilidad, se toma como referencia el marco teórico del MTSK y los indicadores de idoneidad didáctica dirigidos al área de probabilidad.

Capítulo 3

Resultados y análisis

En este capítulo se presenta el proceso llevado a cabo en el análisis del estudio realizado. Se realiza el análisis de las observaciones realizadas a los videos de clases de probabilidad con los instrumentos POSP y IOC-PROB.

Análisis de las observaciones realizadas a videos de lecciones de probabilidad

Las lecciones que fueron grabadas y seleccionadas para la aplicación de los instrumentos pertenecen al nivel de octavo. Los temas desarrollados en estas lecciones de probabilidad son los siguientes: aleatoriedad y determinismo, espacio muestral, puntos muestrales, eventos simples y compuestos, evento seguro, probable o imposible, cálculo de probabilidades, tal y como lo establece el Programa de estudios de Matemática actualmente vigente en Costa Rica. Con el fin de ubicar al lector en la descripción de los videos, en la descripción se llamará docente 1 al que imparte los grupos 8A, 8B y 8C en la institución de San José y docente 2 al docente de institución nocturna con los grupos 8-1 y 8-2 en la institución ubicada en la provincia de Cartago.

A continuación se realiza una descripción de cada uno de los videos de clases de probabilidad que fueron utilizados para la aplicación de los instrumentos POSP y IOC-PROB.

* Video 1:

La clase corresponde a la sección 8A con el docente 1. Inicia con la solicitud del docente a los estudiantes de describir qué es azar y donde está presente. Los estudiantes comienzan a describir situaciones cotidianas en donde ellos consideran que el azar está presente, utilizando lenguaje asociado a la probabilidad (aleatorio, random) e incluso mencionan que en la toma de decisiones lo encuentran presente. El docente introduce así el tema de aleatoriedad y determinismo. Utilizando una unidad didáctica proyectada en la pizarra desde su computadora se comienza a des-

cribir por parte de los estudiantes si pueden determinar el resultado de un evento o si no están seguros. Algunos de los ejemplos presentes son, lanzamiento de monedas, lotería, lanzamiento de dados y situaciones cotidianas. Con el uso del libro de texto se asigna una práctica realizada en clase y revisada de forma oral con la participación de los estudiantes. Al terminar con esta sección se continúa con los conceptos de espacio muestral y punto muestral, se explica con experimentos simples por parte del docente y luego se les asigna como ejercicio un menú de comidas donde podrán crear combinaciones y construir los espacios muestrales según cada caso. Por último se asignan ejercicios a los estudiantes con eventos aleatorios donde construyan el espacio muestral, esto utilizando el libro de texto.

* **Video 2:**

La clase corresponde a la sección 8B con el docente 1. El docente nuevamente inicia preguntando a los estudiantes de describir qué es azar y donde está presente, el diálogo es más corto que el anterior. El docente introduce así el tema de aleatoriedad y determinismo y al igual que la clase con el otro grupo, utiliza una unidad didáctica proyectada en la pizarra desde su computadora, con la participación de los estudiantes se clasifican los eventos el deterministas o aleatorios. Se utilizan ejemplos asociados al lanzamiento de monedas, lotería, lanzamiento de dados y situaciones cotidianas como sorteos, sacar al azar un objeto de una bolsa. Se utiliza el libro de texto para realizar práctica y revisarla de forma oral en la clase. El docente realiza experimentos con monedas en la clase y utiliza diagramas para representar la información. Se asigna práctica en la clase con experimentos donde se determina el espacio y los puntos muestrales.

* **Video 3:**

La clase corresponde a la sección 8C con el docente 1. El docente realiza un repaso de la clase anterior, los estudiantes recuerdan las situaciones de su vida donde se presenta el azar, mencionan sus juegos donde al abrir cofres no saben qué premio obtendrán. Utilizan la unidad didáctica donde clasifican diferentes situaciones en deterministas o aleatorios y realizan la práctica del libro que posteriormente se revisa de forma oral. Se introducen los conceptos de punto muestral y espacio muestral donde el docente hace uso de ejemplos con experimentos de monedas y construye un diagrama para que los estudiantes comprendan el término de espacio muestral y punto muestral. Por último los estudiantes construyen en conjunto el espacio muestral de un juego propuesto por el docente.

* **Video 4:**

La clase corresponde a la sección 8A con el docente 1. Se realiza un repaso oral sobre aleatoriedad y determinismo, se introducen los conceptos de evento o suceso, eventos simples y compuestos, haciendo uso de ejemplos como el lanzamiento de dados, elegir al azar una carta de un juego de cartas, etc. Luego se realiza la clasificación de eventos en seguro, muy probable, poco probable o imposible. Se utiliza la unidad

didáctica donde se muestra un juego en el cual deben determinar probabilidades según las condiciones del juego.

* **Video 5:**

Corresponde a la clase del docente 1 con la sección 8B. Se introducen los conceptos de evento o suceso, eventos simples y compuestos, haciendo uso de ejemplos como el lanzamiento de dados y elegir al azar una carta de un juego de cartas. Luego se realiza la clasificación de eventos en seguro, muy probable, poco probable o imposible, con ejemplos que los estudiantes proponen.

* **Video 6:**

Esta clase corresponde al docente 1 con el grupo 8C. El docente presenta una serie de ejercicios que resuelven en la pizarra. Se presenta un juego donde se estudia la probabilidad de hacer daño al contrincante según las condiciones dadas. Se realiza la introducción de la probabilidad teórica (Regla de Laplace) y como práctica se realizan ejercicios del libro de texto.

* **Video 7:**

Este video corresponde a la clase del grupo 8-1 con el docente 2. El docente inicia la clase con la pregunta ¿qué es probabilidad?, los estudiantes comienzan a dar respuestas de sus ideas con conocimientos previos, y como situación generadora el docente les pregunta ¿cuál es la probabilidad de ganar en una rifa?, donde realizan el cálculo al comprar un número de una rifa de 100 números. Luego se realizan ejercicios de cálculo de probabilidades utilizando la Regla de Laplace. En esta primera parte se hace uso de material impreso (fotocopias con teoría y ejercicios). En un segundo momento se crean grupos de 4 personas y se les proponen diferentes juegos con materiales como fichas, dados, etc.

* **Video 8:**

Esta clase corresponde al grupo 8-2 con el docente 2. Se comienza colocando a los estudiantes en grupos de 3 personas. Se propone como actividad la realización de un experimento y que anoten sus resultados. Luego se les consulta a los estudiantes ¿Qué es probabilidad? y los estudiantes brindan respuestas con sus conocimientos previos. Luego el docente hace una tabla en la pizarra y comienza a preguntar a los equipos los resultados obtenidos y compara los resultados para que puedan inferir conceptos de poco probable, muy probable. Finaliza el ejercicio asociando la probabilidad que obtienen en el experimento con la probabilidad teórica. Como cierre de la clase se proyecta un video con situaciones probabilísticas.

* **Video 9:**

El video muestra la clase del grupo 8-1 con el docente 2. Se realizan ejercicios de cálculo de probabilidades, se muestra participación de los estudiantes. Se hace uso de la pizarra, fotocopias con ejercicios. Además se asocia el cálculo de probabilidades con el cambio de fracción a decimal para representarlo como un porcentaje.

* **Video 10:**

La clase corresponde al grupo 8-2 con el docente 2. Se realizan ejercicios donde se determina el espacio muestral y realizan el cálculo de probabilidades. Los ejercicios están asociados a juegos de dados, cartas, etc. Además se asocia el cálculo de probabilidades con el cambio de fracción a decimal para representarlo como un porcentaje.

Análisis de la aplicación del instrumento POSP

Con la aplicación del primer instrumento llamado POSP, se obtienen resultados sobre la presencia de los significados de la probabilidad en las clases observadas. Para el análisis de estos resultados, se realiza una tabla donde se muestra la cantidad de videos de clase que presentan en alguno de sus momentos el indicador del instrumento POSP.

- El significado intuitivo es el que tiene una mayor presencia en los videos. Las actividades que se proponen para iniciar el tema por los docentes en su mayoría permiten que los estudiantes puedan analizar las situaciones ligadas al azar y probabilidad, además se realiza el análisis de situaciones haciendo énfasis en la posibilidad de ocurrencia como una escala cualitativa (desde lo seguro a lo imposible). El lenguaje utilizado por los docentes y estudiantes es un lenguaje cotidiano para hacer referencia a situaciones probabilísticas. En la Tabla 3.1 se muestra la cantidad de videos donde se encontraron los indicadores correspondientes al significado intuitivo.

Tabla 3.1

Presencia del Significado Intuitivo en videos de clases de probabilidad observados

Indicadores	n° videos
Foco en situaciones problemas cotidianas vinculadas con el uso de términos estocásticos y con la expresión de grados de creencia para la ocurrencia de sucesos (por medio de una escala cualitativa).	9
Uso de términos y expresiones verbales comunes vinculadas al lenguaje probabilístico que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano.	10
Énfasis en la posibilidad de ocurrencia como escala cualitativa que va desde lo seguro a lo imposible.	9
Imprevisibilidad y variabilidad de sucesos y sus resultados posibles.	0
Exploración y distinción de fenómenos aleatorios diferenciándolos de los deterministas.	9
Distinción entre tipos de sucesos (seguro, posible, poco posible, incierto).	5
Análisis de ejemplos e intuiciones ligadas al azar y probabilidad.	10

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del Instrumento POSP

- En cuanto al significado clásico, está presente en casi todas las lecciones analizadas. Esto por ser un significado que es parte de la práctica al calcular probabilidades en el nivel de octavo en secundaria. Si bien no se muestra formalmente, es un procedimiento que aplican en el tiempo de realización de las prácticas con la Regla

de Laplace y con el uso de conceptos probabilísticos. En la Tabla 3.2 se muestra la cantidad de videos donde se muestran indicadores al significado clásico.

Tabla 3.2

Presencia del Significado Clásico en videos de clases de probabilidad observados

Indicadores	n° videos
Foco en situaciones problemas centradas en el cálculo de probabilidades, en determinar la probabilidad de ocurrencia teórica a partir de los datos observados en un experimento aleatorio.	7
Uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades.	10
Representación de probabilidades de ocurrencia por medio de una escala cuantitativa cuyos valores fluctúan entre 0 y 1.	7
Énfasis en conceptos y propiedades tales como espacio muestral, casos favorables y no favorables, juego justo, probabilidad de ocurrencia como medida de la incerteza, sucesos simples equiprobables, Regla de Laplace.	10
Procedimientos centrados en construcción de espacio muestral, distinguir entre casos favorables y no favorables, comparar probabilidades, asignación de probabilidades por medio de regla de Laplace, construcción de diagramas para enumerar casos favorables.	8
Análisis de ejemplos, desarrollo del razonamiento inductivo.	9

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del Instrumento POSP

- El significado frecuencial se muestra en pocos videos observados, en dos de las lecciones se mostró la realización de un experimento donde se realice énfasis en la predicción de los resultados y donde se compara la probabilidad obtenida en un experimento con la probabilidad teórica, dicho experimento fue realizado de forma manual, sin apoyo tecnológico. La cantidad de videos específica donde se muestran indicadores del significado frecuencial, se puede observar en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3*Presencia del Significado Frecuencial en videos de clases de probabilidad observados*

Indicadores	n° videos
Foco en realizar predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio.	5
Uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades (población, valor estimado, simulación, probabilidad teórica y experimental, tendencias, frecuencias, proporción, etc.)	1
Uso de representaciones gráficas y tabulares.	1
Énfasis en la independencia de sucesos, estabilización de frecuencias y en el rango de la frecuencia relativa de un suceso (entre 0 y 1).	0
Procedimientos centrados en realizar predicciones a partir de los datos observados, estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, registrar resultados de un experimento aleatorio ya sea de forma tabular o gráfica, interpretación, calcular y representar frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simular experimentos aleatorios por medio manual y/o a partir del uso de software.	2
Análisis de ejemplos y de simulaciones de experimentos ya sea de forma manual y/o utilizando software.	2

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del Instrumento POSP

- El significado subjetivo no se analiza en esta observación, pues está relacionado a la Regla de Bayes y no se trabaja a nivel de octavo de secundaria.
- El significado axiomático se encuentra presente al hacer énfasis en la probabilidad como una medida de incertidumbre, no se muestran ejemplos de aplicación o donde los estudiantes lo utilicen como una medida. En la Tabla 3.4 se puede observar que es en un video que se menciona el concepto de la probabilidad como l medida de la incertidumbre, al utilizarla como elemento en la toma de decisiones y en cinco videos se muestra la realización de ejercicios, utilizando conjuntos numéricos y la Regla de Laplace.

Tabla 3.4*Presencia del Significado Axiomático en videos de clases de probabilidad observados*

Indicadores	n° videos
Foco en situaciones problemas que involucran la axiomática de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos.	0
Uso de términos y expresiones vinculadas a la teoría de conjuntos, álgebra de conjuntos y teoría de la medida.	0
Énfasis en la probabilidad como una medida de la incertidumbre.	1
Procedimientos centrados en la axiomática de la probabilidad.	5
Análisis y comprobación de propiedades vinculadas a la axiomática de la probabilidad.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del Instrumento POSP

Con este análisis se puede concluir que en los videos de clase observados se muestra una presencia alta de los significados de la probabilidad, pues en los videos de clase se

muestra la presencia de al menos dos de ellos. Sobre la enseñanza de la probabilidad y sus significados Batanero (2005) indica que:

...su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede considerarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad. (p. 260)

Por lo tanto, una buena práctica de enseñanza debe involucrar a otros significados, esto para lograr que los estudiantes tengan un dominio de la probabilidad que les ayude a realizar juicios al comparar sus ideas de la probabilidad intuitiva con respecto a la probabilidad obtenida de forma teórica o frecuencial.

Análisis de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Con la aplicación del instrumento IOC-PROB se obtienen los siguientes resultados, los cuales se muestran por secciones para facilitar la comprensión.

Dimensión 1: tareas probabilísticas

Gestión de recursos de enseñanza-aprendizaje: situaciones cotidianas, materiales manipulativos, juegos, experimentación, recursos tecnológicos, libros de texto, fichas, etc. En este rubro se encuentra la mitad de los videos observados, con una categoría de medio bajo, al utilizar al menos dos recursos pero no dar seguimiento en la clase o que solo unos cuantos lo utilizaran, un 10 % medio alto donde sí se gestiona el desarrollo del razonamiento con uno de los recursos utilizados, el caso de los juegos que familiarizan a los estudiantes el estudio de la probabilidad y un 40 % de los los videos presenta un nivel alto, donde se utilizan al menos dos de los recursos, gestionándolos adecuadamente para el desarrollo del pensamiento probabilístico, estos recursos corresponden a las lecciones donde se utilizan materiales concretos para el desarrollo de actividades y experimentos y además se utiliza algún recurso. Los recursos más comunes que utilizan los docentes de los videos observados corresponden al uso de la pizarra para explicaciones de la teoría y realización de ejemplos, libro de texto o fotocopias, situaciones, juegos de azar y como recurso tecnológico, solo se observa el uso de video beam para la proyección de material o video.

Tabla 3.5

A1. Gestión de recursos de enseñanza-aprendizaje: situaciones cotidianas, materiales manipulativos, juegos, experimentación, recursos tecnológicos, libros de texto, fichas, etc.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Utiliza exclusivamente un recurso, sin gestionar adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	0
Medio bajo	Utiliza al menos dos recursos, pero no gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes mediante su uso.	5
Medio alto	Utiliza al menos dos recursos, pero gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes con uno.	1
Alto	Utiliza al menos dos recursos y gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes mediante su uso.	4

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Contextos probabilísticos: social, personal, ocupacional, científico o relativo a la experimentación y juegos de azar. Los videos se encuentran en igual proporción en los niveles de medio bajo y medio alto. El primer nivel se muestra a partir de la experimentación o juegos de azar principalmente y de forma oral se les menciona a los estudiantes algunas situaciones cercanas a su contexto, mientras que en el nivel muy alto se refiere a las tareas propuestas que son cercanas al contexto de los estudiantes, donde se puede observar la participación de estos proponiendo otras situaciones, demostrando la comprensión del tema.

Tabla 3.6

A2. Contextos probabilísticos: social, personal, ocupacional, científico o relativo a la experimentación y juegos de azar.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Propone tareas probabilísticas desde contextos vinculados exclusivamente a la experimentación o los juegos de azar.	0
Medio bajo	Propone tareas probabilísticas a partir de la experimentación y los juegos de azar principalmente, y anecdóticamente propone otros contextos cercanos al alumno.	5
Medio alto	Propone tareas probabilísticas desde diversos contextos probabilísticos cercanos al alumno, pero se centra en dos contextos diferentes.	5
Alto	Propone tareas probabilísticas desde contextos diversos y cercanos al alumno que, además de la experimentación y los juegos de azar, incluyen también contextos de tipo social, personal, ocupacional y científico.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Reto cognitivo: coherencia entre los conocimientos previos y el nuevo contenido. Cerca de un 80 % presentó el nivel medio alto en el análisis de este punto, donde se hace una

propuesta de tareas que facilitan que los estudiantes puedan comunicar y compartir sus conocimientos previos, vinculándolos a los nuevos contenidos adquiridos.

Tabla 3.7

A3. Reto cognitivo: coherencia entre los conocimientos previos y el nuevo contenido.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Propone tareas que no suponen un reto para los estudiantes, pues no facilitan que evoquen sus conocimientos previos para la construcción de nuevos aprendizajes vinculados al azar y la probabilidad.	0
Medio bajo	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos, pero no se vincula adecuadamente con los nuevos aprendizajes relativos al azar y la probabilidad.	1
Medio alto	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos y los vincula adecuadamente con los nuevos aprendizajes relativos al azar y la probabilidad; aunque no propone tareas para valorar la reorganización de los nuevos conocimientos adquiridos.	8
Alto	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos, los vincula con los nuevos aprendizajes relativos al azar y probabilidad; y propone tareas para valorar la reorganización de los nuevos conocimientos adquiridos.	1

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Procedimientos y estrategias: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc. Los videos se encuentran en gran proporción en el nivel medio bajo, y cerca del 20% se encuentran en el nivel medio alto. En el nivel medio bajo se refiere a los videos donde se proponen tareas probabilísticas donde se aplican y adaptan distintos procedimientos o estrategias de resolución, sin embargo, no se reflexiona sobre estos procedimientos, mientras que en el nivel medio alto se incentiva la reflexión de donde provienen los resultados.

Tabla 3.8

A4. Procedimientos y estrategias: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Propone tareas probabilísticas en las que aplica y/o adapta siempre el mismo procedimiento y/o estrategia para su resolución.	0
Medio bajo	Propone tareas probabilísticas en las que aplica y/o adapta una variedad de procedimientos y/o estrategias de resolución apropiadas, pero no incentiva a los estudiantes a reflexionar sobre estas.	8
Medio alto	Propone tareas en las que es posible aplicar y/o adaptar una variedad de procedimientos y/o estrategias que utiliza para promover la reflexión sobre la resolución de tareas probabilísticas, pero no para decidir sobre cómo y cuándo usarlas.	2
Alto	Propone tareas en las que es posible aplicar y/o adaptar una variedad de procedimientos y/o estrategias para promover la reflexión sobre la resolución de tareas probabilísticas, así como para decidir sobre cómo y cuándo usarlas.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático. En este punto se muestra una alta presencia de los significados de probabilidad en la mayoría de las lecciones, alrededor de un 70 % de los videos contiene tareas para reflexionar en torno a al menos dos de estos, los más presentes son el intuitivo y el clásico.

Tabla 3.9

A5. Significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Propone tareas probabilísticas para mostrar y explorar solo uno de los significados de la probabilidad.	0
Medio bajo	Propone tareas probabilísticas para mostrar y explorar dos de los significados de la probabilidad, pero no promueve la reflexión en torno a ellos.	3
Medio alto	Propone tareas probabilísticas para mostrar, explorar, reflexionar y relacionar en torno a dos de los significados de la probabilidad.	0
Alto	Propone tareas probabilísticas para mostrar, explorar, reflexionar y relacionar al menos tres de los significados de la probabilidad.	7

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Dimensión 2: razonamiento probabilístico

Andamiaje: ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra o interdisciplinarias, etc.). Cerca del 70 % de los videos analizados presentaron un nivel medio bajo, donde se ofrecen ayudas desde el punto de vista cognitivo, especialmente el uso de generalizaciones y ejemplos, un 20 % se encuentra en el nivel medio alto donde se indaga si estas ayudas contribuyen al desarrollo del pensamiento probabilístico en los estudiantes. El restante porcentaje de los videos se encuentra en el nivel alto, es decir, solo en aproximadamente un 10 % se brindan ejemplos, generalizaciones y se indaga si estas apoyan al desarrollo del razonamiento probabilístico, la indagación se produce cuando el docente les involucra en la resolución de uno de estos ejemplos junto a su apoyo.

Tabla 3.10

B1. Andamiaje: ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra o interdisciplinarias, etc.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo, fundamentalmente mediante ejemplos, pero no indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	0
Medio bajo	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra e interdisciplinarias, generalizaciones, simulación, etc.), pero no indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	7
Medio alto	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo, fundamentalmente mediante ejemplos, e indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	2
Alto	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra e interdisciplinarias, generalizaciones, simulación, etc.), e indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	1

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Argumentación probabilística: ejemplos y contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos, etc. En este rubro los videos se encuentran con un nivel medio bajo en su mayoría, pues en aproximadamente un 60 % de las clases se promueve la argumentación probabilística por medio de ejemplos y contraejemplos realizando así generalizaciones asociadas al azar y la probabilidad, sin embargo, en alrededor de un 30 % se realiza la argumentación utilizando ejemplos, contraejemplos, generalizaciones pero también la simulación de experimentos de forma manual y razonamiento inductivo a partir de datos proporcionados.

Tabla 3.11

B2. Argumentación probabilística: ejemplos y contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos, etc.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve la argumentación probabilística únicamente mediante ejemplos y/o contraejemplos asociados al azar y la probabilidad.	0
Medio bajo	Promueve la argumentación probabilística por medio de ejemplos y/o contraejemplos y generalizaciones asociados al azar y la probabilidad.	6
Medio alto	Promueve la argumentación probabilística por medio de ejemplos y/o contraejemplos, generalizaciones y simulación de experimentos asociados al azar y la probabilidad.	1
Alto	Promueve la argumentación probabilística utilizando ejemplos y/o contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos.	3

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Dimensión 3: conexiones probabilísticas

Conexiones con otros contenidos matemáticos: geometría, aritmética, álgebra y/o medida. En los videos analizados se tiene un 80 % en el nivel medio bajo, pues se relacionan ideas, conceptos, definiciones y propiedades asociados al azar y la probabilidad, pero no con otros bloques de contenidos, en estas clases se muestra la probabilidad como una sección aparte de los otros contenidos, incluso los cálculos asociados a la probabilidad se incentiva el uso de calculadora o de forma algorítmica, el restante porcentaje se encuentra entre los niveles de medio alto y alto, donde el docente incentiva la aplicación de operaciones relacionadas a la aritmética y al álgebra, permitiendo conectar contenidos que los estudiantes adquirieron en meses anteriores con el cálculo de probabilidades.

Tabla 3.12

C1. Conexiones con otros contenidos matemáticos: geometría, aritmética, álgebra y/o medida

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Establece algunas relaciones entre conceptos y definiciones, pero no profundiza en las relaciones entre propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad.	0
Medio bajo	Relaciona ideas, conceptos, definiciones y propiedades asociados al azar y la probabilidad, pero no con otros bloques de contenidos.	8
Medio alto	Relaciona ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad y, de modo anecdótico, con algunos bloques de contenidos (geometría, aritmética y medida), pero sin profundizar en estas últimas relaciones.	1
Alto	Relaciona ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad, así como con otros bloques de contenidos (geometría, aritmética y medida).	1

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Conexiones con niveles de escolaridad anteriores y/o posteriores. Los videos se encuentran entre los niveles de bajo, un 20 % y medio bajo cerca del 70 %, pues las relaciones que se realizan son solo de conceptos asociados al azar desarrollados en niveles anteriores, no se conectan propiedades ni con contenidos posteriores.

Tabla 3.13*C2. Conexiones con niveles de escolaridad anteriores y/o posteriores*

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Conecta solo conceptos o definiciones asociados al azar y la probabilidad, desarrollados en temas de niveles anteriores, pero no conecta con propiedades o procedimientos.	2
Medio bajo	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad con temas de niveles anteriores, pero no con temas de niveles posteriores.	6
Medio alto	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y a la probabilidad con temas de niveles anteriores, y de modo anecdótico o superficial con temas de niveles posteriores.	0
Alto	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y a la probabilidad con temas de niveles anteriores y posteriores.	2

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Dimensión 4: comunicación probabilística

Comunicación: interacción, negociación y diálogo en torno a las ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos de los estudiantes. En este aspecto los videos analizadas se encuentran entre el nivel medio alto, aproximadamente un 80% y el restante se mantiene en el nivel alto, esto se observa en los videos por la participación activa de los estudiantes brindando ejemplos, realizando consultas y sus conjeturas, con acompañamiento del diálogo con compañeros y el docente que corrige en caso necesario.

Tabla 3.14*D1. Comunicación: interacción, negociación y diálogo en torno a las ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos de los estudiantes*

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, pero no se vinculan al azar y la probabilidad.	0
Medio bajo	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, especialmente vinculados al azar y la probabilidad, pero no promueve la negociación y reflexión entre los estudiantes.	0
Medio alto	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, para reflexionar y organizar sus conocimientos vinculados al azar y la probabilidad, pero no indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	8
Alto	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, para reflexionar y organizar sus conocimientos vinculados al azar y probabilidad, e indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	2

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Contribuciones de los estudiantes: preguntas, explicaciones, ideas incorrectas, ideas incompletas, ideas correctas, etc. Al igual que el rubro anterior, los videos se encuentran en los niveles de muy alto, un 70 % aproximadamente y el restante en el nivel alto. En las lecciones se involucran los ejemplos que brindan los estudiantes, asociándolos a los contenidos de azar y probabilidad y en el nivel alto estudiantes, lo que hace que se involucren con situaciones de su contexto.

Tabla 3.15

D2. Contribuciones de los estudiantes: preguntas, explicaciones, ideas incorrectas, ideas incompletas, ideas correctas, etc.

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, pero estas no se asocian al conocimiento del azar y la probabilidad.	0
Medio bajo	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, pero sin promover su discusión y reflexión.	0
Medio alto	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, pero no indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	7
Alto	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, e indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	3

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Dimensión 5: Lenguaje Probabilístico

Lenguaje verbal: términos y expresiones verbales vinculados con la escala cualitativa de posibilidades de ocurrencia de un suceso. El lenguaje utilizado en las lecciones mantiene una diversidad de términos y expresiones que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, manteniendo aproximadamente un 40 % de los videos en el nivel alto, un 50 % en el nivel medio alto y solo un 10 % en el nivel medio bajo.

Tabla 3.16

E1. Lenguaje verbal: términos y expresiones verbales vinculados con la escala cualitativa de posibilidades de ocurrencia de un suceso

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales, con el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, pero no son adecuados al nivel ni valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	0
Medio bajo	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que tienen el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, y valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	1
Medio alto	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, pero no siempre con igual significado en ambos contextos, y además valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	5
Alto	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, y valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	4

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Lenguaje numérico: representaciones cuantitativas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso. En el rubro de lenguaje probabilístico del instrumento, cerca de la mitad de los videos observados presenta el nivel medio bajo, en estas lecciones se utilizan dos representaciones numéricas (decimales, fracción, porcentaje...), en el nivel medio alto se hace la relación de estas representaciones, aproximadamente un 40% de los videos, y en el nivel alto, en el resto de los videos, se encuentra el uso de al menos dos representaciones para cuantificar la probabilidad y las relaciones entre ellas.

Tabla 3.17

E2. Lenguaje numérico: representaciones cuantitativas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve una única representación numérica asociada a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades.	0
Medio bajo	Promueve el uso de dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no las relaciona.	5
Medio alto	Promueve el uso de más de dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no las relaciona.	4
Alto	Promueve el uso de al menos dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades y las relaciona.	1

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Lenguaje simbólico: símbolos para comunicar información relacionada con la probabilidad de ocurrencia de un suceso, así como para facilitar cálculos en operaciones algebraicas. El uso del lenguaje simbólico es variado en la observación de los videos, aproximadamente un 30 % se encuentra en el nivel bajo, pues no se promueve el uso de símbolos en clase sino la relación entre representaciones numéricas asociadas a la probabilidad corresponde a lecciones donde se trabaja con actividades que involucran situaciones cotidianas. En el nivel medio bajo, se encuentra un 20 % de los videos, donde se promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad y la comparación de probabilidades, pero no se opera con símbolos. Un 30 % de los videos se encuentra en el nivel medio alto, donde aparte del promover el uso del lenguaje probabilístico, se opera con símbolos. El 20 % restante corresponde a las lecciones que se encuentran en un nivel alto, donde adicionalmente se caracterizan propiedades referentes a la probabilidad.

Tabla 3.18

E3. Lenguaje simbólico: símbolos para comunicar información relacionada con la probabilidad de ocurrencia de un suceso, así como para facilitar cálculos en operaciones algebraicas

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve la relación entre representaciones numéricas, icónicas o gestuales asociadas a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no promueve el uso de símbolos en clase.	3
Medio bajo	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no se opera con símbolos.	2
Medio alto	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, opera con símbolos, pero no caracteriza con ellos propiedades relativas al razonamiento probabilístico.	3
Alto	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, opera con símbolos y caracteriza propiedades con ellos que potencian el desarrollo de procesos de generalización relativos al razonamiento probabilístico.	2

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Lenguaje tabular: distintos tipos de tablas para la representación de datos. En aproximadamente un 70 % de los videos donde se resuelven ejercicios o se representa información de un experimento, se presenta un nivel bajo, pues no se crean para la relación de la probabilidad de un suceso, el restante 30 % se encuentra en el nivel medio alto, en estas lecciones se realizaron experimentos y fue necesaria la tabulación de los datos para posteriormente realizar comparación de probabilidades.

Tabla 3.19

E4. Lenguaje tabular: distintos tipos de tablas para la representación de datos

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, pero no los relaciona con la probabilidad/posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades.	7
Medio bajo	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, pero no valora si los estudiantes comprenden dicha relación.	0
Medio alto	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación solo en el caso de la representación tabular de una única variable estadística.	3
Alto	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación para la representación tabular de una o más variables estadísticas.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Lenguaje gráfico: representaciones gráficas. En las lecciones correspondientes a la realización de ejercicios de cálculo de probabilidades y donde fue necesaria la creación de diagramas o representaciones gráficas, se mantienen en el nivel medio alto, pues se relaciona la representación con la probabilidad de ocurrencia de un suceso, en este caso se utilizó la representación de diagramas de árbol en su mayoría.

Tabla 3.20

E5. Lenguaje gráfico: representaciones gráficas

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, pero no lo relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades.	0
Medio bajo	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, pero no valora si los estudiantes comprenden dicha relación.	0
Medio alto	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación solo en el caso de una única representación gráfica.	10
Alto	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación para más de una representación gráfica.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Tránsito entre los distintos tipos de lenguaje. La mayoría de los videos se encuentran en el nivel medio alto, pues se incentiva el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico conectándose y transitando entre dos o tres de ellos.

Tabla 3.21

E6. Tránsito entre los distintos tipos de lenguaje

Nivel	Descripción	n° videos
Bajo	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero no promueve la conexión y el tránsito entre ellos	0
Medio bajo	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero solo conecta y transita entre dos de ellos.	1
Medio alto	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero solo conecta y transita entre tres de ellos.	9
Alto	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, conectando y transitando entre, al menos, tres de ellos.	0

Nota: Elaboración propia con los resultados de la aplicación del instrumento IOC-PROB

Lista de comprobación de aspectos complementarios observados

El último aspecto que se presenta en el instrumento es una lista de comprobación de aspectos complementarios. Con este se recaudó información importante acerca de los recursos que utilizan los docentes al enseñar probabilidad. En la Tabla 3.22 se puede observar que del total de los videos que se analizan en este instrumento, en el 50 % se realizan juegos para la comprensión del contenido, en un 40 % se realiza experimentos, y en el 30 % se utilizó material como dados, bolas de colores o monedas. La pizarra se utilizó en el 90 % de los videos, lo que demuestra que sigue siendo el principal recurso a utilizar por los docentes observados. En cuanto al uso de la tecnología, en las lecciones observadas se muestra como un sustituto del material impreso, para la proyección de guías, practicas o materiales y solo en el 30 % de los videos para mostrar alguna simulación con el software GeoGebra, pero no hay manipulación por parte de los estudiantes. Solo en el 10 % de los videos fue presentado un video relacionado al tema, las situaciones cotidianas están presentes en el 70 % de los videos, ya sea en un ejercicio a realizar o comentario durante la clase. El libro de texto o las fotocopias están presentes en la mayor parte de los videos. En cuanto a la organización de las lecciones, se trata de lecciones expositivas, realizando trabajo individual o en grupo, pero no se muestra una asignación de roles específicos, por lo tanto, se trata de un trabajo en grupo y no colaborativo.

Tabla 3.22

Lista de comprobación de aspectos complementarios observados

Recursos utilizados para la enseñanza de la probabilidad				Organización de la clase para la enseñanza de la probabilidad	
Recurso	n° videos	Recurso	n° videos	Técnica	n° videos
Dados	1	Juegos	5	Trabajo individual	5
Bolas de colores	1	Experimentación	4	Trabajo en parejas	0
Monedas	1	Recursos tecnológicos	6	Trabajo en grupo	5
Chinchetas	0	Pizarrón	9	Clase expositiva	10
Software	3	Power Point	0	Otro, indicar:	
Libro de texto	5	Videos	1		
Situaciones de la vida cotidiana	7	Guías	0		
Otro, indicar: Unidad didáctica digital proyectada en la pizarra Fotocopias con la teoría					

Nota: Tabla tomada del instrumento IOC-PROB y modificada para adjuntar los resultados de la aplicación.

Los videos observados corresponden a una situación particular que no se puede generalizar,

sin embargo, muestran la práctica de estos docentes en el aula, que puede ayudar a futuros docentes de matemáticas a tener una idea de lo que enfrentarán al iniciar su labor y enseñar probabilidad. Los resultados obtenidos de los instrumentos POSP (Vásquez y Alsina (2019)) y el IOC-PROB (Vásquez, et al. (2020)) son alentadores,

Estos videos fueron utilizados en algunos fragmentos para la creación de actividades dirigidas a la reflexión sobre el KMT en las lecciones de probabilidad, incluidas en el capítulo 4.

Capítulo 4

Propuestas del trabajo

En este capítulo se describe la creación de las actividades didácticas que se proponen para la formación de futuros profesionales en la enseñanza de la probabilidad. Por último se describe la construcción de la propuesta del perfil del docente de probabilidad.

Diseño de actividades para la reflexión sobre conocimientos del profesor

Esta sección se describe el proceso de diseño de actividades para el aprendizaje del KMT en probabilidad, estas son diseñadas para la comprensión de futuros docentes de matemáticas a nivel de secundaria. Se ha tomado como modelo de referencia el modelo MTSK y las relaciones entre sus componentes, pues el subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) se relaciona con el Conocimiento de las características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) al colaborar con los recursos para lograr los aprendizajes esperados y con el Conocimiento Matemático (MK) pues requiere de este para funcionar.

Para el proceso de formación de futuros profesores de matemáticas, existe la necesidad de crear mecanismos de capacitación o de fomentar la investigación en futuros docentes sobre el desarrollo de competencias o adquisición de conocimientos didáctico-matemáticos. Godino (2013.a) propone crear de tipo tareas/cuestiones que orienten al desarrollo de estos.

El diseño de tareas se puede ver en un sentido amplio, así lo proponen Watson y Mason (2007) citados en Godino (2013.a):

Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo cómo alteran la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimu-

lados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea.

Es decir, las tareas, llamadas en este trabajo como actividades, deben contribuir al desarrollo de habilidades y conocimientos de los que la resuelven.

El desarrollo de competencias docentes y los conocimientos del profesor de matemáticas han sido un tema importante en las últimas décadas (Godino, 2013.a; Climent, et al. 2016; Alcivar, et al., 2017). Durante la formación docente las actividades que utilizan los profesores formadores están dirigidas a la simulación de la práctica profesional, estas actividades fomentan el desarrollo de competencias profesionales. Las actividades facilitan el acercamiento de los futuros profesores de matemáticas al ambiente de la profesión y hacen que reflexione acerca de los conocimientos y competencias que debe tener al terminar su carrera y ejercerla.

Un objetivo del modelo MTSK es reflexionar sobre los elementos que conforman el conocimiento existente y orientar el contenido de la formación inicial. Como herramienta de análisis, apoya estudios con cierto nivel de profundidad y minuciosidad, al mismo tiempo realiza categorías del objeto de estudio. (Montes, et al., 2019. p.161). Por esta razón se tomarán elementos presentes en el MTSK como la base para la creación de las actividades.

Al observar una lección de matemáticas intervienen una serie de detalles que generan el conocimiento de los estudiantes y del mismo docente que la imparte, las preguntas que realizan los estudiantes, la forma en que se responden, el uso de ejemplos para evacuar estas dudas, los problemas y las soluciones propuestas por los estudiantes, el uso de libro de texto o de alguna herramienta tecnológica, en fin todos los momentos de interacción entre el docente y sus estudiantes y cómo éste enseña según los requerimientos del nivel. Estos momentos de clase son acompañados necesariamente de momentos de institucionalización de los aprendizajes (Brousseau, 2007). El futuro docente debe tener en cuenta que, además del diseño de actividades propias para su clase, donde se incluyen estos momentos de institucionalización, también existirán momentos de improvisación en caso de que surja una consulta por parte de los estudiantes, relacionada con temas posteriores o con conocimientos previos que se deban retomar en ese momento. Por esta razón, debe tener conocimientos sobre el contenido, el cómo aprenden los estudiantes, sobre técnicas de enseñanza, entre otros. Estos conocimientos están presentes en el marco del modelo MTSK, y pueden evidenciarse al observar una lección de matemáticas, llevando a la reflexión al que observa y generando nuevos planteamientos para poner en práctica.

Montes, et al. (2019) aseguran que

El proceso de aprender a enseñar matemáticas requiere que estas tareas profesionales formen parte de la rutina de actividades de la formación inicial de forma que tanto reestructuración (y a veces reconstrucción), como la comprensión profunda del contenido matemático, se desarrollen en escenarios centrados en las tareas de enseñanza, generando oportunidades de aprendizaje situado en el contexto de la práctica. (p. 159)

Aclaran que estas actividades pueden ser desarrolladas por medio de materiales, como casos o videocasos, y no necesariamente en un aula. Estas actividades potencian la construcción de conocimiento didáctico de contenido, ayudarán al docente en formación a tener una estructura coherente sobre los contenidos, informarse sobre las formas en las que puede enseñarlos, interesarse sobre cómo aprenden sus estudiantes, seleccionar los mejores ejemplos y actividades, etc. Estos conocimientos podrá reforzarlos con la experiencia laboral, sin embargo, los conocimientos adquiridos bajo actividades de este tipo serán un apoyo para anticipar situaciones en su práctica.

En el MTSK se considera el conocimiento del profesor especializado, al mismo tiempo, el papel del formador de profesores lo debe tener, pero es una especialización más profunda (Ribeiro, 2016). Al realizar investigación sobre la presencia de uno de los subdominios del MTSK pueden aparecer indicadores de otros subdominios, pues se encuentran relacionados entre sí. En este caso, al crear las actividades se ha tomado en cuenta indicadores de otros subdominios para dar mayor provecho al video y la actividad, a pesar de tener presente en los objetivos el estudio de características únicamente del KMT. Esto se realiza con las relaciones que tiene con los otros subdominios, mencionados anteriormente.

Las actividades diseñadas en el presente trabajo están dirigidas a futuros docentes de matemáticas, que enseñarán probabilidad a nivel de secundaria cuando se encuentre ejerciendo.

El modelo MTSK permite sistematizar la planificación de los contenidos a abordar en un programa de formación docente (Montes, et al., 2019). Para el diseño de las actividades se ha desglosado el KMT dirigido a la enseñanza de la probabilidad como se muestra en la Tabla 4.1 continuación:

Tabla 4.1

Elementos KMT en probabilidad

KMT	Contenido
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986): Acción, Formulación, Validación e Institucionalización. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos aptos según el nivel (finalidad de los ejemplos) Materiales impresos o material concreto. Herramientas o recursos virtuales que apoyen la enseñanza de los conceptos de probabilidad (limitaciones y potencialidades).

Nota: Elaboración propia

El video de una clase es una herramienta que ayuda a los futuros docentes a observar el ambiente al cual se van a desempeñar, para que puedan familiarizarse, reflexionar sobre aspectos a mejorar o adoptar para su práctica. Aún cuando se trabaja y se tiene experiencia, funciona para la mejora de elementos relacionados al MTSK.

Las actividades diseñadas se muestran a continuación:

Actividad 1:

OBJETIVOS

- Identificar el conocimiento de contenido que tiene el estudiante en formación.
- Analizar los ejemplos brindados por el profesor y la finalidad que tienen, poniendo en práctica el conocimiento sobre la elección de ejemplos para la enseñanza del contenido probabilístico.
- Identificar los materiales utilizados en la clase y su uso por parte del docente. Esto permite hacer reflexión sobre el conocimiento de los materiales y recursos aptos para la enseñanza de la noción de azar.
- Describir el uso de la tecnología con el fin de reflexionar sobre las potencialidades que se pueden obtener, y cómo podría el docente utilizarlo para potenciar el aprendizaje.
- Discutir qué otros materiales pueden utilizar, como reflexión sobre la diversidad de materiales que pueden existir.

INSTRUCCIONES: Observe el video y analice las siguientes preguntas:

Video: <https://youtu.be/r5k0ekSUDyk>

1. ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
2. ¿Qué estrategia utiliza el profesor para introducir el tema? ¿De qué tema se trata la clase y qué nivel?
3. ¿Cuál es la finalidad de los ejemplos que brindan el profesor?
4. Analice si los ejemplos son cercanos al contexto de los estudiantes.
5. Proponga otros ejemplos que se podrían dar para comprensión del tema y que sean cercanos a los estudiantes.
6. ¿Qué materiales se utilizan en la clase?
7. Describa el uso que se da a la tecnología. ¿Qué otro uso le podría dar?
8. Proponga otros materiales que se podrían utilizar para la enseñanza del tema y la finalidad de su uso

Actividad 2:

OBJETIVOS

- Identificar el conocimiento de contenido sobre los significados de la probabilidad al comparar las respuestas de los estudiantes sobre la noción de probabilidad.
- Analizar los ejemplos brindados por el profesor y la finalidad que tienen, poniendo en práctica el conocimiento sobre la elección de ejemplos para la enseñanza del contenido probabilístico.
- Poner en práctica el conocimiento sobre las estrategias para la enseñanza de la matemática, identificando los momentos de la Teoría de Situaciones Didácticas para fundamentar su respuesta.
- Identificar los materiales utilizados en la clase y su uso por parte del docente. Esto permite hacer reflexión sobre el conocimiento de los materiales y recursos aptos para la enseñanza de la noción de azar.
- Identificar qué otros materiales se pueden utilizar para la enseñanza del contenido y el desarrollo de habilidades presentes en el video. Permite reflexionar sobre la diversidad de materiales que pueden existir.
- Proponer el uso de la tecnología en la clase observada. Se busca reflexionar en la potencialidad del software para la realización de experimentos aleatorios.

INSTRUCCIONES: Observe el video y analice las siguientes preguntas:

Video: <https://youtu.be/z3M1QyFhiAM>

1. ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
2. ¿Qué ideas brindan los estudiantes sobre la noción de probabilidad?
3. ¿Cuál es la finalidad de los ejemplos que se brindan al inicio de la clase?
4. Analice si los ejemplos son cercanos al contexto de los estudiantes y la participación de los estudiantes
5. ¿Cuál es la estrategia utilizada por el docente? Describa como se realiza la institucionalización de los aprendizajes.
6. ¿Qué uso se da a los materiales que se utilizan en la clase?
7. Anote qué otros materiales se podrían utilizar en esta lección y justifique porqué los utilizaría.
8. En este segmento de clase no se muestra uso de tecnología. Proponga una forma de utilizarla y justifique como potenciaría el aprendizaje en comparación a los materiales presentes.

Actividad 3:

OBJETIVOS

- ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
- Reflexionar sobre los conceptos previos que debe tener el estudiante antes de iniciar el tema de variabilidad (conocimiento de contenido)
- Analizar los ejemplos y su finalidad, y si estos son cercanos a los estudiantes.
- Reflexionar sobre las estrategias utilizadas por el docente y la escogencia de ejemplos aptos para mostrar los conceptos de probabilidad.
- Plantear sugerencias sobre estrategias de introducir el tema, esto para fomentar el conocimiento sobre la enseñanza de la matemática
- Describir la relación de los contenidos de probabilidad con otras áreas, esto para reflexionar sobre la selección de ejemplos de acuerdo con nivel que se enseña y realizando conexiones con las otras áreas que dominan los estudiantes.
- Reflexionar sobre el lenguaje empleado, para fomentar el razonamiento probabilístico del futuro docente.

INSTRUCCIONES: Observe el video y analice las siguientes preguntas:

Video: https://youtu.be/vf2QQ0f_sho

1. ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
2. ¿Qué estrategia utiliza el profesor para introducir el tema de variabilidad? ¿A qué hace referencia?
3. ¿Cuál es la finalidad de los ejemplos que se brindan? ¿son cercanos a los estudiantes?
4. ¿Cómo se retoman los conceptos previos?
5. Sugiera otra forma de introducir el tema de Variabilidad, asociándolo a otra situación cotidiana.
6. Describa la relación que se realiza entre el tema y otras áreas de las matemáticas, ya sea en operaciones o procedimientos.
7. ¿Qué lenguaje utiliza el profesor al referirse a los conceptos asociados a la probabilidad?

Actividad 4:

OBJETIVOS

- Analizar las tareas y los ejemplos que selecciona el profesor para fortalecer el tema según el nivel educativo.
- Analizar los materiales y el uso que se da a los mismos
- Reflexionar sobre el uso de tecnología y sus ventajas, con el fin de indagar sobre el conocimiento de los materiales y recursos como software probabilístico que enriquecen la enseñanza de la probabilidad.

INSTRUCCIONES: Observe el video y analice las siguientes preguntas:

Video: <https://youtu.be/8aSc0t79cRc>

1. ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
2. ¿Qué estrategia utiliza el profesor para la comprensión del tema? Describa el proceso que realiza.
3. ¿Qué tareas utiliza el profesor para el fortalecimiento del razonamiento probabilístico?
4. ¿Cuáles ejemplos utiliza para responder a las consultas de los estudiantes?
5. ¿Qué materiales se utilizan en la lección? ¿Qué finalidad tienen?
6. ¿Qué uso de tecnología se muestra en la clase? ¿Cómo se podría utilizar para complementar el tema y la realización de experimentos?
7. ¿Se podría utilizar material concreto únicamente? ¿Qué ventajas se tienen con el uso de tecnología?

Actividad 5:

OBJETIVOS

- Identificar los ejercicios seleccionados por el docente y la finalidad
- Identificar representaciones y lenguaje probabilístico
- Poner en práctica el conocimiento sobre los materiales y recursos según los objetivos que se desean en la clase.

Video: <https://youtu.be/4I9PvE9WALs>

Observe el video y analice las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el contenido y la habilidad correspondiente al programa de matemática?
2. ¿Qué conceptos de probabilidad se desarrollan en el desarrollo de los ejercicios?
3. ¿Qué representaciones utiliza el docente para la representación de las situaciones?
4. Describa el lenguaje empleado en la resolución de ejercicios
5. ¿Qué materiales utiliza el docente y cuál es el uso que se les da?
6. ¿Qué otros materiales propone utilizar en esta clase? Justifique

En este caso el uso de los videos de clase de probabilidad se dirige a la observación y reflexión sobre las estrategias utilizadas por el docente, tipos de actividades (colaborativas, individual), recursos (potencialidad, limitaciones, apoyo a estudiantes), ejemplos utilizados, representaciones, lenguaje, entre otros. Se puede asociar a los indicadores de idoneidad mediacional e interaccional de probabilidad: creencias e intuiciones de los estudiantes asociados a los significados de la probabilidad, uso de materiales manipulativos e informáticos, uso de material probabilístico, modelado, simulaciones, uso de software.

Estas actividades pueden ser utilizadas en la formación de profesores para reflexionar sobre los materiales que utiliza el docente al enseñar probabilidad, se incluyen algunos aspectos sobre el conocimiento de contenido.

Propuesta del perfil del profesor de probabilidad

En este trabajo se han tomado elementos del marco teórico del MTSK y de los indicadores de Idoneidad Didáctica, con el fin de realizar una propuesta de un perfil específico para el área de probabilidad por su fortaleza en cuanto a la competencia de generar de pensamiento estocástico en sus estudiantes.

Las características del MTSK y las relaciones entre sus subdominios se asocian a los indicadores de idoneidad didáctica propuestos para el proceso de instrucción en el área de probabilidad. A continuación, se realiza una selección de características categorizadas con ayuda de los indicadores de la Idoneidad Didáctica presentados:

* Idoneidad epistémica:

- Plantea situaciones problema donde se muestren y relacionen diferentes significados de la probabilidad: intuitivo, subjetiva, frecuencial y clásico.
- Se formulan definiciones y procedimientos con claridad y corrección de acuerdo con el nivel educativo al que se dirigen.
- Se utiliza un lenguaje probabilístico adecuado al nivel: verbal, numérico, simbólico, tabular y gráfico.
- Conoce, describe y ejemplifica las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, probabilidad sucesos simples y sucesos compuestos. Utiliza términos precisos para referirse a estos al enseñar.
- Presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas.
- Propone situaciones donde se realice interpretación de fenómenos aleatorios.
- Propone actividades diferenciando experiencias aleatorias de las deterministas (de forma manual o virtual, lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos etc)
- Muestra contextos donde se pueden ejercitar y aplicar los contenidos de probabilidad y su relación en las problemáticas sociales.
- Propone la generación de problemas por parte de sus estudiantes, brindando retroalimentación en los momentos que necesiten.
- Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad.
- Realiza y explica correctamente procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol.

- Diseña actividades de resolución de problemas a partir del análisis de la información cuantitativa y cualitativa con el fin de favorecer el desarrollo del pensamiento estocástico.
- Realiza relaciones entre la probabilidad y estadística y otros contenidos en matemáticas.
- Aplica conocimientos de las distintas ramas de las matemáticas u otras disciplinas, para facilitar el análisis de una situación dada.

* Idoneidad cognitiva:

- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones las dirige al nivel que se enseña.
- Conocimientos de combinatoria, estadística y probabilidad que faciliten el desarrollo de actividades de análisis de situaciones y desarrollen el pensamiento estocástico en los estudiantes.
- Soluciona problemas y toma decisiones utilizando su pensamiento crítico y sus conocimientos en combinatoria, probabilidad y estadística.

* Idoneidad interaccional:

- Planifica actividades tomando en cuenta los sesgos de probabilidad más comunes:
 - En torno a la heurística de la representatividad: sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra u otras concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias.
 - Sesgo de equiprobabilidad.
 - Enfoque en el resultado aislado.

* Idoneidad mediacional:

- Se mantiene en actualización constante, ya sea por medio de capacitaciones o de forma autónoma, mostrando interés en fortalecer su desarrollo profesional.
- Conocer herramientas que faciliten la enseñanza según la metodología utilizada (pizarra, proyector, etc).
- Innova constantemente en su práctica docente con el fin de favorecer el desarrollo de competencias de los estudiantes.
- Investiga, conoce, y utiliza las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC), y Tecnologías del Empoderamiento y la Participación (TEP) como herramientas que favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.
- Utiliza material probabilístico, y simuladores virtuales de experiencias aleatorias.

- Conocimiento y dominio de recursos tecnológicos que apoyen simulaciones, experimentos, ensayos, etc., y que apoye la creación de proyectos.
- Utilizar de forma correcta los materiales concretos, documentos impresos o digitales y herramientas tecnológicas e indaga si estos contribuyen al desarrollo del pensamiento estocástico.
- Conoce entornos de aprendizaje digitales para la enseñanza virtual, semivirtual, a distancia o presencial.
- Conoce y complementa la metodología tradicional con metodologías activas que fortalezcan el aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento estocástico.
- Aplicar diferentes metodologías para la enseñanza:
 - Aprendizaje cooperativo
 - Aprendizaje basado en problemas
 - Aprendizaje basado en proyectos
 - Otras
- Conocer distintos tipos de evaluación que favorezcan a la aplicación de diferentes metodologías y que fortalezca la participación del estudiante demostrando el desarrollo de las habilidades según el nivel.

* Idoneidad afectiva:

- Plantea actividades tomando en cuenta las creencias e intuiciones de los estudiantes, motivando la argumentación de los estudiantes con situaciones cercanas al contexto en el que se desenvuelven (entorno, sociedad, cultura, normativas, otras disciplinas, ...)
- Conoce y toma en cuenta la teoría de las inteligencias múltiples para aplicar diferentes metodologías en el proceso de enseñanza que favorezcan al estudiante.

* Idoneidad ecológica:

- Colabora con diferentes áreas para generar proyectos innovadores de impacto social y educativo.
- Realiza relaciones de la historia de la probabilidad con historia general.

Además de estos aspectos en el perfil del profesor, una cualidad importante a tomar en cuenta si se desea enseñar probabilidad, es la capacidad de razonamiento o pensamiento probabilístico que posee, el análisis de situaciones combinatorias y la capacidad de abordar los diferentes contenidos de probabilidad, haciendo uso de diferentes recursos para la enseñanza.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Como resultado de este trabajo se realizaron cinco actividades didácticas, estas son propuestas para la formación de docentes de matemática en el área de probabilidad. Fueron diseñadas con elementos del MTSK. Según el objetivo general de este trabajo, con ellas se busca fortalecer el conocimiento sobre la enseñanza de la matemática (KMT) en el área de probabilidad, pero se han incorporado elementos de otros subdominios del MTSK para dar mejor provecho a la actividad.

Se registraron en total 10 videos de clase en el nivel de octavo, para ello se construyó la estrategia de grabación y se utilizaron instrumentos de observación de videos que muestran elementos importantes sobre las lecciones de probabilidad. En los videos observados se evidencia que el uso de la tecnología es pasivo y no se involucra a los estudiantes en la manipulación de simulaciones tecnológicas, lo que si se observa en algunas clases es el uso de materiales concretos, y el libro de texto o fotocopias para la realización de ejercicios.

Al realizar un marco sobre el pensamiento estocástico permitió reflexionar sobre las etapas de desarrollo de los niños y en cuál de estas se encuentran al ingreso en la secundaria, este punto debe ser parte de los conocimientos que el docente tomará en cuenta para la creación de actividades.

En este trabajo se proponen algunas herramientas para la enseñanza de la probabilidad, estas dirigidas específicamente a nivel de secundaria, pues también existen otras más potentes que funcionan para los temas de probabilidad a nivel universitario.

En el análisis de videos, a pesar de ser casos particulares, se logra obtener información sobre el uso de materiales concretos, y el libro de texto o fotocopias para la realización de ejercicios como materiales principales en una clase de probabilidad.

Se propone un perfil del profesor de probabilidad contemplando diferentes elementos del MTSK y los indicadores de idoneidad didáctica, se espera que funcione como referente y ejemplo de perfil que un futuro docente debe tener para la enseñanza de la probabilidad

en secundaria.

Según los resultados de las Pruebas Nacionales de Bachillerato elaboradas del año 2016 al año 2019 evidencia que la culturalización estadística no se ha logrado como se esperaba con la implementación de la metodología de resolución de problemas y la incorporación paulatina de los contenidos de probabilidad y estadística. Si bien la mayoría de los resultados se encuentran en el nivel intermedio, preocupa el porcentaje de la población de estudiantes que no alcanza este nivel.

Recomendaciones

A partir de este trabajo, se recomienda a los docentes y futuros docentes la investigación e indagación sobre el desarrollo del aprendizaje estocástico que se da en los niños, esto ayudará a comprender las ideas que tienen los estudiantes desde la primaria hasta la secundaria y ayudará al docente a conocer los ejemplos y ejercicios que podrá proponer en las etapas que se encuentren los estudiantes.

Se recomienda ampliar las actividades didácticas a otros niveles en secundaria y primaria, y ampliar este tipo de investigación a otras áreas de la matemática.

Se recomienda realizar la validación de las actividades didácticas y del perfil del profesor de probabilidad propuestos en el capítulo 4 de este trabajo.

Además, se recomienda la constante capacitación docente sobre software probabilístico o herramientas que permitan realizar simulaciones, por su facilidad de uso se proponen Geogebra, Excel, Hojas de Calculo de Google Drive, entre otros, complementando el conocimiento sobre los materiales y recursos de un docente de matemáticas y a la vez ayuda al uso de tecnología en la enseñanza. Dar a conocer los modelos TPACK y MTSK para que sirvan como referente del conocimiento del profesor, generando reflexión entre docentes y que cada uno de ellos pueda buscar la capacitación o autocapacitación por medio de la investigación sobre sus debilidades.

Capítulo 6

Referencias

- Alfaro, A. L., Alpízar, M. y Chaves, E. (2010). Estrategias didácticas para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en I y II Ciclo de la Educación General Básica. Presentado en el III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED. <https://www.uned.ac.cr/ecen/encuentros/2010/III%20Encuentro/ponencias/>
- Alfaro, A. y Alpízar, M. (2011). Estrategias didácticas para enseñar estadística y probabilidad en primaria: validación en el aula. <https://core.ac.uk/reader/294765610>
- Alpízar, M., Chavarría, L. y Oviedo, K. (2015). Percepción de un grupo de docentes de I y II ciclo de Educación General Básica de escuelas públicas de Heredia sobre los temas de estadística y probabilidad. Revista Electrónica: Actualidades Investigativas en Educación. UCR. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/17728/17304>
- Alsina, A. y Salgado, M. (2018). Ampliando los conocimientos matemáticos en Educación Infantil: la incorporación de la probabilidad. REXE. Revista de Estudios y Experiencias en Educación, vol. 18, núm. 36, 2019. Universidad Católica de la Santísima Concepción. DOI:<https://doi.org/10.21703/rexe.20191836alsina6>
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407. https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special
- Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8(3), 247-264. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/didacticaprobabilidad.html>

- Batanero, C. (2015a). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 69-72). Alicante: SEIEM. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/didacticaprobabilidad.html>
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación. Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola, 9-21. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/1Batanero.pdf>
- Batanero, C. (2015b). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education, Praga. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/didacticaprobabilidad.html>
- Batanero, C., Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. UNO, 44, 7-16. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/didacticaprobabilidad.html>
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971>
- Barrantes, H. (2003). Formación del profesorado en matemáticas en costa rica: balance y perspectivas. Uniciencia. Vol. 20. <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/5965>
- Beltran-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32(61), 526-548. https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2018000200526&script=sci_arttext&tlng=es
- Bravo, G. y Saldarriaga, P. (2017). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. Revista electrónica Dialnet, 127-137. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5802932>
- Cabero, J. (2014). La formación del profesorado en TIC: Modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y de Contenido). Sevilla: Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Universidad de Sevilla
- Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas, 32(1), pp. 123-138. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/440/44032109.pdf>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. Actas del CERME 8 (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME. https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes,

- M. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.researchgate.net/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas
- Carrillo, J. (2017). Idiosincracia del MTSK, investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (p. 7-10). Huelva: CGSE. <http://www.redmtsk.com/wp-content/uploads/Actas-III-Jornadas-SIDM-2017.pdf>
- Carrillo, J. y Martín, J. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 147-152. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/Articulos_28.pdf
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Ribeiro, M. (2017). Mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) in the "dissecting an equilateral triangle" problem. *RIPEM*, 7(2), 88- 107. https://www.researchgate.net/publication/322951853_MATHEMATICS_TEACHER'S_SPECIALIZED_KNOWLEDGE_MTSK_IN_THE_DISSECTING_AN_EQUILATERAL_TRIANGLE_PROBLEM
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236 - 253. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Chaves, E. y Barrantes, H. (2013). La necesidad de reformar el currículo escolar de matemática en Latinoamérica: La experiencia de Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 95-108. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14719>
- Chaves, E. (2018). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 153-163. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34371/33958>
- Chaves, D., López, D. y Porras, K. (2020). Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la probabilidad en ciclo diversificado de la educación secundaria costarricense. Seminario de Graduación para optar por el Grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica. Costa Rica
- Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Tercera edición, Aique editor.
- Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Carrillo, J., Liñan, M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85 - 103. <https://core.ac.uk/download/pdf/>

132455354.pdf

- Consejo Superior de Educación (CSE). (2020). Sistema Educativo. http://cse.go.cr/sites/default/files/documentos/estructura_sist_educ_costarr.pdf
- Contreras, J., Ruiz, K., Ruz, F. y Molina, E. (2019). Recursos virtuales para trabajar la probabilidad en la enseñanza de matemáticas en Educación Primaria. <https://revistas.uma.es/index.php/innoeduca/article/view/5240/5704>
- De Faria, E. (2016). La preparación de docentes en enseñanza de las Matemáticas: el caso de Costa Rica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 419-430. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23882>
- Escudero, D. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva, España. <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456>
- Escribano, A. y Del Valle, A. (2015). El aprendizaje basado en problemas (ABP). Bogotá: Ediciones de la U. <http://www.untumbes.edu.pe/vcs/biblioteca/document/varioslibros/0296.%20El%20aprendizaje%20basado%20en%20problemas.%20Una%20propuesta%20metodol%C3%B3gica%20en%20educaci%C3%B3n%20superior.pdf>
- Fallas, I. y Trejos, I. (2014) Educación en la Sociedad de la información y el conocimiento. San José, Costa Rica. EUNED.
- Fernández, S. (2007). Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad. Revista Suma, 55, 7-20. <http://revistasuma.es/revistas/55-junio-2007>
- Fischbein (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33 (1), 89-105. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Font_Planas_Godino_IA2010_Modelo_anadida.pdf
- Font, V., Morales, Y., y Alpízar, M. (2019). Uso de algunos constructos del modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático para el estudio de informes de práctica de futuros profesores de matemáticas. <https://repositorio.una.ac.cr/bitstream/handle/11056/17251/1056-3063-2-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10 (2), 7-37 https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

- Godino, J. D. (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_2013_Dise%F1o_tareas.pdf
- Godino, J. D. (2013b). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 111-132. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf
- Gutierrez, O. (2003) Fundamentos psicopedagógicos de los enfoques y estrategias centrados en el aprendizaje en el nivel de educación superior. https://www.guao.org/portafolio_docente/enfoques_y_modelos_educativos_centrados_en_el_aprendizaje
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. 5ta ed. México: McGraw-Hill.
- Herrera, E. (2004). Desarrollo del pensamiento estocástico. En Díaz, Leonora (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 735-739). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <https://core.ac.uk/download/pdf/33252914.pdf>
- Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC). (2020). Carreras. <https://www.tec.ac.cr/programas-academicos/>
- Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM). (2014). El aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica. Vicerrectoría de normatividad académica y asuntos estudiantiles http://sitios.itesm.mx/va/diie/tecnicasdidacticas/2_1.htm
- Jiménez, L. y Jiménez, J. R. (2005). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 6(1). <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2138>
- León, J., Sosa, L. y Díaz, D. (2019). Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato. Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XV CIAEM). Medellín, Colombia. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/629/323>
- MEP y DGEC (2010). Primer informe sobre los resultados de la prueba para docentes de matemática en educación secundaria. <http://www.dgrec.mep.go.cr>
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). Programas de estudio matemáticas. San José, Costa Rica. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/>

[programas/matematica.pdf](#)

- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2017). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2016. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2018). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2017. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2019). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2018. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2020). Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2019. Bachillerato. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2020). FARO: Pruebas Nacionales para el Fortalecimiento de Aprendizajes para la Renovación de Oportunidades. <https://www.mep.go.cr/faro>
- Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. R
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca. <https://eusal.es/index.php/eusal/catalog/download/978-84-1311-073-8/5054/4201-1?inline=1>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Núñez, F., Sanabria, G. y García, P. (2004). Sobre la Probabilidad, lo Aleatorio y su Pedagogía. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 5(1). <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV5n1Jun2004/FelixSanabriaGarcia/index.htm>
- Núñez, F. (2013). Consideraciones sobre la didáctica de la probabilidad y de la estadística. *Actas del VII CIBEM* ISSN, 2301(0797), 2049. <https://core.ac.uk/reader/328836580>
- Ñeco, M. (2005). El rol del maestro en un esquema pedagógico constructivista. *Publicaciones sistema Universitario SUAGM*: <http://bibliotecavirtualut.suagm.edu/Publicaciones>. https://skat.ihmc.us/rid=1H78PQYS7-1HMBLF6-105F/el_rol_del_maestro_en_un_esquema_pedagogico_constructivista.pdf

- Ortiz, J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/tesisjj.PDF>
- Piaget, J. (1975). Psicología de la inteligencia. Buenos Aires: Psique.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pino, L.R. y Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico - matemático del profesor. En: Paradigma. Vol. XXXVI, N^o 1, p. 87– 109. <http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf>
- Programa Estado de la Nación (2019). Séptimo Informe Estado de la Nación. San José. https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2019/11/informe_estado_nacion_2019.pdf
- Restrepo B, Luis F, y González L, Julián (2003). La Historia de la Probabilidad. Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias, 16(1),83-87. ISSN: 0120-0690. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/2950/295026121011.pdf>
- Rocha, P. (2002). Epistemología del pensamiento estadístico y aleatorio y la importancia de su enseñanza en el aula. En Rojas, Pedro Javier (Ed.), Memorias del 4^o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (p. 42). Bogotá: Gaia.
- Ruiz, A. (2013). La Educación Matemática en Costa Rica: antes de la reforma. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, p.10. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11125/10602>
- Ruiz, A. (2013). Quinta parte: Los caminos de la instalación curricular. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, ág-67. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11156>
- Sanabria, G. (2013). Reflexiones sobre la enseñanza de la probabilidad. III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos. Tecnológico de Costa Rica. Costa Rica. <https://core.ac.uk/download/pdf/294765652.pdf>
- Sanabria, G. (2014). La enseñanza de la probabilidad desde la primaria. En Andrade, Luisa (Ed.), Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (pp. 232-237). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica. <http://oladic.cl/2016/02/20/i-encuentro-colombiano-de-educacion-estocastica-la-ensenanza-y-aprendizaje>
- Sanabria, Giovanni (2015). ¿Cómo abordar la enseñanza de la probabilidad? Memorias del V Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (V EIEPE). Universidad Autónoma de Puebla, México. Del 8 al 12 de junio de 2015
- Sánchez, Ernesto. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. Educación matemática, 21(2), 39-77. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200003&lng=es&tlng=es

- Santos, L. (1996). Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Primera Edición. México: Grupo editorial Iberoamérica.
- Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. <http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, INC.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In International handbook of mathematics teacher education: volume 2 (pp. 321-354). Brill Sense. <https://brill.com/view/book/edcoll/9789087905460/BP000016.xml>
- Sistema Costarricense de Información Jurídica (SCIJ). (2020). Ley Fundamental de Educación. http://www.pgrweb.go.cr/scij/Busqueda/Normativa/Normas/nrm_texto_completo.aspx?param1=NRTC&nValor1=1&nValor2=31427&nValor3=33152&strTipM=TC#ddown
- Sistema Nacional de Acreditación de la Educación Superior (SINAES). (2020). Carreras Acreditadas. <https://www.sinaes.ac.cr/index.php/19-carreras/112-educacion>
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. En: Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado. No. 9. Vol. 2. <https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>
- Shulman, L. (1987) Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. Harvard Educational Review, Harvard, v. 57, n. 1, p. 1 - 22. <https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>
- Universidad Adventista de Centro América (UNADECA). (2020). Carreras. <http://unadeca.ac.cr/home/>
- Universidad Americana (UAM). (2020). Oferta educativa. <https://www.uam.ac.cr/oferta-educativa/>
- Universidad Católica de Costa Rica. (2020). Profesorados. <https://www.ucatolica.ac.cr/profesorados>
- Universidad de Costa Rica (UCR). (2020). Carreras. <https://www.ucr.ac.cr/estudiantes/carreras/#ciencias-basicas>
- Universidad Internacional San Isidro Labrador (UISIL). (2020). Carreras. <https://uisil.ac.cr>
- Universidad Nacional (UNA). (2020). Carreras. <https://www.una.ac.cr>
- Universidad San José (USJ). (2020). Carreras. <https://www.usanjose.com/educacion/secundaria/>
- Universidad Estatal a Distancia (UNED). (2020). Carreras y posgrados. <https://www.uned.ac.cr>

- Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números*. 85. 5-23. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_01.pdf
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de educación primaria. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, vol. 14, p. 1-20. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e62434>
- Vásquez, C., Alsina, A., Pincheira, N., Gea, M. y Chandia, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(2), 25-43.44 <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2820>
- Vidal, P. F. y Estrella, S. (2019). Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. In XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/692/327>
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Conocimiento matemático en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (p. 165-172). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/Actas%20jornadas.pdf>

Capítulo 7

Anexos

Anexo 1: Solicitud de permiso para la grabación de lecciones de probabilidad

www.tec.ac.cr

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos
(506) 2550-2445
FAX (506) 2550-2493

Cartago, 06 de setiembre 2019
MATEC-241-2019

Director General
Colegio

La joven Dayana Calderón Prado, carné 201241182, es estudiante regular de la licenciatura en Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos que se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC). Actualmente la estudiante Calderón Prado se encuentra realizando su trabajo final de graduación titulado "Estrategias didácticas para fortalecer el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad en educación secundaria", el cual tiene por objetivo general "proponer estrategias didácticas que puedan ser utilizadas para fortalecer el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de profesores en formación, en el tema de probabilidad en educación secundaria". Para lograr el cumplimiento de este se requiere filmar en los niveles de noveno y octavo algunas lecciones de los contenidos de Probabilidad propuestos en los programas vigentes de Matemática del Ministerio de Educación Pública. Esto va a permitir obtener información sobre la enseñanza de estos contenidos.

Existe el compromiso de parte de la estudiante Calderón Prado de hacer uso de la información (imágenes y videos) únicamente para esta investigación y mantener la confidencialidad de los datos; asimismo, no se comprometerá la identidad de los estudiantes pues el foco de atención será el profesor de matemáticas del nivel, en este caso los involucrados serán los profesores _____ y _____. Todo el proceso de investigación será guiado por el profesor de la Escuela de Matemática del TEC, M.Sc. Félix Núñez Vanegas.

www.tec.ac.cr

TEC | Tecnológico
de Costa Rica

Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos

(506) 2550-2445

FAX (506) 2550-2493

MATEC-241-2019

-Página 2-

Por lo anterior, se solicita, respetuosamente, brinde su consentimiento para realizar esta actividad en su institución.

Se agradece la atención a la presente y las facilidades que se le pueda brindar a nuestra estudiante.

Original Firmado

TEC | Tecnológico
de Costa Rica
Enseñanza de la Matemática

Lic. Paulo García Delgado, Coordinador
Carrera Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Anexo 2: Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP)

Tabla 7.1

Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP)

Significados de la probabilidad	Indicadores
Significado intuitivo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Foco en situaciones problemas cotidianas vinculadas con el uso de términos estocásticos y con la expresión de grados de creencia para la ocurrencia de sucesos (por medio de una escala cualitativa). 2. Uso de términos y expresiones verbales comunes vinculadas al lenguaje probabilístico que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano. 3. Énfasis en la posibilidad de ocurrencia como escala cualitativa que va desde lo seguro a lo imposible. 4. Imprevisibilidad y variabilidad de sucesos y sus resultados posibles. 5. Exploración y distinción de fenómenos aleatorios diferenciándolos de los deterministas. 6. Distinción entre tipos de sucesos (seguro, posible, poco posible, incierto). 7. Análisis de ejemplos e intuiciones ligadas al azar y probabilidad.
Significado clásico	<ol style="list-style-type: none"> 1. Foco en situaciones problemas centradas en el cálculo de probabilidades, en determinar la probabilidad de ocurrencia teórica a partir de los datos observados en un experimento aleatorio. 2. Uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades.

Sigue en la página siguiente.

Significados de la probabilidad	Indicadores
	<ol style="list-style-type: none"> 3. Representación de probabilidades de ocurrencia por medio de una escala cuantitativa cuyos valores fluctúan entre 0 y 1. 4. Énfasis en conceptos y propiedades tales como espacio muestral, casos favorables y no favorables, juego justo, probabilidad de ocurrencia como medida de la incerteza, sucesos simples equiprobables, Regla de Laplace. 5. Procedimientos centrados en construcción de espacio muestral, distinguir entre casos favorables y no favorables, comparar probabilidades, asignación de probabilidades por medio de regla de Laplace, construcción de diagramas para enumerar casos favorables. 6. Análisis de ejemplos, desarrollo del razonamiento inductivo.
Significado frecuencial	<ol style="list-style-type: none"> 1. Foco en realizar predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio. 2. Uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades (población, valor estimado, simulación, probabilidad teórica y experimental, tendencias, frecuencias, proporción, etc.) 3. Uso de representaciones gráficas y tabulares. 4. Énfasis en la independencia de sucesos, estabilización de frecuencias y en el rango de la frecuencia relativa de un suceso (entre 0 y 1).
	<ol style="list-style-type: none"> 5. Procedimientos centrados en realizar predicciones a partir de los datos observados, estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, registrar resultados de un experimento aleatorio ya sea de forma tabular o gráfica, interpretación, calcular y representar frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simular experimentos aleatorios por medio manual y/o a partir del uso de software. 6. Análisis de ejemplos y de simulaciones de experimentos ya sea de forma manual y/o utilizando software.

Sigue en la página siguiente.

Significados de la probabilidad	Indicadores
Significado subjetivo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Foco en situaciones problemas donde la probabilidad de ocurrencia se puede ver afectada (cambiar) en base a la información de la que se dispone (se ajustan las asignaciones previas incorporando la nueva información disponible). 2. Uso de términos y expresiones verbales comunes vinculadas al lenguaje probabilístico. 3. Énfasis en la probabilidad entendida como grado de creencia de sucesos. 4. Foco en los sucesos inciertos, en la incertidumbre y en la imprevisibilidad de los resultados posibles, donde la probabilidad se encuentra condicionada por la información de la cual se dispone.
	<ol style="list-style-type: none"> 5. Procedimientos centrados en analizar experimentos la probabilidad de ocurrencia depende de la información disponible, valorar la probabilidad de ocurrencia de sucesos a partir de experiencias personales. 6. Análisis de ejemplos y experiencias previas que permiten ajustar las asignaciones previas de probabilidad a partir de nueva información.
Significado axiomático	<ol style="list-style-type: none"> 1. Foco en situaciones problemas que involucran la axiomática de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos. 2. Uso de términos y expresiones vinculadas a la teoría de conjuntos, álgebra de conjuntos y teoría de la medida. 3. Énfasis en la probabilidad como una medida de la incertidumbre. 4. Procedimientos centrados en la axiomática de la probabilidad. 5. Análisis y comprobación de propiedades vinculadas a la axiomática de la probabilidad.

Nota: Tomado de Vásquez y Alsina (2019) p.15

Anexo 3: Instrumento de Observación de Clases de Probabilidad (IOC-PROB)

Tabla 7.2

Instrumento de Observación de Clases de Probabilidad, IOC-PROB

a) Dimensión 1: tareas probabilísticas

A1. Gestión de recursos de enseñanza-aprendizaje: situaciones cotidianas, materiales manipulativos, juegos, experimentación, recursos tecnológicos, libros de texto, fichas, etc.			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Utiliza exclusivamente un recurso, sin gestionar adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Utiliza al menos dos recursos, pero no gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes mediante su uso.	Utiliza al menos dos recursos, pero gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes con uno.	Utiliza al menos dos recursos y gestiona adecuadamente el desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes mediante su uso.
A2. Contextos probabilísticos: social, personal, ocupacional, científico o relativo a la experimentación y juegos de azar			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Propone tareas probabilísticas desde contextos vinculados exclusivamente a la experimentación o los juegos de azar.	Propone tareas probabilísticas a partir de la experimentación y los juegos de azar principalmente, y anecdóticamente propone otros contextos cercanos al alumno.	Propone tareas probabilísticas desde diversos contextos probabilísticos cercanos al alumno, pero se centra en dos contextos diferentes.	Propone tareas probabilísticas desde contextos diversos y cercanos al alumno que, además de la experimentación y los juegos de azar, incluyen también contextos de tipo social, personal, ocupacional y científico.
A3. Reto cognitivo: coherencia entre los conocimientos previos y el nuevo contenido			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Propone tareas que no suponen un reto para los estudiantes, pues no facilitan que evoquen sus conocimientos previos para la construcción de nuevos aprendizajes vinculados al azar y la probabilidad.	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos, pero no se vincula adecuadamente con los nuevos aprendizajes relativos al azar y la probabilidad.	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos y los vincula adecuadamente con los nuevos aprendizajes relativos al azar y la probabilidad; aunque no propone tareas para valorar la reorganización de los nuevos conocimientos adquiridos.	Propone tareas que facilitan que los estudiantes evoquen y compartan sus conocimientos previos, los vincula con los nuevos aprendizajes relativos al azar y probabilidad; y propone tareas para valorar la reorganización de los nuevos conocimientos adquiridos.

A4. Procedimientos y estrategias: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Propone tareas probabilísticas en las que aplica y/o adapta siempre el mismo procedimiento y/o estrategia para su resolución.	Propone tareas probabilísticas en las que aplica y/o adapta una variedad de procedimientos y/o estrategias de resolución apropiadas, pero no incentiva a los estudiantes a reflexionar sobre estas.	Propone tareas en las que es posible aplicar y/o adaptar una variedad de procedimientos y/o estrategias que utiliza para promover la reflexión sobre la resolución de tareas probabilísticas, pero no para decidir sobre cómo y cuándo usarlas.	Propone tareas en las que es posible aplicar y/o adaptar una variedad de procedimientos y/o estrategias para promover la reflexión sobre la resolución de tareas probabilísticas, así como para decidir sobre cómo y cuándo usarlas.
A5. Significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático.			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Propone tareas probabilísticas para mostrar y explorar solo uno de los significados de la probabilidad.	Propone tareas probabilísticas para mostrar y explorar dos de los significados de la probabilidad, pero no promueve la reflexión en torno a ellos.	Propone tareas probabilísticas para mostrar, explorar, reflexionar y relacionar en torno a dos de los significados de la probabilidad.	Propone tareas probabilísticas para mostrar, explorar, reflexionar y relacionar al menos tres de los significados de la probabilidad.

b) Dimensión 2: razonamiento probabilístico

B1. Andamiaje: ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra o interdisciplinarias, etc.)			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo, fundamentalmente mediante ejemplos, pero no indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra e interdisciplinarias, generalizaciones, simulación, etc.), pero no indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo, fundamentalmente mediante ejemplos, e indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Ofrece ayudas desde el punto de vista cognitivo (ejemplos, conexiones intra e interdisciplinarias, generalizaciones, simulación, etc.), e indaga si contribuyen al desarrollo del razonamiento probabilístico en sus estudiantes.
B2. Argumentación probabilística: ejemplos y contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos, etc.			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve la argumentación probabilística únicamente mediante ejemplos y/o contraejemplos asociados al azar y la probabilidad.	Promueve la argumentación probabilística por medio de ejemplos y/o contraejemplos y generalizaciones asociados al azar y la probabilidad.	Promueve la argumentación probabilística por medio de ejemplos y/o contraejemplos, generalizaciones y simulación de experimentos asociados al azar y la probabilidad.	Promueve la argumentación probabilística utilizando ejemplos y/o contraejemplos, generalizaciones, simulación de experimentos y/o razonamiento inductivo a partir de datos.

c) Dimensión 3: conexiones probabilísticas

C1. Conexiones con otros contenidos matemáticos: geometría, aritmética, álgebra y/o medida			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Establece algunas relaciones entre conceptos y definiciones, pero no profundiza en las relaciones entre propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad.	Relaciona ideas, conceptos, definiciones y propiedades asociados al azar y la probabilidad, pero no con otros bloques de contenidos.	Relaciona ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad y, de modo anecdótico, con algunos bloques de contenidos (geometría, aritmética y medida), pero sin profundizar en estas últimas relaciones.	Relaciona ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad, así como con otros bloques de contenidos (geometría, aritmética y medida).
C2. Conexiones con niveles de escolaridad anteriores y/o posteriores			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Conecta solo conceptos o definiciones asociados al azar y la probabilidad, desarrollados en temas de niveles anteriores, pero no conecta con propiedades o procedimientos.	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y la probabilidad con temas de niveles anteriores, pero no con temas de niveles posteriores.	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y a la probabilidad con temas de niveles anteriores, y de modo anecdótico o superficial con temas de niveles posteriores.	Conecta conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y a la probabilidad con temas de niveles anteriores y posteriores.

d) Dimensión 4: comunicación probabilística

D1. Comunicación: interacción, negociación y diálogo en torno a las ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos de los estudiantes			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, pero no se vinculan al azar y la probabilidad.	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, especialmente vinculados al azar y la probabilidad, pero no promueve la negociación y reflexión entre los estudiantes.	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, para reflexionar y organizar sus conocimientos vinculados al azar y la probabilidad, pero no indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Incita a los estudiantes a escuchar y comunicar a otros sus ideas, conjeturas, explicaciones y argumentos con coherencia y claridad, para reflexionar y organizar sus conocimientos vinculados al azar y probabilidad, e indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.

D2. Contribuciones de los estudiantes: preguntas, explicaciones, ideas incorrectas, ideas incompletas, ideas correctas, etc.			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, pero estas no se asocian al conocimiento del azar y la probabilidad.	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, pero sin promover su discusión y reflexión.	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, pero no indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.	Incorpora las contribuciones de los estudiantes a la clase, vinculándolas al conocimiento del azar y la probabilidad, e indaga si la comunicación ha desarrollado el razonamiento probabilístico en sus estudiantes.

e) Dimensión 5: lenguaje probabilístico

E1. Lenguaje verbal: términos y expresiones verbales vinculados con la escala cualitativa de posibilidades de ocurrencia de un suceso			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales, con el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, pero no son adecuados al nivel ni valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que tienen el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, y valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, pero no siempre con igual significado en ambos contextos, y además valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.	Promueve una diversidad de términos y expresiones verbales adecuadas al nivel, que se utilizan tanto en el contexto probabilístico como en el cotidiano, y valora si los estudiantes relacionan la diversidad de lenguaje verbal.
E2. Lenguaje numérico: representaciones cuantitativas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve una única representación numérica asociada a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso y/o a la comparación de probabilidades.	Promueve el uso de dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no las relaciona.	Promueve el uso de más de dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no las relaciona.	Promueve el uso de al menos dos representaciones numéricas asociadas a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso y/o a la comparación de probabilidades y las relaciona.

E3. Lenguaje simbólico: símbolos para comunicar información relacionada con la probabilidad de ocurrencia de un suceso, así como para facilitar cálculos en operaciones algebraicas			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve la relación entre representaciones numéricas, icónicas o gestuales asociadas a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no promueve el uso de símbolos en clase.	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, pero no opera con símbolos.	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, opera con símbolos, pero no caracteriza con ellos propiedades relativas al razonamiento probabilístico.	Promueve el lenguaje simbólico asociado a la probabilidad de un determinado suceso y/o a la comparación de probabilidades, opera con símbolos y caracteriza propiedades con ellos que potencian el desarrollo de procesos de generalización relativos al razonamiento probabilístico.
E4. Lenguaje tabular: distintos tipos de tablas para la representación de datos			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve el lenguaje tabular para representar datos, pero no los relaciona con la probabilidad/posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades.	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, pero no valora si los estudiantes comprenden dicha relación.	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación solo en el caso de la representación tabular de una única variable estadística.	Promueve el lenguaje tabular para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación para la representación tabular de una o más variables estadísticas.
E5. Lenguaje gráfico: representaciones gráficas			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, pero no lo relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades.	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, pero no valora si los estudiantes comprenden dicha relación.	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación solo en el caso de una única representación gráfica.	Promueve el lenguaje gráfico para representar datos, que relaciona con la probabilidad/ posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y/o con la comparación de probabilidades, y valora si los estudiantes comprenden dicha relación para más de una representación gráfica.

E6. Tránsito entre los distintos tipos de lenguaje			
Bajo	Medio bajo	Medio alto	Alto
Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero no promueve la conexión y el tránsito entre ellos	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero solo conecta y transita entre dos de ellos.	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, pero solo conecta y transita entre tres de ellos.	Promueve el uso de distintos tipos de lenguaje probabilístico, conectando y transitando entre, al menos, tres de ellos.

Check list de aspectos complementarios que se deben observar

Recursos utilizados para la enseñanza de la probabilidad		Organización de la clase para la enseñanza de la probabilidad
Dados Bolas de colores Monedas Chinchetas Software Libro de texto Situaciones de la vida cotidiana Otro, indicar:	Juegos Experimentación Recursos tecnológicos Pizarrón Power Point Vídeos Guías	Trabajo individual Trabajo en parejas Trabajo en grupo Clase expositiva Otro, indicar:

Nota: Tomado de Vásquez et al. (2020)