TEC | Tecnológico de Costa Rica

MA-2105 ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuación diferencial con variable ausente

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde

Resuelva la ecuación diferencial:

1

$$3yy'y'' = 1 + (y')^3$$

sujeta a las condiciones $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$. Asuma $x > 0,\ y > 0$ y soluciones crecientes.

1

$$3y\boxed{y'}\boxed{y''} = 1 + (\boxed{y'})^3$$

Observación: En la ecuación (*) hay tres variables: x, y, v

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v$$

- Tomando la sustitución $\boxed{v} = y' \Rightarrow \boxed{v'} = y''$
- La ecuación 1 se escribiría como:

$$3yvv' = 1 + v^3 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 3yv\frac{dv}{dx} = 1 + v^3$$

$$\Rightarrow 3yv\frac{dv}{dy} \cdot v = 1 + v^3$$

$$\Rightarrow 3yv^2\frac{dv}{dy} = 1 + v^3$$

- Separando variables se obtiene:

$$\frac{3v^2}{1+v^3}dv = \frac{dy}{y}$$

2

$$\frac{3v^2}{1+v^3}\,dv = \frac{dy}{y}$$

Observación:

Se puede omitir el valor absoluto en la ecuación (**), pues: $y > 0$ y $1 + v^3 > 0$

- Integrando a ambos lados de la ecuación 2 se obtiene:

$$\int \frac{3v^2}{1+v^3}\,dv = \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow ln\left(1+v^3\right) = ln(y) + ln\, C \qquad (**)$$

$$\Rightarrow ln\left(1+v^3\right) = ln(Cy) \Rightarrow 1 + v^3 = Cy$$

$$\Rightarrow v^3 = Cy - 1$$

$$\Rightarrow v = (Cy - 1)^{\frac{1}{3}}$$

- Como $v = y'$

$$y' = (Cy - 1)^{\frac{1}{3}}$$

3

$$y' = (Cy - 1)^{\frac{1}{3}}$$

- Aplicando las condiciones $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ se tiene:

$$(C - 1)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow C = 1$$

- En la ecuación 3 y como $C = 1$, entonces: $y' = (y - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (y - 1)^{\frac{1}{3}}$

- Separando variables se obtiene: $\int \frac{dy}{(y-1)^{\frac{1}{3}}} = \int dx$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(y - 1)^{\frac{2}{3}} = x + K$$

4

$$\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} = x + K$$

1

$$3yy'y'' = 1 + (y')^3$$

- Aplicando en 4 las condiciones $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ se tiene:

$$\frac{3}{2}(1-1)^{\frac{2}{3}} = 0 + K \quad \Rightarrow K = 0$$

- Así en la ecuación 4 como $K = 0$, se tiene que

$$\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} = x$$

- Finalmente, la solución general de la ecuación 1 es:

$$y(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)^3 + 1$$

Créditos

Vicerrectoría de Docencia

CEDA-TEC Digital

Proyecto de Virtualización 2018

Ecuaciones Diferenciales

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde - Profesor

Bach. Dayana Calderón Prado - Estudiante Asistente

Ing. Luis Carlos Guzmán Arias - Coordinador de Diseño