Tecnológico de Costa Rica

MA-2105 ECUACIONES DIFERENCIALES

Ley de enfriamiento de Newton

M.Sc. Reiman Acuña Chacón

Ley de Enfriamiento de Newton

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(U - M)$$

- α es constante de proporcionalidad
- U = *la temperatura del objeto*
- *M=temperatura del medio*

Ejemplo: Agua a temperatura 80ºC, es colocada en un medio circundante que se mantiene a temperatura de 50ºC.

A los 5 minutos la temperatura del agua es 70ºC. Determine una fórmula para la temperatura del agua en función del tiempo transcurrido y la temperatura a los 10 minutos

$$\boldsymbol{\frac{dU}{dt} = \alpha(U - M)}$$

Observación: M representa el medio y U la temperatura del objeto

Respuesta:

- $U(t)$ la temperatura del agua
- $M = 50$

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(U - 50)$$

$$\boldsymbol{\frac{dU}{dt} = \alpha(U - M)}$$

Observación: La temperatura incial del agua es de 80º C y a los 5 minutos de 70º C

Respuesta:

- $U(t)$ la temperatura del agua
- $M = 50$

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(U - 50)$$

con $U(0) = 80$ y $U(5) = 70$

Observación: La ecuación diferencial es del tipo lineal

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(U - 50)$$

$$U' = \alpha U - 50\alpha$$

$$U' - \alpha U = -50\alpha$$

Observación: factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -\alpha dt} = e^{-\alpha t}$$

$$U' - \alpha U = -50\alpha$$

Observación: factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -\alpha dt} = e^{-\alpha t}$$

$$U' - \alpha U = 50\alpha$$

$$e^{-\alpha t}(U' - \alpha U) = e^{-\alpha t}(-50\alpha)$$

Observación: factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -\alpha dt} = e^{-\alpha t}$$

$$U' - \alpha U = -50\alpha$$

$$e^{-\alpha t}(U' - \alpha U) = e^{-\alpha t}(-50\alpha)$$

$$e^{-\alpha t}U' - \alpha e^{-\alpha t}U = -50\alpha e^{-\alpha t}$$

Observación: Derivada

$$\frac{d(U \cdot e^{-\alpha t})}{dt} = e^{-\alpha t}U' - \alpha e^{-\alpha t}U$$

$$U' - \alpha U = -50\alpha$$

$$e^{-\alpha t}(U' - \alpha U) = e^{-\alpha t}(-50\alpha)$$

$$e^{-\alpha t}U' - \alpha e^{-\alpha t}U = -50\alpha e^{-\alpha t}$$

$$\frac{d(U \cdot e^{-\alpha t})}{dt} = -50\alpha e^{-\alpha t}$$

Observación: Integramos a ambos lados para eliminar el diferencial

$$\int \frac{d(U \cdot e^{-\alpha t})}{dt} dt = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\, dt$$

Observación: Integramos a ambos lados para eliminar el diferencial

$$\int \frac{d(U \cdot e^{-\alpha t})}{dt} dt = \int 50\alpha e^{-\alpha t}\, dt$$

$$U \cdot e^{-\alpha t} = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\, dt$$

Observación: Integramos a ambos lados para eliminar el diferencial

$$\int \frac{d(U\cdot e^{-\alpha t})}{dt}dt = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\,dt$$

$$U\cdot e^{-\alpha t} = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\,dt$$

$$U\cdot e^{-\alpha t} = -50\alpha \int e^{-\alpha t}\,dt$$

Observación:

$$\int e^{\beta x}\,dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta} + C$$

$$\int \frac{d(U\cdot e^{-\alpha t})}{dt}\,dt = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\,dt$$

$$U\cdot e^{-\alpha t} = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\,dt$$

$$U\cdot e^{-\alpha t} = -50\alpha \int e^{-\alpha t}\,dt$$

$$U\cdot e^{-\alpha t} = -50\alpha\left(\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} + C\right)$$

Observación:

$-50\alpha C = C$

$$\int \frac{d(U \cdot e^{-\alpha t})}{dt} dt = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\, dt$$

$$U \cdot e^{-\alpha t} = \int -50\alpha e^{-\alpha t}\, dt$$

$$U \cdot e^{-\alpha t} = -50\alpha \int e^{-\alpha t}\, dt$$

$$U \cdot e^{-\alpha t} = -50\alpha \left(\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} + C \right)$$

$$U \cdot e^{-\alpha t} = 50 e^{-\alpha t} + C$$

Observación:
Multiplicar por el inverso de $e^{-\alpha t}$ a ambos lados de la ecuación

$$U \cdot e^{-\alpha t} = 50e^{-\alpha t} + C$$

$$U = e^{\alpha t}(50e^{-\alpha t} + C)$$

Observación:
Multiplicar por el inverso de $e^{-\alpha t}$ a ambos lados de la ecuación

$$U \cdot e^{-\alpha t} = 50e^{-\alpha t} + C$$

$$U = e^{\alpha t}(50e^{-\alpha t} + C)$$

$$U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}$$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

- $U(0) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 0} = 80$
- $U(5) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 5} = 70$

Observación:

$U(0) = 80$

$U(5) = 70$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$U(0) = 80$

$U(5) = 70$

- $U(0) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 0} = 80$
- $U(5) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 5} = 70$

- $50 + C \cdot 1 = 80$
- $50 + Ce^{\alpha \cdot 5} = 70$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:
$U(0) = 80$
$U(5) = 70$

- $U(0) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 0} = 80$
- $U(5) = 50 + Ce^{\alpha \cdot 5} = 70$

- $50 + C \cdot 1 = 80$
- $50 + Ce^{\alpha \cdot 5} = 70$

- $C = 30$
- $50 + 30e^{\alpha \cdot 5} = 70$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$U(0) = 80$

$U(5) = 70$

- $C = 30$
- $30e^{\alpha \cdot 5} = 20$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$U(0) = 80$

$U(5) = 70$

- $C = 30$
- $30e^{\alpha \cdot 5} = 20$

- $C = 30$
- $e^{\alpha \cdot 5} = \frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$U(0) = 80$

$U(5) = 70$

- $C = 30$
- $30e^{\alpha \cdot 5} = 20$

- $C = 30$
- $e^{\alpha \cdot 5} = \frac{2}{3}$

- $C = 30$
- $\alpha = \frac{1}{5} \ln \frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$$C = 30$$

$$\alpha = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$U(t) = 50 + 30e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)t}$$

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$$C = 30$$

$$\alpha = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$U(t) = 50 + 30e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)t}$$

A los 10 minutos

$$\boldsymbol{U(t) = 50 + Ce^{\alpha t}}$$

Observación:

$$C = 30$$

$$\alpha = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$U(t) = 50 + 30e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)t}$$

A los 10 minutos

$$U(10) = 50 + 30e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right)10} \approx 63{,}3°$$

Créditos

Vicerrectoría de Docencia

CEDA-TEC Digital

Proyecto de Virtualización 2018

Ecuaciones Diferenciales

M.Sc. Reiman Acuña Chacón - Profesor

Ing. Luis Carlos Guzmán Arias - Coordinador de Diseño

Lic. Jonnathan Ramírez Jiménez-Productor Audiovisual

Luis Barboza Artavia-Edición