

RELATIVIDAD GENERAL Y COSMOLOGÍA

Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo

Escuela de Física

Unidad Académica carrera Licenciatura Ingeniería Física

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

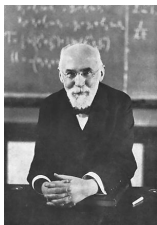
Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Formulación de la teoría de la relatividad especial

A Albert Einstein generalmente se le otorga el crédito por la formulación de la teoría de la relatividad sin embargo el formalismo básico había sido descubierto por Poincaré y Lorentz en 1904.

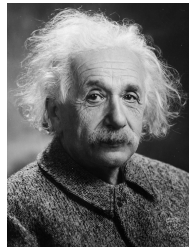
Einstein desconocía algunos de los trabajos anteriores en el momento (1905) de la publicación de su primer artículo sobre la relatividad.



Hendrik Antoon Lorentz



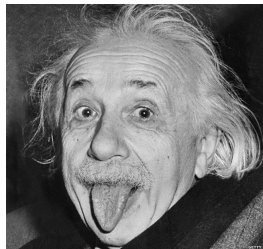
Henri Poincaré



Albert Einstein

Postulados de la teoría especial de la relatividad

La contribución importante de Einstein a la teoría de la relatividad especial fueron dos postulados básicos, los cuales reemplazaron muchas de las suposiciones hechas por Lorentz y otros y además a partir de estas se pueden derivar los resultados.



La base de la teoría de la relatividad está contenida en dos postulados:

- Las leyes de los fenómenos físicos son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales (es decir, solo se puede medir el movimiento relativo de los marcos inerciales; el concepto de movimiento que se relaciona con el tiempo hasta el reposo absoluto "no tiene sentido").
- La velocidad de la luz (en el espacio libre) es una constante universal, independiente de cualquier movimiento de la fuente y del observador.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Transformaciones de Galileo

En la mecánica Newtoniana los conceptos de espacio y tiempo están completamente separados, específicamente se asume que el tiempo es una cantidad absoluta e independiente del sistema de referencia.

Considere dos sistemas de referencia K y K' el cual se mueve a una velocidad uniforme u a lo largo de los ejes x y x' . La transformación de las coordenadas de un punto de un sistema a otro es de la forma

$$x' = x - ut,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

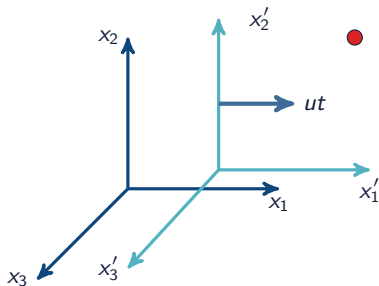
$$t' = t.$$

(1)

(2)

(3)

(4)



Dichas transformaciones se conocen como **transformaciones de Galileo**

Transformaciones de velocidad y aceleración

Derivando las ecuaciones (1), (2) y (3) con respecto a t o a t' (dado que siempre son iguales según la ecuación (4)) se obtiene la relación entre las componentes de la velocidad del objeto v y v' medidas en los dos marcos:

$$v'_x = v_x - u, \quad (5)$$

$$v'_y = v_y, \quad (6)$$

$$v'_z = v_z, \quad (7)$$

o, en forma vectorial,

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}. \quad (8)$$

Dado que u es constante, la segunda derivada temporal muestra que se obtiene la misma aceleración para el objeto medida en ambos marcos de referencia:

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (9)$$

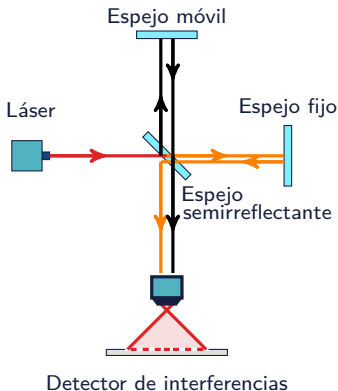
con lo cual $F = ma = ma'$ para el objeto de masa m ; por lo que las leyes de Newton se cumplen en ambos marcos de referencia.

Experimento de Michelson-Morley

En 1887, Albert Michelson y Edward Morley usaron el interferómetro de Michelson con el objetivo medir la velocidad relativa a la que se mueve la Tierra con respecto al éter.

Los resultados del experimento de Michelson-Morley fueron consistentes con una velocidad de la Tierra a través del éter de cero.

Por otra parte, la ecuación (8) implica que dos observadores que se mueven con una velocidad relativa u deben obtener diferentes valores para la velocidad de la luz. La contradicción entre la expectativa de sentido común de la ecuación (8) y la constancia de la velocidad de la luz determinada experimentalmente significa que las transformaciones de Galileo no pueden ser correctas.



Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son un conjunto de relaciones que dan cuenta de cómo transforman las cantidades físicas obtenidas por dos observadores diferentes.

Estas transformaciones de Lorentz fueron introducidas por Hendrik Antoon Lorentz quien mostró que estas ecuaciones eran necesarias para que las leyes del electromagnetismo tuvieran la misma forma en cualquier marco de referencia.

Finalmente, fue Einstein quien mostró que estas ecuaciones son necesarias para todas las leyes físicas.

Considere dos sistemas de referencia K y K' el cual se mueve a una velocidad uniforme u a lo largo de los ejes x y x' . La transformación de las coordenadas de un punto de un sistema a otro es de la forma

$$x' = \gamma(x - ut), \quad (10)$$

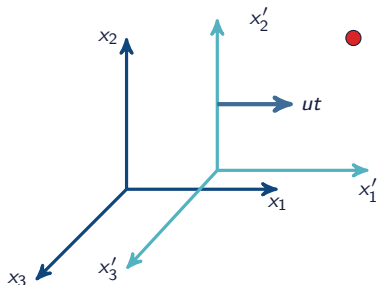
$$y' = y, \quad (11)$$

$$z' = z, \quad (12)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right). \quad (13)$$

donde c es la velocidad de la luz y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (14)$$



Transformaciones inversas de Lorentz

Las ecuaciones (10) a la (13) lo que nos muestran es como transforman las cantidades físicas vistas por un observador en el marco de referencia K' con respecto al observador K . Sin embargo, también se pueden obtener las transformaciones inversas de Lorentz, simplemente reemplazando u por $-u$ y las cantidades con prima por cantidades sin prima

$$x = \gamma (x' + ut) , \quad (15)$$

$$y = y' , \quad (16)$$

$$z = z' , \quad (17)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right) . \quad (18)$$

Simultaneidad

Considere un observador en el marco de referencia K el cual mide dos haces de luz de que se encienden al mismo tiempo t pero en diferentes coordenadas x_1 y x_2 . Luego, un segundo observador en el marco K' mide el intervalo de tiempo entre los haces que se apagan. Usando la ecuación (13) se obtiene

$$\Delta t' = \gamma \Delta x u / c^2. \quad (19)$$

De acuerdo con la ecuación (19) el observador en el marco K' , si $x_1 \neq x_2$, ¡entonces los flashes no se disparan al mismo tiempo, lo que significa que Los eventos que ocurren simultáneamente en un marco de referencia inercial no ocurren simultáneamente en todos los demás marcos de referencia inercial.

Un observador que se mueve a la misma velocidad en la dirección opuesta (u cambió a $-u$) llegará a la conclusión opuesta: la bombilla 2 se apaga después de la bombilla 1.

La ecuación (19) indica que no se puede decir con sentido absoluto que dos acontecimientos en diferente lugar puedan haberse realizado al mismo tiempo pues si dos observadores presencian un acontecimiento en lugares diferentes, espacios diferentes, al mismo tiempo, ninguno de ellos podría afirmar que se realizó simultáneamente.

Tiempo propio y dilatación del tiempo

Imagine que una fuente de Luz ubicada en reposo con respecto al marco K' produce un destello de luz cada $\Delta t'$ segundos.

Si se emite un destello en el tiempo t'_1 , entonces el siguiente destello se emitirá en el tiempo $t'_2 = +\Delta t'$, medido por un reloj en el marco K' .

Usando la ecuación (18) con $x'_1 = x'$, el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre los mismos dos destellos medido por un reloj en el marco de referencia de K es

$$\Delta t_{moving} = \gamma \Delta t_{rest}, \quad (20)$$

donde Δt_{rest} es el intervalo de tiempo en el marco de referencia donde la fuente de luz se encuentra en reposo y Δt_{moving} es el intervalo de tiempo en el marco de referencia donde la fuente de luz se encuentra en movimiento.

La ecuación (20) muestra el efecto que se conoce como de la **dilatación del tiempo** en un reloj en movimiento lo cual indica que el intervalo de tiempo entre dos eventos es medido de manera diferente por diferentes observadores en movimiento relativo.

El intervalo de tiempo más corto se mide con un reloj en reposo en relación con los dos eventos. Este reloj mide el **tiempo propio** entre los dos eventos. Cualquier otro reloj que se mueva en relación con los dos eventos medirá un intervalo de tiempo más largo entre ellos.

Longitud propia y contracción de la longitud

Considere una barra que se encuentra en reposo con respecto al marco de referencia K' a lo largo del eje x' ; El extremo izquierdo de la barra se encuentra en la coordenada x'_1 , y el extremo derecho de la barra en la coordenada x'_2 , de tal manera que la longitud de la varilla medida en K' es $L' = x'_2 - x'_1$.

¿Cuál es la longitud de la varilla medida desde S ?

Usando la ecuación (10) con $t_1 = t_2$

$$L_{moving} = \frac{1}{\gamma} L_{rest}, \quad (21)$$

donde L_{rest} es la longitud de la barra en el marco de referencia donde esta se encuentra en reposo y L_{moving} es la longitud de esta en el marco de referencia donde dicha barra se encuentra en movimiento.

La ecuación (21) muestra el efecto de la **contracción de la longitud** en una barra en movimiento, además indica que la longitud o la distancia se mide de manera diferente por dos observadores en movimiento relativo. Si una barra se mueve en relación con un observador, ese observador medirá una barra más corta que un observador en reposo con respecto a él. La longitud más larga, llamada **longitud propia** de la barra, se mide en el marco de descanso de la barra.

Solo las distancias paralelas a la dirección del movimiento relativo se ven afectadas por la contracción de la longitud; las perpendiculares a la dirección del movimiento relativo no cambian.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Efecto Doppler



En 1842, el físico austriaco Christian Doppler demostró que cuando una fuente de sonido se mueve a través de un medio (como el aire), la longitud de onda se comprime hacia adelante y se expande hacia atrás.

Este cambio en la longitud de onda de cualquier tipo de onda causado por el movimiento de la fuente o del observador se denomina **efecto Doppler**.

Doppler dedujo que la diferencia entre la longitud de onda λ_{obs} observada para una fuente de sonido en movimiento y la longitud de onda λ_{rest} medida en el laboratorio para una fuente de referencia en reposo está relacionada con la velocidad radial v_r , (la componente de la velocidad directamente hacia o desde la fuente de sonido) esto es

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}} = \frac{v_r}{v_s}, \quad (22)$$

donde v_s , es la velocidad del sonido en el medio.

Efecto Doppler relativista

La ecuación (22) no es exactamente correcta para la luz. El efecto Doppler de la luz es un fenómeno cualitativamente diferente de su contraparte de las ondas sonoras.

La ecuación que describe el efecto Doppler relativista es, por lo tanto,

$$v_{obs} = \frac{v_{rest}}{\gamma(1 + v_r/c)}, \quad (23)$$

donde $v_r = u \cos \theta$ es la velocidad radial de la fuente de luz y u es la velocidad con la que se mueve la un observador en relación con un observador con la fuente de luz.

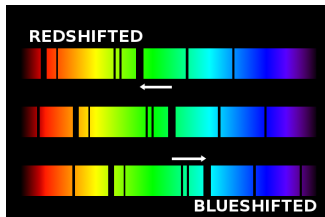
Si la fuente de luz se aleja directamente del observador ($\theta = 0$) o se acerca al observador ($\theta = 180^\circ$), entonces la ecuación (23) se reduce a

$$v_{obs} = \frac{v_{rest}(1 - v_r/c)}{(1 + v_r/c)}. \quad (24)$$

En el caso en que el movimiento sea perpendicular a la línea de visión del observador ($\theta = 90^\circ$) la ecuación (23) se conoce como **efecto Doppler transversal** el cual se debe enteramente al efecto de la dilatación del tiempo.

Corrimiento al rojo

Cuando los astrónomos observan una estrella o una galaxia que se aleja o se acerca a la Tierra, la longitud de onda de la luz que reciben se desplaza hacia longitudes de onda más largas o más cortas, respectivamente.



Si la fuente de luz se aleja del observador ($v_r > 0$) entonces $\lambda_{obs} > \lambda_{rest}$, este cambio a una longitud de onda más larga se conoce como **corrimiento al rojo**.

De manera similar, si la fuente se mueve hacia el observador ($v_r < 0$), entonces hay un desplazamiento hacia una longitud de onda más corta, un **desplazamiento hacia el azul**.

Parámetro de corrimiento al rojo

Debido a que la mayoría de los objetos en el universo fuera de nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, se están alejando de nosotros, los astrónomos comúnmente miden los desplazamientos hacia el rojo.

Para describir el cambio de longitud de onda se utiliza el **parámetro de corrimiento al rojo** z , el cual se define como

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}}. \quad (25)$$

Usando la ecuación (23) y el definición de velocidad de propagación de las ondas $c = \lambda\nu$ el parámetro del corrimiento al rojo se convierte en

$$z = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}} - 1. \quad (26)$$

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Transformación de velocidad relativista

Debido a que los intervalos de espacio y tiempo son medidos de manera diferente por diferentes observadores en movimiento relativo, las velocidades también deben transformarse.

Las ecuaciones que describen la transformación relativista de velocidades se pueden encontrar fácilmente a partir de las transformaciones de Lorentz ((10) a (13)) escribiéndolas como diferenciales.

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \quad (27)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_y/c^2)}, \quad (28)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_z/c^2)}. \quad (29)$$

Al igual que con las transformaciones inversas de Lorentz, las transformaciones inversas de velocidad se pueden obtener intercambiando cantidades primadas y no primadas y reemplazando u con $-u$.

Momento relativista

La teoría de la relatividad especial de Einstein también requiere nuevas definiciones para los conceptos de cantidad de movimiento y energía. Las ideas de conservación del momento lineal y la energía son dos de los pilares de la física.

De acuerdo con el **principio de relatividad**, si el momento se conserva en un marco de referencia inercial, entonces debe conservarse en todos los marcos de inercia.

Se puede mostrar que para que se cumpla el principio de relatividad el momento debe tener forma

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (30)$$

donde γ es el factor de Lorentz definido por la ecuación (14). Se debe tomar en cuenta que la u en el denominador es la magnitud de la velocidad de la partícula en relación con el observador, no la velocidad relativa entre dos marcos de referencia arbitrarios,

Energía cinética relativista

Usando la ecuación (30) y la relación entre energía cinética y trabajo se puede derivar una expresión para la energía cinética relativista.

El punto de partida es la segunda ley de Newton, $F = dp/dt$, aplicada a una partícula de masa m que inicialmente está en **reposo**.

Considere una fuerza de magnitud F que actúa sobre la partícula en la dirección x . La energía cinética final K de la partícula es igual al trabajo total realizado por la fuerza sobre la partícula a medida que viaja desde su posición inicial.

$$K = \int_{x_i}^{x_f} F dx = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dp}{dt} dx = \int_{p_i}^{p_f} \frac{dx}{dt} dp = \int_{p_i}^{p_f} v dp \quad (31)$$

donde p_i y p_f son los momentos inicial y final de la partícula. Integrando la última expresión por partes y usando la condición inicial $p_i = 0$ se obtiene

$$K = p_f v_f - \int_0^{v_f} p dv = mc^2 (\gamma - 1) \quad (32)$$

Energía relativista total y energía de reposo

Del lado derecho de la ecuación (32) consiste en la diferencia entre dos términos de energía. La primera se identifica como la **energía relativista total** E , esto es

$$E = \gamma mc^2 \quad (33)$$

El segundo término es una energía que no depende de la velocidad de la partícula, por lo que una partícula tiene esta energía incluso cuando está en reposo. Formalmente, el término mc^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula:

$$E_{rest} = mc^2 \quad (34)$$

Cuando la energía de una partícula se da como (por ejemplo) 40 MeV, el significado implícito es que la energía cinética de la partícula es 40 MeV; la energía de reposo no está incluida.

Finalmente, existe una expresión muy útil que relaciona la energía total E de una partícula, la magnitud de su cantidad de movimiento p y su energía en reposo mc^2 . Se afirma que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (35)$$

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Inicios de la relatividad general



Los inicios de la Relatividad General se remontan al siglo *XVII* cuando personas como Galileo Galilei y Simon Stevin empezaban a darse cuenta de que la velocidad que alcanzan los objetos en caída libre es independiente de la masa de los objetos, en contraste con la intuición cotidiana y la física aristotélica.

Galilei sacó sus conclusiones sobre la caída libre dejando rodar bolas de planos inclinados y las publicó en su libro *De motu* en 1590.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Masa inercial y masa gravitacional

En la mecánica newtoniana aparecen dos tipos de masas, en distintos contextos y de distintos tipos.

La **masa inercial** m_i que aparece en la segunda ley de Newton como constante de proporcionalidad entre la fuerza \vec{F} ejercida en un cuerpo y su aceleración \vec{a} :

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (36)$$

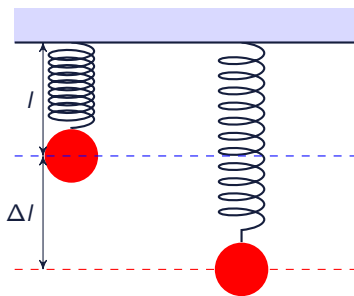
por lo que la masa inercial es, por lo tanto, una medida para la resistencia de un cuerpo a cambios de velocidad.

La **masa gravitacional** m_g es una medida de cómo interacciona un cuerpo gravitacionalmente con los demás cuerpos en el universo. El potencial gravitatorio causado por un cuerpo sobre otro viene dado por

$$\phi(r) = \frac{G_N m_g M_g}{r} \quad (37)$$

donde G_N es la constante de Newton y r es la distancia entre las dos masas m_g y M_g .

¿Existe alguna relación entre m_i y m_g ?



Si se considera una masa colgando de un resorte con constante de elasticidad k como la de la figura.

A partir de la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación de movimiento

$$kx = m_i \ddot{x}, \quad (38)$$

y de ella se obtiene la frecuencia $\omega = \sqrt{k/m_i}$, por lo cual si se mide ω entonces se puede determinar la masa inercial m_i

Por otro lado, si se analiza la posición de equilibrio la fuerza del resorte está compensada por la fuerza gravitacional lo que lleva a que

$$k\Delta l = m_g g, \quad (39)$$

donde g es la aceleración gravitacional y Δl es el desplazamiento de la longitud de reposo del resorte. Por lo tanto, a partir del desplazamiento L se puede obtener una medida para m_g .

Implicaciones de la universalidad de la caída libre

De acuerdo con lo obtenido por Galileo, la velocidad de objetos en caída libre es independiente de su masa, esto implica que existe una relación entre la masa inercial m_i y la masa gravitatoria m_g en la mecánica newtoniana.

A partir de la segunda ley de Newton se puede encontrar la ecuación de movimiento para una partícula en caída libre:

$$-m_g g = m_i \ddot{y}, \quad (40)$$

cuya solución en general tiene la forma

$$y(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_g}{m_i} t^2 + v_{y0} t + y_0, \quad (41)$$

donde v_0 y y_0 son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Si dos cuerpos diferentes con distintas masas (tanto m_i como m_g) y con las mismas condiciones iniciales llegan a la vez al suelo, se debe sumir

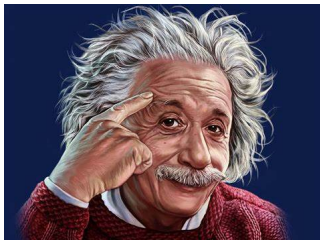
$$\frac{m_g}{m_i} = \text{constante}. \quad (42)$$

Experimentos que comprueban $m_g = m_i$

Los experimentos muestran que m_g/m_i es una constante universal (independiente del material), que se puede tomar igual 1 con la apropiada elección de unidades.

Año	Investigador	Sensitividad	Método
1590	Galileo	2×10^{-2}	Péndulo, caída de torre
1686	Newton	$\sim 10^{-3}$	Péndulo
1832	Bessel	2×10^{-5}	Péndulo
1908	Eötvös	2×10^{-9}	Péndulo, caída de torre
1964	Dicke, Roll y Krotkov	3×10^{-11}	Balanza de torsión
1972	Braginsky y Panov	$\sim 10^{-12}$	Balanza de torsión
2017	Microscopio	$\sim 10^{-15}$	Balanza de torsión

Relatividad especial y gravedad newtoniana



En 1907 Einstein se dio cuenta de que la teoría de la relatividad especial era necesariamente incompatible con la gravedad newtoniana, por ser esta última una interacción inmediata y a distancia.

No tenía claro cómo se podía incorporar la gravedad en la relatividad especial, dado que dicha interacción trataba con observadores acelerados, para los cuales el Principio de la relatividad no es válido.

Le impresionó mucho la igualdad de la masa inercial m_i y la masa gravitatoria m_g , aunque la mecánica newtoniana no daba ninguna razón a priori por la que estas dos cantidades físicas tuvieran el mismo valor, pero creía que esto no podía ser casualidad, sino que insinuaba una profunda propiedad de la naturaleza.

La relatividad general es una teoría que fue desarrollada por Einstein entre 1907 y 1915. De acuerdo con esta, la atracción gravitatoria observada entre masas se debe a una curvatura del espacio-tiempo y por tanto a un reflejo de la geometría del mismo y no de fuerzas a distancia como en la teoría newtoniana de la gravedad.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

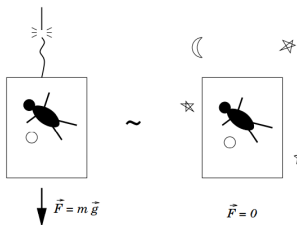
Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

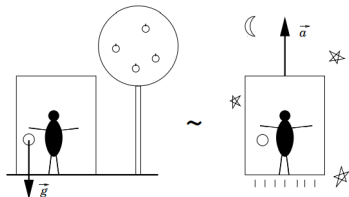
Principio de equivalencia

Establece que observadores en caída libre en un campo gravitatorio general son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones.



Un observador en caída libre no siente su propio peso y por lo tanto podría pensar que estuviera en una región del espacio donde no hubiera campo gravitatorio.

Un objeto que se suelta por un observador durante su caída libre, caerá a la misma velocidad que el propio observador, de modo que este lo verá flotando, como si estuviera en el espacio.



Principio de covariancia

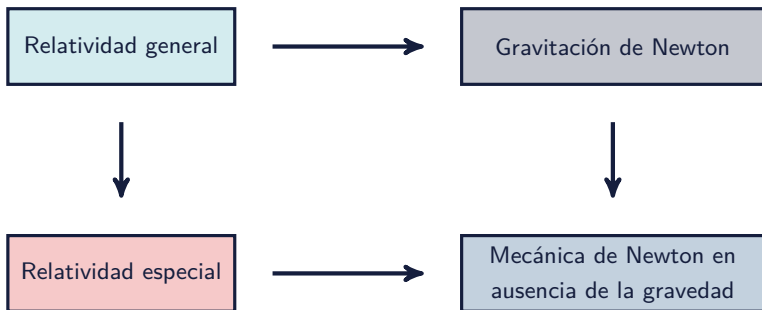
Establece que las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Las leyes de la física deben, por lo tanto, transformarse de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas.

El hecho de que localmente un observador no pueda distinguir entre estar en caída libre en un campo gravitatorio o ser un observador inercial interestelar implica que existe un cambio de coordenadas que elimina el campo gravitatorio en una pequeña región y hace que el espacio-tiempo parezca localmente de Minkowski.

Principio de correspondencia

Para comprobar la validez de una teoría, debe estar de acuerdo con las teorías preexistentes.

Lo anterior implica que la relatividad general debe estar de acuerdo con la física newtoniana en el límite de campos gravitacionales débiles y bajas velocidades.



Principio de mínimo acoplo

Considere un espacio de Minkowski es cual es descrito por la métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

y para el cual un elemento de línea, que resume las propiedades geométricas del espacio-tiempo de Minkowski viene dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (44)$$

El principio de mínimo acoplo establece que las leyes de la física en espacios curvos son los mismos que las de relatividad especial, donde se sustituyen las derivadas parciales ∂_μ por covariantes ∇_μ y la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu\nu}$.

donde la derivada covariante se determina

$$\nabla_\mu X^\nu = \partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu X^\rho \quad \nabla_\mu X_\nu = \partial_\mu X_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\rho X_\rho \quad (45)$$

con $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de Einstein formalmente se escriben como

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (46)$$

Dichas ecuaciones forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden, lo que hace que sean muy difíciles de resolver analíticamente.

No hay técnicas conocidas para obtener una solución general.

Todas las soluciones conocidas son casos con mucha simetría u obtenidas a través de técnicas específicas.

$T_{\mu\nu}$ contiene todas las contribuciones de los campos de materia-energía del sistema, pero **NO** contiene la energía momentum del campo gravitatorio.

En caso que $T_{\mu\nu} = 0$ se tiene que cualquier otra contribución en la materia-energía debe ser atribuida al campo gravitacional.

Tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (47)$$

donde:

$R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci,

R es el escalar de curvatura de Ricci, y

$g_{\mu\nu}$ es la métrica que describe el espacio-tiempo y satisface $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, donde $g^{\rho\nu}$ se conoce como la métrica inversa.

Es importante tener presente que $g_{\mu\rho}$ y $g^{\rho\nu}$ sirven para subir y bajar índices, esto es

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu}x_{\nu} \qquad x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu} \qquad (48)$$

Tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\rho}^{\lambda} \quad (49)$$

Mientras que el tensor de Ricci es la contracción del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = g^{\nu\alpha} R_{\alpha\mu\nu\rho} \quad (50)$$

También se tiene el escalar de curvatura es la contracción del tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (51)$$

Finalmente, se tienen los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (52)$$

Tensor de energía momento

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Densidad de} \\ \text{energía} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Densidad de} \\ \text{momento} \end{array} \\ \begin{array}{c} T^{00} \\ T^{10} \\ T^{20} \\ T^{30} \end{array} & \begin{array}{c} T^{01} \\ T^{11} \\ T^{21} \\ T^{31} \end{array} & \begin{array}{c} T^{02} \\ T^{12} \\ T^{22} \\ T^{32} \end{array} & \begin{array}{c} T^{03} \\ T^{13} \\ T^{23} \\ T^{33} \end{array} \end{pmatrix}$$

Densidad de momento Flujo de momento, esfuerzo cortante y presión

Es un tensor de rango 2.

Simétrico que contiene la información sobre la densidad de energía, presión y esfuerzos.

El tensor momentun-energía respeta la leyes de conservación

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \tag{53}$$

La ecuación de la geodésica

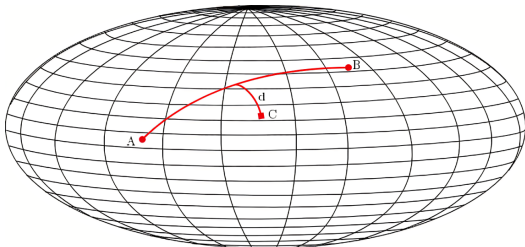
Una línea geodésica se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie.

Las geodésicas deben satisfacer la siguiente condición

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (54)$$

la cual se conoce como la **ecuación de la geodésica**.

A partir de las ecuaciones de Einstein se obtiene la curvatura pero es a través de las ecuaciones de las geodésicas como se interpreta esa curvatura.



Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

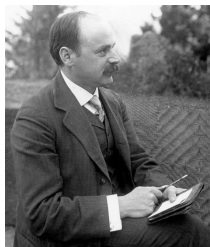
Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Solución de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild es una solución estática de las ecuaciones del vacío, con simetría esférica.

Por lo tanto, es una buena descripción para el campo gravitatorio causado por objetos masivos esféricos, como estrellas y planetas.



Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild permiten calcular correcciones relativistas a las órbitas planetarias y la deflexión de la luz.

En ausencia de energía y materia, el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ es cero y (la parte sin traza) de las ecuaciones de Einstein se reducen a $R_{\mu\nu} = 0$.

La solución de Schwarzschild es la solución no-trivial más sencilla, debido a su gran cantidad de simetrías.

$$ds^2 = -b(r) dt^2 + a(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (55)$$

Paso 1 y 2: Métrica y símbolos de Christoffel

Las componentes de la métrica:

$$g_{tt} = -b(r) \quad g_{rr} = a(r) \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$$

La métrica inversa

$$g^{tt} = -\frac{1}{b(r)} \quad g^{rr} = \frac{1}{a(r)} \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Los símbolos de Christoffel no nulos

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{b'}{2b} \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{b'}{2a} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{a'}{2a}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{-r}{a} \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{-r \sin^2 \theta}{a} \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta$$

Paso 3 y 4: Tensor de Ricci y escalar de curvatura

Los componentes del tensor y el escalar de Ricci que no son cero son

$$R_{tt} = \frac{1}{2} \left(\frac{b''}{a} - \frac{b'a'}{2a^2} - \frac{b'^2}{2a} + 2\frac{b'}{ar} \right)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2} \left(-\frac{b''}{b} + \frac{b'a'}{2ab} + \frac{b'^2}{b^2} + 2\frac{a'}{ar} \right)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{ra'}{2a^2} - \frac{rb'}{2ab} - \frac{1}{a} + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

El escalar de curvatura

$$R = \frac{-b''}{ab} + \frac{1}{2} \frac{a'b'}{a^2b} + \frac{1}{2} \frac{b'^2}{ab^2} - \frac{2b'}{rab} + \frac{2a'}{ra^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{ar^2}$$

Paso 5 y 6: Tensor de Einstein y Resolver las ecuaciones

Los componentes del tensor y el escalar de Ricci que no son cero son

$$G_{tt} = \frac{b(ra' - a^2 - a)}{r^2 a^2}$$

$$G_{rr} = \frac{rb' - ab + b}{r^2 b}$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{1}{4} \frac{r^2}{a^2 b^2} (2abb'' - ba'b' - ab'^2)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}$$

Se resuelven las ecuaciones de Einstein

$$G_{tt} = 0 \Rightarrow a' = \frac{1}{r} (a - a^2)$$

$$G_{rr} = 0 \Rightarrow b' = \frac{b}{r} (a - 1)$$

Lo que lleva a que

$$a = \left(1 - \frac{2G_N m}{r}\right)^{1/2} \qquad b = 1 - \frac{2G_N m}{r}$$

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Tests de la Relatividad General

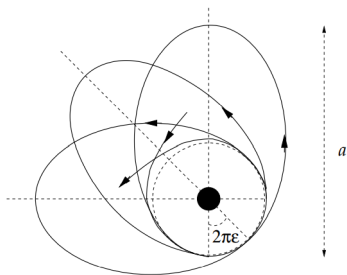
Einstein propuso tres tests para comprobar su relatividad general: el avance del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz por un objeto masivo y la dilatación gravitacional del tiempo, conocidos hoy como los tres tests clásicos.

Precesión del perihelio de Mercurio

La relatividad general predice una corrección relativista a la primera ley de Kepler, en lugar de que el planeta siga órbitas perfectamente elípticas, la trayectoria tiene en primera aproximación la forma de un elipse que gira lentamente en el plano de la órbita, de modo que el perihelio, la posición más cercana al Sol, se mueve cierto ángulo $2\pi\epsilon$ a lo largo de un círculo con respecto a su perihelio anterior

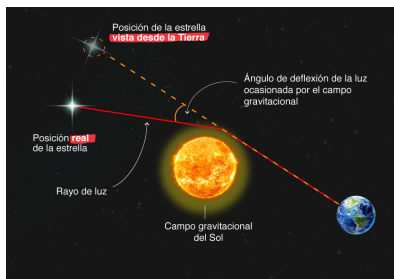
predic: $(574,64 \pm 0,69)$ arcsec/siglo (42 arcsec/siglo debido a Rel. Gen.)

observ: $(574,10 \pm 0,65)$ arcsec/siglo



Desviación de la luz

La luz posee “peso”, es decir, es atraída y desviada por los cuerpos celestes, por lo que los rayos luminosos deberían curvarse en presencia de un campo gravitatorio y se proyecta una imagen en una parte del cielo distinta a su verdadera posición.



Fuente: NASA



El 29 de mayo de 1919 durante una expedición, liderada por Arthur Stanley Eddington se confirmó la predicción de la relatividad general para la desviación de la luz estelar por el Sol gracias a un eclipse total de Sol.

Dilatación temporal gravitatoria

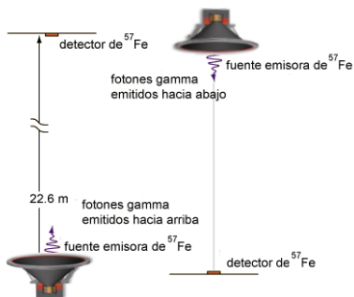
Se manifiesta en marcos de referencia acelerados o en el campo gravitacional de objetos masivos.

Los relojes que se encuentran lejos de cuerpos masivos van más rápido, y los que están cerca de los cuerpos masivos van más despacio, respecto a un observador situado lejos de la fuente del campo gravitatorio.

Se ha medido experimentalmente

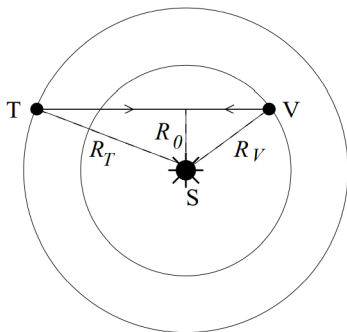
- usando relojes atómicos en aviones,
- el experimento de Pound y Rebka,
- observaciones del espectro de la enana blanca Sirio,
- experimentos con las señales de tiempo enviadas a y desde el módulo de descenso en marte Viking 1.

Experimento de Pound y Rebka



Efecto Shapiro

Se considera el cuarto test clásico de la relatividad general, el cual fue propuesto por Irwin Shapiro en 1964, y al cual además se le conoce como el efecto del retraso temporal gravitacional.



Un rayo de luz emitido desde la Tierra refleja en la superficie de Venus y está detectado otra vez en la Tierra.

Al viajar por el campo gravitatorio del Sol, la trayectoria por el espacio-tiempo curvo es más larga y la señal sufrirá un retraso en comparación con el espacio plano.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

Relatividad general y cosmología

La cosmología es el estudio del universo entero y es casi tan antigua como la civilización humana pero fue hasta el momento en que aparece la relatividad general que forma parte de la física.

Describe la dinámica del universo entero, a muy grandes escalas, donde la influencia de galaxias individuales e incluso cúmulos de galaxias son meramente perturbaciones despreciables.

La cosmología relativista obtiene modelos realistas gracias a dos principios básicos.

Principio Cosmológico: En cualquier momento, el universo es homogéneo e isótropo a muy grandes escalas

Postulado de Weyl: La materia a escalas cosmológicas se comporta como un fluido perfecto, cuyas componentes se mueven a lo largo de geodésicas temporales, que no se intersectan, salvo (posiblemente) en un punto en el pasado.

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\left(\frac{1}{1 - kr^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (56)$$

Es llamada así en honor al físico-meteorólogo ruso Alexander Friedmann, el físico americano Howard Robertson y el matemático inglés Arthur Walker.



En 1922, Friedmann propuso la métrica como Ansatz para el universo y obtuvo una de las primeras soluciones realistas de un universo en expansión.

En 1935 y 1936 Robertson y Walker demostraron independientemente que la métrica que propuso Friedmann es el Ansatz más general que describe un universo homogéneo e isótropo.

Las ecuaciones de Friedmann

La métrica de FRW describe un universo homogéneo e isótropo pero el verdadero problema de la cosmología relativista es la evolución del universo, codificado en la dinámica del factor de escala $a(t)$, para lo cual se debe resolver la ecuación de Einstein, utilizando el ansatz de la métrica de FRW.

Ecuación de Friedman

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (57)$$

Ecuación de evolución

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\kappa\rho - \frac{k}{2a^2}, \quad (58)$$

Ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa(\rho + 3P), \quad (59)$$

donde $\kappa = 8\pi G_N$, ρ y P son respectivamente la densidad y la presión total de todos los tipos de energía y materia presentes en el universo.

Contenido

Postulados de la teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo

Transformaciones de Lorentz

Efecto Doppler relativista

Energía y momento relativista

Relatividad general

Masa inercial y masa gravitacional

Principios de la relatividad general

Ecuaciones de campo de Einstein

Solución de Schwarzschild

Tests de la Teoría General de la Relatividad

Ecuaciones de Friedmann

Ondas gravitacionales

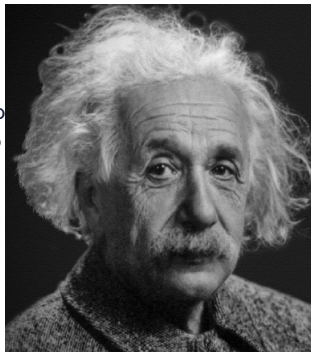
Ondas gravitacionales

Estas fueron predichas por Albert Einstein a principios del siglo XX como consecuencia de la teoría General de la Relatividad.

Son ondas transversales que se mueven a la velocidad de la luz c , las cuales son el resultado de perturbaciones en el espacio tiempo. Debido a que son transversales pueden presentar polarización.

Son muy débiles por lo que es muy complicada su detección.

Son producidas por pulsaciones pequeñas de objetos compactos, radiación por objetos en órbita alrededor de un agujero negro



Ecuación de las ondas gravitacionales

En este caso se considera el límite del campo débil

La métrica \longrightarrow
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2), \quad (60)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica Minkowski y $h_{\mu\nu}$ una perturbación.

Símbolos de Christoffel \longrightarrow
$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} h^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}). \quad (61)$$

Tensor de Ricci \longrightarrow
$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\square^2 h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\rho}^{\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\rho}). \quad (62)$$

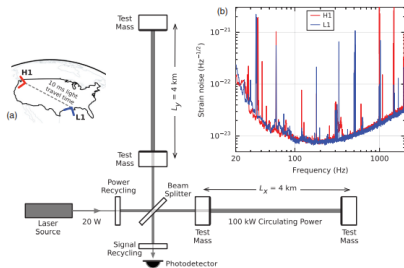
Por otro lado, las coordenadas deben transformar como

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) \quad \rightarrow \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \epsilon_{\nu} - \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}. \quad (63)$$

Con lo anterior se obtienen las ecuaciones de campo de la teoría linealizada, ya que ellas se obtienen al considerar términos lineales en $h_{\mu\nu}$

Ecuación de onda \longrightarrow
$$\square^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G_N S_{\mu\nu}, \quad (64)$$

Detección de ondas gravitacionales



PHYSICAL REVIEW LETTERS

Highlights Recent Accepted Collections Authors Referees Search Press About

Featured in Physics Editors' Suggestion Open Access

Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)
Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 – Published 11 February 2016

Physics See Viewpoint: The First Sounds of Merging Black Holes

Article References Citing Articles (6,370) PDF HTML Export Citation

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102>

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. (2017). *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press.
- Janssen, B. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Granada: Universidad de Granada.
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K., ... Cavalieri, R. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6), 061102.