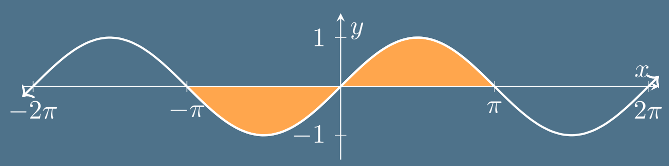
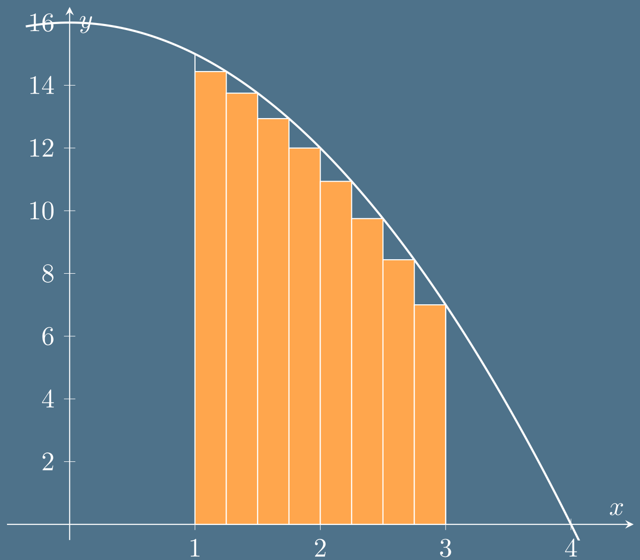
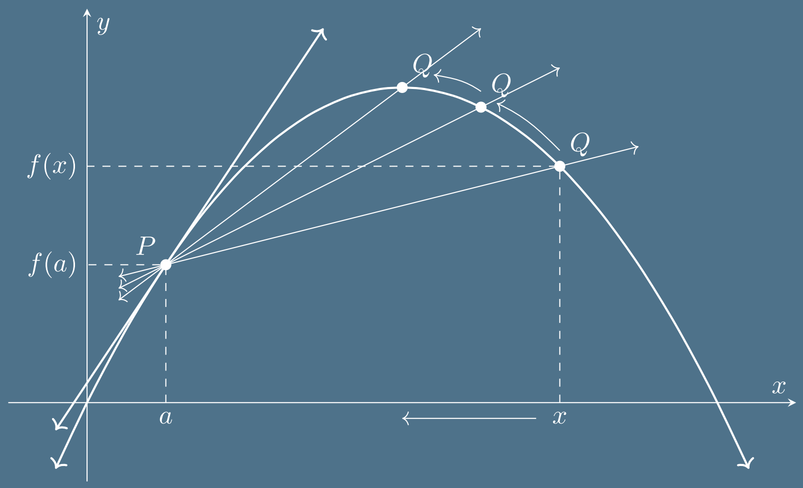
Cálculo Diferencial e Integral

Material para el curso







M.Sc. Alexander Borbón Alpízar

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

2024

Cálculo Diferencial e Integral
(Material para el curso)

Alexander Borbón Alpízar
aborbon@itcr.ac.cr

Octubre, 2024

Prólogo

En este material se busca mostrar de una manera simple y resumida la teoría que se desarrolla en el curso de Cálculo Diferencial e Integral que se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, junto con una serie de ejemplos representativos sobre cada tema.

El Cálculo Diferencial e Integral suele ser el primer curso universitario que deben cursar los estudiantes al ingresar a la universidad, en él se estudian los tópicos de Límites, Derivadas e Integrales en una variable. El enfoque principal es en la parte operativa del cálculo y no en la formalidad. De esta forma, el lector podrá encontrar en esta obra la explicación de la teoría, encontrando sólo algunas demostraciones en los casos donde se consideren de utilidad didáctica, en las demás se presentan sin entrar en la formalidad propia de la matemática, sino que se dirige más hacia los ejemplos prácticos.

En el tema de Derivadas y en las integrales se presentan algunas de las aplicaciones usuales que se estudian en el curso: regla de Newton, recta tangente y normal, tasas de cambio relacionadas, optimización, área entre curvas, longitud de una curva, ley de Hooke e integrales impropias.

De esta manera, se le desea hacer llegar a los nuevos estudiantes una obra clara y concisa para el abordaje del curso con el material necesario para enfrentarse a los temas mencionados.

Siempre se recomienda complementar este texto con la práctica que la Cátedra ofrece, la cual profundiza aún más en ejercicios que no son posibles de abarcar en las lecciones.

Índice general

Capítulo 1

Lógica proposicional

Se iniciará con una introducción básica a la lógica proposicional, dando énfasis a las tablas de verdad y a la leyes e inferencias lógicas, también se mencionarán algunos métodos para realizar demostraciones, se espera mostrar una visión general de este tema.

En matemática hay algunos términos que se utilizan de manera frecuente, se debe iniciar conociendo la definición de dichos conceptos.

Definición 1.

- Las **definiciones** se utilizan para describir y caracterizar los objetos matemáticos.
- Los **axiomas** son proposiciones que se aceptan sin demostración y son la base de las teorías matemáticas, se presuponen como "evidentes".
- Un **teorema** es una proposición cuya validez se puede verificar a partir de los axiomas y las definiciones dadas.
- Una **demostración o prueba** es una serie de pasos estructurados en donde se verifica y constata de forma irrefutable y convincente que una proposición es verdadera.
- Un **corolario** es un teorema que se deduce de forma directa a partir de un teorema anterior o es un caso particular de él.
- Un **lema** es un teorema que es necesario para demostrar un teorema posterior pero que no tiene relación directa con el tema que se esté desarrollando (aunque puede ser un teorema central en el desarrollo de otro tema).
- Un **escolio** es un resultado que se obtiene durante el desarrollo de una demostración pero que no tiene relación con el tema desarrollado.
- Una **conjetura** es una proposición de la que no se puede asegurar su validez.
- Una **paradoja** es una proposición que no puede ser ni verdadera ni falsa.

Ejemplo 1.

- Una circunferencia se **define** como el conjunto de los puntos que se encuentran a la misma distancia (llamada radio) de un punto (llamado centro).
- Uno de los **axiomas** en geometría euclídea indica que por dos puntos cualesquiera pasa una única recta por ellos.
- Un **teorema** en geometría euclídea es que los ángulos internos de cualquier triángulo suman $180°$.
- Una **paradoja** muy famosa es la conocida como la paradoja del barbero: "El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos; entonces, ¿quién afeitará al barbero?"

1.1. Conectivas lógicas y tablas de verdad

Definición 2.

Una **proposición** es un enunciado el cual se puede indicar claramente si es verdadero o falso.

Toda proposición debe cumplir los principios de:

- **Identidad:** Si una proposición es verdadera entonces siempre es verdadera.
- **No-contradicción:** Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.
- **Tercero excluido:** Una proposición es falsa o es verdadera, no existe otra opción.

Ejemplo 2.

1. Las siguientes son proposiciones:
   - Ayer llovió toda el día[a].
   - Hoy fui a jugar fútbol.
   - El televisor se dañó.
   - $2 + 4 = 7$
   - El cuadrado de todo número impar es impar.
2. Las siguientes NO son proposiciones:
   - ¡Muy bien!
   - ¿Por qué juegas tenis?

[a] En este tipo de expresiones se sobreentiende entre las personas que conversan, el día y el lugar al que se refiere, de no ser así se tendría que escribir la fecha exacta y el lugar exacto al que hacen referencia.

Estas proposiciones se conocen como proposiciones simples o atómicas, a partir de ellas se pueden formar proposiciones más complejas o moleculares mezclando las proposiciones simples con los conectores lógicos de: negación, conjunción, disyunción, disyunción exclusiva, implicación y equivalencia. Las proposiciones simples se pueden denotar con letras mayúsculas: P, Q, R, ...

1.1.1. Negación ($\neg$)

Si P es una proposición, por ejemplo, P: *me gusta tocar la guitarra*, entonces su negación se denota como $\neg P$ que sería $\neg P$: **NO** me gusta tocar la guitarra. Como otro ejemplo, si P: $3 < 4$ entonces su negación sería $\neg P$: $3 \geqslant 4$.

Una tabla de verdad de una proposición compleja permite determinar la veracidad de una afirmación al estudiar todos las posibles posibilidades dadas por las proposiciones simples que la forman. En la tabla de verdad se utilizan las abreviaturas V: verdadero y F: falso.

La tabla de verdad para la negación se muestra a continuación, el primer reglón de la tabla indica que si P es una proposición verdadera entonces su negación debe ser falsa.

P	$\neg P$
V	F
F	V

1.1.2. Conjunción ($\wedge$)

Si P: Me gusta el tenis y Q: Me gusta bailar, entonces la conjunción de ambas se denota como $P \wedge Q$ y se lee "Me gusta el tenis **y** me gusta bailar", se conoce como un "y" lógico.

La tabla de verdad para la conjunción es:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.1.3. Disyunción ($\vee$)

Si P: Ayer jugué fútbol y Q: Ayer toqué guitarra, entonces la disyunción de ambas se denota como $P \vee Q$ y se lee "Ayer jugué fútbol **o** toqué quitarra".

La tabla de verdad para la disyunción es:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.4. Disyunción exclusiva ($\veebar$)

Si P: Ayer jugué fútbol y Q: Ayer toqué guitarra, entonces la disyunción exclusiva de ambas se denota como $P \veebar Q$ y se puede leer "Ayer jugué fútbol **o** toqué quitarra, **pero no ambas**" u otra forma de leerlo es "Ayer **o** jugué fútbol **o** toqué quitarra".

La tabla de verdad para la disyunción exclusiva es:

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.5. Implicación ($\rightarrow$)

Si P: Amanece lloviendo y Q: Tengo que usar paraguas, entonces la implicación de ambas se denota como $P \rightarrow Q$ y se lee "**Si** amanece lloviendo **entonces** tengo que usar paraguas".

La tabla de verdad para la implicación es:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.6. Doble implicación ($\leftrightarrow$)

Si P: Iré a ver jugar a la selección y Q: La selección juega contra Argentina, entonces la doble implicación de ambas se denota como $P \leftrightarrow Q$ y se lee "Iré a ver jugar a la selección **si y sólo si** la selección juega contra Argentina" lo cual implica dos cosas: "**Si** voy a ver jugar a la selección **entonces** es porque juega contra Argentina" y "**Si** la selección juega contra Argentina **entonces** voy a verla jugar". En la doble implicación se dice que Q es necesario y suficiente para que se cumpla P, es decir, si fui a ver a la selección es porque necesariamente la selección juega contra Argentina y suficiente porque sólo esta razón basta para que vaya a ver jugar a la selección. Esto también implica que cada vez que se cumple P también se cumple Q y viceversa.

En conclusión la doble implicación $P \leftrightarrow Q$ es lo mismo que $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

La tabla de verdad para la doble implicación es:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.7. Tablas de verdad de proposiciones complejas

Conociendo las tablas de verdad para las conectivas lógicas, ahora se pueden realizar tablas de verdad para expresiones más complejas.

Ejemplo 3.

Realice la tabla de verdad para la proposición $(P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

†

Ejemplo 4.

Realice la tabla de verdad para la proposición $[\neg(P \wedge \neg Q)] \rightarrow (Q \rightarrow P)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)]$	$Q \rightarrow P$	$[\neg(P \wedge \neg Q)] \rightarrow (Q \rightarrow P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V

†

Definición 3.

Si el resultado final de una tabla de verdad es siempre verdadero entonces se dice que la proposición es una **tautología**. Si, por el contrario, siempre es falsa se dice que es una **falacia** o **contradicción**. Si no es una tautología o falacia se dice que es una **contingencia** o **eventualidad**.

Ejemplo 5.

Verifique que la proposición $(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ es una tautología

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

†

Ejemplo 6.

Una falacia muy simple de probar es $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

†

Definición 4.

Se dice que P **implica tautológicamente** a Q y se escribe $P \implies Q$ si y sólo si $P \to Q$ es una tautología.

Se dice que P es **tautológicamente equivalente** a Q y se escribe $P \Leftrightarrow Q$ si y sólo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología (también se puede escribir $P \equiv B$).

Ejemplo 7.

Verifique mediante una tabla de verdad que $P \to Q$ es tautológicamente equivalente a $\neg P \vee Q$

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Nota: Otra manera de escribir el enunciado de este ejercicio es:

Verifique que $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. †

Definición 5.

La **contrapositiva** de la proposición $P \to Q$ es $\neg Q \to \neg P$ y la **recíproca** de $P \to Q$ es $Q \to P$.

Nota: La contrapositiva de $P \to Q$ es una proposición cierta mientras que la recíproca no necesariamente es cierta (demuestre con una tabla de verdad que $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$).

Ejemplo 8.

Escriba la contrapositiva y la recíproca de las proposiciones siguientes:

1. P: Si $5 > 3$ entonces $x = 4$

   Contrapositiva: Si $x \neq 4$ entonces $5 \leqslant 3$

   Recíproca: Si $x = 4$ entonces $5 > 3$

2. P: Si almuerzo en el ITCR entonces me quedo a estudiar.

   Contrapositiva: Si no me quedo a estudiar entonces no almuerzo en el ITCR.

   Recíproca: Si me quedo a estudiar entonces almuerzo en el ITCR.

1.2. Leyes e inferencias lógicas

Para demostrar una proposición a partir de otras que se conocen se pueden utilizar las leyes lógicas y las inferencias lógicas:

Leyes lógicas	**Equivalencia**
Implicación y Disyunción (ID)	$P \implies Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \implies Q \equiv \neg Q \implies \neg P$
Doble Negación (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Conmutativa (Con)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociativa (Aso)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
Distributiva (Dis)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia (Idem)	$P \vee P \equiv P$ $P \wedge P \equiv P$

Reglas de Inferencia	**Premisas**	**Conclusión**
Simplificación (Simp)	$P \wedge Q$	P Q
Adjunción (Adj)	P Q	$P \wedge Q$
Adición (Adi)	P	$P \vee Q$
Separación (Sep) o Modus Ponens (MP)	$P \implies Q$ P	Q
Contraposición o Modus Tollens (MT)	$P \implies Q$ $\neg Q$	$\neg P$
Silogismo Disyuntivo (SD)	$P \vee Q$ $\neg P$	Q
Silogismo Hipotético (SH)	$P \implies Q$ $Q \implies R$	$P \implies R$
Dilema Constructivo (DC)	$P \vee Q$ $P \implies R$ $Q \implies S$	$R \vee S$
Dilema Destructivo (DD)	$\neg R \vee \neg S$ $P \implies R$ $Q \implies S$	$\neg P \vee \neg Q$

Ejemplo 9.

Demostrar $R \wedge (P \vee Q)$ dadas las premisas $P \vee Q$, $Q \implies R$, $P \implies T$, $\neg T$

(1) $P \vee Q$	
(2) $Q \implies R$	
(3) $P \implies T$	
(4) $\neg T$	
(5) $\neg P$	MT 3,4
(6) Q	SD 1,5
(7) R	MP 2,6
$\therefore R \wedge (P \vee Q)$	Adj 7,1

†

Ejemplo 10.

Demostrar $R \wedge Q$ dadas las premisas $P \implies Q$, $\neg R \implies \neg S$, $P \wedge S$

(1) $P \implies Q$	
(2) $\neg R \implies \neg S$	
(3) $P \wedge S$	
(4) P	Simp 3
(5) Q	MP 1,4
(6) S	Simp 3
(7) R	MT 2,6
$\therefore R \wedge Q$	Adj 5,7

†

Ejemplo 11.

Simbolice las proposiciones involucradas de la siguiente argumentación y demuestre la validez de la conclusión:

Si Luis va al partido de fútbol, entonces Laura se irá a nadar. Si Manuel ve televisión toda la noche, entonces Carolina se irá a nadar. Si Laura va a nadar o Carolina va a nadar, Jorge las acompañará. De hecho, Jorge dijo que no las acompañará. En consecuencia, no ocurre que: Luis fue al partido de fútbol o Manuel ve televisión toda la noche.

P: Luis va al partido de fútbol

Q: Laura se irá a nadar

R: Manuel ve televisión toda la noche

S: Carolina se irá a nadar

T: Jorge las acompañará

(1) $P \implies Q$	
(2) $R \implies S$	
(3) $(Q \vee S) \implies T$	
(4) $\neg T$	
(5) $\neg(Q \vee S)$	MT 3,4
(6) $\neg Q \wedge \neg S$	DM 5
(7) $\neg Q$	Simp 6
(8) $\neg P$	MT 1,7
(9) $\neg S$	Simp 6
(10) $\neg R$	MT 2,9
(11) $\neg P \wedge \neg R$	Adj 8,10
$\therefore \neg(P \vee R)$	DM 11

†

1.3. Cuantificadores

1.3.1. Cuantificador existencial

El símbolo utilizado para el cuantificador existencial es $\exists$, la expresión $\exists x, P(x)$ se lee: "Existe al menos un x tal que se cumple $P(x)$".

Ejemplo 12.

$\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$

Lo cual es cierto ya que si $x = 4$ se cumple que $4 \in \mathbb{N}$ y $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$

1.3.2. Cuantificador universal

El símbolo utilizado para el cuantificador universal es $\forall$, la expresión $\forall x, P(x)$ se lee: "Para todo x se cumple $P(x)$".

Ejemplo 13.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$

   Lo cual es cierto ya que no importa el valor que tome x, siempre se cumple que $x^2 \geqslant 0$

2. $\forall x > 0, -x < 0$

   Lo cual es cierto ya que para todos los valores de x positivos se cumple que $-x$ es negativo.

1.3.3. Negación de Cuantificadores

De manera intuitiva, la negación de la expresión "para toda x se cumple $P(x)$" es que "existe al menos un x que no cumple $P(x)$".

Así se tiene que $\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$.

Ejemplo 14.

Considere la expresión $\forall x, |x| = x$

Esta expresión es falsa, ya que para cualquier número negativo no se cumple, es decir, $\exists x, |x| \neq x$, por ejemplo, si $x = -3$

Además, la negación de la expresión "existe un x tal que $P(x)$" es "para toda x no se cumple $P(x)$".

Así se tiene que $\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$.

Ejemplo 15.

Considere la expresión $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

Esta expresión es falsa, ya que todos los números negativos al cuadrado son positivos, es decir $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$

1.4. Métodos de demostración

En esta sección se estudiará la forma en que se puede demostrar que una proposición de la forma $P \implies Q$ es cierta.

De acuerdo a la tabla de verdad del implica se tendría que demostrar que si la hipótesis (P) es cierta entonces la conclusión (Q) también lo es. La hipótesis no necesariamente es única, es decir, una demostración puede partir de varias hipótesis.

1.4.1. Demostración directa

Se asume que P es verdadera y, mediante las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce que Q es verdadera. Las inferencias demostradas en el ejemplo anterior se demostraciones directas.

Ejemplo 16.

Considere la función lineal con criterio $f(x) = mx + b$. Demuestre que si $m < 0$ entonces $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ (la función es decreciente).

Demostración (directa):

En este caso la hipótesis es que $m < 0$ y se debe demostrar que $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$, es decir, que f es una función decreciente.

Así, se parte de $x_1 < x_2$ y se tiene que concluir que $f(x_1) > f(x_2)$, sabiendo que $m < 0$.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies mx_1 > mx_2 && \text{ya que } m < 0 \text{ (hipótesis).} \\ &\implies mx_1 + b > mx_2 + b \\ &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Por lo que la función es decreciente. †

1.4.2. Por contradicción

En este caso se asume que la hipótesis P es cierta y se parte de que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce $\neg P$, por lo que se tendría $P \wedge \neg P$ que sería una falacia o contradicción. Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis que $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

En el fondo acá lo que se está demostrando es la contrapositiva de $P \implies Q$, es decir, se demuestra que $\neg Q \implies \neg P$ y se cumple que $\neg Q \implies \neg P \equiv P \implies Q$, por lo que se demuestra la original.

Ejemplo 17.

Demuestre que la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$, sólo tiene una intersección con el eje x.

Demostración (por contradicción):

Suponga que una función lineal tiene más intersecciones con el eje x, es decir, que existen x_1 y x_2 distintos $x_1 \neq x_2$ tal que ambos son intersecciones con el eje x de la función $f(x) = mx + b$, es decir, que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Como $f(x_1) = mx_1 + b = 0$ entonces $x_1 = \dfrac{-b}{m}$.

Y como $f(x_2) = mx_2 + b = 0$ entonces $x_2 = \dfrac{-b}{m}$.

Por lo que $x_1 = x_2$ que contradice la hipótesis, por lo tanto la intersección es única. †

1.4.3. Reducción al absurdo

Este método es muy similar al anterior, se parte de que la hipótesis P es cierta y que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se llega a alguna afirmación que ya se sepa con anterioridad que es falsa (por lo que se llega a un absurdo). Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis de donde se partió $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

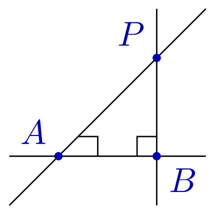
Ejemplo 18.

Sean A y B dos puntos distintos de una recta y P un punto externo a ella. Si $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ entonces $\overline{AB}$ no es perpendicular a $\overline{BP}$

Demostración (por reducción al absurdo)

Supongamos que $\overline{AB}$ sí es perpendicular a $\overline{BP}$, así se tendría que $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BP}$.

Así se tendría un triángulo con dos ángulos rectos (ver figura), lo cual es un absurdo ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo es de 180° (un triángulo no puede tener dos ángulos rectos).



†

1.4.4. Otros métodos

Para demostrar que $P \implies Q$ es falso sólo basta con dar un contraejemplo en donde no se cumpla.

Para demostrar $P \Leftrightarrow Q$ se deben demostrar $P \implies Q$ y $Q \implies P$.

Capítulo 2

Límites

2.1. Idea intuitiva de límite

Los límites permiten investigar el comportamiento de una función alrededor de un punto.

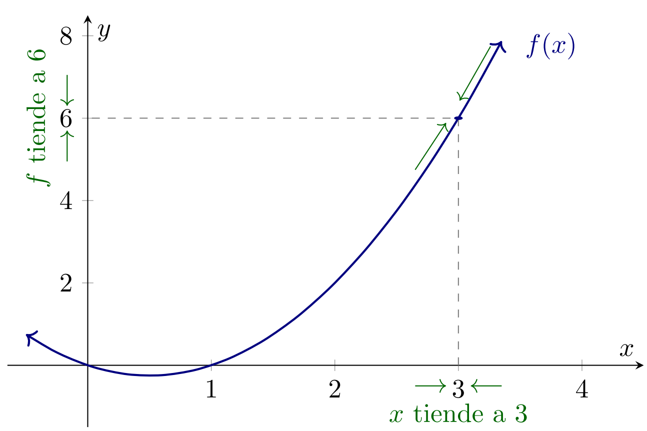
Para aproximar un límite de manera intuitiva se puede hacer una tabla con valores que se aproximen al valor deseado y se observa el valor al que se aproxima la función, la gráfica también puede ayudar en este proceso, para esto, se observa el valor al que se aproxima la función en el eje y cuando se aproxima en x al valor indicado.

Ejemplo 19.

Si $f(x) = x^2 - x$, investigue el comportamiento de esta función para valores cercanos a 3, utilizando una tabla de valores y la gráfica de la función.

Para investigar el comportamiento se puede realizar una tabla de valores y observar el comportamiento en la gráfica conforme se aproxima x a 3:

x	2	2.5	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.5	4
$f(x)$	2	3.75	5.51	5.95	5.995	?	6.005	6.05	6.51	8.75	12



A partir de los datos de la tabla y observando la gráfica de la función se puede suponer que la función se aproxima a 6 conforme x se aproxima a 3, es decir, $f(x) \to 6$ conforme $x \to 3$ o, en notación de límites

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

†

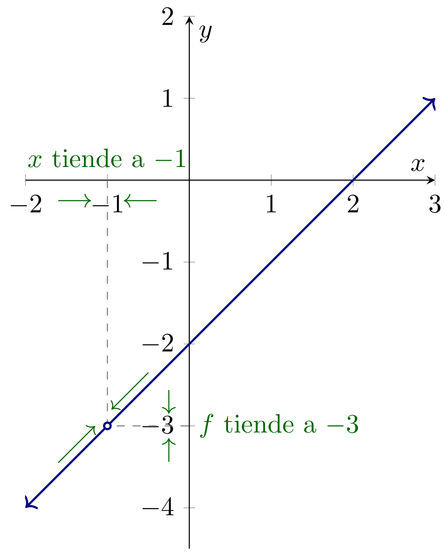
En este ejemplo la función tiene al 3 en su dominio, por lo que era muy evidente que la función se aproximaría a $f(3) = 3^2 - 3 = 6$. En el siguiente ejemplo se utilizará una función que no esté definida en el valor al que se aproxima la x, por lo que no se puede evaluar directamente en la función.

Ejemplo 20.

Realice una conjetura del valor de $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1}$.

Se puede utilizar una tabla de valores y la gráfica:

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1	-0.999	-0.99	-0.9	-0.5	0
$f(x)$	-4	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001	?	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5	-2



La conjetura es que

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = -3$$

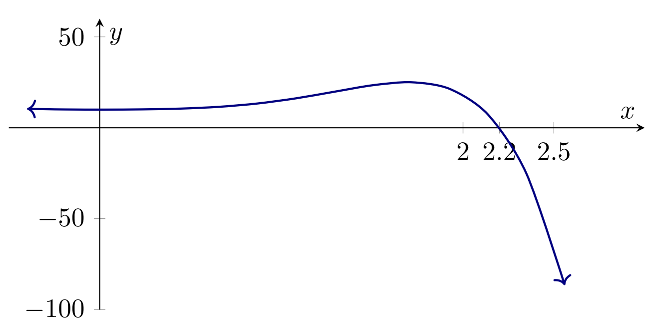
†

Ejemplo 21.

Realice una conjetura del valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2,2} (-x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 10)$

Para hacer la conjetura se puede realizar una tabla de valores y la gráfica de la función:

x	2.1	2.15	2.19	2.199	2.1999	2.2	2.2001	2.201	2.21	2.25	2.3
$f(x)$	10.85	5.94	1.28	0.1323	0.0155	?	-0.0105	-0.1278	-1.321	-7.106	-15.52



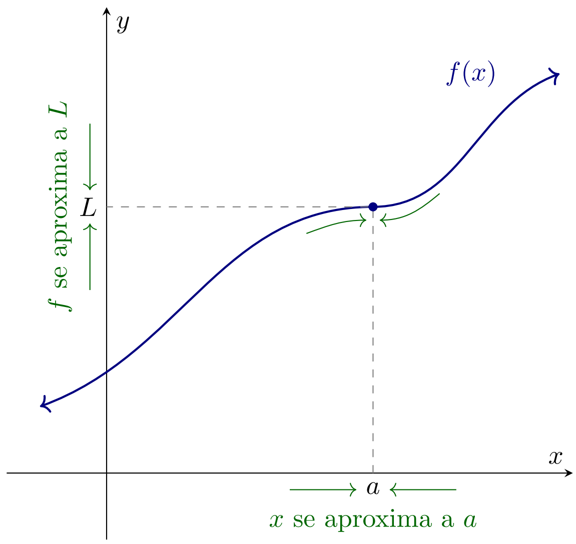
De la tabla anterior y de la gráfica se puede conjeturar que $\displaystyle\lim_{x\to 2,2} (-x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 10) = 0$, sin embargo, no es así, en realidad

$$\lim_{x \to 2{,}2} (-x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 10) = \frac{39}{15625} \approx 0{,}002496$$

†

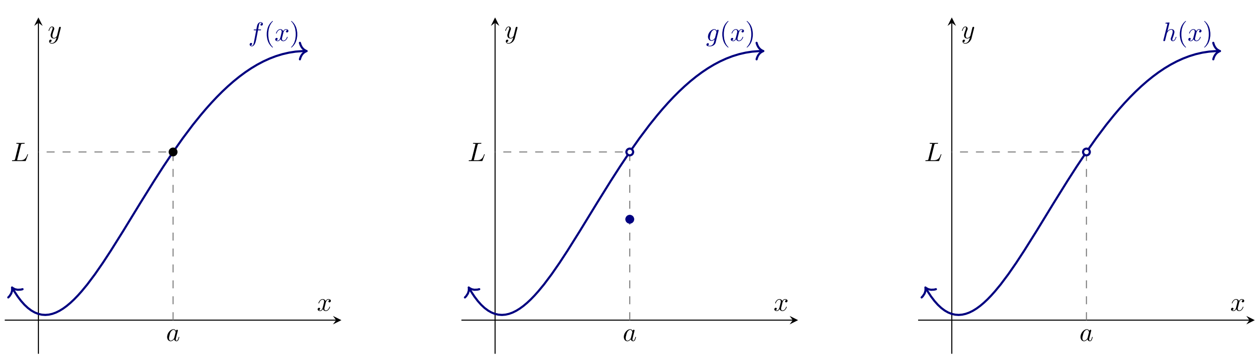
De los ejemplos anteriores se pueden deducir los siguientes resultados:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que la función $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a.



2. Debe quedar muy claro que al calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se está interesado en un vecindario alrededor de a pero nunca se toma el valor de a, es decir, $x \neq a$.

   Observe los siguientes casos:



   Aunque las tres funciones representadas son distintas, se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

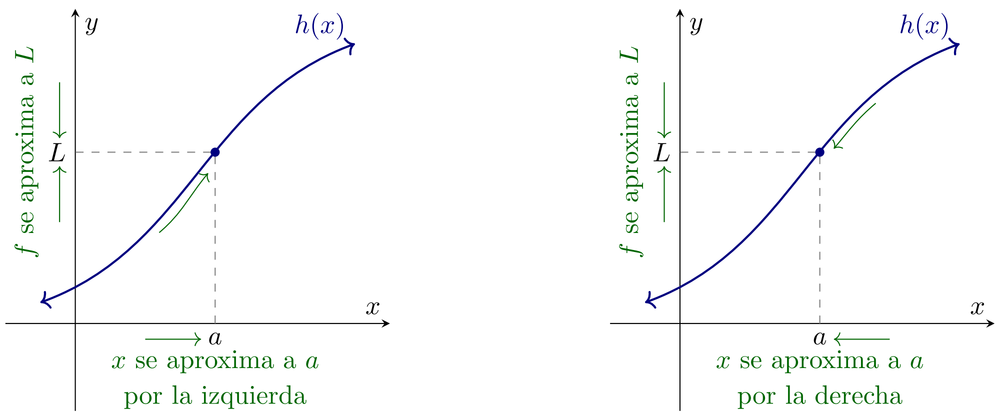
3. En el tercer ejemplo se observa que el uso de tablas y gráficos para aproximar un límite es una herramienta importante pero nos puede llevar a cometer errores, por lo que se necesitan técnicas más confiables para obtener el valor exacto del límite.

4. En los ejemplos 1 y 3 se observa que el valor que se obtiene en el límite es el mismo valor que se hubiera obtenido al evaluar directamente el valor buscado en la función, más adelante veremos que esta es la primer técnica para calcular límites.

2.1.1. Límites laterales

En los ejemplos anteriores, al aproximar los límites se construyó una tabla aproximándose al valor de x por ambos lados, sería muy natural que se quiera aproximar sólo por la izquierda o por la derecha, éstos se conocen como los límites laterales, así:

1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a tomando valores menores que a (se aproxima a a por la izquierda).
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a L conforme x se aproxima a a tomando valores mayores que a (se aproxima a a por la derecha).



$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Teorema 1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Es decir, que para que un límite por ambos lados exista, debe dar el mismo valor por la izquierda y por la derecha.

Ejemplo 22.

Al tomar el Ejemplo 1 de la sección anterior se cumple que

$\lim_{x\to 3^-} (x^2 - x) = 6$

$\lim_{x\to 3^+} (x^2 - x) = 6$

Y, por lo tanto, $\lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6$

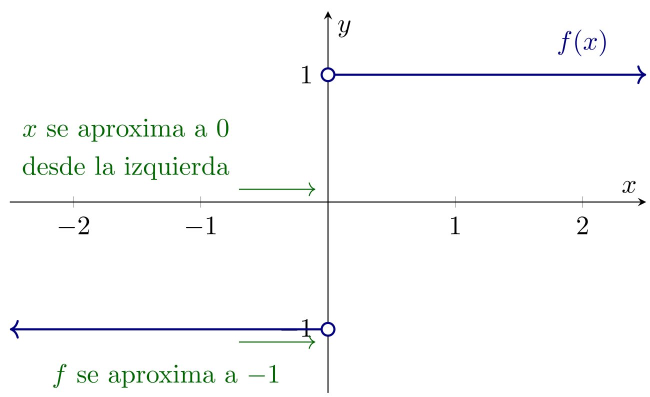
Ejemplo 23.

Considere la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, mediante una tabla, investigue los posibles valores para cada uno de los límites dado.

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

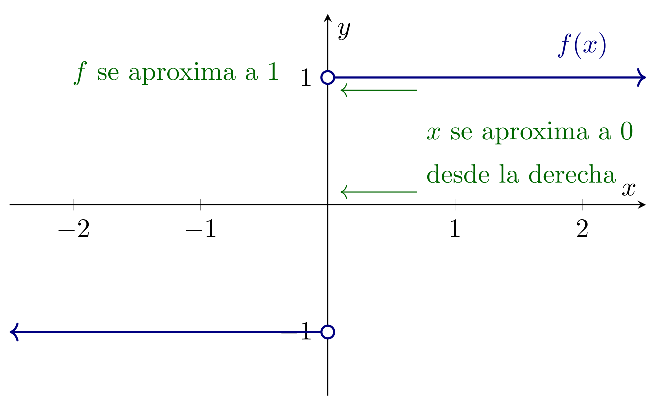
x	-0.1	-0.01	-0.001	0
$f(x)$	-1	-1	-1	?



Parecería que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

x	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	?	1	1	1



Parecería que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

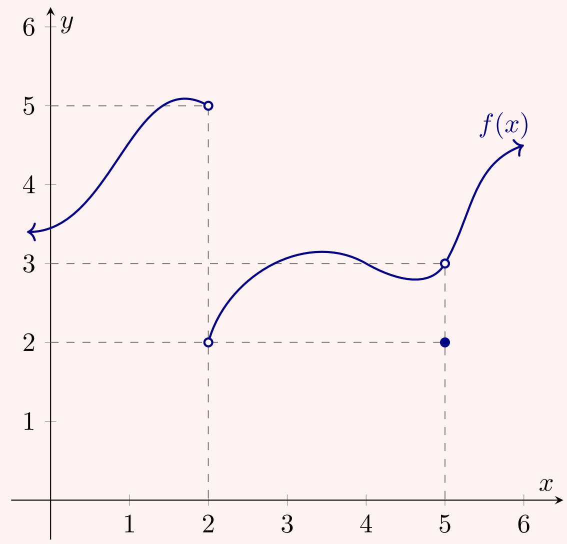
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

†

Ejercicio 1.

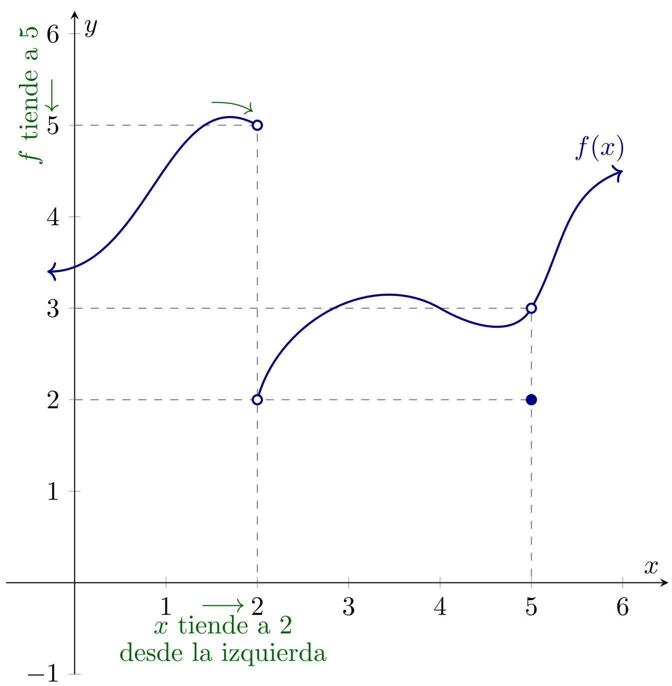
En la figura se muestra la gráfica de una función f, utilícela para dar los valores (si existen) de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$
6. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$



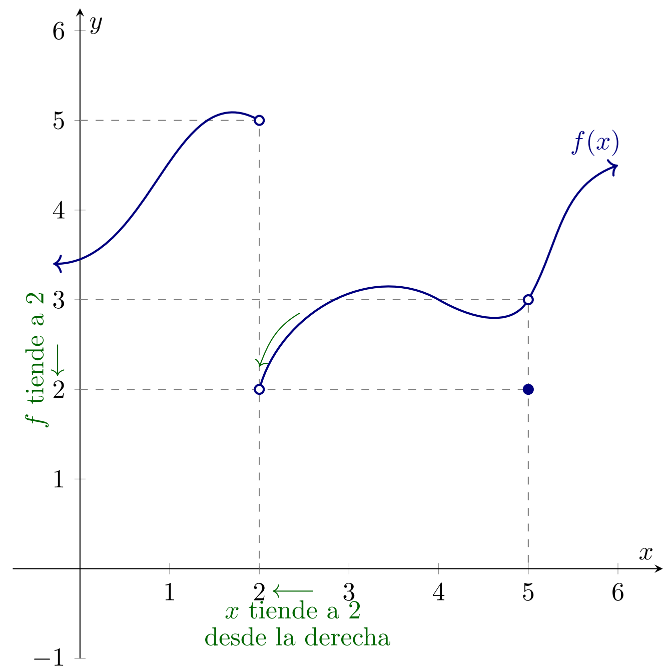
Solución:

1. Para $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ se tiene que ir aproximando la x a 2 desde la izquierda (con valores menores a 2) e identificar a qué valor del eje y se va aproximando la función.



Se tiene que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$.

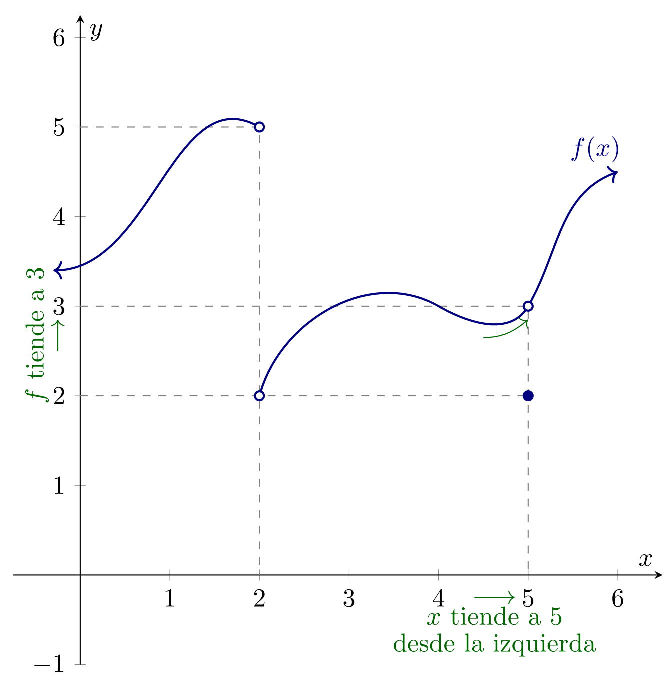
2. Para $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ se tiene que ir aproximando la x a 2 desde la derecha (con valores mayores a 2) e identificar a qué valor del eje y se va aproximando la función.



Se tiene que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$.

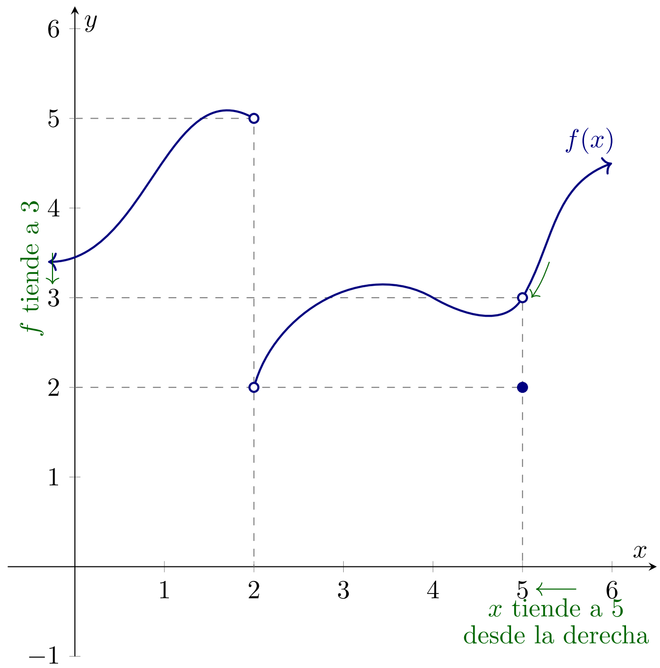
3. Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe.

4. Para $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ se tiene que ir aproximando la x a 5 desde la izquierda (con valores menores a 5) e identificar a qué valor del eje y se va aproximando la función.



Se tiene que $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 3$.

5. Para $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ se tiene que ir aproximando la x a 5 desde la derecha (con valores mayores a 5) e identificar a qué valor del eje y se va aproximando la función.



Se tiene que $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 3$.

6. Como $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$.

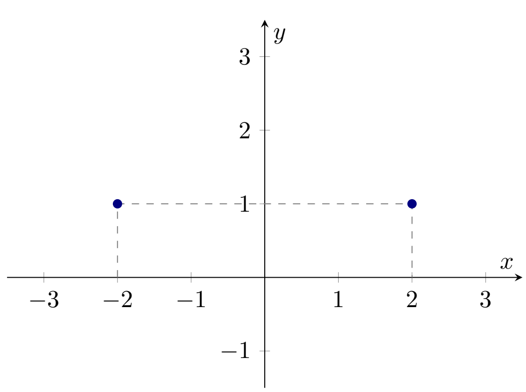
Ejemplo 24.

Realice la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

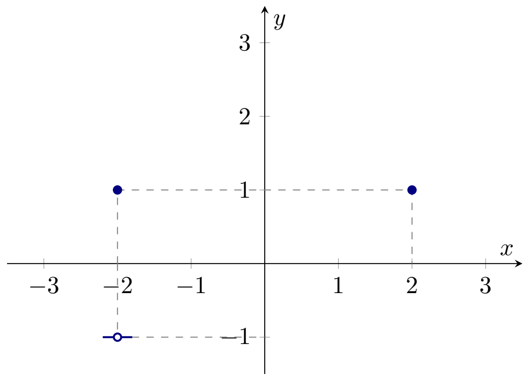
1. $f(-2) = 1$
2. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$
5. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 1$
6. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Solución:

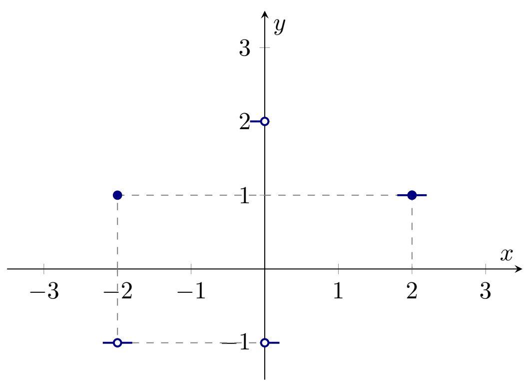
Lo primero que se recomienda dibujar son los puntos que son fijos, de las condiciones se tiene que $f(-2) = f(2) = 1$.



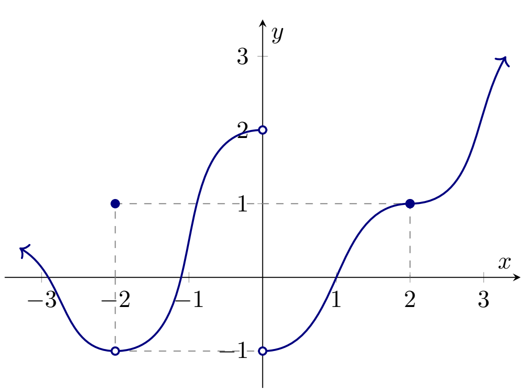
Posteriormente se va haciendo que los límites tengan el valor de acuerdo a lo indicado, por ejemplo, se requiere que $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -1$, para que se logre este límite lo más sencillo es colocar un punto abierto y que, tanto por la izquierda como por la derecha, la función llegue a dicho punto (primero se hacen las líneas de la función cortas para luego unir todo el dibujo).

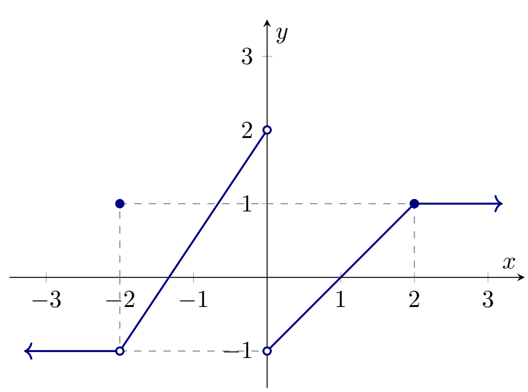


Se hace lo mismo con las otras condiciones, a saber $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$ (al acercarse a cero en x desde la izquierda, la función debe aproximarse a 2 en el eje y), $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$ (al acercarse a cero en x desde la derecha, la función debe aproximarse a -1 en el eje y) y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ (al acercarse a dos en x por ambos lados, la función debe aproximarse a 1 en el eje y).



Por último, como ya se están cumpliendo todas las condiciones excepto la última, se finaliza el dibujo uniendo las líneas y rellenando los puntos, en esta parte se puede ser tan creativo como se quiera, a continuación se presentan dos gráficas que cumplen con lo que se pide y, por tanto, correctas.





2.2. Técnicas para calcular límites

Como se observó en la sección anterior, aproximar un límite utilizando tablas o fijándose directamente en la gráfica de la función es útil, sin embargo, puede producir errores; esto nos lleva a buscar técnicas eficaces para encontrar el valor de los límites.

Antes de iniciar, es de suma importancia indicar el siguiente teorema:

Teorema 2.

Si un límite existe entonces su valor es único.

Es decir, no es posible que un mismo límite de dos valores distintos.

2.2.1. Sustitución directa

Para esta técnica se utilizan las siguientes propiedades:

Teorema 3. Propiedades de los Límites

Si c es una constante real, además $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ (es decir, que existen y dan estos valores reales) entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$
3. $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c\cdot L$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$, con $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim\limits_{x\to a} c = c$
8. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
9. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, con $n \in \mathbb{N}$
10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, con $n \in \mathbb{N}$ (Si n es par entonces $a > 0$)
11. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, con $n \in \mathbb{N}$ (Si n es par entonces $L > 0$)

Nota: En conclusión, lo que indican estas propiedades es que si se tiene una función polinomial, racional o radical y a pertenece al dominio de la función entonces el límite se puede obtener directamente evaluando $f(a)$. Más adelante se verá con detalle que si una función $f(x)$ es continua entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; interesante es que la mayoría de las funciones que se han estudiado anteriormente (polinomios, racionales, exponencial, logarítmica, etc) son continuas en su dominio.

Ejemplo 25.

Determine el resultado de $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 4x + 3)$ utilizando las propiedades anteriores, justifique cada paso con la propiedad correspondiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(2x^2 - 4x + 3) &= \lim_{x\to 2}(2x^2 - 4x) + \lim_{x\to 2} 3 && \text{(Prop 1)}\\
&= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 4x + \lim_{x\to 2} 3 && \text{(Prop 2)}\\
&= 2\cdot \lim_{x\to 2} x^2 - 4\cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 && \text{(Prop 3)}\\
&= 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 3 && \text{(Prop 7, 8, 9)}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Nota: Observe que se hubiera obtenido lo mismo si se evalúa directamente.

Ejemplo 26.

Determine el resultado de $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x+2}$ utilizando las propiedades anteriores, justifique cada paso con la propiedad correspondiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x+2} &= \frac{\lim_{x\to -1}(x^2+1)}{\lim_{x\to -1}(x+2)} && \text{(Prop 4)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} 1}{\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 2} && \text{(Prop 1)}\\
&= \frac{(-1)^2+1}{-1+2} && \text{(Prop 7, 8, 9)}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Nota: Observe que se hubiera obtenido lo mismo si se evalúa directamente.

Ejemplo 27.

Determine, mediante evaluación directa, el límite $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{13x-1}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{13x-1}{x^2}} = \sqrt{\frac{13\cdot 2 - 1}{2^2}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 28.

Determine, mediante evaluación directa, el límite $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 2} &= \frac{2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 1}{3 \cdot (-1)^2 + 2} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

2.2.2. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Aunque muchos límites se pueden encontrar mediante una sustitución directa, en esta sección y en las siguientes el interés principal se dará sobre las formas indeterminadas.

Se va a iniciar en el caso que al evaluar directamente se de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, el límite aun se puede encontrar utilizando algunas técnicas que tratan de eliminar el factor que provoca esta forma.

Límites que involucran factorización

En los límites de la forma $\dfrac{0}{0}$ lo que se busca es simplificar el factor que provoca dicha forma, para esto, se factoriza el numerador y el denominador para simplificar la fracción resultante.

Ejemplo 29.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2 - 1}$

Observe que al evaluar directamente se obtiene la forma $\dfrac{0}{0}$, tal como se indicó, se va a factorizar el numerador y el denominador y simplificar.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

La eliminación del término $x - 1$ se puede realizar porque en el límite la x se aproxima al 1 pero nunca toma este valor, por lo que $x \neq 1$. Ahora que se eliminó el término que hacía la forma indeterminada, se puede evaluar el límite de manera directa.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 30.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+1)} \\
&= \lim_{x \to -2} \frac{(x-1)}{(x+1)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo 31.

Determine el valor de $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^5 - 32}{y^2 + y - 6}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 2} \frac{y^5 - 32}{y^2 + y - 6} &= \lim_{y \to 2} \frac{\cancel{(y-2)}(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16)}{\cancel{(y-2)}(y+3)} \\
&= \lim_{y \to 2} \frac{y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16}{y+3} \\
&= \frac{80}{5} \\
&= 16
\end{aligned}$$

Límites que involucran racionalización

En este caso también se busca eliminar el factor que provoca la forma indeterminada, sólo que se debe racionalizar primero antes de factorizar.

Ejemplo 32.

Determine el valor de $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\sqrt{5t-1} - 2}{t - 1}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{5t-1} - 2}{t-1} &= \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{5t-1} - 2}{t-1} \cdot \frac{\sqrt{5t-1} + 2}{\sqrt{5t-1} + 2} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5t - 1 - 4}{(t-1)(\sqrt{5t-1} + 2)} \\
&= \lim_{t \to 1} \frac{5\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(\sqrt{5t-1} + 2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 1} \frac{5}{\left(\sqrt{5t-1}+2\right)} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 33.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1}$

Se tiene la forma $\frac{0}{0}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1} &= \lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2}+1}{\sqrt{1-u^2}+1} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\cancel{u^2}\left(\sqrt{1-u^2}+1\right)}{\cancel{1}-\cancel{u^2}-\cancel{1}} \\
&= \lim_{u\to 0} -\left(\sqrt{1-u^2}+1\right) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Límites que involucran valor absoluto

Si se tiene un límite de la forma $\frac{0}{0}$ y contiene un valor absoluto que al ser evaluado da cero entonces el límite debe ser evaluado por medio de los límites laterales, recordando el Teorema 1, que indicaba:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Si la expresión dentro del valor absoluto no da cero, entonces se obtiene directamente el valor absoluto analizando si la expresión es positiva o negativa en el valor al que tiende el límite.

Para estos ejemplos recuerde que $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Ejemplo 34.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Se tiene la forma $\frac{0}{0}$.

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda, es decir, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

  Si $x \to 0^- \implies x < 0 \implies |x| = -x$, por lo que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} -1 = -1
\end{aligned}
$$

- Por la derecha, es decir, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

  Si $x \to 0^+ \implies x > 0 \implies |x| = x$, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe. †

Ejemplo 35.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda:

  Si $x \to \dfrac{3}{2}^- \implies x < \dfrac{3}{2} \implies 2x < 3 \implies 2x-3 < 0.$

  Es decir, $|2x-3| = -(2x-3) = 3-2x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} \frac{x\cancel{(2x-3)}}{-\cancel{(2x-3)}}\\ &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} -x\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

- Por la derecha:

  Si $x \to \dfrac{3}{2}^+ \implies x > \dfrac{3}{2} \implies 2x > 3 \implies 2x-3 > 0.$

  Es decir, $|2x-3| = 2x-3$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \frac{x\cancel{(2x-3)}}{\cancel{2x-3}}\\ &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} x\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|} \neq \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$, entonces $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$ no existe. †

Ejemplo 36.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2-x|}{4x^2-16}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

Al calcular los límites laterales:

- Por la izquierda:

  Si $x \to 2^- \implies x < 2 \implies 0 < 2-x$

  Por lo que $|2-x| = 2-x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{|2-x|}{4x^2-16} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{2-x}}{4\cancel{(x-2)}(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{4(x+2)} \\ &= -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

- Por la derecha:

  Si $x \to 2^+ \implies x > 2 \implies 0 > 2-x$

  Por lo que $|2-x| = -(2-x) = x-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{|2-x|}{4x^2-16} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{4\cancel{(x-2)}(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4(x+2)} \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|2-x|}{4x^2-16} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|2-x|}{4x^2-16}$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2-x|}{4x^2-16}$ no existe. †

Ejemplo 37.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x+1|-6}{3-|7-2x|}$

En este ejemplo se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$, sin embargo, al evaluar el 5 en los valores absolutos no da cero directamente, estos valores absolutos se pueden analizar de manera directa sin necesidad de hacer límites laterales:

- Si $x \to 5 \implies x+1 \to 6 > 0$

  Así $|x+1| = x+1$.

- Si $x \to 5 \implies 7 - 2x \to -3 < 0$

  Así $|7 - 2x| = -(7 - 2x) = 2x - 7$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{|x+1| - 6}{3 - |7 - 2x|} &= \lim_{x \to 5} \frac{x + 1 - 6}{3 - (2x - 7)} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{10 - 2x} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{x - 5}}{-2\cancel{(x - 5)}} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 38.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|1 - x^2|}$

Por último, se puede tener una combinación de los casos anteriores, donde también se puede hacer uso de la propiedad de valor absoluto $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ para tener un valor absoluto que se aproxima a cero y el otro no, tal como en el denominador de este límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|1 - x^2|} &= \lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|(1 - x)(1 + x)|} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|1 - x| \cdot |1 + x|}
\end{aligned}$$

Primero se van a trabajar los valores absolutos que no dan cero al ser evaluados:

- Si $x \to 1 \implies x^2 - 3x \to -2 < 0$.

  Así $|x^2 - 3x| = -(x^2 - 3x) = 3x - x^2$.

- Si $x \to 1 \implies 1 + x \to 2 > 0$.

  Así $|1 + x| = 1 + x$.

Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|1 - x^2|} &= \lim_{x \to 1} \frac{|x^2 - 3x| - 2}{|1 - x| \cdot |1 + x|} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{3x - x^2 - 2}{|1 - x| \cdot (1 + x)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-(x^2 - 3x + 2)}{|1 - x| \cdot (1 + x)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-(x - 1)(x - 2)}{|1 - x| \cdot (1 + x)}
\end{aligned}$$

En este punto se hacen los límites laterales para trabajar el valor absoluto que sí da cero:

- Por la izquierda

  Si $x \to 1^- \implies x < 1 \implies 0 < 1 - x$.

  Así $|1 - x| = 1 - x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x-2)}{|1-x|\cdot(1+x)} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)}\\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

- Por la derecha

  Si $x \to 1^+ \implies x > 1 \implies 0 > 1 - x$.

  Así $|1 - x| = -(1 - x) = x - 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x-2)}{|1-x|\cdot(1+x)} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(1+x)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x-2)}{|1-x|\cdot(1+x)} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)(x-2)}{|1-x|\cdot(1+x)}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-3x|-2}{|1-x^2|}$ no existe.

Límites que involucran cambio de variable

Hay algunos casos en los que realizar una racionalización es demasiado complicado por lo que es mejor utilizar un cambio de variable (esta técnica también es aplicable en otros límites que se verán más adelante).

Ejemplo 39.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 21} \frac{\sqrt[4]{195x+1}-8}{\sqrt[3]{195x+1}-16}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer el cambio de variable:

Sea $u^{12} = 195x + 1$, si $x \to 21$ entonces $u \to 2$, así

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 21} \frac{\sqrt[4]{195x+1}-8}{\sqrt[3]{195x+1}-16} &= \lim_{u\to 2} \frac{\sqrt[4]{u^{12}}-8}{\sqrt[3]{u^{12}}-16}\\ &= \lim_{u\to 2} \frac{u^3-8}{u^4-16}\\ &= \lim_{u\to 2} \frac{\cancel{(u-2)}(u^2+2u+4)}{\cancel{(u-2)}(u^3+2u^2+4u+8)}\\ &= \lim_{u\to 2} \frac{u^2+2u+4}{u^3+2u^2+4u+8}\end{aligned}$$

$$= \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

Ejemplo 40.

Determine el valor de $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{5t-1}+1}{3t}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer un cambio de variable:

Sea $u^7 = 5t - 1$, entonces $t = \dfrac{u^7+1}{5}$; si $t \to 0$ entonces $u \to -1$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[7]{5t-1}+1}{3t} &= \lim_{u\to -1} \frac{\sqrt[7]{u^7}+1}{3\cdot\frac{u^7+1}{5}} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5(u+1)}{3(u^7+1)} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5\cancel{(u+1)}}{3\cancel{(u+1)}(u^6-u^5+u^4-u^3+u^2-u+1)} \\
&= \lim_{u\to -1} \frac{5}{3(u^6-u^5+u^4-u^3+u^2-u+1)} \\
&= \frac{5}{3\cdot 7} = \frac{5}{21}
\end{aligned}$$

Límites trigonométricos

Para evaluar los límites con forma $\dfrac{0}{0}$ que involucren funciones trigonométricas se utilizan dos resultados importantes:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0}$$

Para verificar el primero se necesita hacer una construcción geométrica y aplicar el Teorema del Emparedado o del Encaje, que se enuncia a continuación.

Teorema 4. Teorema del emparedado

Si f, g y h son funciones tales que

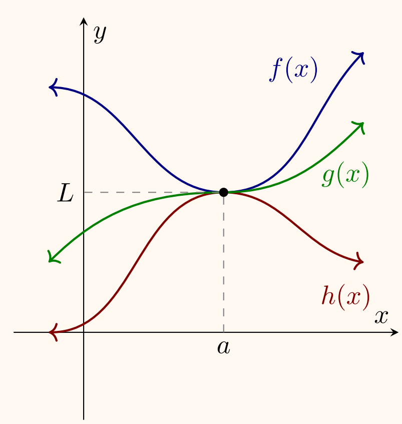
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

alrededor del punto $x = a$ y además

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$$

entonces

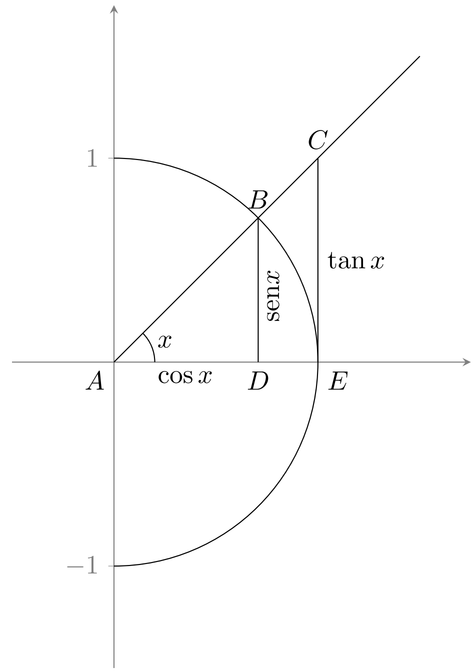
$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$



Este Teorema también será útil más adelante cuando se estudien los límites al infinito.

Posteriormente se estudiará el Teorema de L'Hôpital, que permitirá verificar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ en un solo paso, por el momento, se tiene que realizar la construcción siguiente.

Considere un círculo de radio uno centrado en el origen, tal como se muestra en la figura, en donde se define el ángulo x y se forman los triángulos ABD y ACE.
Se nota claramente que el área del triángulo ABD es menor que el área del sector circular centrado en A y definido entre B y E, el cual a su vez es menor que el área del triángulo ACE.
Se cumple además que la longitud de los segmentos AB y AE es uno pues son radios del círculo.
Aplicando reglas de trigonometría en el triángulo ABD se obtiene que el cateto opuesto mide $\operatorname{sen} x$ y el cateto adyacente mide $\cos x$.
Ahora al aplicar semejanza de triángulos con $\triangle ABD$ y $\triangle ACE$ se obtiene que CE tiene una longitud de $\tan x$.
Así, asumiendo el caso en que $x > 0$ en el primer cuadrante donde todas las funciones trigonométricas son positivas se cumple que:



$$\begin{aligned}
&\text{Área } \triangle ABD \leqslant \text{ Área del sector circular} ABE \leqslant \text{ Área } \triangle ACE \\
\Longrightarrow\ & \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x} \\
\Longrightarrow\ & \operatorname{sen} x \cos x \leqslant x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\
\Longrightarrow\ & \cos x \leqslant \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{\cos x} \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{\cos x} \geqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqslant \cos x \\
\Longrightarrow\ & \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \geqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqslant \lim_{x\to 0^+} \cos x \\
\Longrightarrow\ & 1 \geqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqslant 1
\end{aligned}$$

Por lo que, al utilizar el teorema 4 se cumple que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

De una forma similar se procede cuando $x < 0$.

El segundo resultado es más sencillo de probar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)x}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)}\\
&= 1\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Nota: Este proceso de multiplicar por el conjugado de $1-\cos x$ es aplicable en muchos ejemplos donde aparece dicha expresión.

Ejemplo 41.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5u)}{5u}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$. Se va a hacer el cambio de variable:

Sea $t = 5u$, si $u \to 0$ entonces $t \to 0$, así

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5u)}{5u} &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Nota: En general $\displaystyle\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$

Ejemplo 42.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\\
&= \frac{0}{1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

†

Ejemplo 43.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{5x}$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{5x} &= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \\
&= \frac{2}{5} \cdot 1 \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo 44.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \csc(2x) \cdot \cot(2x)$

Se tiene la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \csc(2x) \cdot \cot(2x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4x^2 \cos(2x)}{4\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2x)} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \cos(2x) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

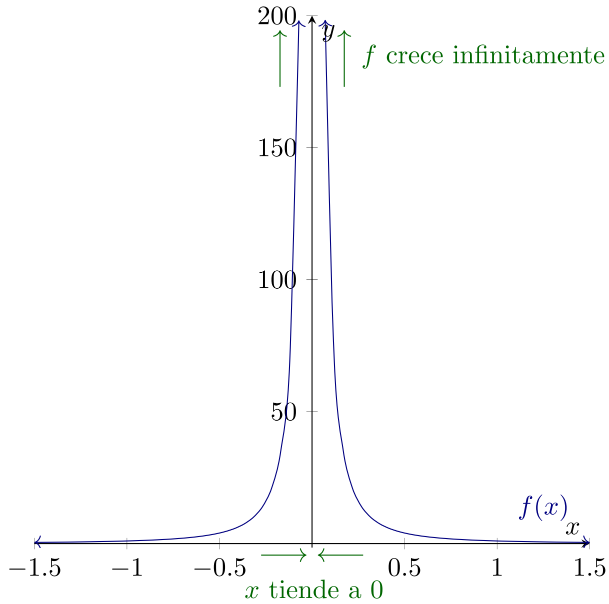
2.2.3. Forma indeterminada $\frac{k}{0}$ (límites infinitos y asíntotas verticales)

Ejemplo 45.

Mediante una tabla, investigue el comportamiento de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

Observe que se tiene la forma $\dfrac{1}{0}$, para investigar el comportamiento de la función se puede realizar una tabla:

x	-0.3	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.3
$f(x)$	11.11	100	10000	1000000	?	1000000	10000	100	11.11



Por lo que se conjetura que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

†

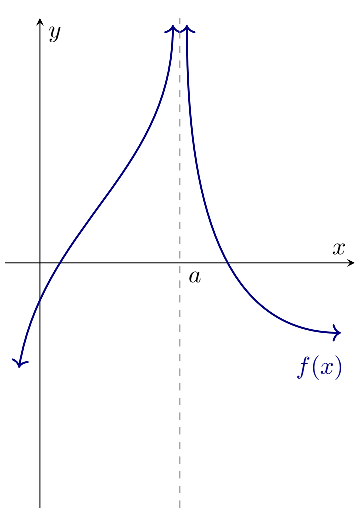
En este ejemplo se observa que la función crece sin límite conforme x se aproxima a 0, para denotar este comportamiento se escribe

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

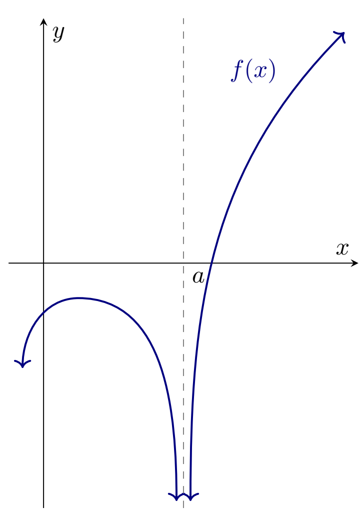
Esto no significa que el límite exista, sino que expresa la forma en que no existe, así:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que la función $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes (tanto como se quiera) conforme x se aproxima a a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que la función $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes negativos (tanto como se quiera) conforme x se aproxima a a.

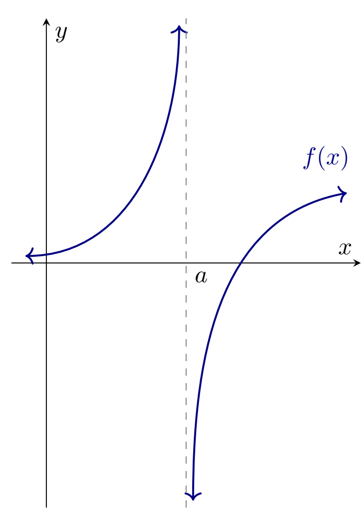
También se pueden definir los límites laterales que tiendan a infinito de una manera similar, de manera gráfica:



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

En estos casos se dice que $x = a$ es una asíntota vertical de la función.

Definición 6.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función.

Así, se tiene que si k es una constante distinta de cero, entonces:

$$\boxed{\frac{k}{0} \to \pm\infty}$$

Para saber si el infinito es positivo o negativo se debe encontrar "el signo" de 0 y se utiliza la regla de signos común para la división.

Ejemplo 46.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x-2}$

Observe que se tiene la forma $\dfrac{4}{0}$.

Si $x \to 2^- \implies x < 2 \implies x - 2 < 0 \implies x - 2 \to 0^-$.

La forma ahora es $F\left(\dfrac{4}{0^-} \to \text{-}\infty\right)$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x-2} = \text{-}\infty$.

Ejemplo 47.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-2}{x+1}$

Observe que se tiene la forma $\dfrac{-2}{0}$.

Si $x \to -1^+ \implies x > -1 \implies x + 1 > 0 \implies x + 1 \to 0^+$.

La forma ahora es $F\left(\dfrac{-2}{0^+} \to \text{-}\infty\right)$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-2}{x+1} = \text{-}\infty$.

Ejemplo 48.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{3-x}$

Este límite se tiene que hacer calculando los límites laterales:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{3-x}$

  Si $x \to 3^- \implies x < 3 \implies 3 - x > 0 \implies 3 - x \to 0^+ : F\left(\dfrac{1}{0^+} \to {}^+\infty\right)$

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{3-x} = {}^+\infty$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{3-x}$

  $x \to 3^+ \implies x > 3 \implies 3 - x < 0 \implies 3 - x \to 0^- : F\left(\dfrac{1}{0^-} \to {}^-\infty\right)$

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{3-x} = {}^-\infty$

Y como $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{3-x} \neq \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{3-x}$, se concluye que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{3-x}$ no existe.

Ejemplo 49.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

En algunos casos, como este, no es necesario analizar los límites laterales, pues se sabe que un número distinto de cero, elevado al cuadrado, siempre es positivo, es decir:

Si $x \to 0 \implies (x-2)^2 > 0 \implies (x-2)^2 \to 0^+$

Por lo que el límite tiene la forma $F\left(\dfrac{1}{0^+} = {}^+\infty\right)$

Se concluye que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = {}^+\infty$

2.2.4. Formas indeterminadas $\frac{k}{\infty}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ (límites al infinito y asíntotas horizontales)

Ejemplo 50.

Realice una tabla para observar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ cuando x toma valores grandes.

x	10	100	1000	10000	$^+\infty$
$f(x)$	0.02	0.0002	0.000002	0.00000002	?

Por lo que la conjetura es que $\lim\limits_{x \to {}^+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0.$ †

Nota: Observe que la forma de este límite es $\dfrac{2}{\infty}$.

Ejemplo 51.

Realice una tabla para observar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{1-3x^2}{x^2+2}$ cuando x toma valores grandes.

x	10	100	1000	$^{+}\infty$
$f(x)$	-2.93	-2.9993	-2.999993	?

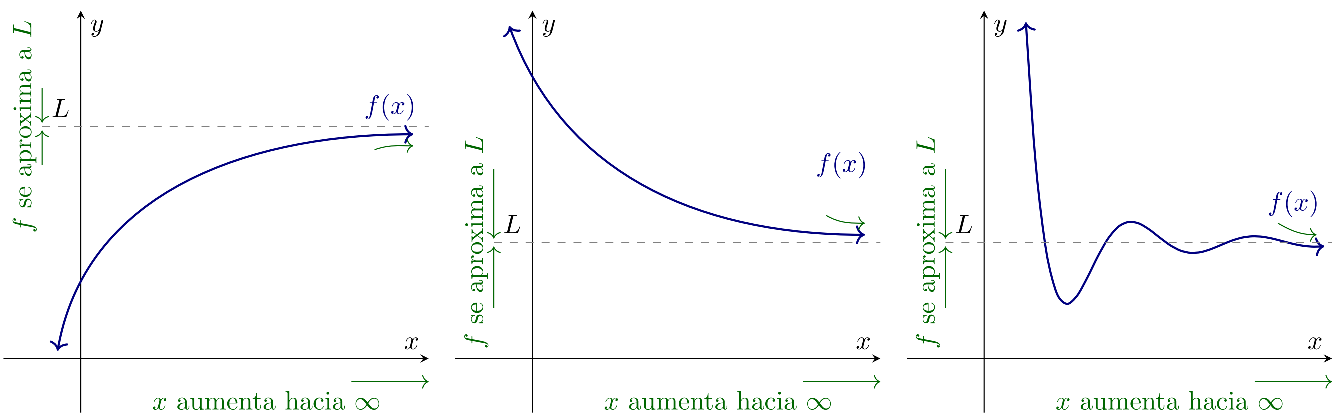
Por lo que la conjetura es que $\lim\limits_{x\to{}^{+}\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+2} = -3.$ †

Nota: Observe que la forma de este límite es $\dfrac{\infty}{\infty}$.

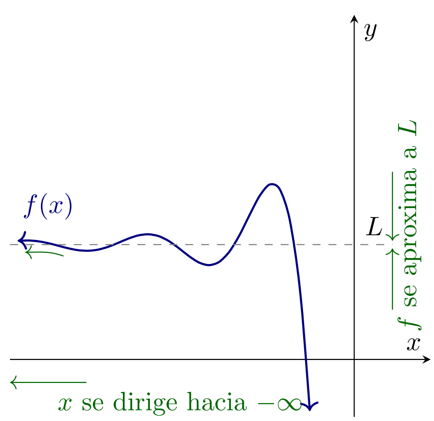
Para estos casos se tiene que:

- $\lim\limits_{x\to{}^{+}\infty} f(x) = L$ significa que la función se aproxima tanto como se quiera a L conforme x toma valores cada vez mayores.
- $\lim\limits_{x\to{}^{-}\infty} f(x) = L$ significa que la función se aproxima tanto como se quiera a L conforme x toma valores cada vez mayores negativos.

Gráficamente se tienen las siguientes posibilidades:



En estos casos $\lim\limits_{x\to{}^{+}\infty} f(x) = L$, aquí se dice que $y = L$ es una asíntota horizontal.



Aquí $\lim\limits_{x\to{}^{-}\infty} f(x) = L$, $y = L$ es una asíntota horizontal.

Definición 7. Asíntota horizontal

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $y = L$ es una asíntota horizontal de la función.

En el primer ejemplo se observa que si una constante se divide cada vez por valores mayores, el resultado es cada vez más pequeño (tendiendo a cero), es decir, se tiene el resultado

$$\boxed{\frac{k}{\infty} \to 0}$$

En el segundo ejemplo se tenía la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, esta forma puede dar cualquier valor como resultado y para calcular un límite con esta forma se debe realizar trabajo algebraico previo que la elimine.

Si el límite que se calcula es una división de polinomios entonces, por lo general, funciona "sacar a factor común" la variable de mayor grado tanto en el numerador como en el denominador.

Ejemplo 52.

Determine el valor de $\lim\limits_{x\to{}^+\infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to{}^+\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2} &= \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{-3x^2+1}{x^2+2} \\
&= \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{x^2\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to{}^+\infty} \frac{\left(-3+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)} \\
&= -3
\end{aligned}$$

†

Propiedades del infinito

Estas son algunas propiedades del infinito que nos pueden ayudar al calcular límites (aquí se hace un abuso del lenguaje al hablar simplemente del infinito, cuando lo correcto sería tomar límites que tiendan a infinito, nos valemos de este recurso para mejorar la comprensión), en todos los casos se toma a c como constante real.

1. ${}^+\infty + c = {}^+\infty$
2. ${}^-\infty + c = {}^-\infty$
3. $c \cdot {}^+\infty = {}^+\infty$, $c > 0$.
4. $c \cdot {}^+\infty = {}^-\infty$, $c < 0$.
5. $c \cdot {}^-\infty = {}^-\infty$, $c > 0$.
6. $c \cdot {}^-\infty = {}^+\infty$, $c < 0$.
7. ${}^+\infty + {}^+\infty = {}^+\infty$
8. ${}^-\infty + {}^-\infty = {}^-\infty$

9. ${}^{+}\infty \cdot {}^{+}\infty = {}^{+}\infty$
10. ${}^{-}\infty \cdot {}^{+}\infty = {}^{+}\infty \cdot {}^{-}\infty = {}^{-}\infty$
11. ${}^{-}\infty \cdot {}^{-}\infty = {}^{+}\infty$

Nota: La forma ${}^{+}\infty - {}^{+}\infty$ es una forma indeterminada que puede dar cualquier valor, para calcular un límite con esta forma se debe primero realizar trabajo algebraico para eliminarla.

Ejemplo 53.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} &= \lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}
\end{aligned}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\dfrac{\left(1+\frac{2}{{}^{-}\infty}+\frac{1}{({}^{-}\infty)^2}\right)}{{}^{-}\infty\left(1+\frac{3}{({}^{-}\infty)^3}\right)} = \dfrac{(1+0+0)}{{}^{-}\infty\,(1+0)} = \dfrac{1}{{}^{-}\infty} \to 0\right)$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} = 0.$ †

Ejemplo 54.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} &= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{3-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\dfrac{{}^{+}\infty\left(2+\frac{1}{{}^{+}\infty}+\frac{2}{({}^{+}\infty)^2}\right)}{3-\frac{1}{{}^{+}\infty}} = \dfrac{{}^{+}\infty\,(2+0+0)}{3-0} = \dfrac{{}^{+}\infty\cdot 2}{3} = {}^{+}\infty\right)$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} = {}^{+}\infty.$

Ejemplo 55.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} &= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

En este caso se tiene la forma $F\left(\dfrac{3+\frac{1}{({}^{+}\infty)^3}}{2+\frac{2}{{}^{+}\infty}+\frac{1}{({}^{+}\infty)^2}} = \dfrac{3+0}{2+0+0} = \dfrac{3}{2}\right)$.

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} = \frac{3}{2}$. †

Notas:

- Observe que en los tres ejemplos anteriores se hubiera obtenido el mismo resultado tomando los monomios de mayor grado del numerador y el denominador, este resultado es válido y se puede utilizar, así:
  - $\displaystyle\lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+3} = \lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{1}{x} = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x^2+x+2}{3x-1} = \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{2x}{3} = {}^{+}\infty$
  - $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
- Cuando se calcula un límite (de cualquier forma), una vez que se evalúa el límite se debe evaluar en toda la expresión de una vez, no es válido evaluar "por pedazos" porque entonces un límite podría dar cualquier cosa, se tomará como ejemplo el último ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{3x^3+1}{2x^3+2x^2+x} &= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x^4\left(\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\cancelto{0}{\frac{2}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x^3}\right)}\\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{1}{x^3}\right)}\\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{1}{x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

cuando en realidad ya se vio que este límite da $\dfrac{3}{2}$

Ejemplo 56.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} && \text{Si } x\to+\infty \text{ entonces } |x|=x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(1+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}}{\left(2-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Se recalca que, en este caso, $x\to+\infty$, entonces se está interesado en los valores positivos (y muy grandes), por lo que $|x|=x$.

Ejemplo 57.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}$

Se tiene la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} && \text{Si } x\to-\infty \text{ entonces } |x|=-x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{\left(1 + \cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}}{\left(2 - \cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Contrario al ejemplo anterior, en este caso $x \to {}^{-}\infty$, es decir, se está interesado en los valores negativos, por tanto $|x| = -x$.

Ejemplo 58.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Se tiene la forma $\infty - \infty$, en este caso se debe racionalizar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) &= \lim_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene la forma $F\left(\frac{1}{\sqrt{({}^{+}\infty)^2+1}+{}^{+}\infty} = \frac{1}{\sqrt{{}^{+}\infty}+{}^{+}\infty} = \frac{1}{{}^{+}\infty+{}^{+}\infty} = \frac{1}{{}^{+}\infty} = 0\right)$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

Ejemplo 59.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$

Se tiene la forma $\infty - \infty$, en este caso se debe racionalizar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) &= \lim_{x \to {}^{+}\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)} \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} && F\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x} \\
&= \lim_{x \to {}^{+}\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}\\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)}+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

†

Existen algunos casos de límites al infinito con expresiones trigonométricas que se resuelven utilizando el Teorema del Emparedado (Teorema 4).

Ejemplo 60.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$

Se sabe que

$$
\begin{aligned}
-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 &\implies x-1 \leqslant x+\operatorname{sen} x \leqslant x+1 && \text{Se suma } x.\\
&\implies \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leqslant \frac{x+1}{x} && x\to{}^{+}\infty,\ \text{entonces } x>0.\\
&\implies \lim_{x\to{}^{+}\infty}\frac{x-1}{x} \leqslant \lim_{x\to{}^{+}\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leqslant \lim_{x\to{}^{+}\infty}\frac{x+1}{x}\\
&\implies 1 \leqslant \lim_{x\to{}^{+}\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1
\end{aligned}
$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to{}^{+}\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

Ejemplo 61.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to{}^{-}\infty} \frac{2+\cos x}{x}$

Se sabe que

$$
\begin{aligned}
-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 &\implies 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3 && \text{Se suma } 2.\\
&\implies \frac{1}{x} \geqslant \frac{2+\cos x}{x} \geqslant \frac{3}{x} && x\to{}^{-}\infty,\ \text{entonces } x<0.\\
&\implies \lim_{x\to{}^{-}\infty}\frac{1}{x} \geqslant \lim_{x\to{}^{-}\infty}\frac{2+\cos x}{x} \geqslant \lim_{x\to{}^{-}\infty}\frac{3}{x}\\
&\implies 0 \geqslant \lim_{x\to{}^{-}\infty}\frac{2+\cos x}{x} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

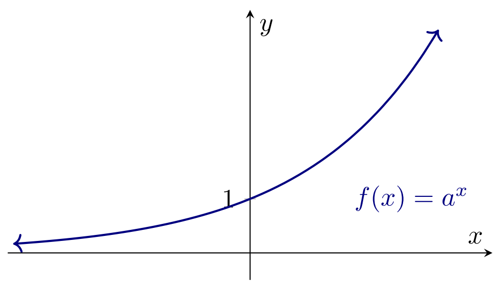
$\therefore \displaystyle\lim_{x\to{}^{-}\infty}\frac{2+\cos x}{x} = 0.$

2.2.5. Función Exponencial y Función Logarítmica

A continuación se muestran las gráficas de la función exponencial y la función logarítmica y, a partir de ellas, se observarán algunas de sus propiedades.

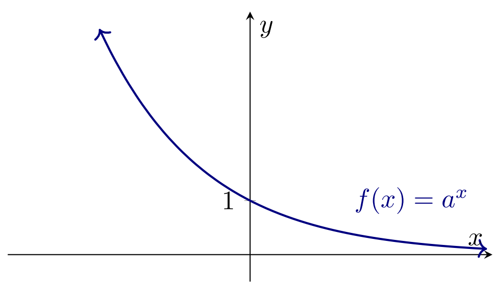
Función Exponencial (a^x)

- Si $a > 1$



De aquí:
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} a^x = 1^-$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} a^x = 1^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$

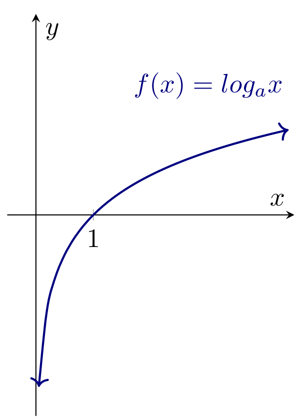
- Si $0 < a < 1$



De aquí:
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} a^x = 1^+$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} a^x = 1^-$
- $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$

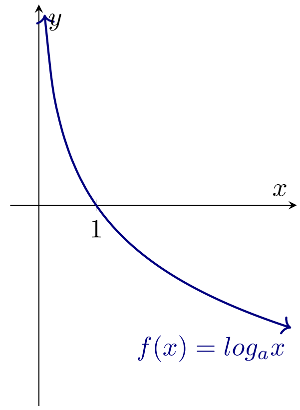
Función Logarítmica ($\log_a x$)

- Si $a > 1$



De aquí:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \log_a x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \log_a x = 0^-$

- Si $0 < a < 1$



De aquí:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \log_a x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \log_a x = 0^+$

Al tener en cuenta estos resultados se pueden calcular límites que presenten estas funciones.

Ejemplo 62.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to 3} 2^{\frac{1}{3-x}}$

Se tiene la forma $F\left(2^{\frac{k}{0}}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\lim\limits_{x \to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}}$

  Si $x \to 3^- \implies x < 3 \implies 3 - x > 0 \implies 3 - x \to 0^+$

  Así $F\left(2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}}$,

  Si $x \to 3^+ \implies x > 3 \implies 3 - x < 0 \implies 3 - x \to 0^-$

  Así $F\left(2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0\right)$

  $\therefore \lim\limits_{x \to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}} = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} 2^{\frac{1}{3-x}} \neq \lim\limits_{x \to 3^+} 2^{\frac{1}{3-x}}$, entonces $\lim\limits_{x \to 3} 2^{\frac{1}{3-x}}$ no existe.

Ejemplo 63.

Determine el valor de $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

Se tiene la forma $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0}}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

  Si $x \to -2^- \implies x < -2 \implies x+2 < 0 \implies x+2 \to 0^-$

  Así $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0^-}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0\right)$

  $\therefore \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} = 0$

- $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$

  Si $x \to -2^+ \implies x > -2 \implies x+2 > 0 \implies x+2 \to 0^+$

  Así $F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{0^+}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty\right)$

  $\therefore \displaystyle\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} = +\infty$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}} \neq \lim_{x\to -2^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$ entonces se concluye que $\displaystyle\lim_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+2}}$ no existe.

Ejemplo 64.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

Se tiene la forma $F\left(\frac{7}{\ln(1)} = \frac{7}{0}\right)$, se deben calcular los límites laterales.

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

  Si $x \to 2^- \implies x < 2 \implies -2x > -4 \implies 5-2x > 1 \implies 5-2x \to 1^+$

  $F\left(\frac{7}{\ln(1^+)} = \frac{7}{0^+} = +\infty\right)$

  $\therefore \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)} = +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)}$

  Si $x \to 2^+ \implies x > 2 \implies -2x < -4 \implies 5-2x < 1 \implies 5-2x \to 1^-$

  Así $F\left(\frac{7}{\ln(1^-)} = \frac{7}{0^-} = -\infty\right)$

  $\therefore \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)} = -\infty$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)}$ entonces se concluye que $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{\ln(5-2x)}$ no existe.

Ejemplo 65.

Determine el valor de $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+2}{\left(\ln(2x+3)\right)^2}$

Se tiene la forma $F\left(\dfrac{-1+2}{\left(\ln(2\cdot -1+3)\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\ln(1)\right)^2} = \dfrac{1}{(0)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty\right)$

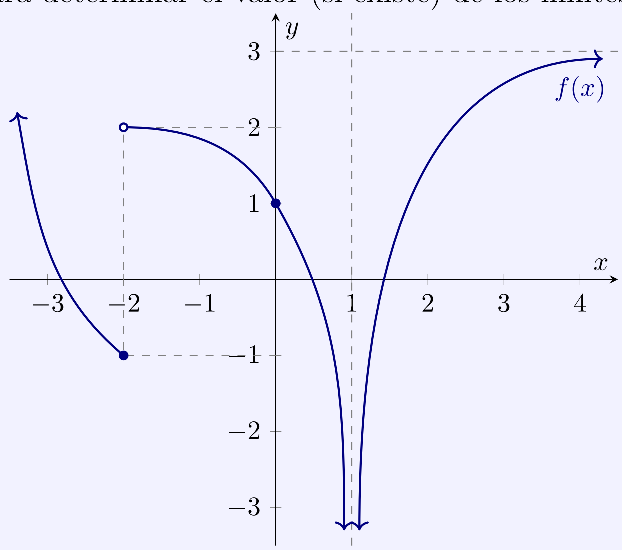
$\therefore \displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+2}{\left(\ln(2x+3)\right)^2} = +\infty$

Nota: En este caso no se necesitó calcular los límites laterales ya que si se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda se cumple que $(0)^2 = 0^+$. †

Ejemplo 66.

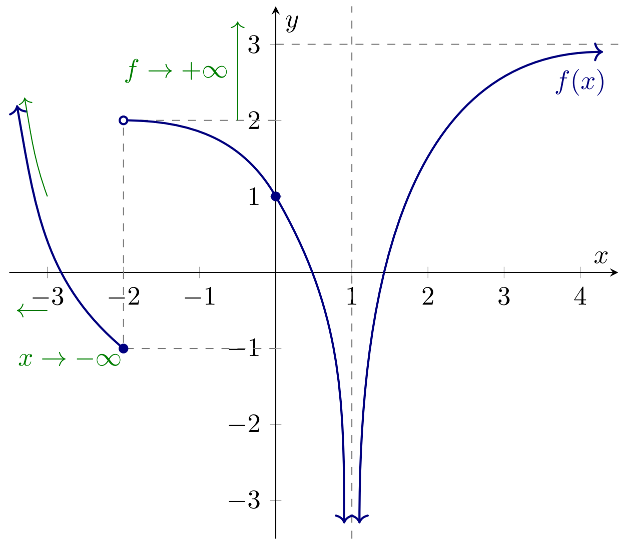
Utilice la gráfica de la función f para determinar el valor (si existe) de los límites siguientes

1. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$



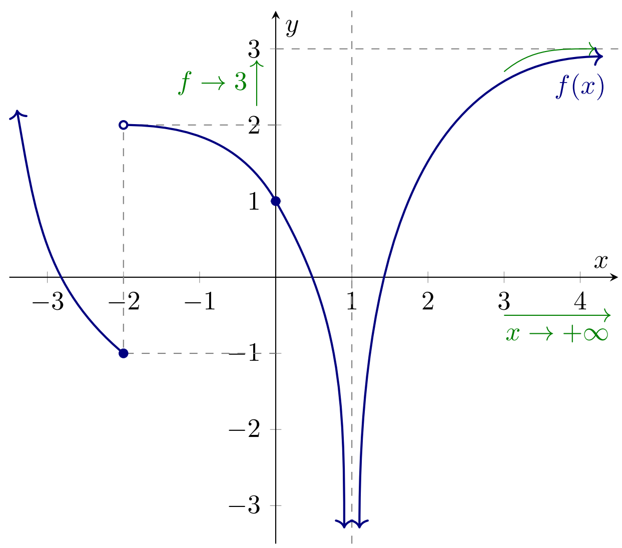
Solución:

1. Para $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se toman los valores de x hacia $-\infty$ (hacia la izquierda al inicio de la gráfica) y se nota que la función sigue hacia arriba, es decir, sigue aumentando infinitamente en el eje y.



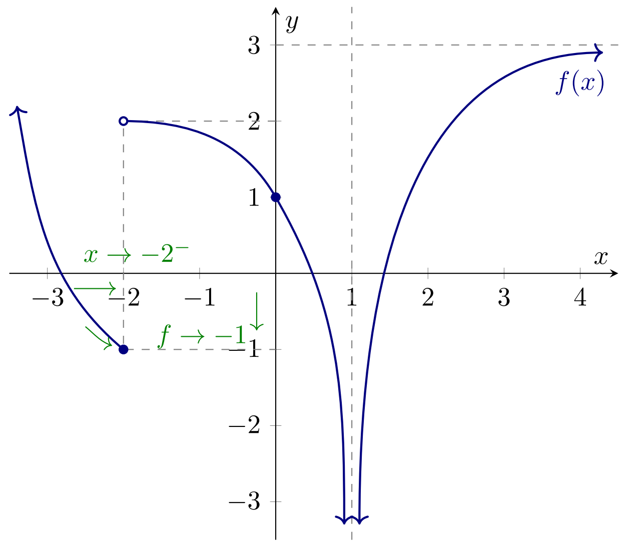
Por lo que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Para $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ se toman los valores de x hacia $+\infty$ (hacia la derecha al final de la gráfica) y se nota que la función se aproxima a la asíntota horizontal $y = 3$.



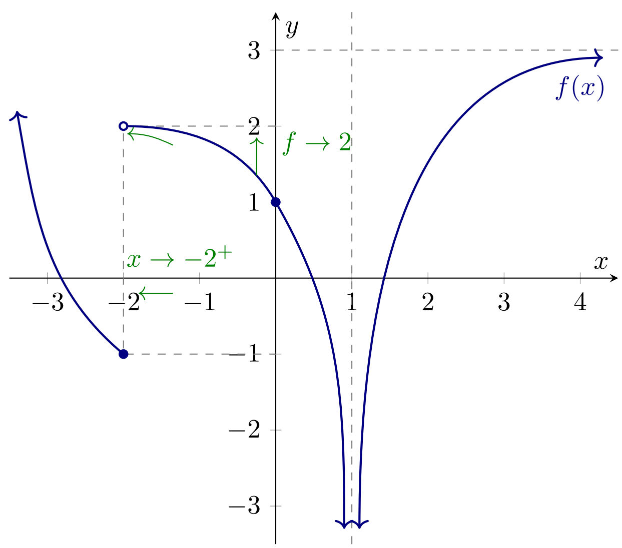
Por lo que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

3. Para $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, si la x se aproxima a 2 desde la izquierda, entonces la función en y se va aproximando a -1.



Por lo que $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$.

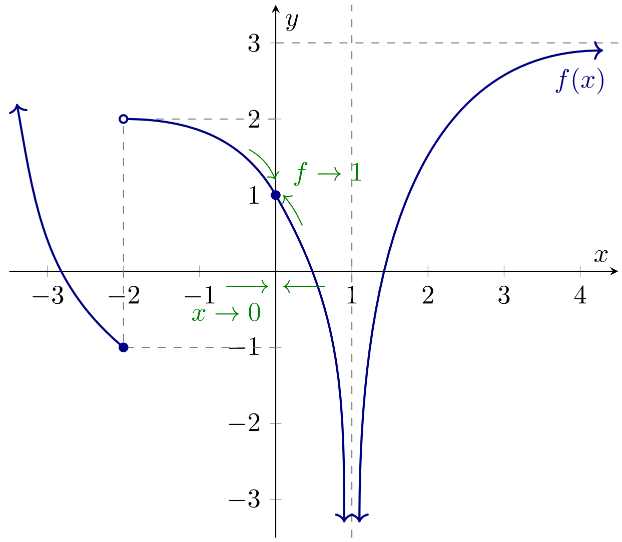
4. Para $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$, si la x se aproxima a 2 desde la derecha, entonces la función en y se va aproximando a 2.



Por lo que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$.

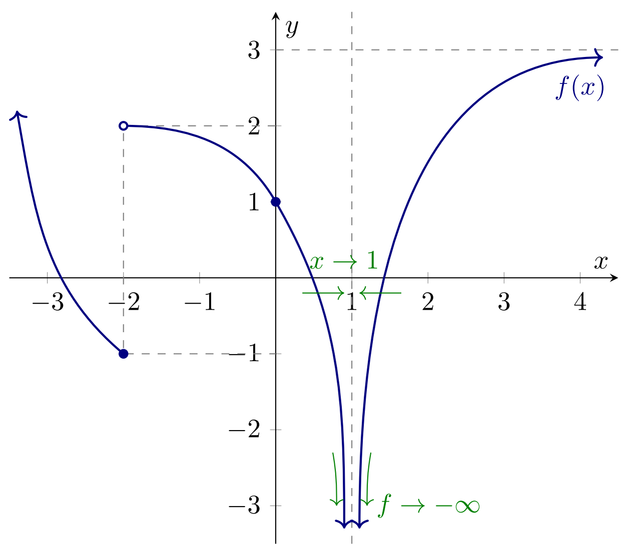
5. Como $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe.

6. Para $\lim_{x\to 0} f(x)$, si la x se aproxima a 0 por ambos lados, entonces la función en y se va aproximando a 1.



Por lo que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

7. Para $\lim_{x\to 1} f(x)$, si la x se aproxima a 1 por ambos lados, entonces la función en y se va hacia -∞.

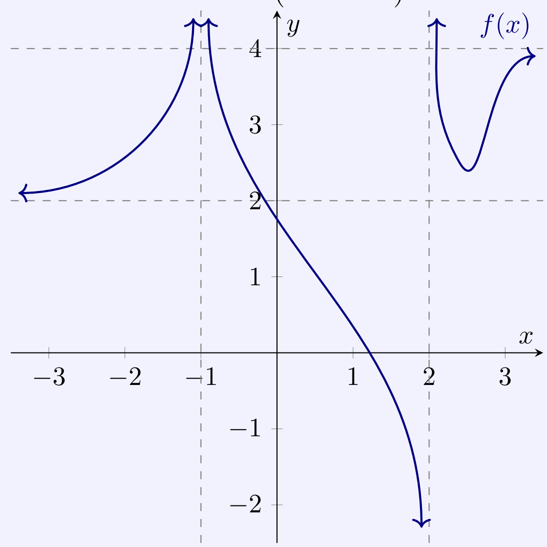


Por lo que $\lim_{x\to 1} f(x) =$ -∞.

Ejemplo 67.

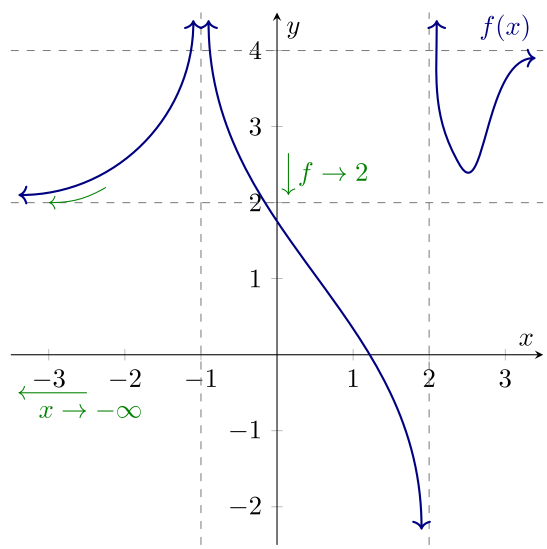
Utilice la gráfica de la función f para determinar el valor (si existe) de los límites siguientes

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$



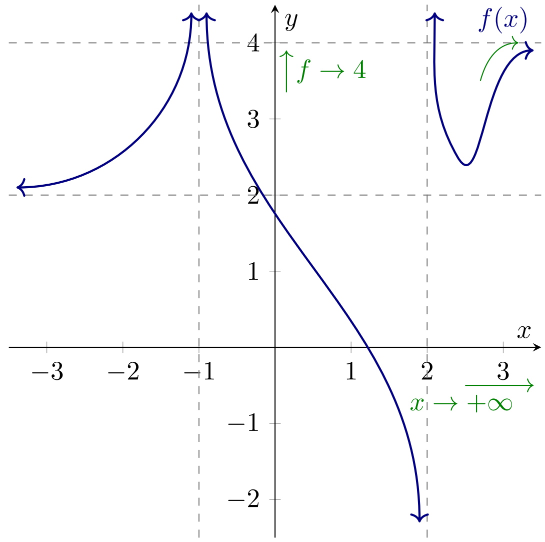
Solución:

1. Para $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ se toman los valores de x hacia $-\infty$ (hacia la izquierda al inicio de la gráfica) y se nota que la función se aproxima a la asíntota horizontal $y = 2$.



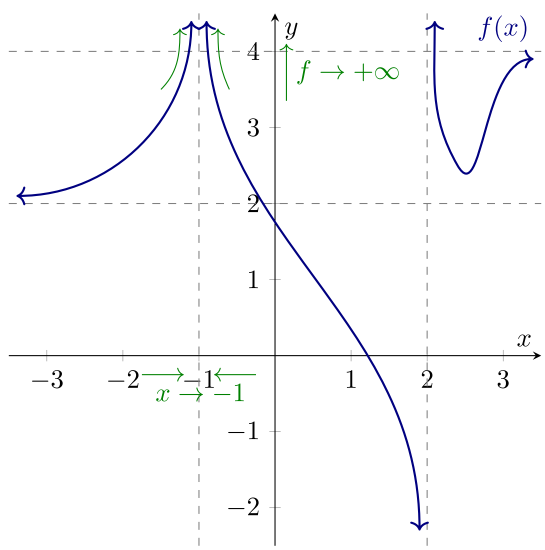
Por lo que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

2. Para $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ se toman los valores de x hacia $+\infty$ (hacia la derecha al final de la gráfica) y se nota que la función se aproxima a la asíntota horizontal $y = 4$.



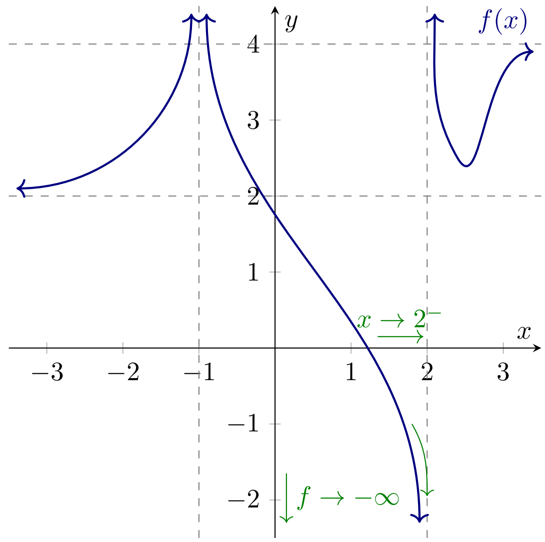
Por lo que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

3. Para $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ se toman los valores de x que se aproximen a -1 por ambos lados y se nota que la función va creciendo infinitamente en y, es decir, que $f \to +\infty$.



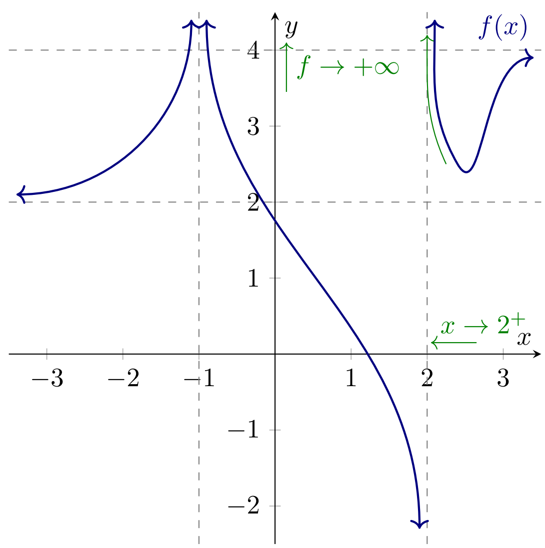
Por lo que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

4. Para $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ se toman los valores de x que se aproximen a 2 por la izquierda y se nota que la función tiende hacia -∞.



Por lo que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

5. Para $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ se toman los valores de x que se aproximen a 2 por la derecha y se nota que la función crece infinitamente, es decir, que $f \to +\infty$.



Por lo que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

Ejemplo 68.

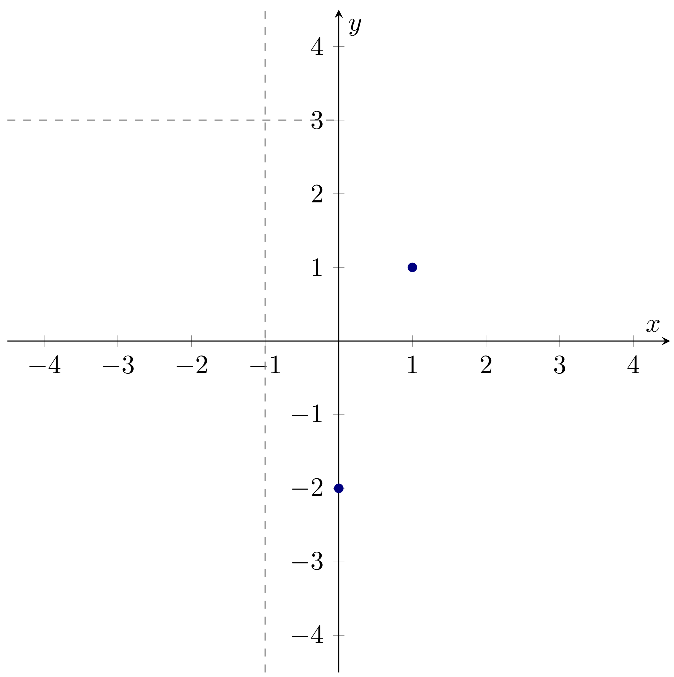
Realice una posible gráfica para la función f de forma que se cumplan, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

1. $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2$
3. $f(1) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
7. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$
8. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Solución:

Lo primero que se recomienda es poner los puntos fijos de la función, en este caso $f(1) = 1$, $f(0) = -2$.

También las asíntotas horizontales y verticales, como se indica que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, entonces la recta $y = 3$ es asíntota horizontal en $-\infty$. Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ entonces la recta $x = -1$ es asíntota vertical de la función.

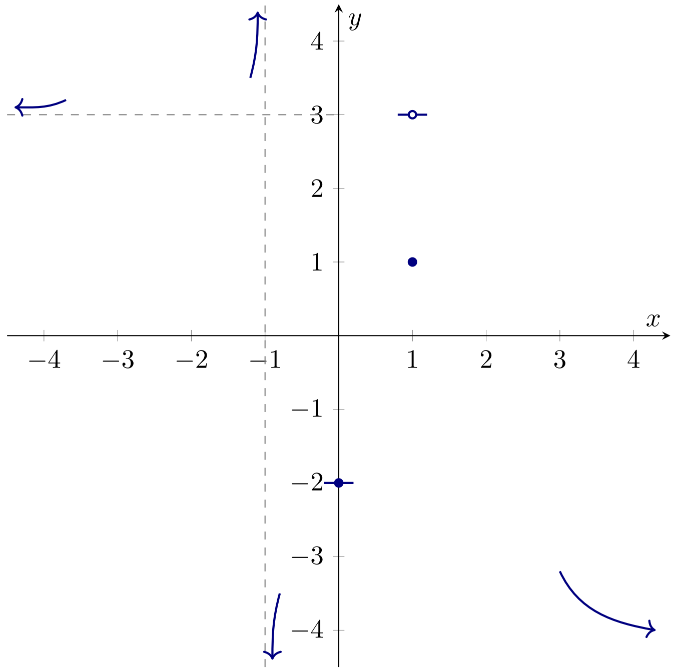


Para las asíntotas se va a marcar la manera en que se debe comportar la función en sus alrededores, por ejemplo, para la asíntota vertical en -1 se debe cumplir, que al acercarse por la izquierda, la función debe tender a $+\infty$, por la derecha debe tender a $-\infty$.

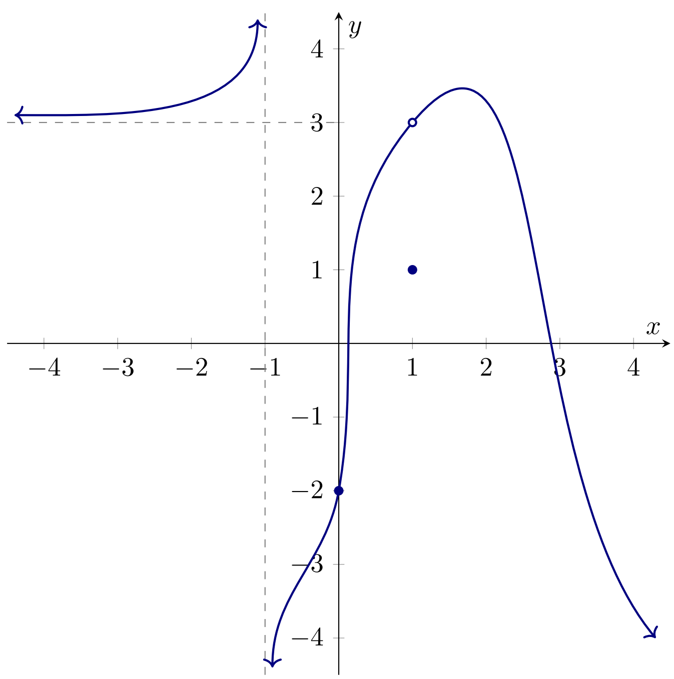
Por otra parte, para la asíntota horizontal la función se debe aproximar a ella conforme x tiende hacia $-\infty$, sin embargo, se podría aproximar desde arriba, abajo, oscilando o constante, inicialmente se pondrá por arriba.

Por último, a ambos lados de $x = 0$, la función se debe aproximar a -2, pues $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$, a ambos lados de $x = 1$, la función debe aproximarse a 3 ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y cuando x tiende a

$^{-}\infty$, la función debe tender a $^{-}\infty$ para que cumpla la condición $\lim\limits_{x\to^{+}\infty} f(x) = {}^{-}\infty$.



Ahora sólo falta unir las líneas para que se cumple el dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, se presenta una posible solución, ya que se podría hacer de muchas formas.

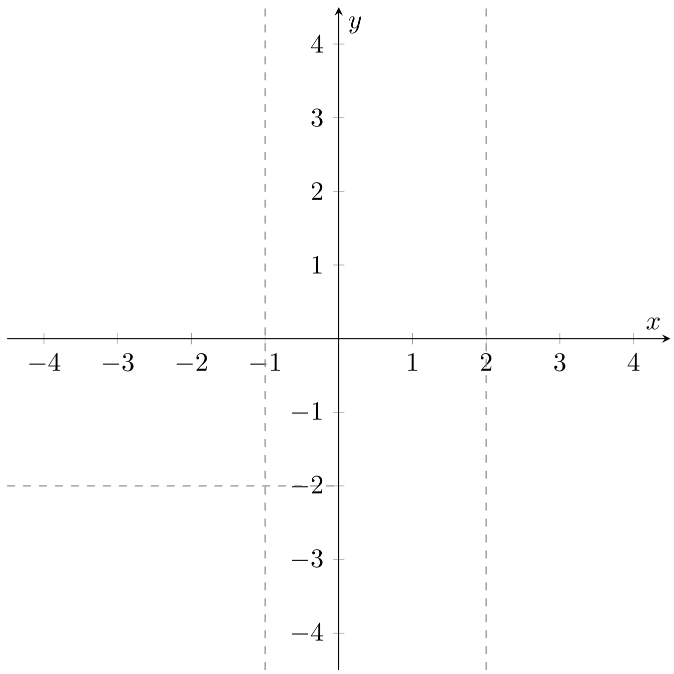


Ejemplo 69.

Realice una posible gráfica para la función f de forma que se cumplan, de manera simultánea, las siguientes condiciones:

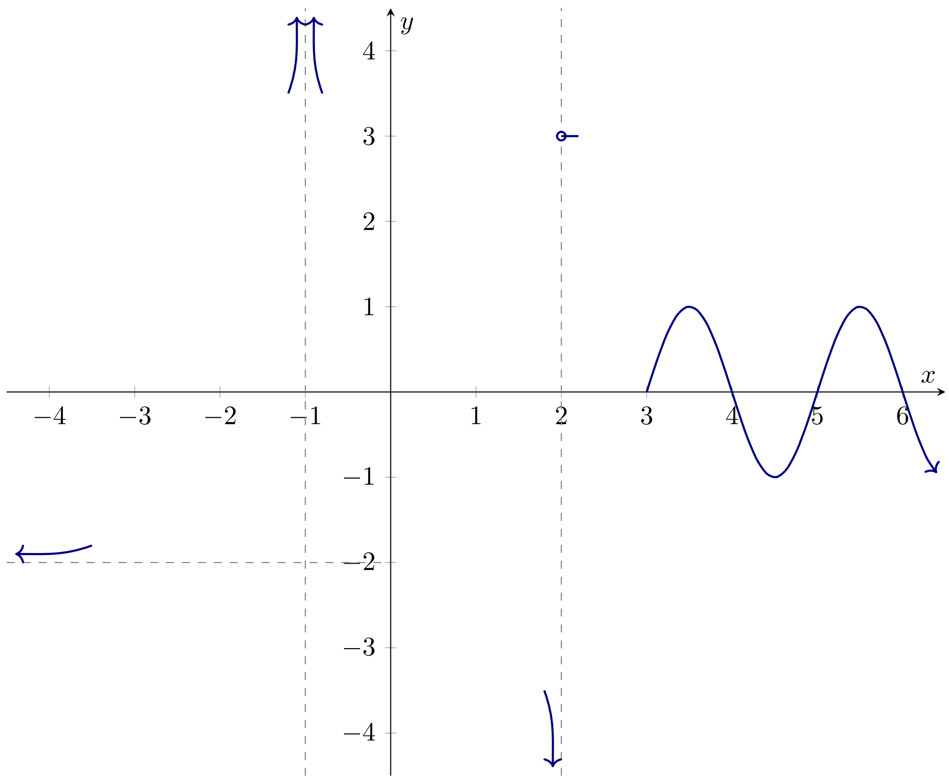
1. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$
4. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$
5. $\forall x > 3, -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ no existe
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$

Siguiendo un proceso similar al anterior, primero se dibujan las asíntotas, en este caso hay verticales en $x = 2$ y $x = -1$, además se tiene a $y = -2$ como asíntota horizontal en $-\infty$. Para este ejemplo no se indica ningún punto fijo.

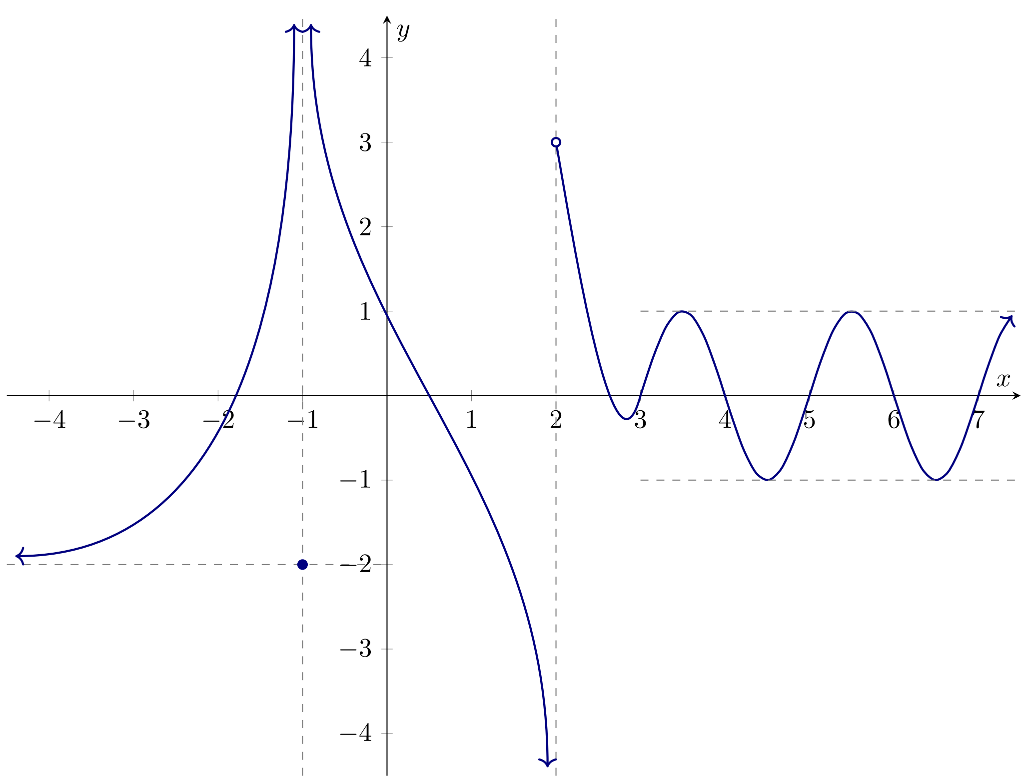


Se marca el comportamiento en las asíntotas y para $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$, por la derecha del 2 se debe aproximar a 3.

La condición $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ no existe, se puede cumplir de muchas formas, una opción es que tienda a $-\infty$ o $+\infty$ (recuerde que si un límite da ∞ entonces el límite no existe). Sin embargo, con respecto a $\forall x > 3, -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, lo que indica es que la función sólo puede estar entre -1 y 1, desde $x = 3$ en adelante, así, el límite no debe existir y la función debe estar entre -1 y 1, así que lo más sencillo es hacer un función que oscile (tal como se comportan seno o coseno).



Por último, se unen las líneas y se hace que calce el dominio $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, se muestra una posible solución.



Capítulo 3

Continuidad

De manera intuitiva, una función es continua si no presenta "brincos", ni "cortes" o "huecos". Otra definición que es muy común de utilizar de manera informal es: una función es continua si su gráfica puede ser trazada sin tener que levantar el lápiz.

Estas definiciones se pueden utilizar de manera intuitiva, sin embargo, con los límites ahora se tienen las herramientas necesarias para definir mejor esta idea.

Para que una función sea continua en un punto $x = a$ se debe cumplir que tanto por la izquierda como por la derecha la función se vaya aproximando a $f(a)$.

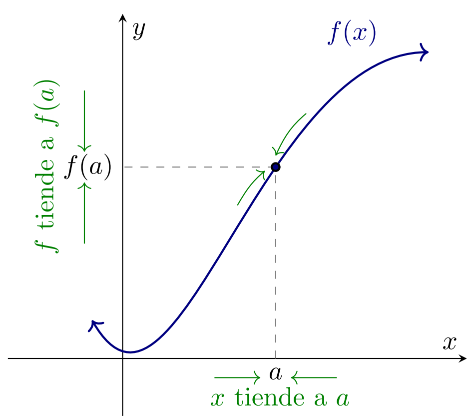
Definición 8. Continuidad

Una función f es continua en un número a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición requiere que se cumplan tres cosas:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



Definición 9. Continuidad lateral

Una función f es continua desde la derecha en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es continua desde la izquierda en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Definición 10. Continuidad en un intervalo

Una función f es continua en un intervalo si es continua en todo número de ese intervalo (en los extremos se entiende que es continua por la derecha o por la izquierda según corresponda).

Definición 11. Discontinuidad evitable e inevitable

Si una función es discontinua en $x = a$ entonces se dan las siguientes definiciones.

- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces se dice que f posee una discontinuidad evitable en $x = a$.
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe (los límites laterales dan como resultado número reales distintos), entonces se dice que f posee una discontinuidad inevitable de salto finito.
- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe pues uno de los límites laterales (o ambos) dieron ∞, entonces se dice que f posee una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Teorema 5.

Si f y g son funciones continuas en $x = a$ y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en $x = a$

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c \cdot f$
4. $f \cdot g$
5. $\dfrac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

Recuerde que en los límites la primer técnica que se vio fue la sustitución directa, en ésta se dieron varias propiedades en las que se cumplía que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, de estas propiedades se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 6.

Los tipos siguientes de funciones son continuas en todo su dominio:

1. Polinomios
2. Racionales
3. Raíces
4. Trigonométricas
5. Trigonométricas inversas
6. Exponenciales
7. Logarítmicas

Así, básicamente con este tipo de funciones, para determinar donde son continuas tan sólo se debe obtener el dominio e indicarlo en intervalos.

Ejemplo 70.

Indique el o los intervalos en donde es continua la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln(x-1)}$.

$\sqrt{x+2}$ tiene como dominio $x \geqslant -2$

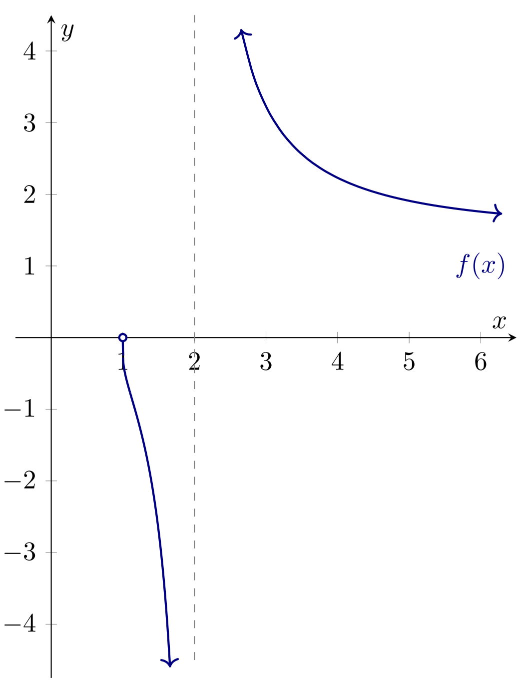
$\ln(x-1)$ tiene como dominio $x > 1$

$\ln(x-1) = 0$ si $x \neq 2$

El dominio de la función es $D_f:]1, +\infty[-2$

$\therefore f(x)$ es continua en $]1, 2[$ y $]2, +\infty[$.

A continuación se muestra la gráfica de la función, donde se puede corroborar el resultado obtenido, se tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y, por lo tanto, en $x = 2$ se tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.



Ejemplo 71.

Indique el o los intervalos en donde es continua la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$.

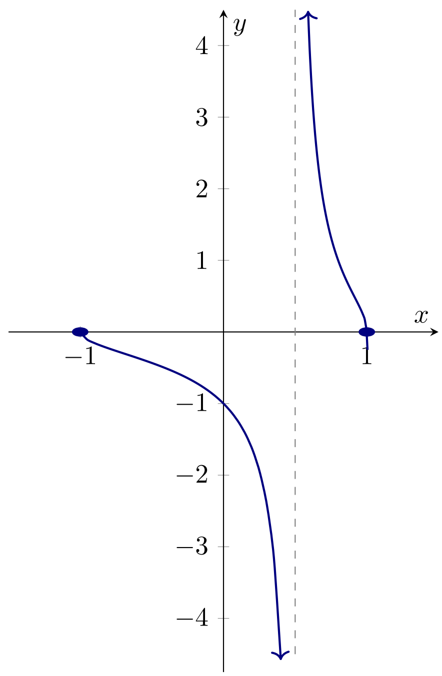
$\sqrt{1-x^2}$ tiene como dominio $[-1,1]$

$2x-1 \neq 0$ si $x \neq \dfrac{1}{2}$

El dominio de la función es $D_f = [-1,1] - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$\therefore$ $f(x)$ es continua en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right[$ y $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$

De igual forma, se muestra la gráfica de la función para corroborar el resultado, esta función presenta una asíntota vertical en $x = \dfrac{1}{2}$, en este valor también se tendría una discontinuidad inevitable de salto infinito.



Ejemplo 72.

Para la función f dada, determine si es continua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En esta función, el polinomio $x+1$ tiene a $\mathbb{R}$ como dominio, por lo que siempre es continuo en $\mathbb{R}$ y, por supuesto, sí es continuo en el intervalo $]0, +\infty[$. No se puede asegurar que sea continuo en $x = 0$ pues para continuidad en un punto se deben analizar por ambos lados

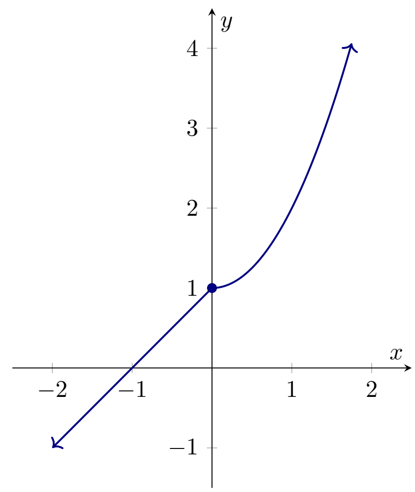
El polinomio x^2+1 tiene a $\mathbb{R}$ como dominio, por lo que también es continuo en $\mathbb{R}$ y, por supuesto, sí es continuo en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Sólo falta analizar la continuidad en $x = 0$, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} f(x) \\
\Longrightarrow\ &\lim_{x\to 0^-} (x^2+1) \stackrel{?}{=} 0+1 \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0^+} (x+1) \\
\Longrightarrow\ &1 = 1 = 1
\end{aligned}$$

Por lo que la función dada sí es continua para todo número real.

Se muestra la gráfica de esta función, donde se puede observar que los trozos se unen de manera continua.



Ejemplo 73.

Para la función f dada, determine si es continua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

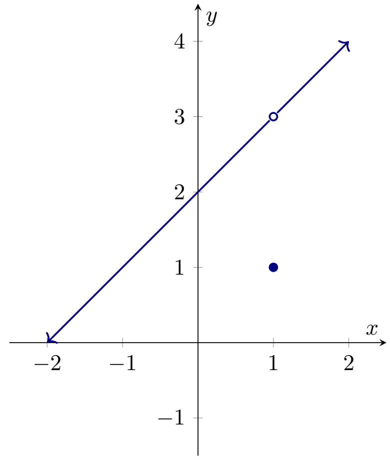
El dominio del trozo $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$, por lo que es continua en los intervalos $]-\infty, 1[$ y $]1, +\infty[$.

Sólo falta verificar la continuidad para $x = 1$. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) \stackrel{?}{=} f(1) &\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \stackrel{?}{=} 1 \\
&\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \stackrel{?}{=} 1 \\
&\Longrightarrow \lim_{x\to 1} (x+2) \stackrel{?}{=} 1 \\
&\Longrightarrow 3 \neq 1
\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ no es continua en $x = 1$ y, por lo tanto, no es continua en todos los números reales.

Se muestra la gráfica de la función para corroborar que no es continua en $x = 1$, como el límite existe, pero no hay continuidad, entonces es una discontinuidad evitable.



Ejemplo 74.

Para la función f dada, determine si es continua en $x = 2$.

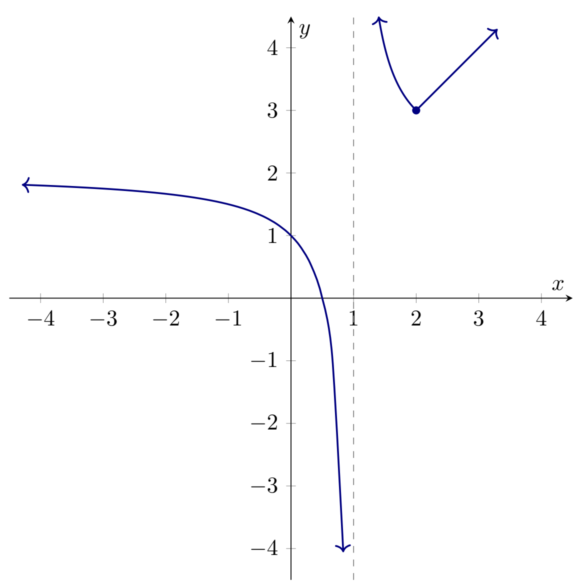
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Note que en este ejemplo sólo se pide determinar si la función es continua en $x = 2$, por lo que no importa si la función es continua o no en los demás puntos, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(2) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad &\Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{x-1} \stackrel{?}{=} 3 \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x-2} \\ &\Longrightarrow 3 \stackrel{?}{=} 3 \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 2^-} (x+1) \\ &\Longrightarrow 3 = 3 = 3 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ es continua en $x = 2$.

Observe la gráfica donde se nota que la función es continua en $x = 2$ (no importa que no sea continua en $x = 1$ pues ese punto no interesa para el ejercicio).



Ejemplo 75.

Para la función f dada, determine si es continua en todos los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si} \quad x<-3 \\ 2(x+1) & \text{si} \quad -3\leqslant x\leqslant 0 \\ \frac{x^3+2x}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

El primer trozo de la función $\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ tiene a $\mathbb{R}-\{-3\}$ como dominio, por lo que es continua en $]^{-}\infty,-3]$.

El segundo trozo es un polinomio de dominio $\mathbb{R}$ por lo que es continuo en todos los números reales y, por supuesto, es continuo en $]-3,0[$.

El último trozo es $\dfrac{x^3+2x}{x}$, que tiene como dominio $\mathbb{R}-\{0\}$, por lo que sí es continua en $]0,{}^{+}\infty[$.

Ahora se debe verificar que los distintos trozos se unen de forma continua, es decir, que es continua en $x=-3$ y $x=0$.

1. En $x=-3$

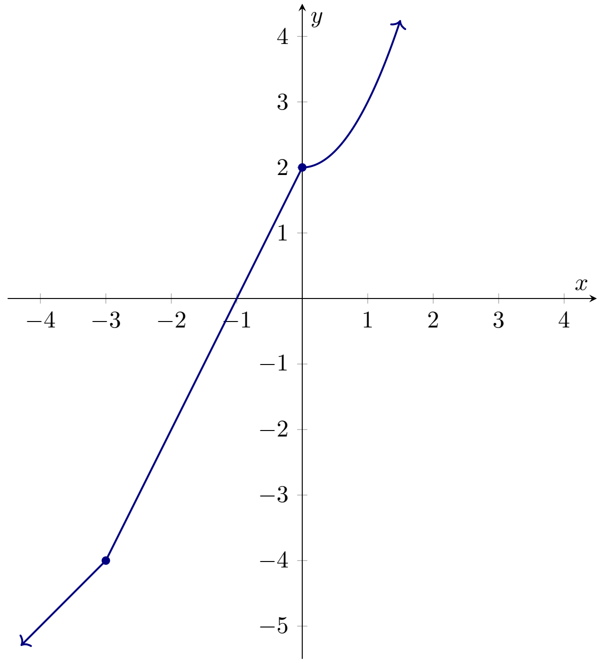
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-3^-} f(x)\stackrel{?}{=} f(-3)\stackrel{?}{=}\lim_{x\to-3^+} f(x) &\Longrightarrow \lim_{x\to-3^-}\frac{x^2+2x-3}{x+3}\stackrel{?}{=}2(-3+1)\stackrel{?}{=}\lim_{x\to-3^+}2(x+1)\\ &\Longrightarrow \lim_{x\to-3^-}(x-1)\stackrel{?}{=}-4\stackrel{?}{=}-4\\ &\Longrightarrow -4=-4=-4\end{aligned}$$

2. En $x=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x)\stackrel{?}{=} f(0)\stackrel{?}{=}\lim_{x\to0^+} f(x) &\Longrightarrow \lim_{x\to0^-}2(x+1)\stackrel{?}{=}2(0+1)\stackrel{?}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+2x}{x}\\ &\Longrightarrow 2\stackrel{?}{=}2\stackrel{?}{=}\lim_{x\to0^+}(x^2+2)\\ &\Longrightarrow 2=2=2\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ es continua para todo número real.

Note en la gráfica cómo los trozos se unen de forma continua.



Ejemplo 76.

Determine el o los valores de a (si es posible) de modo que $f(x)$ se continua, en donde

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \\ 3ax & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

En este ejemplo se debe encontrar el o los valores de la constante a de forma que f sea continua en $\mathbb{R}$

Note que los dos trozos son polinomios, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, serán continuos en su intervalo correspondiente.

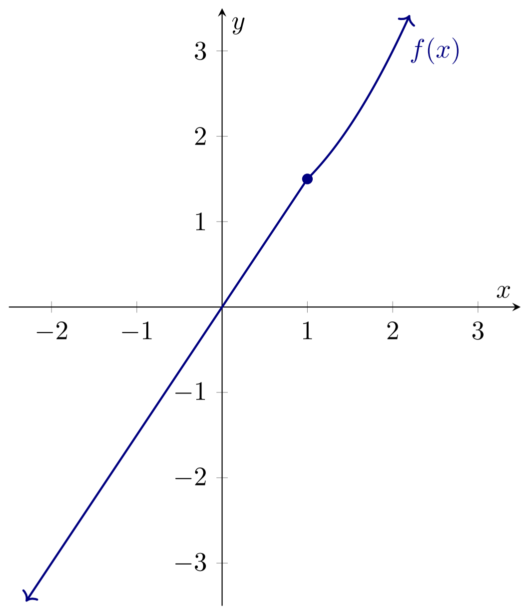
Así, la función sería continua en $\mathbb{R}$ si los dos trozos se unen bien en $x = 1$, para ello se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) &\implies \lim_{x \to 1^-} 3ax = 3a = \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + 1) \\ &\implies 3a = 3a = a + 1 \end{aligned}$$

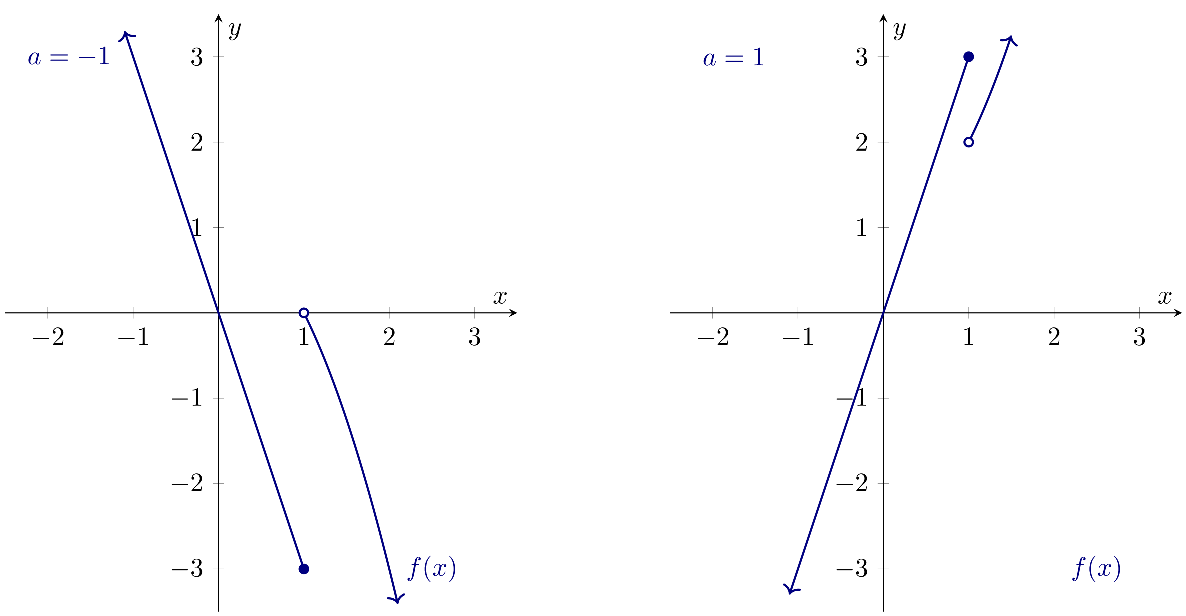
De aquí $3a = a + 1 \implies a = \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ es continua si $a = \dfrac{1}{2}$

Se muestra la gráfica resultante con este valor de a.

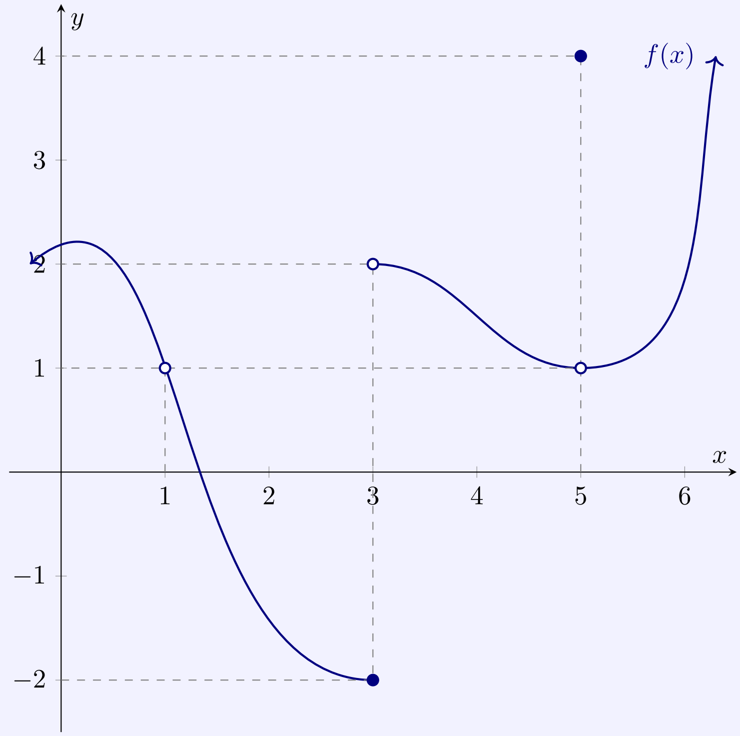


Este es el único valor para el cual la función es continua, como ejemplo, se muestran además las gráficas de f para otros valores de a.



Ejemplo 77.

Según la figura, ¿en cuáles valores de x es f discontinua? ¿Por qué? Indique el tipo de discontinuidad.



Es discontinua en:

- $x = 1$ ya que $f(1)$ no existe.

  Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ (existe, pues da un número real), entonces se tiene una discontinuidad evitable,

- $x = 3$ ya que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe (da distinto por la izquierda y por la derecha).

  Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ entonces los límites laterales existen, pero dan distinto, por lo que es una discontinuidad inevitable de salto finito.

- $x = 5$ ya que $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$ y $f(5) = 4$, por lo que $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$.

  Como $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$, es decir, existe, entonces la discontinuidad es evitable.

Capítulo 4

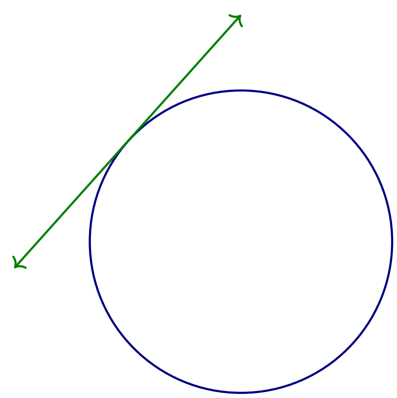
Derivadas

4.1. El problema de la recta tangente

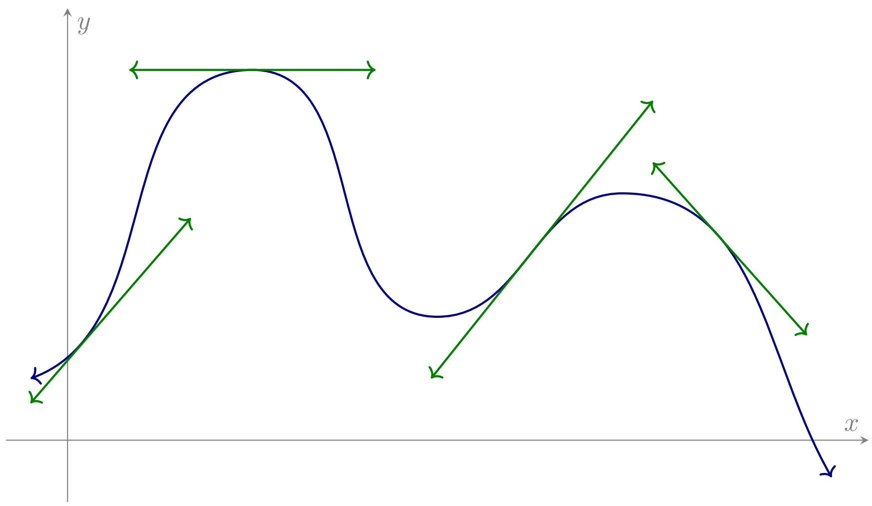
En esta sección se dará una idea de lo que se entiende por una recta tangente a la función $f(x)$ y el problema que se trabajará es encontrar el criterio de dicha recta.

4.1.1. Idea intuitiva de recta tangente

Seguramente, el primer recuerdo que se tenga al hablar sobre rectas tangentes es en geometría, donde se define que la recta tangente a un círculo es la que interseca al círculo en un punto.

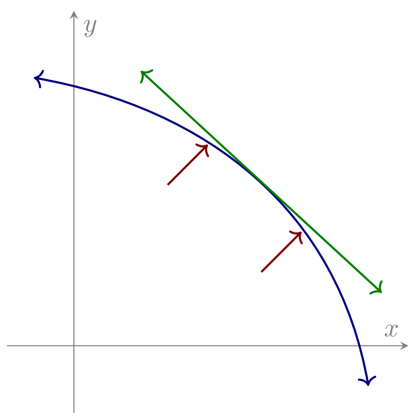


Esta definición es correcta en este contexto pero a veces se trata de utilizar también esta definición para funciones, sin embargo se tienen algunos inconvenientes. Veamos de manera gráfica una función con varias rectas tangentes en algunos de sus puntos.

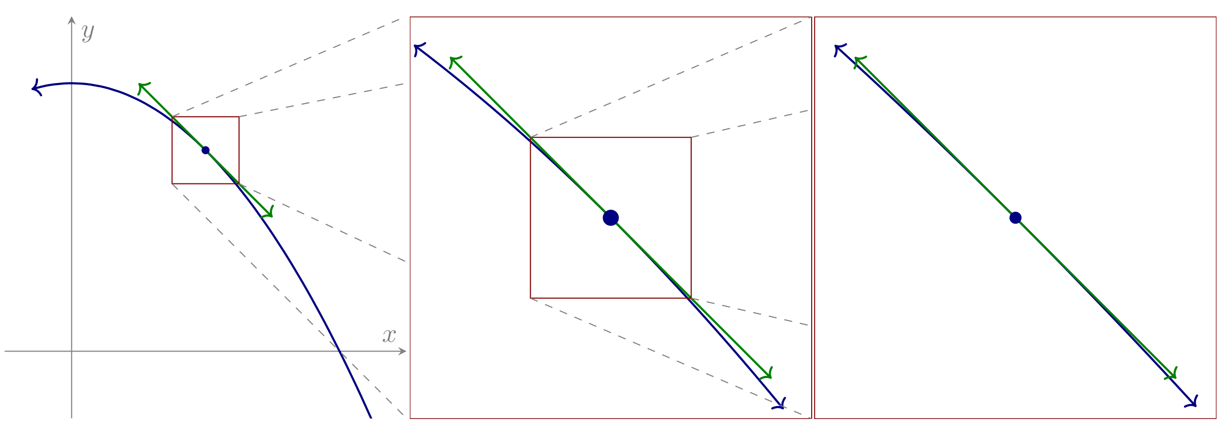


Si se alarga alguna de las rectas tangentes seguro intersecará a la función en otro punto. Se verán ahora otras ideas que pueden resultar más convenientes.

1. La recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta que se obtiene al "enderezar" la función en ese punto.



2. Si se hacen acercamientos sucesivos a la función $f(x)$ en los alrededores del punto $x = a$, si la función tiende a convertirse en una recta, esta recta es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = a$.

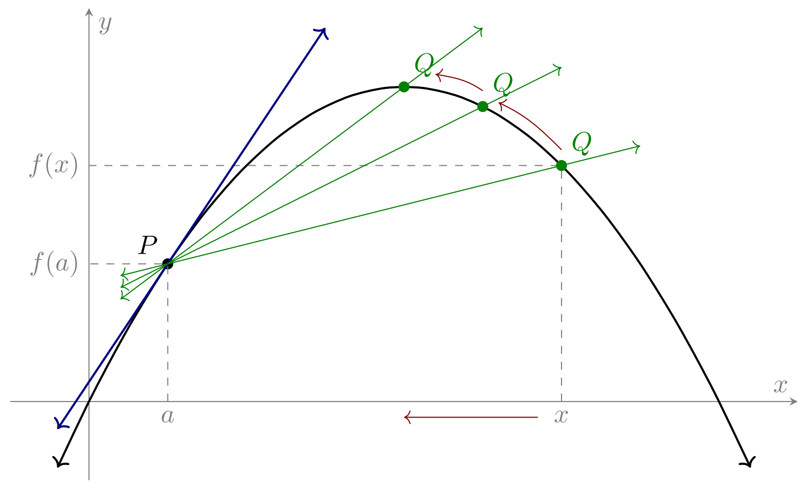


3. Si a partir del punto de tangencia se parte de manera recta en la dirección que lleva la función, entonces la recta que se forma es la recta tangente a la función en el punto.

4.1.2. El problema de la recta tangente

En este caso lo que se va a buscar es un procedimiento para encontrar la recta tangente a una función f en $x = a$.

Hasta el momento sólo se conoce el procedimiento para encontrar el criterio de una recta si se conocen dos puntos, al buscar primero la pendiente y luego la intersección, el problema es que en este caso ¡sólo se conoce un punto!. Sin embargo, en este problema también se encontrará la pendiente primero y se hará acercándose a la tangente por medio de rectas secantes.



La pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ está dada por

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, si se hace que el punto Q se aproxime a P (haciendo que x tienda a a) se logra que la pendiente tienda al valor de la pendiente de la recta tangente. Así

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una vez que se determina la pendiente se puede encontrar la intersección con el procedimiento ya conocido.

Esta pendiente de la recta tangente se conoce como la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Ejemplo 78.

Encuentre el criterio de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

En este caso

$$m = f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} x+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

El criterio de la recta, hasta el momento, es $y = 2x + b$, al sustituir el punto $(1, 1)$ se obtiene

$$1 = 2 \cdot 1 + b \implies b = -1$$

Por lo tanto, la recta tangente tiene por criterio $y = 2x - 1$.

Ejemplo 79.

Determine el criterio de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - x$ en $x = -2$.

En este caso

$$
\begin{aligned}
m = f'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{x+2}} \\
&= -5
\end{aligned}
$$

El criterio de la recta, hasta el momento, es $y = -5x + b$, al sustituir el punto $(-2, 6)$ se obtiene

$$6 = -5 \cdot -2 + b \implies b = -4$$

Por lo tanto, la recta tangente tiene por criterio $y = -5x - 4$.

4.2. La derivada como función

Ya se sabe, de la sección anterior, que la derivada de una función f en un punto a se define como

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Si se hace el cambio de variable $h = x - a$ se obtiene

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta es otra definición alternativa de derivada, ambas son equivalentes.

Ahora, si se usa esta última fórmula para encontrar la derivada de una función $f(x)$ en un punto cualquiera $(x, f(x))$ se tendría:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Nota: Si $y = f(x)$ es una función entonces las siguientes notaciones se utilizan para representar la derivada: $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$

Ejemplo 80.

Si se tiene la función $f(x) = x^2 - x$, determine una fórmula para $f'(x)$ utilizando la definición y utilice esta fórmula para determinar $f'(1), f'(-2), f'(10)$.

En este caso

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - x^2 + x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x} - h - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 1)}{\cancel{h}} \\
&= 2x - 1
\end{aligned}$$

Así, $f'(x) = 2x - 1$.

De aquí se obtiene fácilmente que $f'(1) = 1, f'(-2) = -5, f'(10) = 19$.

Ejemplo 81.

Determine, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{x+1}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h + \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{1}}{h\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Ejemplo 82.

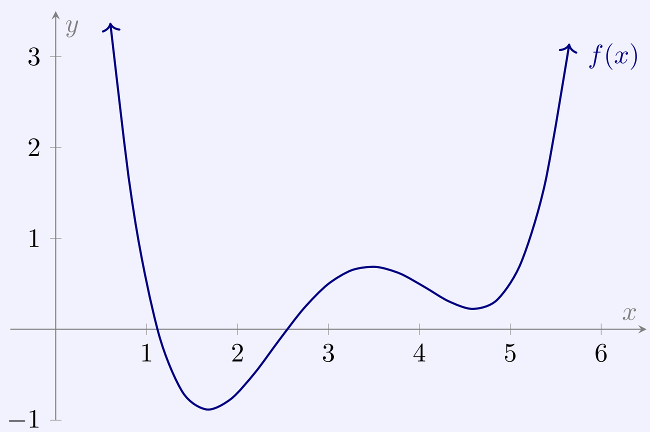
Determine, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = x^3 + x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \cancel{x} + h - \cancel{x^3} - \cancel{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2 + 1)}{\cancel{h}} \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

Así, $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Ejemplo 83.

Dada la gráfica de la función f, realice la gráfica de su derivada f'.

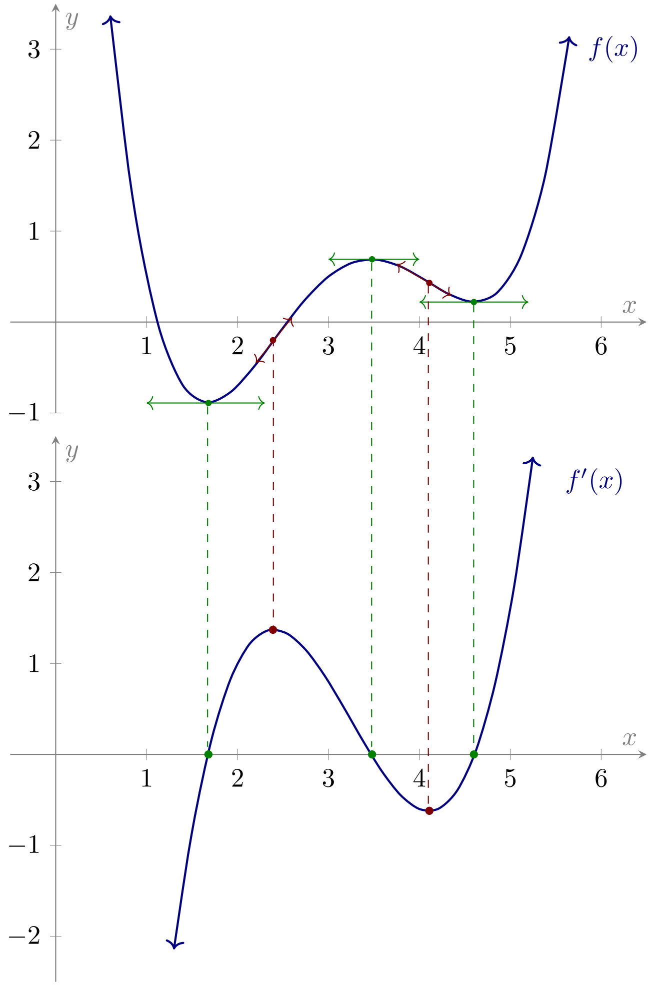


Para resolver este ejercicio se debe analizar como si se trazara la pendiente de la recta tangente en distintos puntos de la función y calcular la pendiente que tendrían.

Los puntos más importantes son aquellos en donde se presenta una recta tangente horizontal con pendiente cero, esto es en las cúspides o en las depresiones de la función, estas rectas y sus correspondientes puntos se muestran en la gráfica de la solución en color verde.

Otros puntos importantes son aquellos en donde la pendiente de la recta tangente alcanza el valor máximo o mínimo, estos puntos se muestran en rojo en la gráfica y más adelante se denominarán puntos de inflexión. Al hacer un cálculo del valor de la pendiente se puede ubicar qué tan alto o bajo quedan dichos puntos y también analizar si en los extremos tiende a algún infinito o a algún valor.

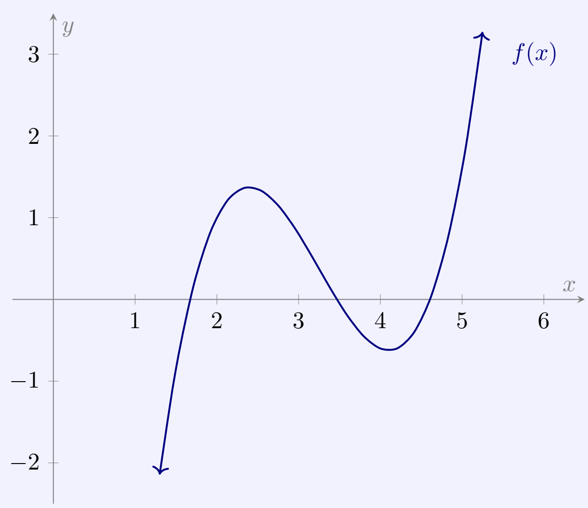
Por último, se unen estos puntos mediante una curva revisando que calce bien la pendiente de la tangente con el valor aproximado que da en la gráfica de la derivada.



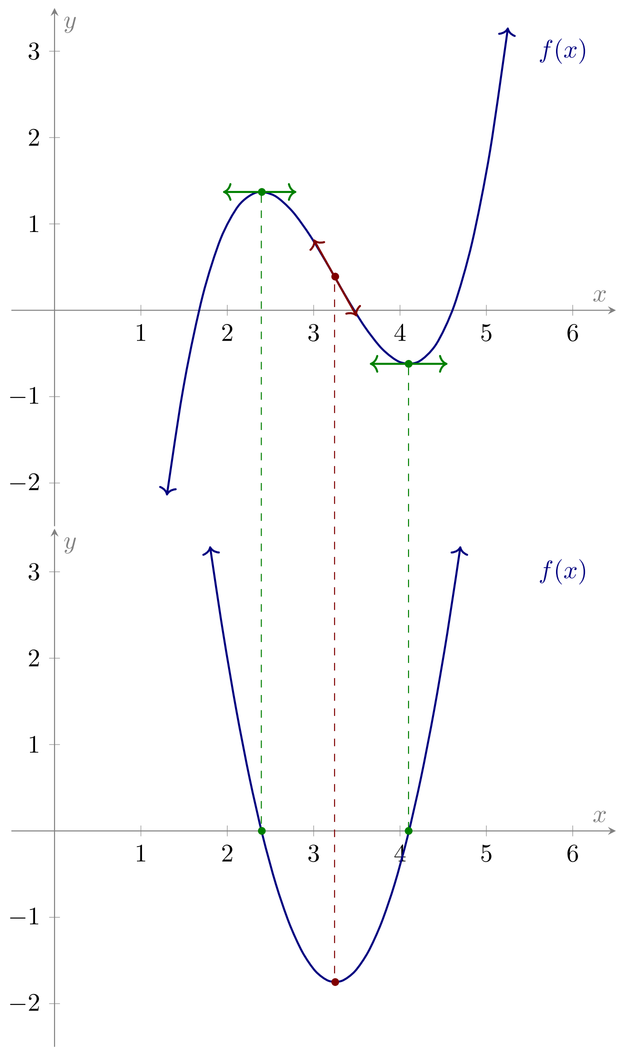
Note que donde la función crece, la derivada es positiva y donde la función decrece, la derivada es negativa. También observe que donde la función tiene un mínimo, la derivada pasa de negativa a positiva y donde la función presenta un máximo, la derivada pasa de positiva a negativa.

Ejemplo 84.

Dada la gráfica de la función f, realice la gráfica de su derivada f'.

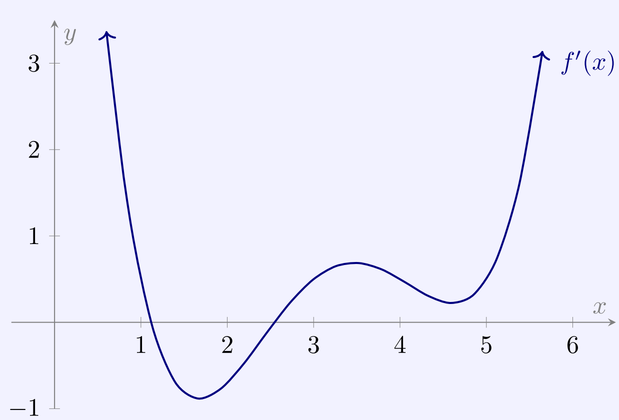


De igual forma, se tomarán los puntos más importantes, es decir, aquellos en donde se presenta una recta tangente horizontal con pendiente cero (se muestran en la gráfica de la solución en color verde) y los puntos en donde la pendiente de la recta tangente alcanza el valor máximo o mínimo (se muestran en rojo en la gráfica).



Ejemplo 85.

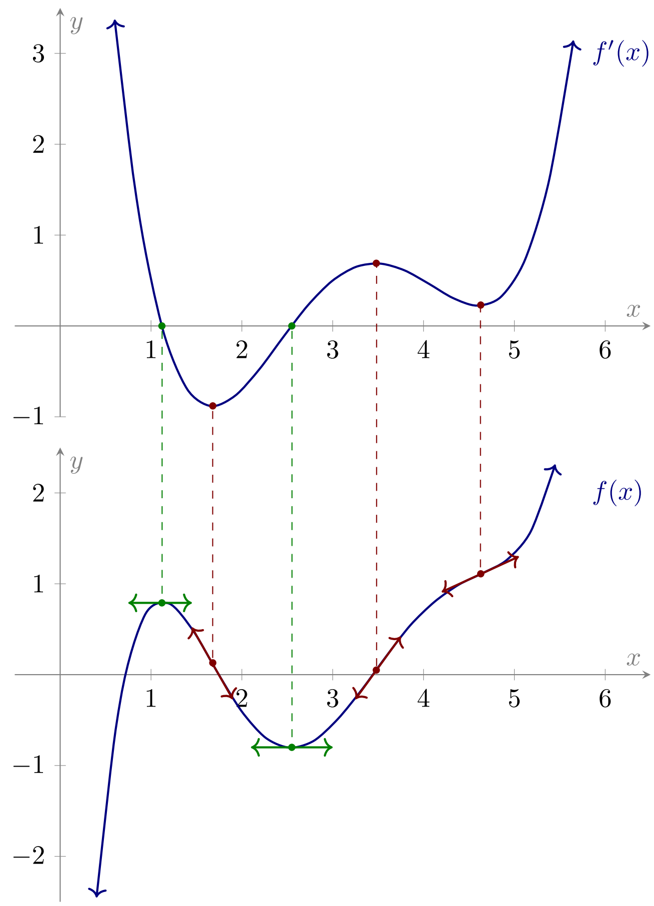
Dada la gráfica de la derivada de una función (f'), realice la gráfica de la función original (f).



En este caso el procedimiento es el inverso al de los ejemplos anteriores, ahora se nos presenta la gráfica de la derivada, por lo que cada punto indica el valor de la pendiente. Observando los ejemplos anteriores se puede notar que, donde la derivada posee un cero es donde la función original presenta un máximo o un mínimo (estos se muestran en la gráfica en verde) y donde se tienen máximos o mínimos de la derivada se dan puntos de inflexión en la función original (en la gráfica se muestran de color rojo.

En los extremos la derivada devuelve valores que tienden a infinito, por lo que la función original tiene pendientes que tienden a infinito a ambos lados; así, inicia desde abajo y finaliza hacia arriba.

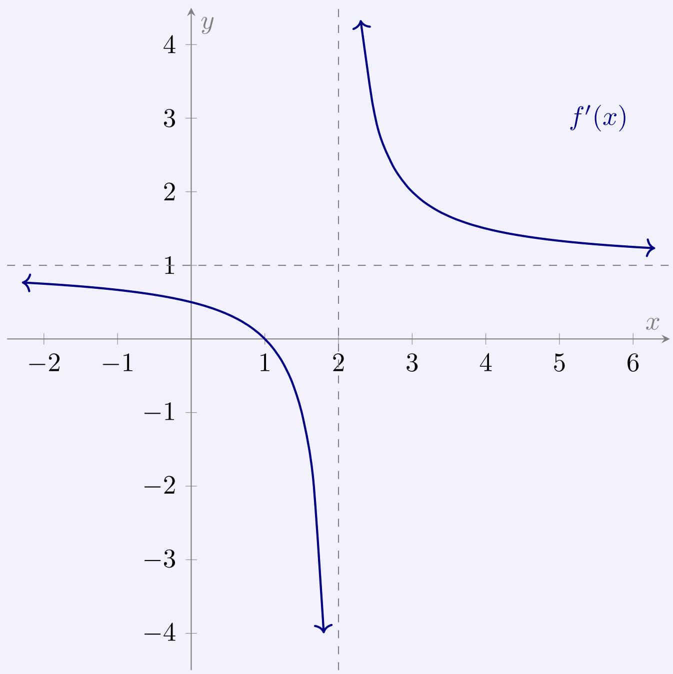
Recuerde además que si la derivada pasa de positivo a negativo, entonces la función presenta un máximo y si pasa de negativo a positivo, presenta un mínimo. En este caso, la función original tiene un máximo en $x = 1{,}1$ y un mínimo en $x = 2{,}6$.



Al realizar la gráfica de la función original f a partir de la derivada f', esta puede variar, pues si se traslada f verticalmente se tiene la misma derivada.

Ejemplo 86.

Dada la gráfica de la derivada de una función (f'), realice la gráfica de la función original (f).

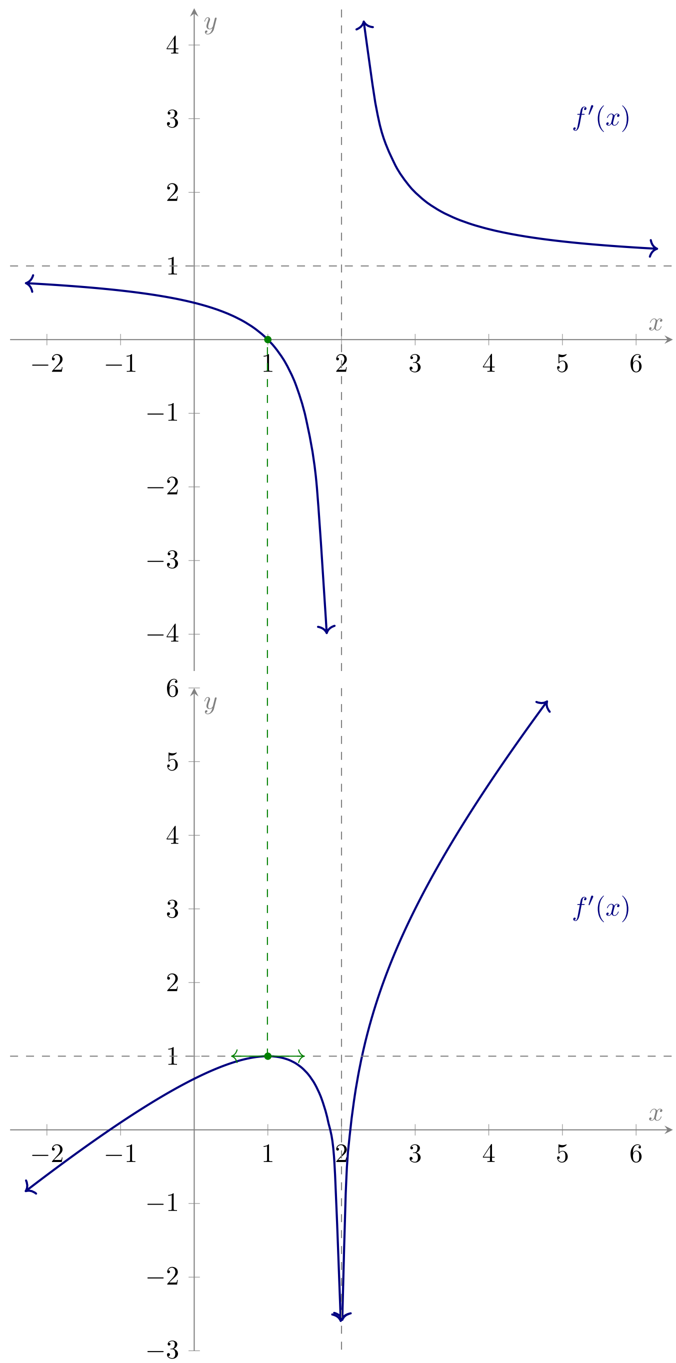


Se va a seguir un procedimiento similar al anterior.

Primero, en la gráfica de la derivada sólo se tiene un cero en $x = 1$, donde la función tendrá un máximo, pues la derivada pasa de positiva a negativa en este punto.

Al inicio y al final de la gráfica de la derivada, se va acercando a una asíntota horizontal $y = 1$, esto indica que la función original se debe comportar como una recta con pendiente 1.

En $x = 2$ la derivada tiende a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha, es decir, la función debe bajar hasta ser horizontal (o pegarse a una asíntota horizontal) por la izquierda y subir de forma horizontal (o venir pegada a una asíntota horizontal) por la derecha de dicho punto.



Definición 12.

Una función f es derivable en un punto $x = a$ si $f'(a)$ existe.

Una función f es derivable en un intervalo abierto si es derivable en todo número del intervalo.

Teorema 7.

Si f es diferenciable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

Nota: Se debe tener cuidado con este teorema ya que lo contrario NO es cierto, es decir, existen funciones que son continuas en un punto pero no diferenciables, como cuando presenta un "pico" como valor absoluto.

Ejemplo 87.

Determine el o los intervalos en donde es derivable la función $f(x) = |x|$

Para determinar la derivada de esta función se debe realizar por casos:

1. Primer caso (si $x > 0, f(x) = |x| = x$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Segundo caso (si $x < 0, f(x) = |x| = -x$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - -x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{x} - h + \cancel{x}}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

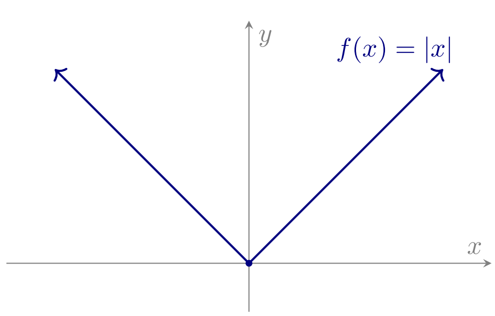
3. Tercer caso (si $x = 0$)

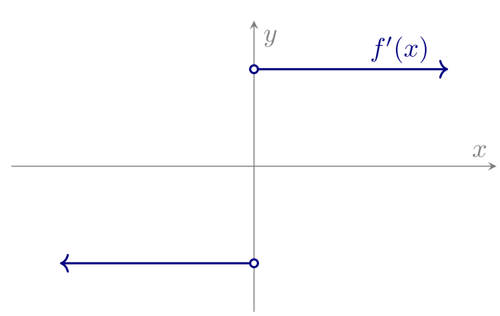
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

En donde:

- $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$
- $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

Por lo que $|x|$ es derivable en cualquier número excepto en $x = 0$.





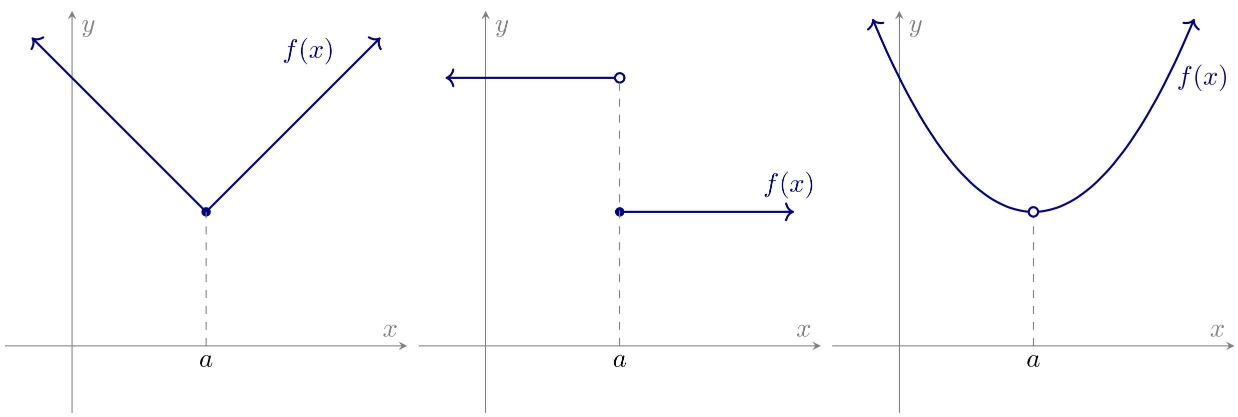
Ejemplo 88.

Determine el o los intervalos en donde es derivable la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}} \\ &= \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es derivable para todo número excepto $x = 0$ (donde la función no era continua). †

Nota: Para que una función sea derivable, su gráfica debe ser "suave", es decir, debe ser continua (no tiene brincos ni saltos) y no puede presentar "picos". Las siguientes funciones NO son derivables en $x = a$.



4.3. Propiedades de las derivadas

4.3.1. Derivadas de potencias

- Si se tiene la función $f(x) = c$, con c constante, determinemos su derivada $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{[c]' = 0}$$

- Ahora se buscará la derivada de la función $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{[x]' = 1}$$

- Si $f(x) = x^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \\ &= 2x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left[x^2\right]' = 2x}$$

- De manera similar se puede determinar que

$$\boxed{\left[x^3\right]' = 3x^2} \qquad \boxed{\left[x^4\right]' = 4x^3}$$

Observando el patrón que siguen estas derivadas se puede generalizar para obtener la fórmula general

$$\boxed{\left[x^n\right]' = nx^{n-1}}$$

Nota: Esta fórmula también se cumple para potencias negativas y fracciones, incluso para cualquier número real.

Ejemplo 89.

Determine la derivada de la función $f(x) = x^{900}$.

$$f'(x) = 900x^{899}$$

Ejemplo 90.

Determine la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Observe que $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, así $f'(x) = -1x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$.

Ejemplo 91.

Determine la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Observe que $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, así $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ejemplo 92.

Determine la derivada de la función $f(x) = x^{\pi}$.

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

4.3.2. Derivada de la suma, resta y multiplicación por una constante

Si c es una constante y f y g son dos funciones diferenciables, entonces

1. $\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot [f(x)]' = c \cdot f'(x)}$

2. $\boxed{[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]' = f'(x) + g'(x)}$

3. $\boxed{[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]' = f'(x) - g'(x)}$

Ejemplo 93.

Determine $[x^7 + 5x^3 - x^e + 1]'$.

$$\begin{aligned}
[x^7 + 5x^3 - x^e + 1]' &= [x^7]' + [5x^3]' - [x^e]' + [1]' \\
&= 7x^6 + 5[x^3]' - ex^{e-1} + 0 \\
&= 7x^6 + 15x^2 - ex^{e-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 94.

Determine $\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - \sqrt[3]{x} - 3\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(2x^5 - \sqrt[3]{x} - 3\right) = 10x^4 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ejemplo 95.

Determine $\dfrac{d}{du}\left(3xu^5 - 2u^3 + x^2\sqrt{u} + x\right)$

$$\frac{d}{du}\left(3xu^5 - 2u^3 + x^2\sqrt{u} + x\right) = 15xu^4 - 6u^2 + \frac{x^2}{2\sqrt{u}}$$

Ejemplo 96.

Encuentre el o los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 4x + 1$ tiene una recta tangente horizontal.

Para que la recta tangente sea horizontal debe tener 0 por pendiente, es decir, $y' = 0$.

$$\begin{aligned} y' = 0 &\implies [x^3 - 4x + 1]' = 0 \\ &\implies 3x^2 - 4 = 0 \\ &\implies x^2 = \frac{4}{3} \\ &\implies x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La curva $y = x^3 - 4x + 1$ tiene una recta tangente horizontal en $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

4.3.3. Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica

Para encontrar la derivada de las funciones exponencial y logarítmica se utilizan las siguientes fórmulas:

1. $\boxed{[a^x]' = a^x \cdot \ln a}$
2. $\boxed{[e^x]' = e^x}$
3. $\boxed{[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}}$
4. $\boxed{[\ln x]' = \dfrac{1}{x}}$

Ejemplo 97.

Calcule $[e^x + \log_2 x + x]'$

$$[e^x + \log_2 x + x]' = e^x + \frac{1}{x\ln 2} + 1$$

Ejemplo 98.

Calcule $\left[\log_\pi x - \left(\sqrt{2}\right)^x\right]'$.

$$\left[\log_\pi x - \left(\sqrt{2}\right)^x\right]' = \frac{1}{x\ln\pi} - \left(\sqrt{2}\right)^x \cdot \ln(\sqrt{2})$$

4.3.4. Derivadas del producto y del cociente

Al contrario de lo que se podría pensar, en este caso las reglas no son simplemente separar los términos, sino que si f y g son diferenciables entonces

1. $\boxed{[f(x)\cdot g(x)]' = [f(x)]'\cdot g(x) + f(x)\cdot[g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$

2. $\boxed{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{[f(x)]'\cdot g(x) - f(x)\cdot[g(x)]'}{(g(x))^2} = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$

Ejemplo 99.

Calcule la derivada de la función $f(x) = 2^x \cdot x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2^x]'\cdot x + 2^x\cdot[x]' \\ &= 2^x\ln 2\cdot x + 2^x \end{aligned}$$

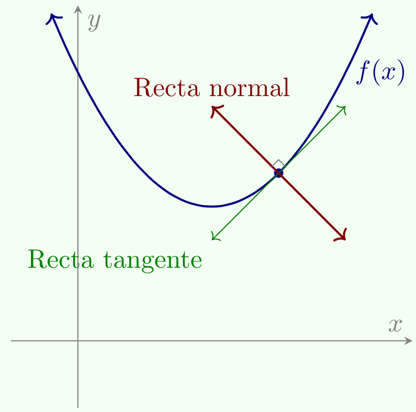
Ejemplo 100.

Calcule la derivada de la función $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{[\ln x]'\cdot x^2 - \ln x\cdot[x^2]'}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x^2} - \ln x\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x^4}} \\ &= \frac{1-2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

Definición 13. Recta normal

La recta normal a una función f en $x = a$ es la recta perpendicular a la recta tangente a f en $x = a$, que pasa por el punto de tangencia.



Ejemplo 101.

Determine la ecuación de la recta normal a la curva $y = x \cdot \ln x$ en el punto $(e^2, 2 \cdot e^2)$.

Se calcula primero la pendiente de la recta tangente en el punto.

$$m_t = y' = \ln x + 1$$

Y evaluando en el punto $x = e^2$ se tiene

$$y' = 3$$

Pero como la normal es perpendicular a la tangente entonces $m_n = -\dfrac{1}{3}$.

Por lo que la normal, por el momento es $y = \dfrac{-1}{3}x + b$.

Ahora se sustituye el punto $(e^2, 2 \cdot e^2)$ en esta ecuación.

$$2e^2 = \frac{-1}{3} \cdot e^2 + b \implies b = \frac{7}{3}e^2$$

Por lo tanto, la recta normal buscada es $y_n = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{7}{3}e^2$.

4.3.5. Derivadas de las funciones trigonométricas

- Primero se determinará la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left[-\operatorname{sen} x \cdot \cancel{\frac{1-\cos h}{h}}^{\,0} + \cos x \cdot \cancel{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}^{\,1}\right] \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{[\operatorname{sen} x]' = \cos x}$$

- De manera similar se puede encontrar que

$$\boxed{[\cos x]' = -\operatorname{sen} x}$$

- Ahora se determinará la derivada de la función $f(x) = \tan x$

$$\begin{aligned}
[\tan x]' &= \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right]' \\
&= \frac{[\operatorname{sen} x]' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot [\cos x]'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{[\tan x]' = \sec^2 x}$$

- De igual forma se obtienen los siguientes resultados.

$$\boxed{[\sec x]' = \sec x \cdot \tan x}$$

$$\boxed{[\csc x]' = -\csc x \cdot \cot x}$$

$$\boxed{[\cot x]' = -\csc^2 x}$$

Ejemplo 102.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [\operatorname{sen} x]' \cdot \sqrt{x} + \operatorname{sen} x \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \\
&= \cos x\sqrt{x} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 103.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{\csc x}{\tan x - 1}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[\csc x]' \cdot (\tan x - 1) - \csc x \cdot [\tan x - 1]'}{(\tan x - 1)^2} \\
&= \frac{-\csc x \cdot \cot x \cdot (\tan x - 1) - \csc x \cdot \sec^2 x}{(\tan x - 1)^2}
\end{aligned}$$

4.3.6. Derivada de la función inversa (las trigonométricas inversas)

Si se tiene una función inversa $y = f^{-1}(x)$ entonces se cumple que

$$\boxed{y' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Así, por ejemplo, si se tiene el arcoseno (se debe recordar que esta función es la inversa de la función seno) que se define como:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ siempre que } \operatorname{sen} y = x, \text{ con } \frac{-\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}}
\end{aligned}$$

Este último paso es cierto ya que

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) > 0 \text{ si } \frac{-\pi}{2} \leqslant \operatorname{sen}^{-1} x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{-\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left[\operatorname{sen}^{-1} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

De manera similar se obtiene que

$$\boxed{\left[\cos^{-1} x\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad \boxed{\left[\tan^{-1} x\right]' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

$$\boxed{\left[\cot^{-1} x\right]' = \frac{-1}{1+x^2}} \qquad \boxed{\left[\sec^{-1} x\right]' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\boxed{\left[\csc^{-1} x\right]' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$$

Ejemplo 104.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{\tan^{-1} x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x]' \cdot \tan^{-1} x - x \cdot [\tan^{-1} x]'}{\left(\tan^{-1} x\right)^2} \\ &= \frac{\tan^{-1} x - x \cdot \frac{1}{x^2+1}}{\left(\tan^{-1} x\right)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 105.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{\tan^{-1} x}$ $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= [\operatorname{sen}^{-1} x]' \cdot \sqrt{x} + \operatorname{sen}^{-1} x \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4.3.7. Regla de la cadena

Si tanto f como g son funciones derivables entonces

$$\boxed{[f\,(g(x))]' = f'\,(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Ejemplo 106.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(e^x) \cdot [e^x]' \\ &= \cos(e^x) \cdot e^x \end{aligned}$$

Ejemplo 107.

Encuentre la derivada de la función $g(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left[\sqrt{x}\right] \\ &= \frac{-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ejemplo 108.

Encuentre la derivada de la función $h(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 2 \cdot [\operatorname{sen} x]' \\ &= 2^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

Ejemplo 109.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \left(\tan^{-1} x\right)^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\tan^{-1} x \cdot [\tan^{-1} x]' \\ &= \frac{2 \cdot \tan^{-1} x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Ejemplo 110.

Encuentre la derivada de la función $y = \sqrt{3x^2+x}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+x}} \cdot [3x^2+x]' \\ &= \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}} \end{aligned}$$

Ejemplo 111.

Encuentre la derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen}\left(\cos(\tan x)\right)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot [\cos(\tan x)]' \\ &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot [\tan x]' \\ &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^2 x \end{aligned}$$

Ejemplo 112.

Encuentre la derivada de la función $h(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \tan^{-1}(x^2+1)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[e^{\operatorname{sen} x}\right]' \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \left[\tan^{-1}(x^2+1)\right]' \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \cdot [\operatorname{sen} x]' \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot [x^2+1]' \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \tan^{-1}(x^2+1) + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot 2x \end{aligned}$$

†

Ejemplo 113.

Encuentre la derivada de la función $\dfrac{\pi^{x^e}}{\tan(x^2)}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left[\pi^{x^e}\right]' \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot [\tan(x^2)]'}{\tan^2(x^2)} \\ &= \frac{\pi^{x^e} \cdot \ln(\pi) \cdot [x^e]' \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot \sec^2(x^2) \cdot [x^2]'}{\tan^2(x^2)} \\ &= \frac{\pi^{x^e} \cdot \ln(\pi) \cdot e \cdot x^{e-1} \cdot \tan(x^2) - \pi^{x^e} \cdot \sec^2(x^2) \cdot 2x}{\tan^2(x^2)} \end{aligned}$$

4.3.8. Derivadas de orden superior

Hasta el momento se ha encontrado la derivada de una función $f(x)$ y se ha visto que ls derivada es una función $f'(x)$ por lo que a esta función se le puede calcular su derivada obteniendo la segunda derivada de $f(x)$, esta se puede volver derivar y así susesivamente, así:

$f(x)$ es la función original.

$f'(x)$ es la primera derivada.

$[f'(x)]' = f''(x)$ es la segunda derivada.

$[f''(x)]' = f'''(x)$ es la tercera derivada.

$[f'''(x)]' = f^{(4)}(x)$ es la cuarta derivada.

$\vdots$

$f^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada.

Notación: Otras notaciones que se utilizan para las derivadas de orden superior son

$$f''(x) = y'' = D^2 f(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

En física, por ejemplo, si $s(t)$ representa la distancia entonces:

$s'(t) = v(t)$ es la velocidad.

$s''(t) = v'(t) = a(t)$ es la aceleración.

Ejemplo 114.

Considere la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$, determine $f''(x)$.

$$\begin{aligned} & f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x \\ \Longrightarrow \; & f''(x) = \cos x + \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x = 2\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ejemplo 115.

Considere la función $g(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, determine $g'''(x)$.

$$\begin{aligned} & g'(x) = 6x^2 - 2x + 2 \\ \Longrightarrow \; & g''(x) = 12x - 2 \\ \Longrightarrow \; & g'''(x) = 12 \end{aligned}$$

Ejemplo 116.

Considere la función $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$, determine $h''(x)$.

$$\begin{aligned} & h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \\ \Longrightarrow \; & h''(x) = \frac{[e^x \cdot x - e^x]' \cdot x^{\cancel{2}} - (e^x \cdot x - e^x) \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} \\ \Longrightarrow \; & h''(x) = \frac{(e^x \cdot x + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}) \cdot x - 2e^x(x-1)}{x^3} \\ \Longrightarrow \; & h''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 117.

Considere la función $y = \operatorname{sen}(\tan x)$, determine y''.

$$\begin{aligned} & y' = \operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^2 x \\ \Longrightarrow \; & y'' = -\operatorname{sen}(\tan x) \cdot \sec^4 x + \cos(\tan x) \cdot 2\sec^2 x \cdot \tan x \end{aligned}$$

4.3.9. Derivación implícita

Hasta el momento todas las funciones que se han derivado se han podido expresar de la forma $y = f(x)$, tales como $y = \sqrt{x^3+1}$ ó $y = x \cdot \operatorname{sen} x$.

Sin embargo, hay funciones que son difíciles de expresar en esta forma o es imposible hacerlo, algunas de estas funciones son $x^2+y^2 = 25$, $x^3-y^3 = 2xy$, $e^{x\cdot y} = y^3 - x$, $\operatorname{sen}(x+y) = \sqrt{y}\cdot\cos(x\cdot y)$

En estos casos, lo que se hace es derivar de manera implícita, se toma la variable y como una función de x ($y = f(x)$) y se aplica la regla de la cadena, luego se despeja y'.

Ejemplo 118.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $x^2+y^2 = 25$, determine y'.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = 25 &\implies 2x + 2y\cdot y' = 0 \\ &\implies y' = \frac{-x}{y} \end{aligned}$$

Si en este ejercicio se pidiera la derivada en el punto $(0,5)$, simplemente se sustituyen las variables x y y por sus respectivos valores obteniendo $y' = \dfrac{-0}{5} = 0$ (la derivada en este punto es cero).

Ejemplo 119.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $x^3-y^3 = 2xy$, determine y'.

$$\begin{aligned} x^3-y^3 = 2xy &\implies 3x^2 - 3y^2\cdot y' = xy + 2x\cdot y' \\ &\implies 3x^2 - xy = 2x\cdot y' + 3y^2\cdot y' \\ &\implies y' = \frac{3x^2-xy}{2x+3y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 120.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $e^{xy} = y^3 - x$, determine y'.

$$\begin{aligned} e^{xy} = y^3 - x &\implies e^{xy}\cdot(y + xy') = 3y^2y' - 1 \\ &\implies e^{xy}\cdot xy' - 3y^2y' = -1 - e^{xy}\cdot y \\ &\implies y' = \frac{-1-e^{xy}\cdot y}{e^{xy}\cdot x - 3y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 121.

Considere que y está definida de forma implícita en términos de x mediante la expresión $\operatorname{sen}(x+y) = \sqrt{y} \cdot \cos(x \cdot y)$, determine y'

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(x+y) = \sqrt{y} \cdot \cos(x \cdot y) \\
\Longrightarrow\ & \cos(x+y) \cdot (1+y') = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \cdot \cos(x \cdot y) - \sqrt{y} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) \cdot (y + xy') \\
\Longrightarrow\ & \cos(x+y) \cdot y' - \frac{\cos(x \cdot y)}{2\sqrt{y}} \cdot y' + \sqrt{y} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) \cdot xy' = -\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) \cdot y - \cos(x+y) \\
\Longrightarrow\ & y' = \frac{-y\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - \frac{\cos(x \cdot y)}{2\sqrt{y}} + x\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 122.

Determine el criterio de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto $(3,3)$.

Se quiere encontrar la recta tangente $y = mx + b$. Al derivar de manera implícita se obtiene

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 = 6xy \ &\Longrightarrow\ 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6y + 6xy' \\
&\Longrightarrow\ 3y^2y' - 6xy' = 6y - 3x^2 \\
&\Longrightarrow\ y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} \\
&\Longrightarrow\ y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}
\end{aligned}$$

En el punto $(3,3)$ se cumple que $m = y' = \dfrac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$

Por el momento la tangente tiene el criterio $y = -x + b$. Al sustituir el punto $(3,3)$ por donde pasa dicha recta se obtiene

$$3 = -3 + b \Longrightarrow b = 6$$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto $(3,3)$ es $y = -x + 6$.

4.3.10. Derivación logarítmica

Esta técnica se utiliza para derivar expresiones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$ o para simplificar la derivada de funciones con muchas multiplicaciones o divisiones.

Lo que se hace es aplicar logaritmo natural a ambos lados del igual

$$\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$$

Luego se "baja" el exponente por propiedades de logaritmos

$$\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Y se deriva de manera implícita.

Ejemplo 123.

Determine la derivada de $y = x^x$.

$$\begin{aligned} y = x^x &\implies \ln y = \ln\left(x^x\right) \\ &\implies \ln y = x \cdot \ln(x) \\ &\implies \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1 \\ &\implies y' = y(\ln x + 1) \\ &\implies y' = x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 124.

Determine la derivada de $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

$$\begin{aligned} y = x^{\operatorname{sen} x} &\implies \ln y = \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) \\ &\implies \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln(x) \\ &\implies \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ &\implies y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 125.

Determine la derivada de $y = (\tan x)^{x^2-1}$.

$$\begin{aligned} y = (\tan x)^{x^2-1} &\implies \ln y = \ln\Big((\tan x)^{x^2-1}\Big) \\ &\implies \ln y = (x^2-1) \cdot \ln(\tan x) \\ &\implies \frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(\tan x) + (x^2-1) \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \\ &\implies y' = (\tan x)^{x^2-1}\left[2x \cdot \ln(\tan x) + (x^2-1) \cdot \frac{\sec^2 x}{\tan x}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 126.

Determine la derivada de $y = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x$.

$$\begin{aligned}
y = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x &\Longrightarrow \ln y = \ln\left(\tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x\right)\\
&\Longrightarrow \ln y = \ln(\tan x) + \ln(x^2 - x + 2) + \ln(e^x)\\
&\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x + \frac{1}{x^2 - x + 2} \cdot (2x - 1) + 1\\
&\Longrightarrow y' = \tan x \cdot (x^2 - x + 2) \cdot e^x \cdot \left[\frac{sec^2 x}{\tan x} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} + 1\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 127.

Determine la derivada de $y = \dfrac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}}$.

$$\begin{aligned}
y = \frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}} &\Longrightarrow \ln y = \ln\left(\frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}}\right)\\
&\Longrightarrow \ln y = \ln(2^{x-1}) + \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\arctan x) - \ln\left(\sqrt{-x}\right)\\
&\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cancel{2^{x-1}} \cdot \ln 2}{\cancel{2^{x-1}}} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\arctan x \cdot (x^2 + 1)} - \frac{1}{\sqrt{-x} \cdot 2\sqrt{-x}} \cdot -1\\
&\Longrightarrow y' = \frac{2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} x}{\arctan x \cdot \sqrt{-x}} \cdot \left[\ln 2 + \cot x - \frac{1}{(x^2 + 1)\arctan x} + \frac{1}{2|x|}\right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.

Resuelva las situaciones que se presentan a continuación

1. Si $f(x) = \ln x \cdot g(x)$, donde $g(e) = 1$ y $g'(e) = -2$ determine $f'(e)$ R/ $\dfrac{1}{e} - 2$
2. Si $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ y se sabe que $g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $f'(1)$ R/ 1
3. Si $f(x) = h\left(e^x \cdot g(x)\right)$, donde $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$ y $h'(2) = 3$, determine $f'(0)$ R/ 3
4. Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{x} + x \cdot g(x^2)$, donde $f'(1) = 4$, determine $g'(1)$ R/ 3

Ejercicio 3.

Resuelva los siguientes problemas de rectas tangentes y normales.

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el punto $(1,1)$.

   R/ $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

2. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{-x} - x$ en el punto $(-1, e+1)$. R/ $y = (-e-1)x$

3. Determine los puntos en la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ en donde la recta tangente es paralela a la recta $y = -2x - 1$ R/ $\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-23}{27}\right)$, $(-2, 3)$

4. Determine los puntos en la función $f(x) = \dfrac{5}{x}$ en donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{3}x + 2$ R/ $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \dfrac{5}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \dfrac{-5}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$

5. Determine la recta normal a la curva $x^2 + y^2 = 16$ en el punto $(1, \sqrt{15})$ R/ $y = \sqrt{15}x$

6. Determine la recta normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}$ en el punto $(-1, 1)$

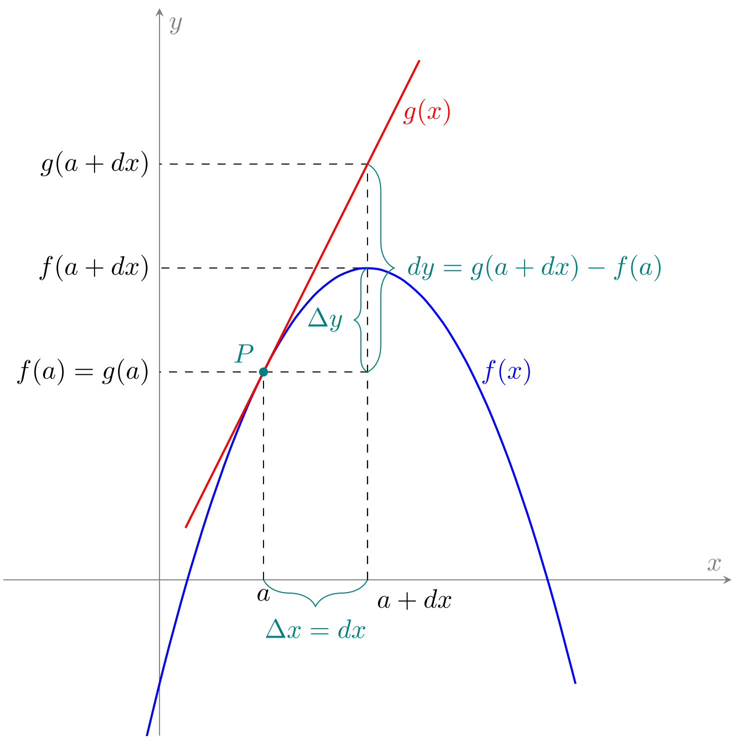
   R/ $y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

4.4. Diferencial de una función

Suponga que se tiene una función $f(x)$ y un punto $P = (a, f(a))$ de dicha función. Por P se traza la recta tangente a la función $f(x)$, esta recta se llamará $g(x)$.

Si al punto a se le suma una distancia Δx (cuando esta distancia tiende a cero se conoce como el diferencial en x ó dx) entonces el cambio real de la función f en y se conoce como Δy, mientras que el cambio de la recta tangente se conoce como el diferencial en y y se denota dy.

Δy y dy tienden al mismo valor conforme Δx tiende a cero y además $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$.



Se va a determinar primero la ecuación de la recta tangente $g(x)$, esta recta tiene como pendiente $f'(a)$ y pasa por el punto $(a, f(a))$, así:

$$g(x) - f(a) = f'(a)\cdot(x-a) \implies g(x) = f'(a)\cdot x - f'(a)\cdot a + f(a)$$

Se nota entonces que $dy = g(a+dx) - f(a)$, así:

$$\begin{aligned} dy &= g(a+dx) - f(a) \\ &= f'(a)\cdot(a+dx) - f'(a)\cdot a + \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} \\ &= \cancel{f'(a)\cdot a} + f'(a)\cdot dx - \cancel{f'(a)\cdot a} \\ &= f'(a)\cdot dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, en un punto general x, el diferencial de la función $f(x)$ se denota dy y se cumple que

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot dx}$$

Ejemplo 128.

Realice una aproximación de $\sqrt{4{,}01}$ utilizando el diferencial de la función.

Se cumple que $\sqrt{4{,}01} = \sqrt{4+0{,}01} = \sqrt{4} + dy = 2 + dy$, con $f(x) = \sqrt{x}$

En este caso $dy = f'(x)\cdot dx \implies dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx$.

Así, para $x = 4$ y $dx = 0{,}01$ se tiene $dy \approx \dfrac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0{,}01 = 0{,}0025$.

Por lo tanto $\sqrt{4{,}01} \approx 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025$ (el valor real es $2{,}002498$).

Capítulo 5

Aplicaciones de la Derivada

5.1. Rectas tangentes y normales

En la introducción a derivadas se mencionó que la pendiente de la recta tangente de una función f en un valor $x = a$ es la derivada de dicha función evaluada en el punto, es decir, $f'(a)$.

Así, la recta tangente a una función f (derivable en $x = a$) en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ejemplo 129.

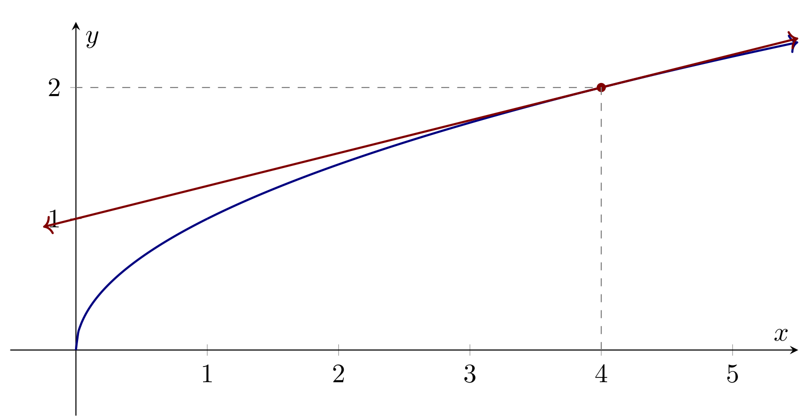
Determine la ecuación de la recta tangente de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

El punto de tangencia es $(4, f(4)) = (4, 2)$.

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ entonces la pendiente de la tangente en dicho punto es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Por lo que la recta tangente de f en $x = 4$ es

$$y - 2 = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)$$

A continuación se muestra la gráfica de la función f, el punto de tangencia y la recta tangente.



Ejemplo 130.

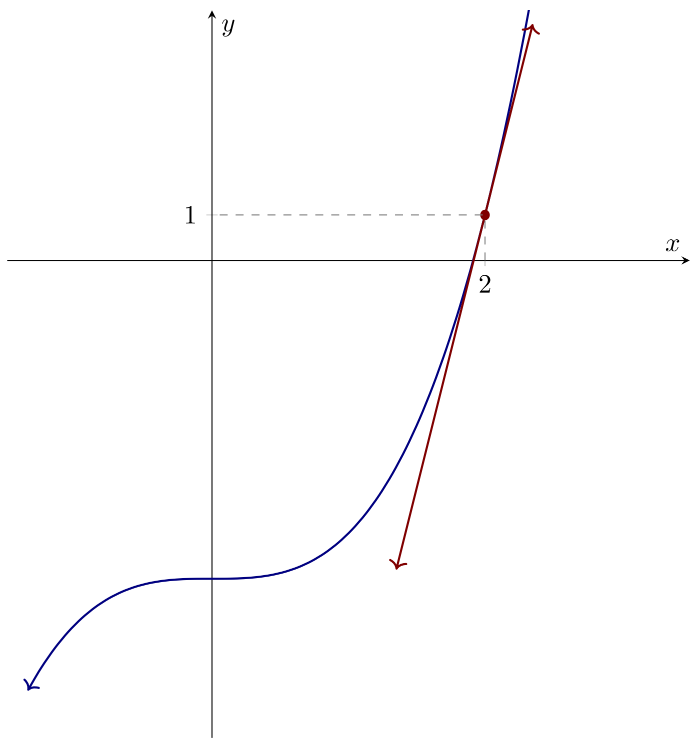
Determine la ecuación de la recta tangente de la función $f(x) = x^3 - 7$ en $x = 2$.

El punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 1)$.

Como $f'(x) = 3x^2$ entonces la pendiente de la tangente en dicho punto es $f'(2) = 12$. Por lo que la recta tangente de f en $x = 2$ es

$$y - 1 = 12(x - 2)$$

A continuación se muestra la gráfica de la función f, el punto de tangencia y la recta tangente.



Definición 14. Recta normal

La recta normal a una función f (derivable en $x = a$) en un punto $(a, f(a))$ de la función es la recta perpendicular a la recta tangente de f en dicho punto.

Como la recta normal es perpendicular a la recta tangente, entonces su pendiente es $\dfrac{-1}{f'(a)}$ y, por tanto, su ecuación es

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

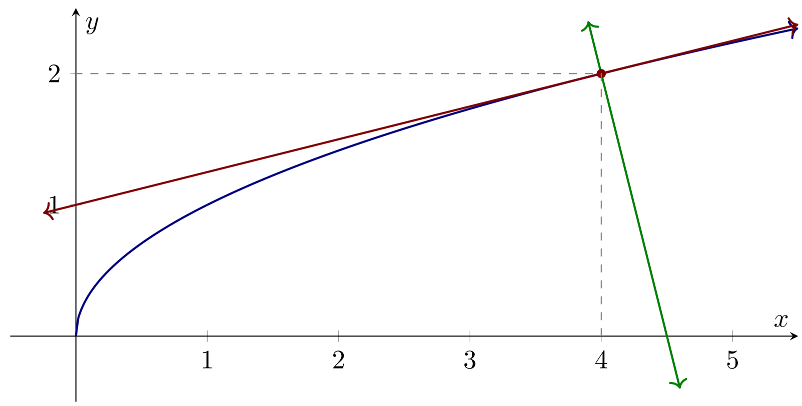
Ejemplo 131.

Determine la ecuación de la recta normal de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

En el ejemplo 129 se determinó que la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$ es $y - 2 = \dfrac{1}{4} \cdot (x - 4)$, por lo que la recta normal tiene por ecuación

$$y - 2 = -4 \cdot (x - 4)$$

A continuación se muestra la gráfica con la función, la recta tangente (en rojo) y la recta normal (en verde).



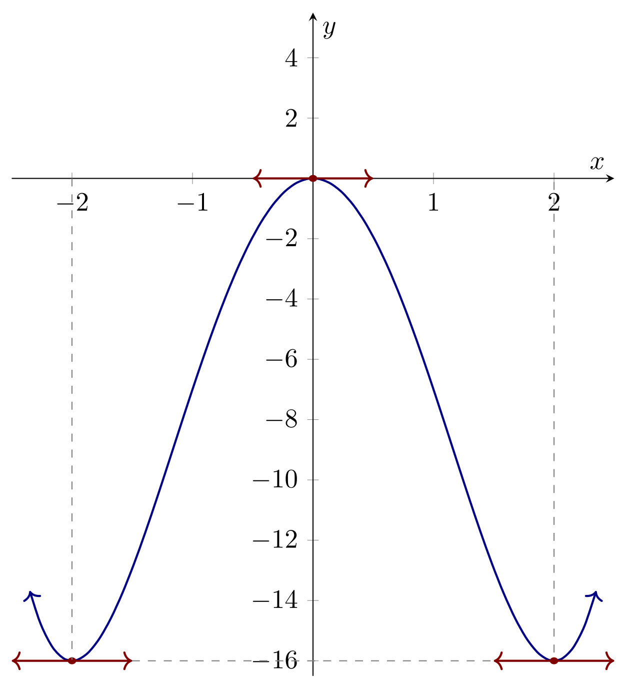
Ejemplo 132.

Determine los puntos de la función $f(x) = x^4 - 8x^2$ en donde se tiene recta tangente horizontal.

Para que la recta tangente sea horizontal se necesita que su pendiente sea cero, como la pendiente de la recta tangente es la derivada, entonces se busca donde $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\implies 4x^3 - 16x = 0 \\ &\implies 4x(x^2 - 4) = 0 \\ &\implies 4x(x-2)(x+2) = 0 \\ &\implies x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Por lo que los puntos donde la función $f(x) = x^4 - 8x^2$ posee recta tangente horizontal son $(0, f(0)) = (0, 0)$, $(2, f(2)) = (2, -16)$ y $(-2, f(-2)) = (-2, -16)$. La gráfica con las rectas tangentes horizontales se muestra a continuación.



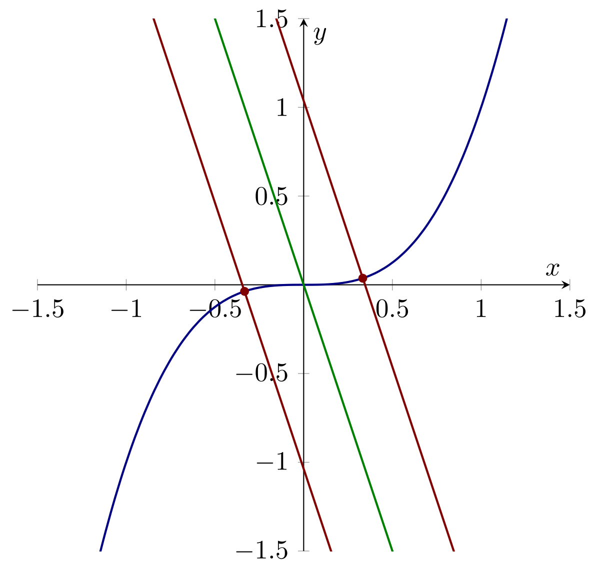
Ejemplo 133.

Determine el o los puntos de la función $f(x) = x^3$ donde se tiene una recta normal paralela a la recta $y = -3x$.

Se pide que la recta normal sea paralela a la recta $y = -3x$, es decir, que la pendiente de la recta normal sea 3, así, se quiere que $\dfrac{-1}{f'(x)} = -3$

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{f'(x)} = 3 &\implies f'(x) = \frac{1}{3}\\
&\implies 3x^2 - \frac{1}{3} = 0\\
&\implies 9x^2 - 1 = 0\\
&\implies x = \frac{-1}{3} \vee x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que lo puntos donde la función $f(x) = x^3 + x^2$ posee recta normal paralela a $y = 3x + 2$ son $\left(\dfrac{-1}{3}, f\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{27}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{27}\right)$. La gráfica con los puntos, la recta $y = -3x$ y las rectas normales paralelas se muestra a continuación.



Ejemplo 134.

Determine el o los puntos de la función $f(x) = x^2$ donde la recta tangente a la función pasa por el punto $(1, -3)$.

Se tiene que $f'(x) = 2x$ y sea $(a, f(a))$ el punto de tangencia, se tiene que la recta tangente es

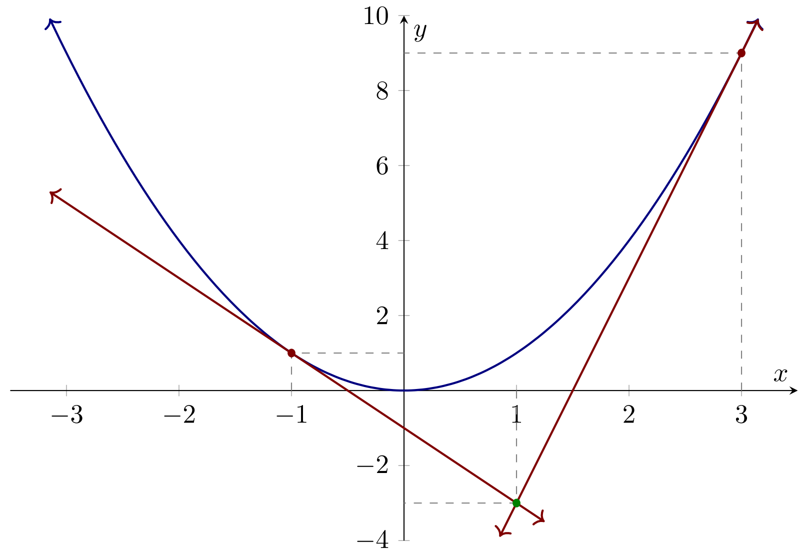
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \implies y - a^2 = 2a \cdot (x - a)$$

Pero la recta debe pasar por el punto $(1, -3)$, por lo que

$$-3 - a^2 = 2a \cdot (1 - a) \implies -3 - a^2 = 2a - 2a^2$$

$$\implies a^2 - 2a - 3 = 0$$
$$\implies a = -1 \vee a = 3$$

Por lo que lo puntos donde la función $f(x) = x^2$ posee una recta tangente que pase por el punto $(1, -3)$ son $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ y $(3, f(3)) = (3, 9)$. La gráfica con los puntos y las rectas tangentes se muestra a continuación.



5.2. El método de Newton

El método de Newton es una manera muy ingeniosa de utilizar la recta tangente para aproximar un cero de una función, es un método numérico, pues lo que hace es buscar la aproximación por medio de repeticiones.

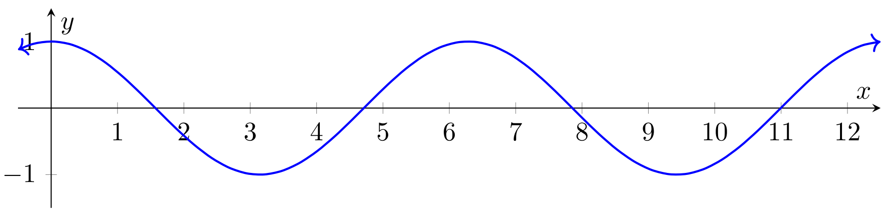
En general, si se tiene una función f y un valor inicial $x = x_0$, con f derivable en este punto tal que $f'(x_0) \neq 0$, el método sigue los siguientes pasos:

1. Determine la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$.
2. Determine la intersección de la recta tangente del punto anterior con el eje x, esta será la primera aproximación del cero de la función, se denotará x_1.
3. Se repite el proceso con x_1 en vez de x_0.

El método se repite una cantidad de veces o hasta que se obtenga la precisión deseada. El método de Newton converge (aproxima al cero de la función) siempre y cuando la derivada sea distinto de cero (ya que la recta tangente no intersecaría al eje x) y los valores que da el método no se repiten (pues sino se repite infinitamente), es decir, que $f'(x_n) \neq 0$ para toda n y que $f(x_n) \neq f(x_k)$ para toda $k < n$.

Ejemplo 135.

Aproxime un cero de la función $f(x) = cos(x)$, iniciando en $x = 0{,}1$, con tres iteraciones, realice la representación gráfica de la situación.



El punto de la función donde se inicia es $(0{,}1, \cos(0{,}1)) = (0{,}1, 0{,}995)$, en la gráfica se va a dibujar este paso en rojo.

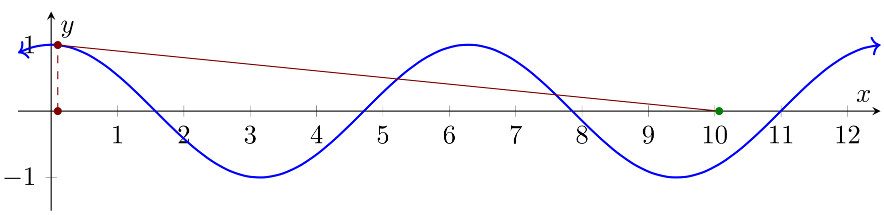
Ahora se calcula la recta tangente de la función en dicho punto, para esto se necesita la derivada $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, así la recta tangente es $y - \cos(0{,}1) = -\operatorname{sen}(0{,}1)\cdot(x - 0{,}1)$.

Se determina la intersección con el eje x.

$$
\begin{aligned}
0 - \cos(0{,}1) = -\operatorname{sen}(0{,}1)\cdot(x-0{,}1) &\implies \frac{-\cos(0{,}1)}{-\operatorname{sen}(0{,}1)} = x - 0{,}1 \\
&\implies x = 0{,}1 + \frac{\cos(0{,}1)}{\operatorname{sen}(0{,}1)} \\
&\implies x \approx 10{,}0666
\end{aligned}
$$

Esta es la primera aproximación del cero de la función coseno.

Este procedimiento se vuelve a repetir en $x = 10{,}0666$, el punto es $(10{,}0666, 0)$ (la siguiente iteración se realizará en verde).



El punto de la función es $(10{,}0666, \cos(10{,}0666)) = (10{,}0666, -0{,}801)$.

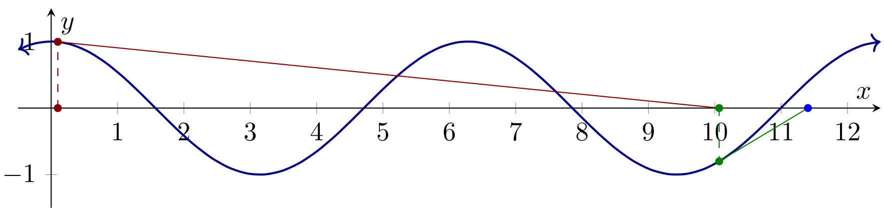
La recta tangente de la función en ese punto es $y - \cos(10{,}0666) = -\operatorname{sen}(10{,}0666)\cdot(x - 10{,}0666)$.

Se determina la intersección con el eje x.

$$
\begin{aligned}
0 - \cos(10{,}0666) = -\operatorname{sen}(10{,}0666)\cdot(x-10{,}0666) &\implies \frac{-\cos(10{,}0666)}{-\operatorname{sen}(10{,}0666)} = x - 10{,}0666 \\
&\implies x = 10{,}0666 + \frac{\cos(10{,}0666)}{\operatorname{sen}(10{,}0666)} \\
&\implies x \approx 11{,}4045
\end{aligned}
$$

Esta es la segunda aproximación del cero de la función coseno, la idea es que esta sea mejor que la anterior.

El punto $(11{,}4045, 0)$ y la siguiente iteración se realizará en azul, este procedimiento se vuelve a repetir en $x = 11{,}4045$.



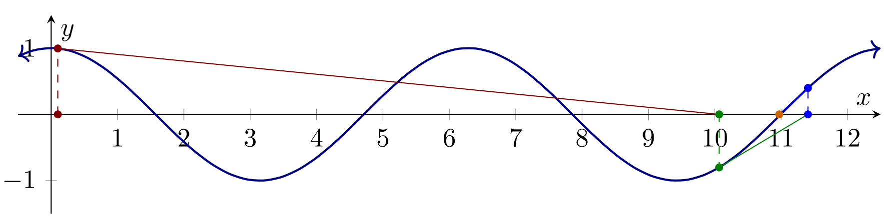
El punto de la función es $(11{,}4045, \cos(11{,}4045)) = (11{,}4045, 0{,}3976)$.

La recta tangente de la función en ese punto es $y - \cos(11{,}4045) = -\operatorname{sen}(11{,}4045)\cdot(x - 11{,}4045)$.

Se determina la intersección con el eje x.

$$\begin{aligned}
0 - \cos(11{,}4045) = -\operatorname{sen}(11{,}4045)\cdot(x - 11{,}4045) &\implies \frac{-\cos(11{,}4045)}{-\operatorname{sen}(11{,}4045)} = x - 11{,}4045\\
&\implies x = 11{,}4045 + \frac{\cos(11{,}4045)}{\operatorname{sen}(11{,}4045)}\\
&\implies x \approx 10{,}9711
\end{aligned}$$

Esta es la tercera aproximación del cero de la función coseno.



El cero al cual se está aproximando es a $\dfrac{7\pi}{2} \approx 10{,}99557429$. El cero al que se aproxima depende del valor inicial que se tome. En esta misma función si se inicia en $x = 1$ entonces aproxima a $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}570796327$, ¡compruébalo! †

Se puede determinar una fórmula para el método de Newton haciendo el proceso general, es decir, si se tiene la función f y f' es su derivada, entonces, la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$$

Y se calcula su intersección con el eje x.

$$\begin{aligned}
0 - f(a) = f'(a)\cdot(x - a) &\implies \frac{-f(a)}{f'(a)} = x - a\\
&\implies x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}
\end{aligned}$$

Teorema 8. Fórmula del método de Newton

Si f es una función continua y derivable en x_0, con $f'(x_0) \neq 0$, entonces el valor siguiente en el método de Newton se obtiene como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejemplo 136.

Determine una fórmula general para calcular el siguiente valor de la fórmula de Taylor para la función $f(x) = x^3 - 2x$. Utilice esa fórmula para aproximar el cero de la función iniciando en $x = 2$, realice cuatro iteraciones.

Si $f(x) = x^3 - 2x$ y $f'(x) = 3x^2$, entonces la fórmula general se obtiene como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &\implies x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 2x_n}{3{x_n}^2 - 2} \\ &\implies x_{n+1} = \frac{3{x_n}^3 - 2x_n - {x_n}^3 + 2x_n}{3{x_n}^2 - 2} \\ &\implies x_{n+1} = \frac{2{x_n}^3}{3{x_n}^2 - 2} \end{aligned}$$

Así:

$x_0 = 2$ (valor dado en el ejercicio para empezar).

$x_1 = \dfrac{2 \cdot 2^3}{3 \cdot 2^2 - 2} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6.$

$x_2 = \dfrac{2 \cdot 1{,}6^3}{3 \cdot 1{,}6^2 - 2} = \dfrac{512}{355} \approx 1{,}442253521.$

$x_3 = \dfrac{2 \cdot 1{,}4423^3}{3 \cdot 1{,}4423^2 - 2} \approx 1{,}415010637.$

$x_4 = \dfrac{2 \cdot 1{,}415^3}{3 \cdot 1{,}415^2 - 2} \approx 1{,}414214235.$

El cero de esta función es $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

Ejercicio 4.

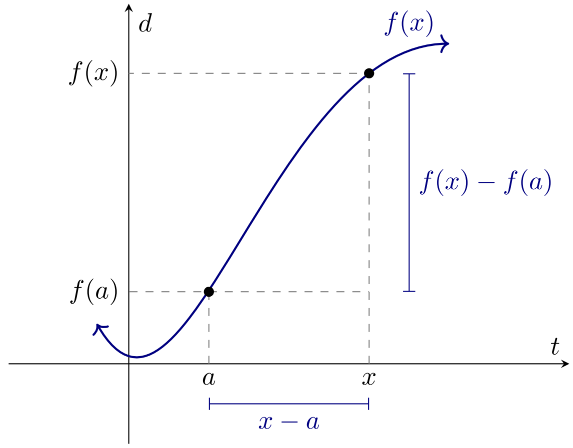
Aproxime el cero de la función $f(x) = x^3 - 5$ iniciando en $x = 1$ con cinco iteraciones, para ello utilice la fórmula del método de Newton.

5.3. La derivada como razón de cambio

En la sección anterior se mostró la derivada de manera gráfica como la pendiente de la recta tangente, en esta sección se generalizará más este término al mostrar la derivada como una razón de cambio.

5.3.1. La velocidad como razón de cambio

En física, la *velocidad* se define como la distancia entre el tiempo $\left(v = \frac{d}{t}\right)$; la *velocidad promedio* es la distancia total recorrida entre el tiempo total, así, si se recorrió, por ejemplo, $100km$ en 2 horas se dice que en promedio se iba a una velocidad de $50\frac{km}{h}$, pero la velocidad varía durante el viaje, si se quiere saber la velocidad a la que se iba a los a minutos, si se tiene la gráfica



Lo que se hace es encontrar la velocidad promedio en un lapso corto de tiempo y el lapso se hace tender a cero.

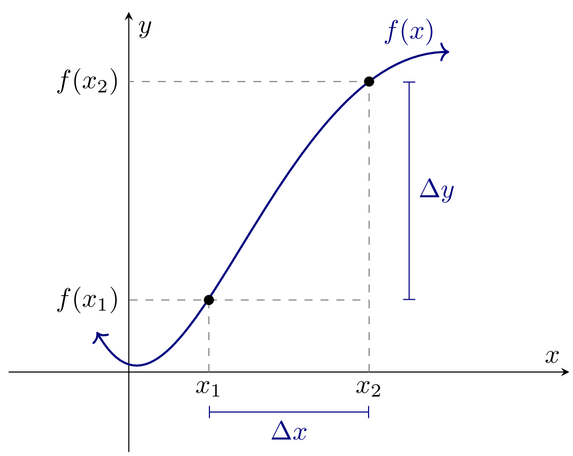
Velocidad promedio: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Velocidad instantánea: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (Esto en el instante a)

¡La derivada de la distancia es la velocidad!

En este caso se ve que la velocidad se define como el cambio de la distancia con respecto al tiempo.

5.3.2. Otras razones de cambio



Δx se conoce como el cambio en x y se cumple que $\Delta x = x_2 - x_1$.

Δy se conoce como el cambio en y y se cumple que $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

es la razón promedio de cambio de y con respecto a x.

La razón instantánea de cambio de y con respecto a x se define como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Que es ¡la derivada!

Es decir, las razones de cambio instantáneas son derivadas, estas son muy útiles en muchas ramas, algunos ejemplos son:

- Física: El cambio del trabajo con respecto al tiempo (potencia). El cambio de velocidad con respecto al tiempo (aceleración).
- Química: El cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (velocidad de reacción).
- Fabricante de acero: El cambio del costo de producir x toneladas de acero por día (costo marginal).
- Biólogo: El cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo.

5.3.3. Movimiento rectilíneo

Como se indicó en la sección anterior, al tomar la razón de cambio de una variable con respecto a otra se tiene la derivada, de esa forma:

- La derivada de la distancia con respecto al tiempo es la velocidad.
- La derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración.

De esta forma, si se conoce la función de la distancia de un objeto a un observador, se puede obtener la velocidad o la aceleración.

Ejemplo 137.

Suponga que una partícula que parte del origen sobre una recta numérica, se mueve de acuerdo con la función $x(t) = t + 6 \operatorname{sen} t$, donde x es la coordenada de la recta numérica (la unidad está en metros) en la que se encuentra la partículo después de t segundos. Determine:

- La posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 segundos.
- La posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 5 segundos.
- ¿Qué significado tiene la posición, velocidad o aceleración negativa?

En general, se tiene que:

$x(t) = t + 6 \operatorname{sen} t$

$v(t) = x'(t) = 1 + 6 \cos t$

$a(t) = v'(t) = -6 \operatorname{sen} t$

- $x(2) = 2 + 6 \operatorname{sen} 2 = 7{,}4558m$

  $v(2) = 1 + 6 \cos 2 = -1{,}4969m/s$

  $a(2) = -6 \operatorname{sen} 2 = -5{,}4558m/s^2$

De esta forma, a los dos segundos la partícula se encuentra a 7,4558 metros del origen, del lado derecho; va a una velocidad de $1{,}4969 m/s$ hacia la izquierda y está acelerando a la izquierda a $5{,}4558 m/s^2$.

- $x(5) = 5 + 6 \operatorname{sen} 5 = -0{,}7535m$

  $v(5) = 1 + 6 \cos 5 = 2{,}702 m/s$

  $a(2) = -6 \operatorname{sen} 5 = 5{,}7535 m/s^2$

  De esta forma, a los cinco segundos la partícula se encuentra a 0,7535 metros del origen, del lado izquierdo; va a una velocidad de $2{,}702 m/s$ hacia la derecha y está acelerando a la derecha a $5{,}7535 m/s^2$.

- La posición negativa significa que la partícula se encuentra a la izquierda del origen, la velocidad negativa es que se dirige hacia la izquierda y la aceleración negativa es que está acelerando hacia la izquierda (o desacelerando cuando la partícula se dirige a la derecha).

Ejemplo 138.

Suponga que una bola se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba y la altura de dicha bola se modela por medio de la función $h(t) = 5t - t^2$. Determine:

- La altura, velocidad y aceleración de la bola a los 3 segundos.
- La velocidad cuando la bola llega nuevamente al suelo.

Se tiene que:

$h(t) = 5t - t^2$

$v(t) = 5 - 2t$

$a(t) = -2$

- $h(3) = 5 \cdot 3 - 3^2 = 6m$

  $v(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1 m/s$

  $a(3) = -2 m/s^2$

  Así, la altura de la bola a los 3 segundos es de 6 metros, la velocidad es de $1 m/s$ y la bola ya viene bajando y la aceleración es de $2 m/s^2$ hacia abajo (la bola no se lanzó con la gravedad usual de la tierra).

- La bola vuelve a llegar al suelo cuando la altura h es cero, esto es

$$\begin{aligned} 5t - t^2 = 0 &\implies t(5-t) = 0 \\ &\implies t = 0 \vee t = 5 \end{aligned}$$

  Como es cuando la bola vuelve a llegar al suelo, sería a los 5 segundos y la velocidad en ese tiempo es de $v(5) = 5 - 2 \cdot 5 = -5 m/s$, es decir, la bola va cayendo a 5 metros por segundo.

5.3.4. Razones de Cambio Relacionadas

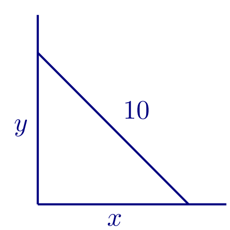
La idea de los problemas de tasas relacionadas es observar cómo cambia una variable conforme se altera(n) otra(s) cuyo cambio es conocido o se puede averiguar.

Para resolver estas aplicaciones no hay un procedimiento general sin embargo se pueden sugerir ciertos pasos a seguir:

1. Lea bien el problema y comprenda lo que se plantea, si se puede realizar un diagrama para entenderlo mejor, hágalo.
2. Defina cuáles son las variables del problema y cuáles son las constantes (en estos problemas es importante observar cuáles valores se mantienen constantes durante todo el tiempo y cuáles tienen variación). Defina claramente además qué le pide el problema y obtenga los datos del instante solicitado. Tenga cuidado en el signo de las variaciones ya que si la distancia disminuye, un líquido sale y el volumen baja, por ejemplo, entonces la razón es negativa.
3. Determine la ecuación que relaciona las variables dadas y, utilizando ecuaciones auxiliares (si fuera necesario), deje esta ecuación en términos sólo de las variables cuya variación es conocida o se pide.
4. Derive la ecuación de forma implícita con respecto al tiempo.
5. Sustituya los datos del problema y obtenga la solución. Analice que la solución sea coherente con el problema y de la respuesta.

Ejemplo 139.

Se apoya una escalera de $10m$ de longitud en un muro vertical, el piso es completamente horizontal. Si el extremo inferior de la escalera se resbala y se aleja de la pared a una velocidad constante de $2\frac{m}{s}$ ¿Con qué velocidad baja el extremo superior por el muro cuando el extremo inferior está a $8m$ de la pared?



Se tiene $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{m}{s}$ y es constante.

Se pide $\dfrac{dy}{dt}$ en el instante cuando $x = 8$.

Por Pitágoras se tiene $y^2 + x^2 = 10^2$, se deriva con respecto al tiempo.

$$2y\frac{dy}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

Note que en instante en que $x = 8$, por Pitágoras se cumple que $y = 6$. Se sustituyen los datos en la expresión.

$2 \cdot 6 \cdot \dfrac{dy}{dt} + 2 \cdot 8 \cdot 2 = 0 \implies \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-8}{3}$

En este caso el valor negativo es de esperar ya que la distancia y está disminuyendo, por tanto el extremo de la pared resbala a una velocidad de $\dfrac{-8}{3}\dfrac{m}{s} \approx -2{,}67\dfrac{m}{s}$.

Ejemplo 140.

Se infla un globo esférico, de tal modo que su volumen aumenta a una velocidad de $15\frac{cm^3}{s}$. ¿Con qué velocidad aumenta el radio del globo cuando su diámetro es de $10cm$?

Se observa que el volumen del globo y el radio cambian conforme al tiempo, es decir, ambas variables son funciones del tiempo.

Se dice que el volumen aumenta a $15\dfrac{cm^3}{s}$, es decir, el cambio del volumen con respecto al tiempo se mantiene constante y es de $\dfrac{dV}{dt} = 15\dfrac{cm^3}{s}$.

Se pide la rapidez con que cambia el radio cuando el diámetro es de $10cm$, es decir, cuando el radio es de $5cm$.

Así, se pide $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $r = 5$.

Se sabe que el volumen de una esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ y se nota que se conoce $\dfrac{dV}{dt}$ y se pide $\dfrac{dr}{dt}$ por lo que no se necesitan ecuaciones auxiliares.

Se deriva esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

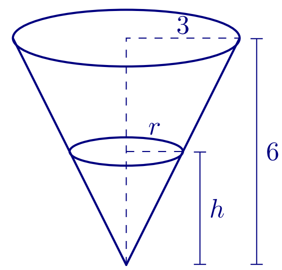
Se sustituyen los valores en el instante $\dfrac{dV}{dt} = 15\dfrac{cm^3}{s}$ y $r = 5$.

$15 = 4\pi 5^2 \cdot \dfrac{dr}{dt} \implies \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{3}{20\pi} \approx 0{,}048$

Por lo tanto, el radio del globo cambia a razón de $0{,}048\dfrac{cm}{s}$.

Ejemplo 141.

Se tiene un tanque de agua en forma de cono circular invertido, con radio de la base igual a $3m$ y $6m$ de altura. Si se le bombea agua a una tasa de $3\dfrac{m^3}{min}$, calcule la velocidad con que sube el nivel del agua cuando el agua alcanza un nivel de dos metros.



Se tiene $\frac{dV}{dt} = 3\frac{m^3}{min}$ y es constante.

Se pide $\frac{dh}{dt}$ en el instante cuando $h = 2$.

El volumen del cono es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Como no se tiene $\frac{dr}{dt}$ entonces se utiliza una ecuación auxiliar para sustituirla.

Por semejanza se sabe que $\frac{3}{6} = \frac{r}{h} \implies r = \frac{h}{2}$

Por lo tanto $V = \frac{\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h}{3} \implies V = \frac{\pi h^3}{12}$

Se deriva con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

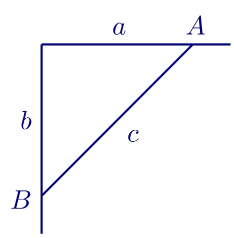
Se sustituyen los valores en el instante $\frac{dV}{dt} = 3\frac{m^3}{min}$ y $h = 2$.

$3 = \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \cdot \frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi} \approx 0,955\frac{m}{min}$

Por lo que el nivel de agua sube a una taza de $0,955\frac{m}{min}$ en el instante dado.

Ejemplo 142.

Ana viaja en automóvil hacia el oeste a $70\frac{km}{h}$ y Bruno va hacia el norte a $60\frac{km}{h}$. Los dos se dirigen al cruce de dos carreteras. ¿A qué velocidad se acercan entre sí cuando Ana está a $30m$ y Bruno a $40m$ del cruce?



Se sabe que $\dfrac{da}{dt} = -70\dfrac{k}{h}$ y es constante, en este caso es negativo porque la distancia a está disminuyendo.

También se conoce $\dfrac{db}{dt} = -60\dfrac{k}{h}$ que es constante.

Se pide $\dfrac{dc}{dt}$ en el instante en que $a = 0{,}03km$, $b = 0{,}04km$

Por Pitágoras se sabe que $c^2 = a^2 + b^2$.

Al derivar con respecto al tiempo se tiene:

$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt}$$

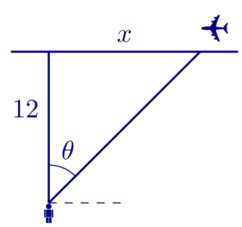
Para sustituir se necesita saber el valor de c en el instante, pero por Pitágoras se tiene que $c = 0{,}05km$. Sustituyendo estos valores.

$2 \cdot 0{,}05\dfrac{dc}{dt} = 2 \cdot 0,03 \cdot -70 + 2 \cdot 0{,}04 \cdot -60 \implies \dfrac{dc}{dt} = -90\dfrac{km}{h}$

Es decir, los autos se aproximan entre sí a $90\dfrac{km}{h}$ (el signo nos indica que se aproximan, si hubiera dado positivo los autos se alejan).

Ejemplo 143.

Un avión viaja a $400km/h$ a una altura constante de $12km$, su ruta lo está llevando a pasar justo por arriba de un observador en tierra que lo sigue con su mirada. ¿A qué velocidad gira el observador su cabeza hacia arriba cuando el ángulo de elevación es de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes?



Se sabe $\dfrac{dx}{dt} = -400\dfrac{km}{h}$.

Se pide $\dfrac{d\theta}{dt}$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (de acuerdo a la figura, este es el valor de θ cuando el ángulo de elevación es de $\theta = \dfrac{\pi}{3}$).

Se cumple que $\tan\theta = \dfrac{x}{12}$, se deriva y se obtiene

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{12}\frac{dx}{dt}$$

Al sustituir se tiene que

$\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{12}\cdot -400 \implies \frac{d\theta}{dt}=-25$

Es decir, la persona gira su cabeza hacia arriba a una velocidad de $25\frac{rad}{h}=0{,}00694\frac{rad}{s}=0{,}3979\frac{^\circ}{s}$.

5.4. Formas Indeterminadas y Regla de L'Hôpital

Si el límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, f y g son derivables tal que $g'(x)\neq 0$ en los alrededores de a, entonces se cumple que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla también se cumple para los límites laterales y para los límites al infinito.

Notas:

- Observe que la regla de L'Hôpital sólo se puede utilizar en límites de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, en esta sección se verán otros límites que se pueden transformar a estas formas para poder utilizar la regla.
- Al utilizar la regla se debe derivar el numerador y el denominador de la fracción por separado, es un error común derivar la expresión como cociente.

Ejemplo 144.

Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1} && \text{Forma } \frac{0}{0}\text{, L'H}\\ =&\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} && \\ =&\frac{1}{2} && \end{aligned}$$

Ejemplo 145.

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3} && \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}\\ =&\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{3x^2} && \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{6}$$

$$= +\infty$$

Ejemplo 146.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{Forma } \frac{2}{\infty}$$

$$= 0$$

Ejemplo 147.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x \cdot \tan x}{3x} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \cdot \tan^2 x + \sec^4 x}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Ejemplo 148.

Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}\text{, L'H}$$

$$= \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} \qquad \text{Forma: } \frac{-1}{-1\cdot 0^+}$$
$$= +\infty$$

5.4.1. Productos Indeterminados $(0\cdot\infty)$

Si se presenta la forma $0\cdot\infty$ se puede realizar una transformación de la expresión para poder aplicar la regla de L'Hôpital, así:

$$0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \qquad \text{ó} \qquad 0\cdot\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nota:

- En este procedimiento se realiza un abuso del lenguaje al tratar al término ∞ como un número cuando lo correcto es utilizar la notación de límite, se utiliza este recurso para mejorar la comprensión. La idea es trasladar uno de los dos factores al denominador

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo 149.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x \qquad \text{Forma } 0\cdot\infty$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2}$$
$$= 0$$

Ejemplo 150.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \big((1-e^x)\cdot\ln(x^2)\big)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \big((1-e^x)\cdot\ln(x^2)\big) \qquad \text{Forma } 0\cdot\infty$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{1-e^x}} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{e^x}{(1-e^x)^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-e^x)^2}{x\cdot e^x} && \text{Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{4(1-e^x)\cdot -\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} + x\cdot \cancel{e^x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-4(1-e^x)}{1+x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5.4.2. Diferencias Indeterminadas ($+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$)

Si se presenta alguna de las formas indeterminadas $+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$ entonces:

- Si se puede realizar la resta y simplificarla entonces esto se hace primero, es muy probable que quede una forma para aplicar L'Hôpital.
- Si no se puede realizar la resta entonces la expresión se transforma de la siguiente manera:

$$\infty - \infty = \infty \cdot \left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Ahora se calcula el límite del término $\frac{\infty}{\infty}$ utilizando L'Hôpital; si este límite da distinto de 1 entonces ya el límite original se calcula sustituyendo (el límite dará $+\infty$ ó $-\infty$), sino (si el límite da 1) entonces se tiene un límite de la forma $\infty\cdot 0$ que se trata como en el caso anterior.

Nota:

- En el último procedimiento se utiliza $\infty - \infty$ para hacer referencia a los dos casos $+\infty - +\infty$ ó $-\infty - -\infty$ que son tratados de igual manera.
- Observe que los casos $+\infty - -\infty$ ó $-\infty - +\infty$ no son indeterminados ya que dan $+\infty$ y $-\infty$ de forma directa.
- Nuevamente, acá se refiere a dos expresiones que tienden a infinito, el procedimiento saca a "factor común" uno de los términos

$$f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

Ejemplo 151.

Calcule $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) \qquad \text{Forma } +\infty - +\infty$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}$$

$$= 0$$

Ejemplo 152.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln(x))$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - \ln(x)) \qquad \text{Forma } +\infty - +\infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x} \right)$$

Ahora se verifica cuánto da $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x \cdot x}$$

$$= 0$$

Volviendo al límite original

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{e^x}}_{0} \right)$$

$$= +\infty$$

†

5.4.3. Potencias Indeterminadas (0^0, ∞^0 ó 1^∞)

Si un límite presenta alguna de las formas 0^0, ∞^0 ó 1^∞, entonces se puede transformar utilizando la propiedad

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \cdot \ln a} = e^{\frac{\ln a}{\frac{1}{b}}}$$

En este caso primero se obtiene el límite de la fracción $\dfrac{\ln a}{\frac{1}{b}}$ que se le puede aplicar regla de L'Hôpital y luego volver al límite original.

Ejemplo 153.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x^x && \text{Forma } 0^0\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} && \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x}\\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 154.

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{e^{-x}}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} (1+x)^{e^{-x}} && \text{Forma } \infty^0\\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\ln(1+x)^{e^{-x}}}\\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{e^{-x}\cdot\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{e^x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x}} && \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}\text{, L'H}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{e^x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(1+x)\cdot e^x}}
\end{aligned}$$

$$= e^0 = 1$$

Ejemplo 155.

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

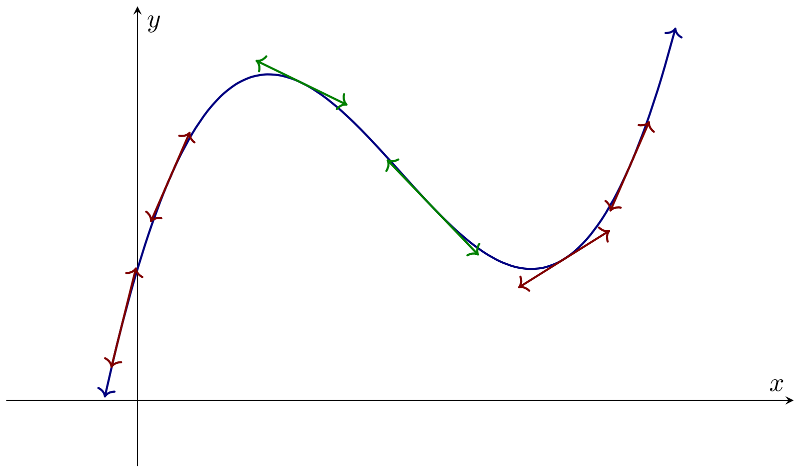
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x && \text{Forma } 1^\infty\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} && \text{Forma } \frac{0}{0}, \text{ L'H}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{\cancel{x^2}}}{\frac{-1}{\cancel{x^2}}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-\frac{2}{x}}}\\
&= e^{-2}
\end{aligned}$$

5.5. Trazo de gráficas

Las derivadas brindan mucha información sobre la gráfica de una función, en este apartado se verá esta información y se trazarán algunas gráficas.

5.5.1. Primera derivada

Al observar la siguiente gráfica se nota que la pendiente de la recta tangente es positiva cuando la función crece y negativa cuando decrece; así, se cumple el siguiente teorema.



Teorema 9. Crecimiento y decrecimiento de la función

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es estrictamente creciente en ese intervalo ($\nearrow$).

Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es estrictamente decreciente en ese intervalo ($\searrow$).

Ejemplo 156.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente o decreciente.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 2	2 $+\infty$
$12x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Crece: $]-1, 0[$ y $]2, +\infty[$

Decrece: $]-\infty, -1[$ y $]0, 2[$

Ejemplo 157.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = 2x^4 + 16x^2 + 5$ es creciente o decreciente.

$f'(x) = 8x^3 + 32x = 8x(x^2 + 4)$

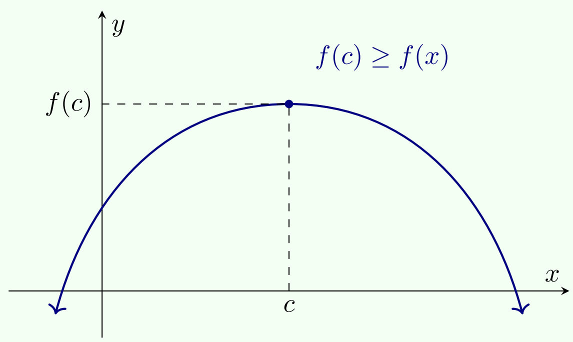
	$-\infty$	0	$+\infty$
$8x$	$-$	$\circ$	$+$
x^2+4	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Crece: $]0,+\infty[$

Decrece: $]-\infty,0[$

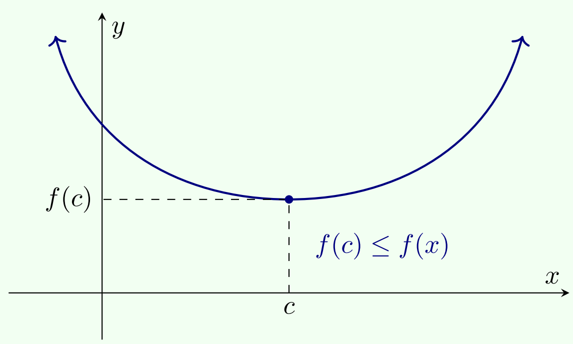
Definición 15. Máximo local

Una función f alcanza un máximo local en $x=c$ si se cumple que $f(c)\geqslant f(x)$ para toda x cercana a c (por ambos lados).



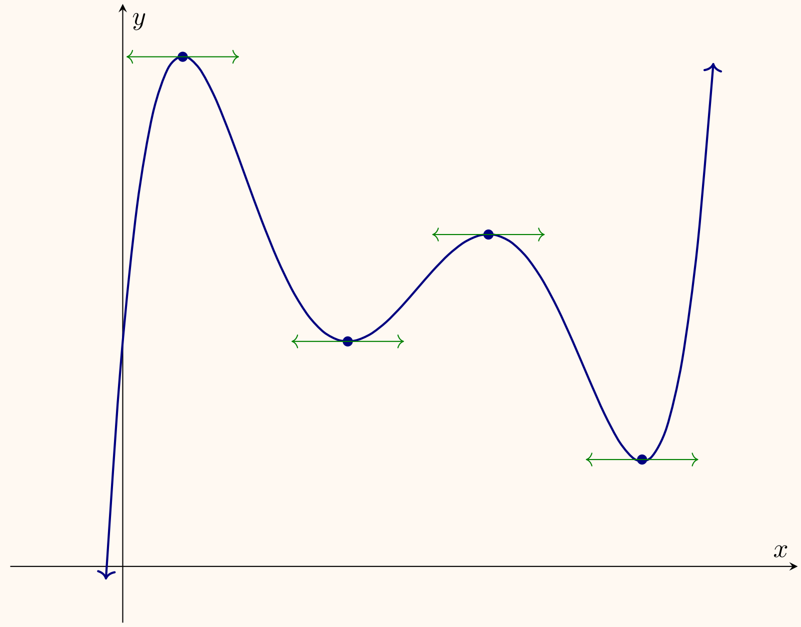
Definición 16. Mínimo local

Una función f alcanza un mínimo local en $x=c$ si se cumple que $f(c)\leqslant f(x)$ para toda x cercana a c (por ambos lados).



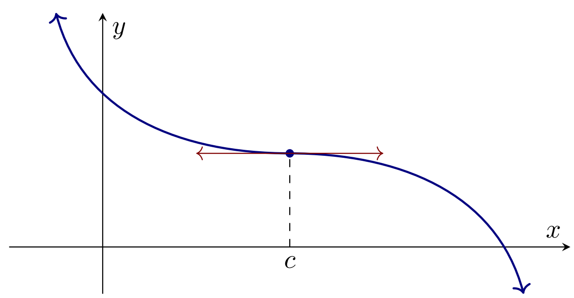
Teorema 10. Teorema de Fermat

Si f tiene un máximo o un mínimo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

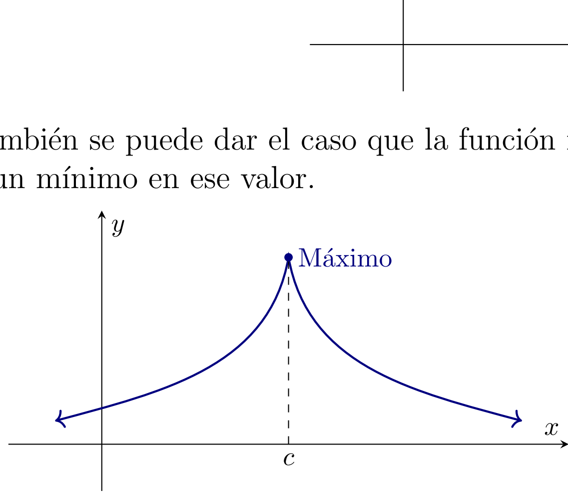


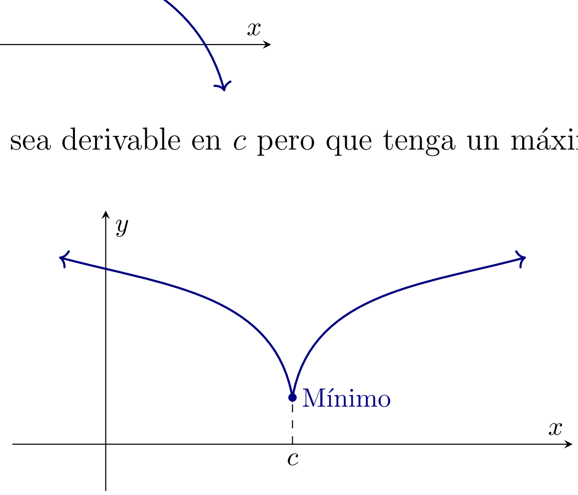
Notas:

- El teorema quiere decir que si la derivada existe entonces en los máximos y en los mínimos locales hay tangentes horizontales ($f'(c) = 0$).
- Se debe tener cuidado ya que lo contrario NO es cierto, es decir, si $f'(c) = 0$ no necesariamente se tiene un mínimo o un máximo.



- También se puede dar el caso que la función no sea derivable en c pero que tenga un máximo o un mínimo en ese valor.





Dado que una función tiene máximos o mínimos en los puntos donde la derivada es cero o se indefine entonces se tiene la siguiente definición.

Definición 17. Puntos críticos

Se llaman puntos críticos (o números críticos) de una función f a los valores $x = c$ del dominio de f en donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

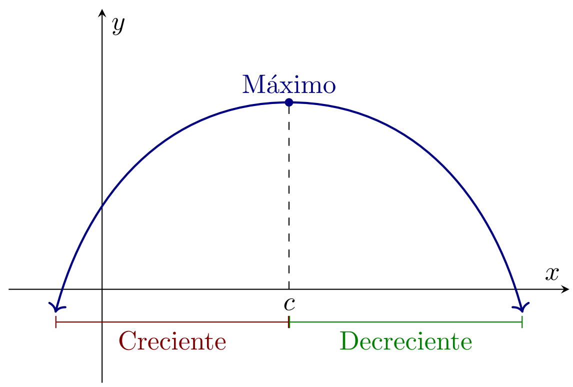
Se debe observar que al hacer una tabla de signos para la primera derivada se obtienen también los valores críticos de la función; sin embargo, la primera derivada también ofrece un procedimiento para saber si estos valores son máximos o mínimos.

Teorema 11. Criterio de la primera derivada

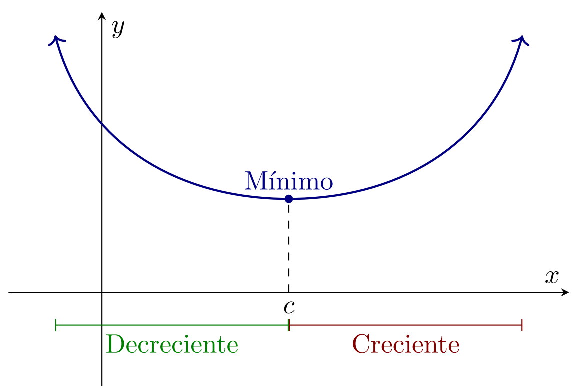
Si c es un número crítico de la función f entonces:

1. Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
2. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
3. Si f' no cambia de signo en c, entonces f no tiene un extremo local en c.

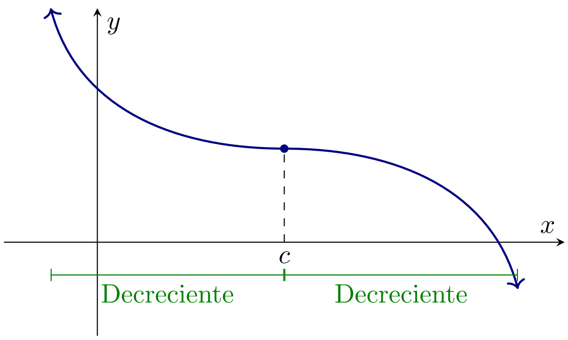
Si f cambia de positiva a negativa entonces la función venía creciendo y pasó a decrecer en c.

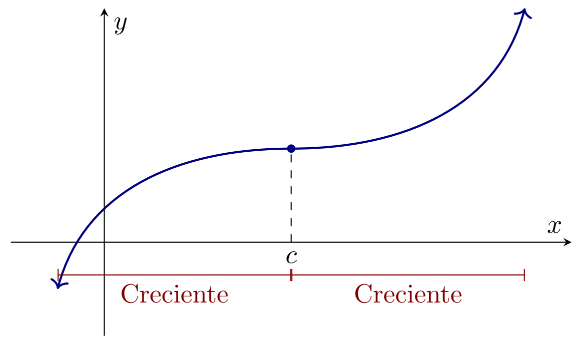


Si f cambia de negativa a positiva entonces la función venía decreciendo y pasó a crecer en c.



Si no hubo cambio de signo entonces la función siguió creciendo o decreciendo según sea el caso y no alcanzó ni un máximo ni un mínimo local en ese punto.





Ejemplo 158.

1. Determine los máximos y los mínimos locales de los ejemplos 156 y 157.

   156: En $x = -1$ se alcanza un mínimo que es $f(-1) = 0$

   En $x = 0$ se alcanza un máximo que es $f(0) = 5$

   En $x = 2$ se alcanza un mínimo que es $f(2) = -27$

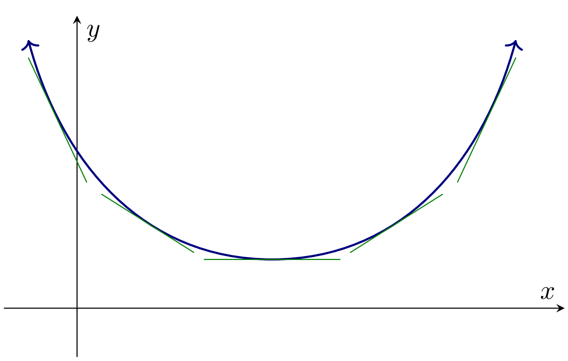
   157: En $x = 0$ se alcanza un mínimo que es $f(0) = 5$

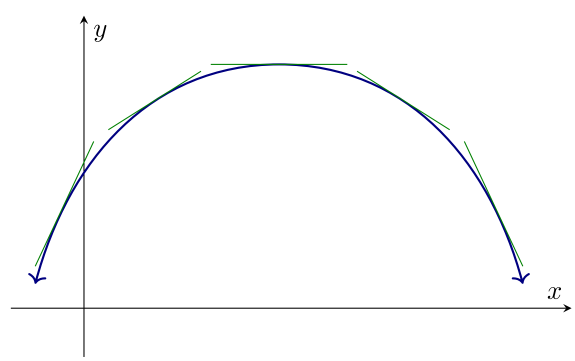
5.5.2. Segunda derivada

Desde que se estudian las funciones cuadráticas se utilizan los términos *cóncavo hacia arriba* y *cóncavo hacia abajo*, pero estos nunca se definen formalmente; ahora ya se cuenta con las herramientas necesarias para hacerlo.

Definición 18. Concavidad

- Si la gráfica de f está arriba de sus rectas tangentes en un intervalo, entonces se dice que f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
- Si la gráfica de f queda abajo de sus rectas tangentes en un intervalo, entonces se dice que f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.



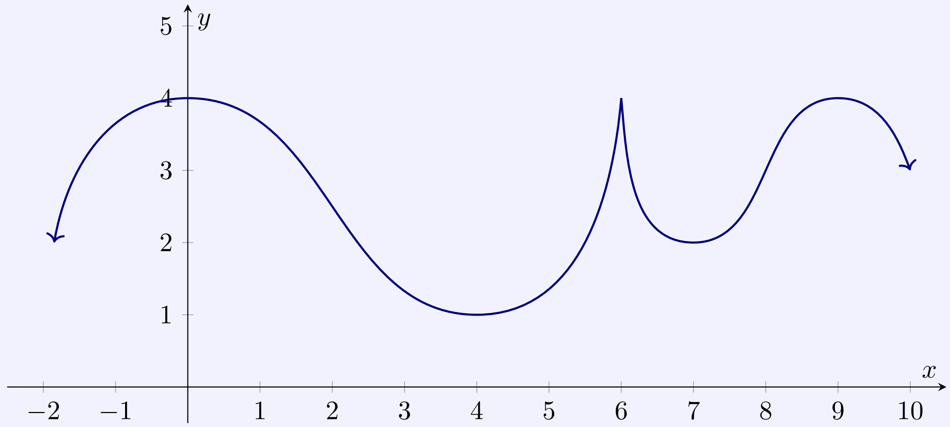


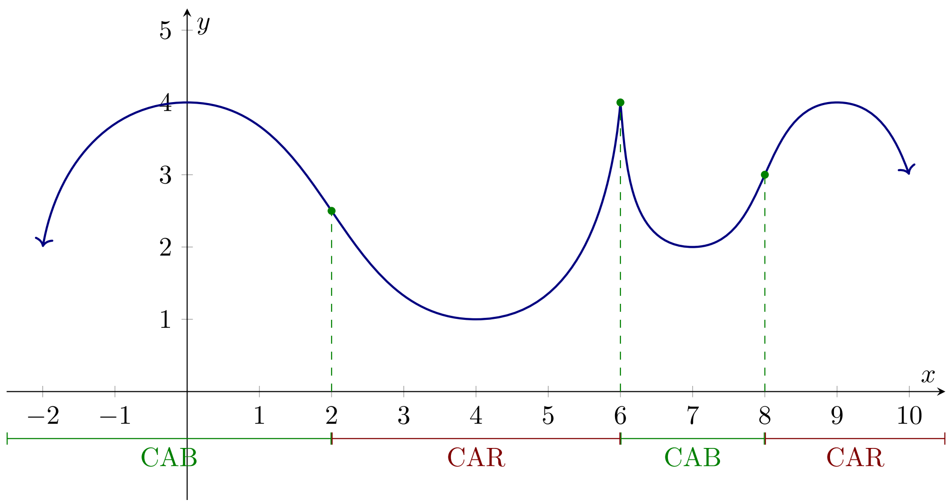
Definición 19. Puntos de inflexión

Los puntos donde la función cambia de concavidad se llaman puntos de inflexión.

Ejemplo 159.

1. Indique los intervalos donde la siguiente gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.





Por lo que la función es cóncava hacia abajo (CAB) en los intervalos $]-\infty, 2[$ y $]6, 8[$ y es cóncava hacia arriba (CAR) en los intervalos $]2, 6[$ y $]8, +\infty[$.

Al observar las gráficas anteriores se puede deducir de manera visual el siguiente teorema.

Teorema 12. Concavidad

- Si $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo I $(\cup)$
- Si $f''(x) < 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo I $(\cap)$

Ejemplo 160.

Determine los intervalos en donde la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, indique además los puntos de inflexión.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x+1)(x-1)$

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
12	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$
		5 (en -1)	5 (en 1)

Los puntos de inflexión son $(-1, 5)$ y $(1, 5)$.

Ejemplo 161.

Describa la curva $y = x^4 - 4x^3$ en cuanto a extremos locales, concavidad y puntos de inflexión; indique en una sola tabla los datos obtenidos.

$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

	$-\infty$ a 0	0 a 3	3 a $+\infty$
$4x^2$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
y'	$-$	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	0 (en 0)	-27 (en 3)	

	$-\infty$ a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
$12x$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
y''	$-$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$
	0 (en 0)	-16 (en 2)	

	$-\infty$ a 0	0 a 2	2 a 3	3 a $+\infty$
y	$\searrow\cup$	$\searrow\cap$	$\searrow\cup$	$\nearrow\cup$
	0 (en 0)	-16 (en 2)	-27 (en 3)	

Los puntos $(0, 0)$ y $(2, -16)$ son puntos de inflexión, el punto $(3, -27)$ es un mínimo.

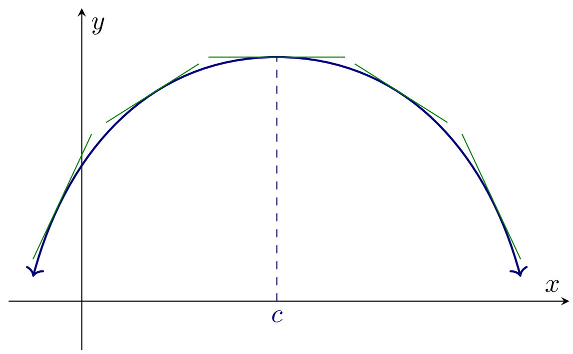
†

Teorema 13. Criterio de la segunda derivada

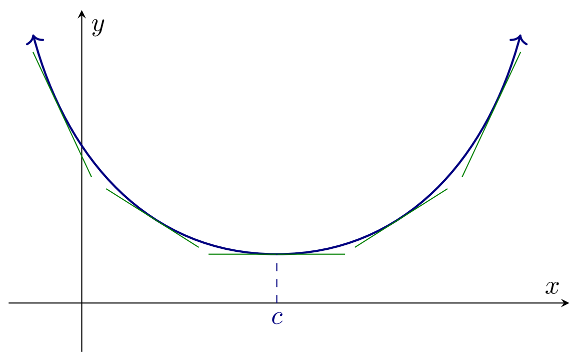
Si f'' es continua en los alrededores de c entonces:

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ entonces f tiene un máximo local en c.

Nota: Si $f''(c) = 0$ entonces este criterio no decide, es decir, $f(c)$ podría ser máximo, mínimo o podría no ser ninguno de los dos.



Observe que la pendiente de las tangentes disminuye ($f''(c) < 0$), la gráfica es cóncava hacia abajo por lo que la función tiene un máximo en c.



Si $f''(c) > 0$ la función es cóncava hacia arriba en $x = c$ por lo que presenta un mínimo en ese punto.

Ejemplo 162.

Determine los máximos y los mínimos de la función $y = x^3 - 3x^2$.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0$ si $x = 0$ ó $x = 2$

$y'' = 6x - 6$, ahora, $y''(0) = -6$ y $y''(2) = 6$

Por lo tanto, en $(0, 0)$ hay un máximo y en $(2, -4)$ hay un mínimo. †

5.5.3. Resumen para el trazo de una gráfica

1. Encuentre el dominio de la función
2. Encuentre las intersecciones con los ejes.

   Es decir, determine los valores en donde $f(x) = 0$ y el punto $(0, f(0))$ si existe.
3. Determine las asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales

   - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ entonces $y = k$ es asíntota horizontal.
   - Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$ entonces $y = m$ es asíntota horizontal.

b) Asíntotas verticales

Determine los valores en donde el denominador de la función se hace cero y calcule los límites laterales en estos puntos, si da infinito alguno de estos límites entonces en ese punto hay una asíntota vertical.

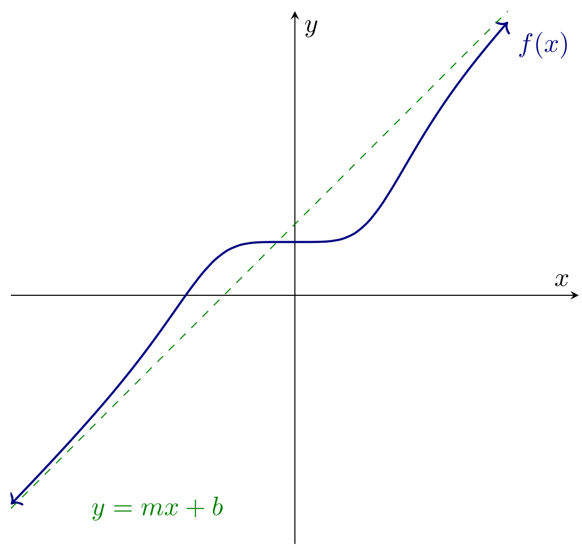
Es decir, se da en los puntos x_0 tales que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

c) Asíntotas oblicuas

Es la recta $y = mx + b$, donde $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$; la asíntota existe siempre que m y b existan.

Puede existir una asíntota oblicua distinta para $+\infty$ y para $-\infty$.

Si hay asíntotas horizontales no pueden haber oblicuas.



4. Intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento)

   Se calcula la primera derivada y se hace su tabla de signos, se calculan máximos y mínimos locales.

5. Concavidad y puntos de inflexión

   Se realiza la tabla de signos para la segunda derivada.

6. Cuadro resumen

   Se realiza un cuadro resumen con todos los datos anteriores y se traza la curva.

Ejemplo 163.

Realice la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

1. Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

2. Intersección con el eje x y con el eje y: $(0, 0)$

3. Asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales:

   $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

   $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

   b) Asíntotas verticales:

   La única posibilidad es en $x = -1$, que es el único valor en donde la función se indefine.

   $\lim_{x\to-1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$

   Ya que $x \to -1^- \implies x < -1 \implies x+1 < 0 \implies x+1 \to 0^-$ y la forma es $F : \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.

   $\lim_{x\to-1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$

   Ya que $x \to -1^+ \implies x > -1 \implies x+1 > 0 \implies x+1 \to 0^+$ y la forma es $F : \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$.

   Por lo que $x = -1$ es asíntota vertical.

   c) Asíntotas oblícuas:

   En este caso no puede haber asíntota oblícua en ninguna de los dos infinitos ya que en ambos casos hay asíntotas horizontales.

4. Intervalos de monotonía

   La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$	-1	$+\infty$
1	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

5. Intervalos de concavidad

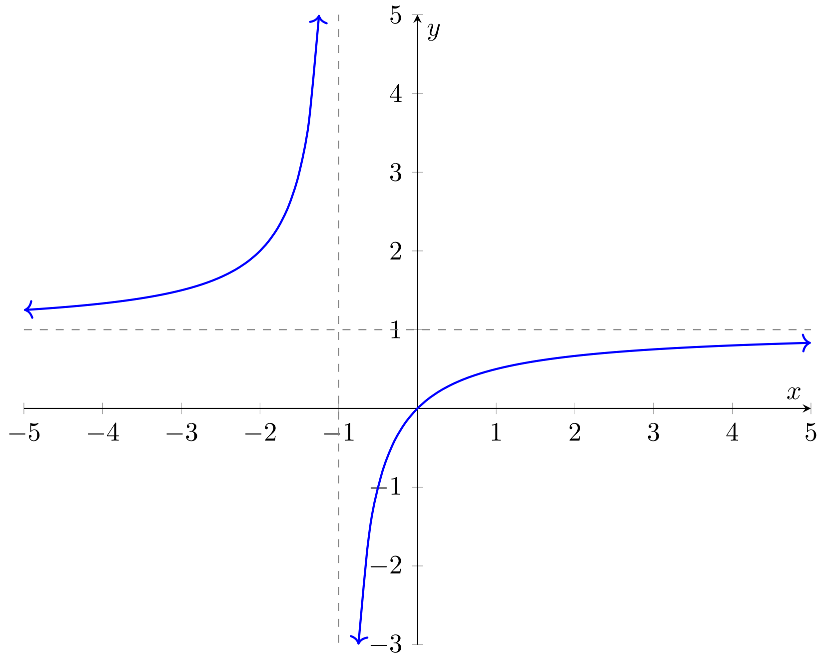
   La segunda derivada de la función es $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$ ... -1	-1 ... $+\infty$
-2	$-$	$-$
$(x+1)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

6. Cuadro resumen:

	$-\infty$ ... -1	-1 ... $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow\cup$	$\nearrow\cap$
	1 ... $+\infty$	$-\infty$ ... 1

7. Gráfica:



†

Ejemplo 164.

Realice la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

1. Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
2. No hay intersección con el eje x ni con el eje y.
3. Asíntotas:

   a) Asíntotas horizontales:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty, \text{ por lo que no hay asíntota horizontal en } +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty, \text{ por lo que no hay asíntota horizontal en } -\infty.$$

b) Asíntotas verticales:

La única posibilidad es en $x = 0$, que es el único valor en donde la función se indefine.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

Ya que $x \to 0^- \implies x < 0 \implies x \to 0^-$ y la forma es $F : \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Ya que $x \to 0^+ \implies x > 0 \implies x \to 0^+$ y la forma es $F : \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

Por lo que $x = 0$ es asíntota vertical.

c) Asíntotas oblícuas:

1) En $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo que en $+\infty$ sí hay asíntota oblícua y es $y = x$.

2) En $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo que en $-\infty$ sí hay asíntota oblícua y es $y = x$.

4. Intervalos de monotonía

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$, su tabla de signos es:

$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$

$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

-2 $\quad$ 2

Así, se tiene un punto máximo local en $(-1, -2)$ y un punto mínimo local en $(1, 2)$.

5. Intervalos de concavidad

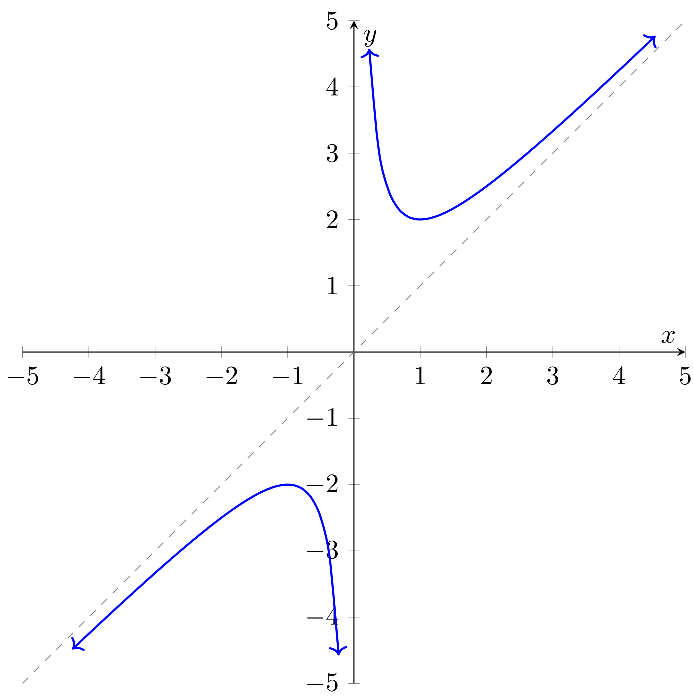
   La segunda derivada de la función es $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$	0	$+\infty$
2	$+$		$+$
x^3	$-$	$\circ$	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

6. Cuadro resumen:

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow\cap$	$\searrow\cap$		$\searrow\cup$	$\nearrow\cup$
	$y = x$	-2	$-\infty$ $+\infty$	2	$y = x$

7. Gráfica:



†

Ejemplo 165.

Realice la gráfica de la función $f(x) = e^{\left(-x^2\right)}$

1. Dominio: $\mathbb{R}$

2. La única intersección que se da es con el eje y: $(0, 1)$.

3. Asíntotas:

a) Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(-x^2\right)} = 0$, por lo que la asíntota horizontal en $+\infty$ es $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(-x^2\right)} = 0$, por lo que la asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = 0$.

b) Asíntotas verticales:

Como el dominio es $\mathbb{R}$ no pueden haber asíntotas verticales.

c) Asíntotas oblícuas:

Como hubo asíntotas horizontales en ambos infinitos no pueden haber asíntotas oblícuas.

4. Intervalos de monotonía

La derivada de la función es $f'(x) = -2x \cdot e^{(-x^2)}$, su tabla de signos es:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	$\circ$	$-$
$e^{(-x^2)}$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		1	

Así, se tiene un punto máximo local (y es el máximo absoluto) en $(0, 1)$.

5. Intervalos de concavidad

La segunda derivada de la función es $f''(x) = 2e^{(-x)^2} \cdot (2x^2 - 1)$, su tabla de signos es:

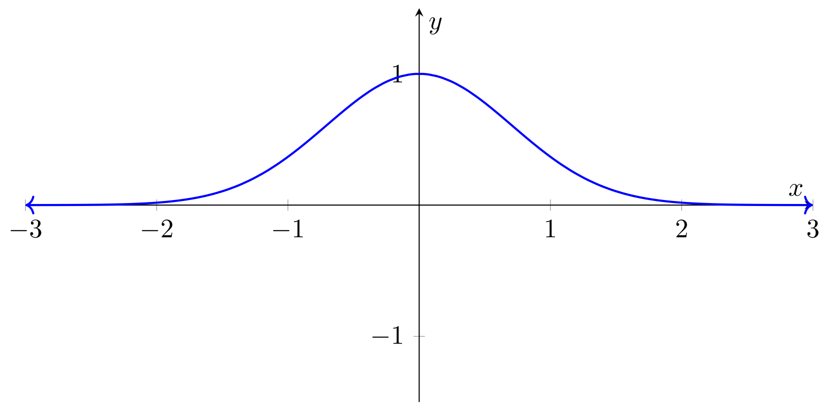
	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2e^{(-x^2)}$	$+$	$+$	$+$	
$\sqrt{2}x - 1$	$-$	$-$	$\circ$ $+$	
$\sqrt{2}x + 1$	$-$	$\circ$ $+$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	
	0	0.61	0.61	0

Por lo que se tienen como puntos de inflexión: $(-0{,}71, 0{,}61)$ y $(0{,}71, 0{,}61)$.

6. Cuadro resumen:

	$-\infty$	-0.71	0	0.71	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow\cup$	$\nearrow\cap$	$\searrow\cap$	$\searrow\cup$	
	0	0.61	1	0.61	0

7. Gráfica:



†

Ejercicio 5.

1. Realice la gráfica para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}, f'(x) = -\dfrac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}, f''(x) = \dfrac{4(3x^2+1)}{(x+1)^3(x-1)^3}$

   b) $f(x) = x^3 - x$

   c) $f(x) = x^4 + 4x^3$

   d) $y = \dfrac{x}{x^2-9}, y' = -\dfrac{x^2+9}{(x+3)^2(x-3)^2}, y'' = \dfrac{2x(x^2+27)}{(x+3)^3(x-3)^3}$

   e) $y = \dfrac{x}{x^2+9}, y' = -\dfrac{(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}, y'' = \dfrac{2x(x-\sqrt{27})(x+\sqrt{27})}{(x^2+9)^3}$

   f) $y = \dfrac{x^2}{x-1}, y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}, y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

   g) $f(x) = x + 3x^{\frac{2}{3}}, y' = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}, y'' = -\dfrac{2}{3x^{\frac{4}{3}}}$

   h) $y = x \cdot e^x, y' = e^x(x+1), y'' = e^x(x+2)$

   i) $y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

5.6. Valores máximos y mínimos

Entre los problemas que se pueden resolver utilizando cálculo diferencial, el de maximizar o minimizar una función es de los más importantes y útiles.

Anteriormente se definieron los máximos y mínimos locales, ahora en los ejercicios de esta sección y la siguiente se va a buscar los máximos y mínimos absolutos de la función. En esta sección se trabajará con una función continua en un intervalo cerrado y la siguiente sección tratará problemas de optimización.

Definición 20. Máximo absoluto o mínimo absoluto

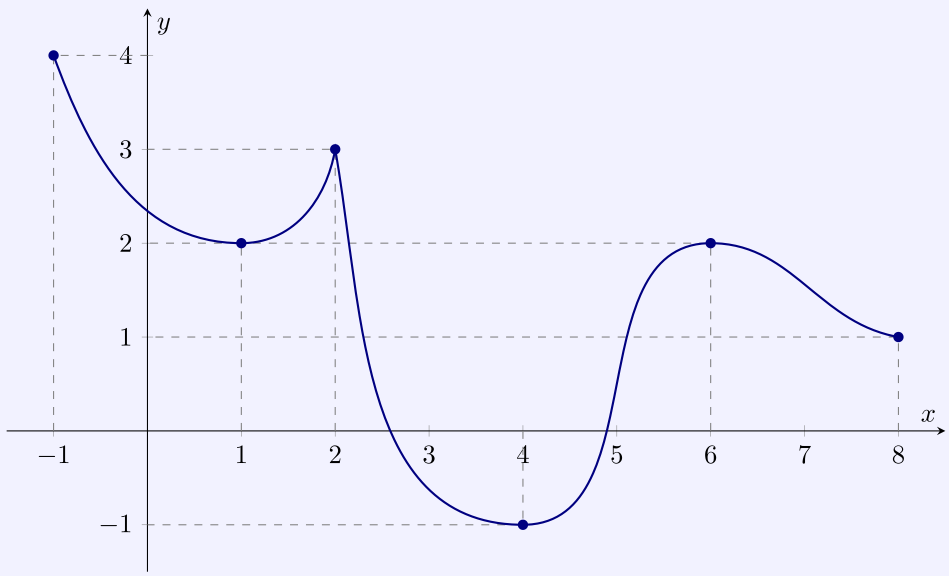
El máximo absoluto o máximo global es el valor más grande de los máximos locales y el mínimo absoluto o mínimo global es el valor más pequeño de los mínimos locales, incluyendo los extremos si es un intervalo.

Estos valores se conocen como los valores extremos de f.

Ejemplo 166.

Según la siguiente gráfica, determine los valores de x en donde la función presenta:

1. Máximos locales.
2. Mínimos locales.
3. Máximo absoluto.
4. Mínimo absoluto.



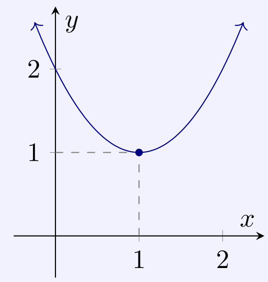
1. $x = 2$ y el máximo local es 3

   $x = 6$ y el máximo local es 2.
2. $x = 1$ y el mínimo local es 2

   $x = 4$ y el mínimo local es -1.
3. $x = -1$ y el máximo absoluto es 4.
4. $x = 4$ y el mínimo absoluto es -1.

Ejemplo 167.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: En $x = 1$ se alcanza un mínimo local, el mínimo es 1.

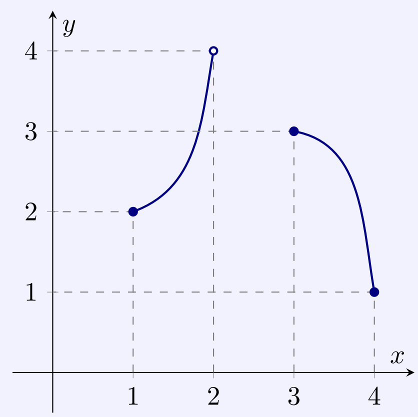
Mínimo absoluto: En $x = 1$ se alcanza el mínimo absoluto, el mínimo absoluto es 1.

Máximo local: No hay.

Máximo absoluto: No hay.

Ejemplo 168.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: No hay.

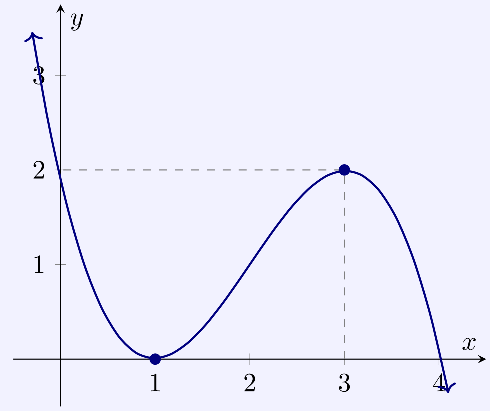
Mínimo absoluto: Se alcanza en $x = 4$ y el mínimo local es 1.

Máximo local: No hay.

Máximo absoluto: No hay.

Ejemplo 169.

Indique los valores de x en donde la función de la gráfica dada presenta máximo o mínimos locales e indique cuáles son los valores extremos de la función.



Mínimo local: Se alcanza en $x = 1$ y el mínimo local es $f(1) = 0$.

Mínimo absoluto: No hay.

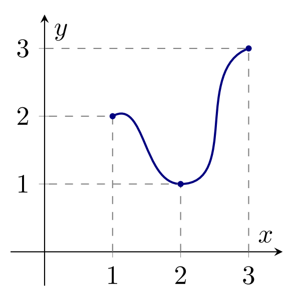
Máximo local: Se alcanza en $x = 3$ y el máximo local es $f(3) = 2$.

Máximo absoluto: No hay.

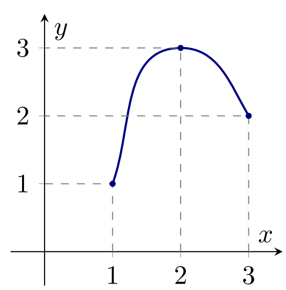
Teorema 14. Teorema del valor extremo

Si f es continua sobre un intervalo $[a, b]$ entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$

Si se tiene la función f que se da en la gráfica (definida en un dominio cerrado), indique su máximo absoluto y su mínimo absoluto.



Máximo absoluto: 3. Mínimo absoluto: 2.



Máximo absoluto: 3. Mínimo absoluto: 1.

Nota:

- Si no se cumplen las condiciones del teorema no se puede asegurar nada (observe el ejemplo 168 anterior).
- Note que si se tiene una función f continua, definida en un intervalo cerrado, entonces dicha función presenta su máximo absoluto y su mínimo absoluto entre los máximos y mínimos locales y los extremos.

Por lo tanto, para encontrar los valores extremos de una función en un intervalo cerrado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Encuentre los valores críticos de f en $[a, b]$ y evalúelos.
2. Determine los valores de f en los extremos del intervalo ($f(a)$ y $f(b)$)
3. El valor más grande de los hallados es el máximo global y el más pequeño es el mínimo global.

Ejemplo 170.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $\frac{-1}{2} \leqslant x \leqslant 4$.

Valores críticos

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ Nunca se indefine

$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 6x = 0 \implies x = 0$ ó $x = 2$

Ahora $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{8}, f(0) = 1, f(2) = -3, f(4) = 17$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 17

Mínimo absoluto: -3

Ejemplo 171.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

Valores críticos

$f'(x) = 3x^2 - 3$ Nunca se indefine

$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 3 = 0 \implies x = -1$ ó $x = 1$

Ahora $f(0) = 1, f(1) = -1, f(3) = 19$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 19

Mínimo absoluto: -1

Ejemplo 172.

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Sug: Para derivar $|x|$, lo puede expresar como $\sqrt{x^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2} \implies f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2}} \cdot \cancel{2}x \implies f'(x) = \frac{x}{|x|}$$

Este se indefine si $x = 0$ y no se cumple que $f'(x) = 0$ para ningún valor.

Así $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(3) = 3$

Por lo tanto:

Máximo absoluto: 3

Mínimo absoluto: 0

5.7. Problemas de Optimización

Los métodos para hallar máximos y mínimos vistos para graficar funciones tienen muchas aplicaciones en la vida real.

Por ejemplo, en negocios se busca minimizar los costos y maximizar las ganancias. En la naturaleza la luz siempre busca recorrer la distancia mínima, etc.

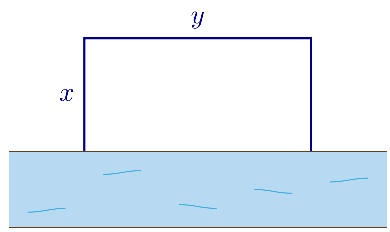
En esta sección se busca resolver este tipo de problemas.

Procedimiento:

1. Comprenda el problema: Léalo con cuidado, defina la(s) incógnita(s) y las cantidades dadas.
2. Dibuje un diagrama: Casi siempre resulta útil hacer un dibujo para comprender mejor el problema y plantearlo.
3. Defina claramente las variables en el diagrama y defina cuál es la variable a maximizar.
4. Despeje la variable que se debe maximizar.
5. Exprese la ecuación en términos de una variable y defina el dominio esta variable.
6. Utilice los métodos vistos para maximizar o minimizar (según sea el caso) la ecuación. En estos casos se busca el máximo o el mínimo absolutos.

Ejemplo 173.

Un agricultor posee 800 metros de cerca para cercar un lote rectangular que limita con un río recto, él no necesita cercar el lado que colinda con el río. ¿Cuáles son las dimensiones del lote que tiene el área más grande?



Hay que maximizar el área $A = x \cdot y$

Pero hay dos variables, sin embargo se sabe que la cerca mide 800 metros, es decir:

$$2x + y = 800 \implies y = 800 - 2x$$

Por lo que:

$$A = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2 \text{ con } x \in [0, 400]$$

Ahora, la derivada es $A' = 800 - 4x$

Y esta derivada se hace cero si

$$800 - 4x = 0 \implies x = 200$$

Como $A(200) = 80000$ y en los extremos se tiene que $A(0) = A(400) = 0$ entonces se tiene que en $x = 200$ se encuentra el máximo absoluto.

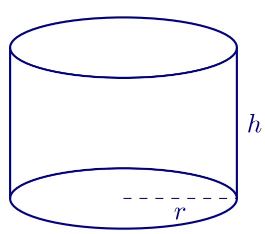
Si $x = 200 \implies y = 800 - 2 \cdot 200 = 400$ y, por lo tanto, estas son las dimensiones que hacen que el área del terreno sea máxima según el diagrama. †

Notas:

- En este ejemplo se realizó el procedimiento general para mostrar todos los pasos dados, sin embargo, se puede notar que aquí la función del área es cuadrática y cóncava hacia abajo, por lo tanto tiene su máximo absoluto en el vértice (que es el punto que se encontró), siempre que se trabaje con funciones cuadráticas se puede simplificar el procedimiento de esta manera.
- Se debe tener claro al dar la respuesta qué es lo que se está preguntando, en este caso son las dimensiones que hacen que el área sea máxima. Si se pregunta cuál es el área máxima se tendría que responder $200 \cdot 400 = 80000m^2$

Ejemplo 174.

Se va a construir una lata cilíndrica que debe tener $100cm^3$ de volumen. Determine las dimensiones para minimizar el costo de fabricar dicha lata.



Se debe minimizar el costo del material, es decir, se debe utilizar mínimizar el área.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Pero se debe cumplir que la lata contenga de volumen $100cm^3$.

$$\pi r^2 h = 100 \implies h = \frac{100}{\pi r^2}$$

Por lo tanto

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{200}{r} \text{ con } r \in]0, +\infty[$$

Así $A' = 4\pi r - \dfrac{200}{r^2} = \dfrac{4(\pi r^3 - 50)}{r^2}$

Por lo que $A' = 0$ si $\pi r^3 - 50 = 0 \implies r = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$

Como $A'' = 4\pi + \dfrac{200 \cdot 2\cancel{r}}{r^{\cancel{4}}} = 4\pi + \dfrac{400}{r^3}$

Y se cumple que $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}\right) = 12\pi > 0$ por lo que se obtiene un mínimo en el valor encontrado y este es el único extremo local en el intervalo (debe ser el absoluto). Como dato extra se puede observar que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2\left(\pi r^2 + \frac{200}{r}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{200}{r}\right) = +\infty$. Por lo tanto, el mínimo encontrado es el mínimo absoluto.

De igual forma, se pudo realizar el criterio de la primera derivada.

	0 — $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ — $+\infty$
4	$+$	$+$
$\pi r^3 - 50$	$-$	$+$
r^2	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Donde también queda claro que en $r = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$ se obtiene el mínimo absoluto.

Por último, si $r = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$ entonces

$$V = \pi r^2 h \implies h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{100}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2}$$

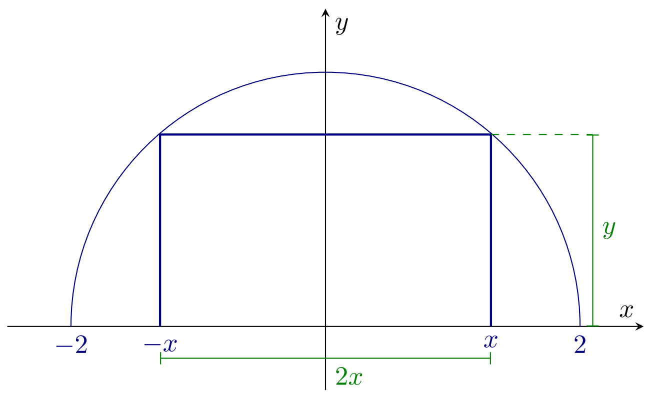
Que al racionalizar y simplificar se obtiene $h = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$.

Por lo tanto, la lata se minimiza cuando $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ y $h = 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$. †

Ejemplo 175.

¿Cuál es el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio 2?

Sug: Coloque el círculo centrado en el origen, así tendrá por ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Se debe maximizar el área del rectángulo $A = 2xy$.

Pero la fórmula del semicírculo de radio r es $x^2 + y^2 = 4$, es decir $y = \sqrt{4 - x^2}$ (se toma la positiva porque se está trabajando con la parte de arriba del semicírculo).

Así, $A = 2x\sqrt{4 - x^2}$ con $x \in [0, 2]$

De aquí $A' = 2\sqrt{4 - x^2} + \dfrac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{2(4 - 2x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$

Se cumple que $A' = 0$ si $4 - 2x^2 = 0 \implies x = \sqrt{2}$

Este es un máximo ya que $A(0) = A(2) = 0$ que son menores al valor encontrado ($A(\sqrt{2}) = 4$ y además es el único punto crítico).

Por lo tanto, el mayor área del rectángulo es de 4 unidades al cuadrado. †

Ejemplo 176.

Halle dos números de producto mínimo y diferencia 100.

Sean x y y los dos números. Se pide minimizar el producto $P = xy$.

Pero se dice que la diferencia entre los números debe ser de 100, es decir que $x - y = 100 \implies x = 100 + y$

Así
$$P = (100 + y)y = 100y + y^2 \text{ con } y \in \mathbb{R}$$

Se cumple que $P' = 100 + 2y$ y $P' = 0$ si $100 + 2y = 0 \implies y = -50$

Este es un mínimo ya que la función es una cuadrática cóncava hacia arriba.

Si $y = -50$, entonces $x = 100 - 50 = 50$.

Por lo tanto, el producto se minimiza cuando los números son -50 y 50. †

Ejemplo 177.

Encuentre un número real positivo tal que la suma de ese número y su recíproco sea mínima.

Sea x el número buscado.

Se quiere minimizar $y = x + \dfrac{1}{x}$ con $x \in]0, +\infty[$

Se tiene que $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, que se hace cero si $x = \pm 1$ y se indefine si $x = 0$. Como x debe ser positivo se descarta -1 y 0 y se trabaja únicamente con $x = 1$.

Observe que en los extremos $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ por lo que $x = 1$ es el más pequeño de los puntos críticos y, por tanto, el mínimo absoluto.

Otra opción sería trabajar con el criterio de la primera derivada en el intervalo correspondiente, $y' = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.

	0 — 1	1 — $+\infty$
$x - 1$	$-$	$+$
$x + 1$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

En donde es claro que en $x = 1$ se alcanza el mínimo absoluto de la función.

Así, el número que cumple lo que se pide es el 1. †

Ejemplo 178.

Determine la distancia más corta del punto $(0, 0)$ a la parábola $y = 4 - x^2$

Los puntos de la parábola dada tienen la forma $(x, 4 - x^2)$.

La distancia del punto $(0, 0)$ al punto $(x, 4 - x^2)$ está dado por

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$$

Pero una raíz cuadrada se minimiza cuando lo de adentro de la raíz se minimiza (entre más pequeño sea lo de adentro de la raíz menor será el valor de la raíz), por lo tanto, se debe minimizar la expresión

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$$

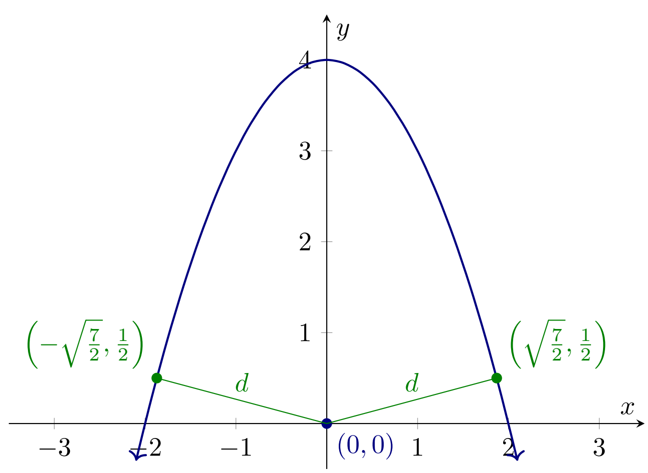
De aquí $f'(x) = 4x^3 - 14x = 4x\left(x - \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$, que se hace cero si $x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

Por el criterio de la primera derivada se tiene

	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x - \sqrt{\frac{7}{2}}$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x + \sqrt{\frac{7}{2}}$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$+\infty$	$\frac{15}{4}$	16	$\frac{15}{4}$	$+\infty$

Por lo que se observa que el mínimo absoluto se alcanza cuando $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Por lo tanto, la distancia mínima entre el punto $(0,0)$ y la parábola $y = 4 - x^2$ es de $\sqrt{\dfrac{15}{4}}$ unidades.



Ejercicio 6.

1. Hallar el punto de la gráfica $y = \sqrt{x}$ que dista menos del punto $(4,0)$. R/ $\left(\dfrac{7}{2}, \sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$

2. Muestre que de todos los rectángulos de perímetro fijo p, el que encierra mayor área es el cuadrado.

Capítulo 6

Integrales

6.1. Integral Indefinida

La integral y la derivada son (casi) funciones inversas, entonces la notación $\int f(x)dx$ se utiliza tradicionalmente para denotar la antiderivada de f y se llama la integral indefinida. Así

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \text{ si } F'(x) = f(x)}$$

Ejemplo 179.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ ya que } \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

6.1.1. Integrales directas

Las primeras antiderivadas se tomarán de la tabla de derivadas (tomadas al revés), está será la tabla de integrales directas:

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int k dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$$

Ejemplo 180.

Utilice las integrales directas para encontrar las siguientes integrales indefinidas

1. $\displaystyle\int 10x^4 - 2\sec^2 x dx = 2x^5 - 2\tan x + C$

2. $\displaystyle\int x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} + x + \arctan x + C$

6.1.2. Integración por sustitución

De la sección de derivadas se sabe que

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(g(x)\right)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Así

$$\int f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = f\left(g(x)\right)$$

O, si se ve de otra manera, si se tiene

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx$$

Se hace la sustitución $u = g(x) \implies du = g'(x)dx$

Por lo que la integral queda

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Una integral más simple que la anterior.

Lo que quiere decir este procedimiento es que se debe buscar una función cuya derivada está en la integral.

Ejemplo 181.

Determine $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\cdot 2xdx && \text{Sea } u = x^2+1 \\
&= \int \frac{1}{u}du && du = 2xdx \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|x^2+1| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 182.

Determine $\int 2x\left(x^2+1\right)^{50}dx$.

$$\begin{aligned}
\int 2x\left(x^2+1\right)^{50}dx &= \int \left(x^2+1\right)^{50}\cdot 2xdx && \text{Sea } u = x^2+1 \\
&= \int (u)^{50}\,du && du = 2xdx \\
&= \frac{u^{51}}{51} + C \\
&= \frac{\left(x^2+1\right)^{51}}{51} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 183.

Determine $\int \cos(5x)dx$.

$$\begin{aligned}
\int \cos(5x)dx &= \int \cos(u)\cdot\frac{du}{5}dx && \text{Sea } u = 5x \\
&= \frac{1}{5}\cdot\int \cos(u)dx && du = 5dx \\
&= \frac{1}{5}\cdot \operatorname{sen} u + C && \frac{du}{5} = dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 184.

Determine $\int \sqrt{2x-1}dx$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x-1}dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} && \text{Sea } u = 2x-1 \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + C && du = 2dx \\ &= \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C && \frac{du}{2} = dx \end{aligned}$$

Ejemplo 185.

Determine $\int \operatorname{sen}^2(3x) \cdot \cos(3x)dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2(3x) \cdot \cos(3x)dx &= \int u^2 \frac{du}{3} && \text{Sea } u = \operatorname{sen}(3x) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3} + C && du = \cos(3x) \cdot 3dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3(3x)}{9} + C && \frac{du}{3} = \cos(3x)dx \end{aligned}$$

Ejemplo 186.

Determine $\int 4\cos^3(4x) \cdot \operatorname{sen}(4x)dx$.

$$\begin{aligned} \int 4\cos^3(4x) \cdot \operatorname{sen}(4x)dx &= \int u^3 \cdot -du && \text{Sea } u = \cos(4x) \\ &= -\frac{u^4}{4} + C && du = -4\operatorname{sen}(4x)dx \\ &= \frac{-\cos^4(4x)}{4} + C && -du = 4\operatorname{sen}(4x)dx \end{aligned}$$

Ejemplo 187.

Determine $\int x\sqrt{2x-1}dx$.

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}dx &= \int \frac{u+1}{2}\cdot\sqrt{u}\frac{du}{2} & u=2x-1 \implies x=\frac{u+1}{2}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\int (u+1)\cdot u^{\frac{1}{2}}du & du=2dx\\
&= \frac{1}{4}\cdot\int u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}du & \frac{du}{2}=dx\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Determine $\int x\sqrt{2x-1}dx$ mediante el cambio $u^2=2x-1$.

Ejemplo 188.

Determine $\int x\sqrt{x-3}dx$.

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x-3}dx &= \int (u+3)\sqrt{u}dx & \text{Sea } u=x-3 \implies x=u+3\\
&= \int u^{\frac{3}{2}}+3u^{\frac{1}{2}}du & du=dx\\
&= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\cancel{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{\cancel{3}}{2}}+C\\
&= \frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned}$$

Ejercicio 8.

Determine $\int x\sqrt{x-3}dx$ mediante el cambio $u^2=x-3$

Ejemplo 189.

Determine $\int x^3\sqrt{x^2+3}dx$.

$$
\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+3}dx &= \int x^2\sqrt{x^2+3}\cdot xdx & \text{Sea } u^2 = x^2+3 \implies x^2 = u^2-3\\
&= \int (u^2-3)\cdot u\cdot udu & 2udu = 2xdx\\
&= \int (u^4-3u^2)du\\
&= \frac{u^5}{5} + u^3 + C\\
&= \frac{(x^2+3)^5}{5} + (x^2+3)^3 + C
\end{aligned}
$$

6.1.3. Integración por partes

Si se recuerda la regla para la derivada de la multiplicación de dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Al integrar estos términos se obtiene

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Así, al despejar

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Si se utiliza la siguiente notación

$$
\begin{aligned}
&u = f(x) & &dv = g'(x)\,dx\\
\implies\ &du = f'(x)\,dx & \implies\ &v = g(x)
\end{aligned}
$$

Entonces se obtiene

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La idea entonces es partir la integral en dos términos, uno de ellos será u y el otro será dv.

Para escoger el u se puede utilizar como referencia la prioridad:

I L A T E

I $\to$ Inversas

L $\to$ Logarítmicas

A $\to$ Algebraicas

T $\to$ Trigonométricas

E $\to$ Exponenciales

Ejemplo 190.

Determine $\displaystyle\int xe^x\,dx$

Sea

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

Así

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 191.

Determine $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x\,dx$

Sea

$$u = \ln x \qquad dv = x^2\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

Así

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \ln x\,dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 192.

Determine $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

Sea

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

Así

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 193.

Determine $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

Sea
$$u = x \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Así

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx &= \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx\\ &= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 194.

Determine $\int x^2 e^x\,dx$

Sea
$$u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$$

Así

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx\\ &= x^2e^x - 2\int e^x\cdot x\,dx\end{aligned}$$

Sea
$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\begin{aligned}&= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)\\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 195.

Determine $\int x^3 \ln x\,dx$

Sea
$$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$$

Así

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{x^4\ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4}\,dx$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

Ejemplo 196.

Determine $\displaystyle\int \ln x \, dx$

Sea
$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Así

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 197.

Determine $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$

Sea
$$u = \ln^2 x \qquad dv = dx$$
$$du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Así

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 198.

Determine $\displaystyle\int \tan^{-1} x \, dx$

Sea
$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad v = x$$

Así

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

Ejemplo 199.

Determine $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ dx$

Sea
$$u = \cos(\ln x) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx \qquad v = x$$

Así

$$\int \cos(\ln x)\ dx = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx$$

Sea
$$u = \operatorname{sen}(\ln x) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx \qquad v = x$$

Así

$$\begin{aligned}
&\int \cos(\ln x)\ dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ dx \\
\Longrightarrow\ & 2\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) \\
\Longrightarrow\ & \int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)}{2} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 200.

Determine $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

Sea
$$u = \operatorname{sen} x \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$$

Así

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx$$

Sea
$$u = \cos x \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = -\operatorname{sen} x\, dx \qquad v = e^x$$

Así

$$\begin{aligned}
&\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x dx\right)\\
\Longrightarrow &\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx\\
\Longrightarrow &\ 2\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x cos x\\
\Longrightarrow &\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + C
\end{aligned}$$

6.1.4. Integración por fracciones parciales

Esta técnica consiste en separar una fracción "compleja" en fracciones más sencillas.

Por ejemplo, si se sabe que

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Se puede calcular fácilmente la integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)\,dx\\
&= \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx\\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

La idea entonces es convertir las fracciones complejas en fracciones simples de acuerdo al siguiente procedimiento.

Fracción Impropia

Si la fracción es impropia (si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador) entonces realice la división de los polinomios.

Ejemplo 201.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx$.

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{rrrr} x^3 & & -x & +3 \\ \hline -x^3 & -x^2 & +2x & \\ & -x^2 & +x & +3 \\ & x^2 & +x & -2 \\ \hline & & 2x & +1 \end{array}\right) \div \left(x^2+x-2\right) = x - 1 + \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}
\end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left(x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}-x+\ln|x^2+x-2|+C\end{aligned}$$

Ejemplo 202.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx.$

$$\begin{array}{l} \left(\;x^2 \quad -x\right) \div \left(x^2+x+1\right) = 1+\dfrac{-2x-1}{x^2+x+1} \\ \underline{-x^2 \quad -x-1} \\ \qquad -2x-1 \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx &= \int \left(1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx \\ &= x-\ln\left(x^2+x+1\right)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 203.

Determine $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+1}\,dx.$

$$\begin{array}{l} \left(\;x^2-x\right) \div \left(x^2+1\right) = 1+\dfrac{-x-1}{x^2+1} \\ \underline{-x^2 \qquad -1} \\ \qquad -x-1 \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x}{x^2+1}\,dx &= \int \left(1-\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int dx-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx-\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x-\frac{\ln|x^2+1|}{2}-\arctan x+C\end{aligned}$$

Fracción no impropia

Si la fracción no es impropia entonces factorice completamente el denominador en factores de la forma

$$(ax+b)^m \text{ y } (ax^2+bx+c)^n$$

1. Factores lineales:

   Por cada factor lineal de la forma $(ax+b)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de las m fracciones siguientes:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

Ejemplo 204.

Determine $\displaystyle\int \frac{3x-3}{x^2-x-2}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} &\Longrightarrow 3x-3 = A(x+1) + B(x-2) \\
&\Longrightarrow 3x-3 = (A+B)x + (A-2B) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A-2B=-3 \end{cases} \\
&\Longrightarrow A=1, B=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-3}{x^2-x-2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\right) dx \\
&= \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 205.

Determine $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}dx$$

$$\begin{aligned}
&\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\
&\Longrightarrow 5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \\
&\Longrightarrow 5x^2+20x+6 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B+C=20 \\ A=6 \end{cases} \\
&\Longrightarrow A=6, B=-1, C=9
\end{aligned}$$

$$= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2} \right) dx$$
$$= 6 \ln |x| - \ln |x+1| - \frac{9}{x+1} + C$$

2. Factores cuadráticos:

   Por cada factor cuadrático de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones siguientes:

$$\frac{A_1 + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + ... + \frac{A_n + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ejemplo 206.

Determine $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\, dx$

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\, dx = \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2 + 4)}\, dx$$

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$
$$\Longrightarrow\ 2x^3 - 4x - 8 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx + D)x(x-1)$$
$$\Longrightarrow\ 2x^3 - 4x - 8 = (A + B + C)x^3 + (-A - C + D)x^2 + (4A + 4B - D)x + (-4A)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B + C = 2 \\ -A - C + D = 0 \\ 4A + 4B - D = -4 \\ -4A = -8 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow\ A = 2, B = -2, C = 2, D = 4$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{x^2+4} \right) dx$$
$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+4} dx$$
$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ejemplo 207.

Determine $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2+2)^2}\, dx$

$$
\begin{aligned}
&\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}\\
\Longrightarrow\ & 8x^3+13x=(Ax+B)(x^2+2)+Cx+D\\
\Longrightarrow\ & 8x^3+13x=Ax^3+Bx^2+(2A+C)x+(2B+D)\\
\Longrightarrow\ & \begin{cases} A=8\\ B=0\\ 2A+C=13\\ 2B+D=0\end{cases}\\
\Longrightarrow\ & A=8, B=0, C=-3, D=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx &= \int\left(\frac{8x}{x^2+2}-\frac{3x}{(x^2+2)^2}\right)dx\\
&= 4\ln|x^2+2|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2}+C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 208.

Determine $\displaystyle\int\frac{3x+4}{x^3-2x-4}\,dx$

$$
\int\frac{3x+4}{x^3-2x-4}\,dx=\int\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\\
\Longrightarrow\ & 3x+4=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-2)\\
\Longrightarrow\ & 3x+4=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(2A-2C)\\
\Longrightarrow\ & \begin{cases} A+B=0\\ 2A-2B+C=3\\ 2A-2C=4\end{cases}\\
\Longrightarrow\ & A=1, B=-1, C=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx\\
&=\ln|x-2|-\frac{\ln|x^2+2x+2|}{2}+C
\end{aligned}
$$

6.1.5. Integrales de expresiones trigonométricas

Para esta sección se utilizarán las integrales siguientes:

$$
\int\tan x dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \qquad\qquad \text{Sea } u=\cos x
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \frac{1}{u}\,du && -du = \operatorname{sen} x dx \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln|\cos x|^{-1} + C \\
&= \ln\frac{1}{|\cos x|} + C \\
&= \ln|\sec x| + C
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C}$$

$$
\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx \quad \text{Sea } u = \sec x + \tan x \implies du = \sec x \tan x + \sec^2 x\,dx \\
&= -\int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| + c \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Ejemplo 209.

Determine $\int \tan^3 x\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan^2 x \tan x\,dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x\,dx \\
&= \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C
\end{aligned}
$$

†

En esta sección se estudiarán varios casos:

- Si se tiene una integral con un producto de senos y cosenos se tienen tres posibilidades:

1. Si la potencia del seno es positiva e impar, aparte un factor de seno y convierta los restantes factores en cosenos. Realice la sustitución $u = \cos x$

Ejemplo 210.

Determine $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Sea } u = \cos x \\
&= -\int \left(1 - u^2\right) u^4 \, du && du = -\operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\int (u^4 - u^6) \, du \\
&= \frac{-u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 211.

Determine $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx \\
&= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx && \text{Sea } u = \cos x \\
&= \int \frac{1 - u^2}{u^2} \cdot -du && du = -\operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int \left(\frac{-1}{u^2} + 1\right) du \\
&= \frac{1}{u} + u + C \\
&= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C
\end{aligned}$$

2. Si la potencia de cosenos es positiva e impar, aparte un factor de coseno y convierta los restantes factores en senos. Haga el cambio $u = \operatorname{sen} x$

Ejemplo 212.

Determine $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cdot \cos x \, dx && \text{Sea } u = \operatorname{sen} x \\
&= \int u^2 \left(1 - u^2\right)^2 \cdot du && du = \cos x \, dx \\
&= \int u^2 \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du \\
&= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\
&= \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 213.

Determine $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx \\
&= \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx && \text{Sea } u = \operatorname{sen} x \\
&= \int \frac{1 - u^2}{u} \, du && du = \cos x \, dx \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - u\right) du \\
&= \ln |u| - \frac{u^2}{2} + C \\
&= \ln |\operatorname{sen} x| - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C
\end{aligned}$$

3. Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares y no negativas, se deben utilizar las identidades
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \;, \; \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
y se debe proceder como en el caso 2.

Ejemplo 214.

Determine $\int \cos^4 x\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\, dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1+\cos(4x)}{8}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{3}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos(4x)}{8}\right) dx \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 215.

Determine $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{(1-\cos(2x))}{2}\frac{(1+\cos(2x))}{2}\, dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}\, dx \\
&= \int \frac{1-\frac{1-\cos^2(4x)}{2}}{4}\, dx \\
&= \int \frac{2-1+\cos(4x)}{8}\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right)+C \\
&= \frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

- Si se tiene integral con un producto de secantes y tangentes se tiene las siguientes posibilidades:

   1. Si la potencia de la secante es positiva y par, aparte un factor de secante al cuadrado y convierta los restantes factores en tangentes. Realice el cambio $u = \tan x$, recuerde que $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$.

Ejemplo 216.

Determine $\displaystyle\int \sec^4(3x)\tan^3(3x)\ dx$.

$$\begin{aligned}
\int \sec^4(3x)\tan^3(3x)\ dx &= \int \left(\tan^2(3x)+1\right)\tan^3(3x)\cdot\sec^2(3x)\,dx && \text{Sea } u=\tan(3x)\\
&= \frac{1}{3}\int \left(u^2+1\right)u^3\,du && \frac{du}{3}=\sec^2(3x)\ dx\\
&= \frac{1}{3}\int (u^5+u^3)\,du\\
&= \frac{1}{3}\frac{u^6}{6}+\frac{1}{3}\frac{u^4}{4}+C\\
&= \frac{\tan^6(3x)}{18}+\frac{\tan^4(3x)}{12}+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 217.

Determine $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}\,dx &= \int \frac{1}{u^5}\,du && \text{Sea } u=\tan x\\
&= \frac{-1}{4u^4}+C && du=\sec^2 x\,dx\\
&= \frac{-1}{4\tan^4 x}+C
\end{aligned}$$

2. Si la potencia de la tangente es positiva e impar, aparte un factor de secante y uno de tangente y convierta los restantes factores en secantes. Haga el cambio $u=\sec x$. Recuerde que: $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

Ejemplo 218.

Determine $\displaystyle\int \tan^5 x\sec^7 x\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x\sec^7 x\,dx &= \int \tan^4 x\sec^6 x\cdot\sec x\tan x\,dx\\
&= \int \left(\sec^2 x-1\right)^2\cdot\sec^6 x\cdot\sec x\tan x\,dx && \text{Sea } u=\sec x\\
&= \int \left(u^2-1\right)u^6\,du && du=\sec x\tan x\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^6 \, du \\
&= \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 219.

Determine $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x \, dx$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x \, dx &= \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan x \cdot \sec x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx && \text{Sea } u = \sec x \\
&= \int (u^2 - 1) \cdot u^2 \, du && du = \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (u^4 - u^2) \, du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C
\end{aligned}
$$

3. Si la potencia de la secante es positiva e impar y la de la tangente es positiva y par entonces se convierten todas las tangentes a secantes, quedan todas las secantes con potencias impares, cada una de estas se calcula por separado.

Ejemplo 220.

Determine $\int \sec^3 x \, dx$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$$

Sea

$$
\begin{aligned}
u &= \sec x & dv &= \sec^2 x \\
du &= \sec x \tan x \, dx & v &= \tan x
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx \\
&\Longrightarrow \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx \\
&\Longrightarrow \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \\
&\Longrightarrow 2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C \\
&\Longrightarrow \int \sec^3 x\, dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C
\end{aligned}$$

- Para evaluar las integrales con forma $\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$, $\displaystyle\int \cos mx \cos nx dx$ ó $\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$ se emplean las identidades:
  - $\operatorname{sen} A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right]$
  - $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$
  - $\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

Ejemplo 221.

Determine $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\ dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(4x)\cos(5x)\ dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(4x-5x) + \operatorname{sen}(4x+5x)\right]\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(9x)\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot -\cos(-x) + \frac{1}{2}\cdot \frac{-\cos(9x)}{9} + C \\
&= \frac{-1}{2}\cos(-x) - \frac{1}{18}\cos(9x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 222.

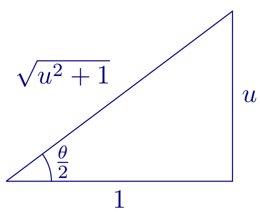
Determine $\displaystyle\int \cos(7\theta)\cos(5\theta)\ d\theta$

$$\int \cos(7\theta)\cos(5\theta)\ d\theta = \int \frac{1}{2}\left[\cos(7\theta-5\theta) + \cos(7\theta+5\theta)\right]\ d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int [\cos(2\theta) + \cos(12\theta)]\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(12\theta)}{12}\right] + C
\end{aligned}$$

- Si se presentan sumas y restas con $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ se puede utilizar el cambio $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, veamos cómo cambiarían estas expresiones.

  Se tomará un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos siendo $\frac{\theta}{2}$.



  Al utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$ con $2x = \theta$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \\
&= \frac{2u}{u^2+1}
\end{aligned}$$

  Se hace algo similar con la identidad $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{u^2+1} \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}$$

  Por último

$$\begin{aligned}
du &= \frac{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}d\theta \\
&= \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2}d\theta \\
&= \frac{u^2+1}{2}d\theta
\end{aligned}$$

Por lo que $d\theta = \dfrac{2}{u^2+1}du$.

Ejemplo 223.

Determine $\displaystyle\int \frac{5}{4-\cos x}dx$

Sea $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ y $dx = \dfrac{2}{u^2+1}du$, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4-\operatorname{sen} x}dx &= \int \frac{1}{4-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{u^2+1}du \\
&= \int \frac{2}{4(u^2+1)-(1-u^2)}du \\
&= \int \frac{2}{3+5u^2}du \\
&= \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{3}{5}+u^2}du \\
&= \frac{2}{5}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}u}{\sqrt{3}}\right)+C \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

Ejemplo 224.

Determine $\displaystyle\int \frac{5}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}dx$

Sea $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, entonces $\operatorname{sen} x = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ y $dx = \dfrac{2}{u^2+1}du$, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{5}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}dx &= \int \frac{5}{\frac{6u}{1+u^2}-4\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{10}{u^2+1}du \\
&= \int \frac{10}{6u-4(1-u^2)}du \\
&= \int \frac{10}{4u^2+6u-4}du \\
&= \int \frac{5}{2u^2+3u-2}du \\
&= \int \frac{5}{(u+2)(2u-1)}du
\end{aligned}$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{5}{(u+2)(2u-1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{2u-1} \implies 5 = A(2u-1) + B(u+2)$$
$$\implies 5 = 2Au - A + Bu + 2B$$
$$\implies 5 = (2A+B)u + (-A+2B)$$

Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A + 2B = 5 \end{cases}$

Que tiene por solución $A = -1$ y $B = 2$, se regresa a la integral.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(u+2)(2u-1)} du &= \int \left(\frac{-1}{u+2} + \frac{2}{2u-1} \right) du \\
&= -\ln|u+2| + \ln|2u-1| + C \\
&= -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2\right| + \ln\left|2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2}\right| + C
\end{aligned}$$

6.1.6. Integración por sustitución trigonométrica

Ahora se analizarán integrales con términos de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$. Se analizará un primer ejemplo.

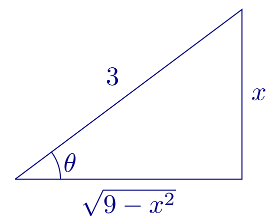
Ejemplo 225.

Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{\sqrt{9 - (3\operatorname{sen}\theta)^2}}{(3\operatorname{sen}\theta)^2} \cdot 3\cos\theta\, d\theta && \text{Sea } x = 3\operatorname{sen}\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{9 - 9\operatorname{sen}^2\theta}}{3\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta && dx = 3\cos\theta\, d\theta, \text{ con } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\
&= \int \frac{\sqrt{9(1 - \operatorname{sen}^2\theta)}}{3\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{3\sqrt{\cos^2\theta}}{3\operatorname{sen}^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\
&= \int \cot^2\theta\, d\theta \\
&= \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta
\end{aligned}$$

$$= -\cot\theta - \theta + C$$

Pero se debe regresar a la variable original x, de la sustitución se observa que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{3}$, de donde se puede realizar el triángulo siguiente.



Del gráfico se observa que $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ y $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Así $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ †

Se observa que el cambio simplificó la integral, en estos casos, los cambios que hay que hacer son:

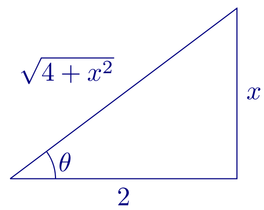
Término	Sustitución	Propiedad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$	$1-\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Ejemplo 226.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{1}{(2\tan\theta)^2\sqrt{(2\tan\theta)^2+4}}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta && \text{Sea } x = 2\tan\theta \\
&= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\,d\theta && dx = 2\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta\cos^2\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{-1}{4\operatorname{sen}\theta} + C
\end{aligned}$$

De la sustitución $\tan\theta = \dfrac{x}{2}$ se tiene el triángulo:



Así, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

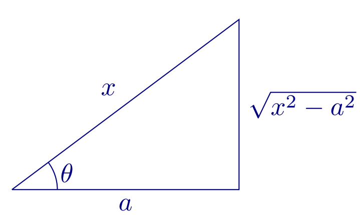
Por lo tanto, $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$

Ejemplo 227.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2}}\cdot a\sec\theta\tan\theta\,d\theta && \text{Sea } x = a\sec\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\,d\theta && dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta\cancel{\tan\theta}}{\cancel{\tan\theta}}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta d\theta \\
&= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1
\end{aligned}$$

Ahora, del cambio, como $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$ entonces



Por lo que $\sec\theta = \dfrac{x}{a}$ y $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

Así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C_1
\end{aligned}$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

Ejemplo 228.

Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du && \text{Sea } u = x^2+4\\
&= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} + C && du = 2xdx\\
&= \sqrt{u} + C && \frac{du}{2} = x\,dx\\
&= \sqrt{x^2+4} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 229.

Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

Primero se completan cuadrados en el denominador:

$$\begin{aligned}
(3-2x-x^2) &= -(x^2+2x-3)\\
&= -(x^2+2x+1-1-3)\\
&= -((x+1)^2-4)\\
&= 4-(x+1)^2
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx && \text{Sea } u = x+1 \implies x = u-1\\
&= \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du && du = dx\\
&= \int \left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\right)du\\
&= -\sqrt{4-u^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{2}\right) + C\\
&= -\sqrt{4-(x+1)^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\\
&= -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 230.

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx$

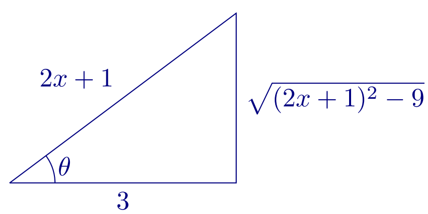
Completación de cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2+4x-8 &= 4x^2+4x+1-9 \\ &= (2x+1)^2-9 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-9}}\,dx && \text{Sea } 2x+1=3\sec\theta \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\cdot\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}\,d\theta && 2dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\cdot\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2}\,d\theta \\ &= \int \frac{1}{\cancel{3}\cancel{\tan\theta}}\cdot\frac{\cancel{3}\sec\theta\cancel{\tan\theta}}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C \end{aligned}$$

Y como $\sec\theta = \dfrac{2x+1}{3}$



de donde se obtiene que $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}$, así

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-8}}\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1}{3}+\frac{\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}\right|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}}{3}\right|+C \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}\right|-\ln 3\right)+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-9}\right|+C_1 \end{aligned}$$

6.2. Integral Definida

6.2.1. Sumas, la notación $\sum$

La notación de sumatoria es muy útil para representar sumas de manera simplificada.

Para denotar una sumatoria se utiliza el símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Lo que dice que se deben sumar los términos de f evaluados en k desde m hasta n con un paso de uno en uno.

Ejemplo 231.

Desarrolle las siguientes sumas.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$
3. $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} (2j - 1) = (2 \cdot 0 - 1) + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = -1 + 1 + 3 + 5 = 8$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} f\left(2 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4)$

Ejemplo 232.

Escriba las siguientes sumas en notación simplificada de sumatoria.

1. $\displaystyle 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{5} (2k + 1)$
2. $\displaystyle 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{k=1}^{6} 2$
3. $\displaystyle f(1) + f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + f\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \sum_{k=1}^{4} f\left(1 + (k-1)\frac{1}{4}\right)$

Las sumatorias también se pueden especificar desde un número dado hasta un número cualquiera n.

Ejemplo 233.

Escriba el desarrollo de las siguientes sumas.

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$

3. $\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + k + k + ... + k}_{n \text{ veces}}$

Esta forma de expresar las sumas tiene la ventaja que se pueden determinar las fórmulas para encontrarlas de manera general, de esta forma:

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + c + ... + c}_{n \text{ veces}} = n \cdot c$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

Sumando estas dos expresiones se cumple

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Se cumple además:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (f(k) + g(k)) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c \cdot f(k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} f(k)}$$

Todas estas fórmulas se definen cuando la suma inicia en 1 y finaliza en n.

Ejemplo 234.

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} 2k^2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30} 2k^2 &= 2\cdot\sum_{k=1}^{30} k^2\\ &= 2\cdot\frac{30(30+1)(2\cdot 30+1)}{6}\\ &= 18910\end{aligned}$$

†

Ejemplo 235.

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(5k^2+2k-1)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(5k^2+2k-1) &= 5\cdot\sum_{k=1}^{15} k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 1\\ &= 5\cdot\frac{15(15+1)(2\cdot 15+1)}{6} + 2\cdot\frac{15(15+1)}{2} - 15\\ &= 6425\end{aligned}$$

†

Ejemplo 236.

Simplifique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+2k-2)$

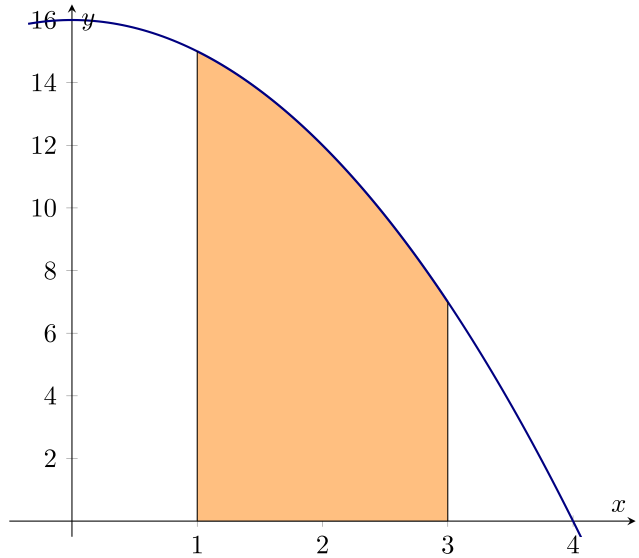
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(6k^2+2k-2) &= 6\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2\\ &= \cancel{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} + \cancel{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - 2n\\ &= n((n+1)(2n+1)+n+1-2)\\ &= n(2n^2+4n)\\ &= 2n^2(n+2)\end{aligned}$$

†

6.2.2. Sumas de Riemann

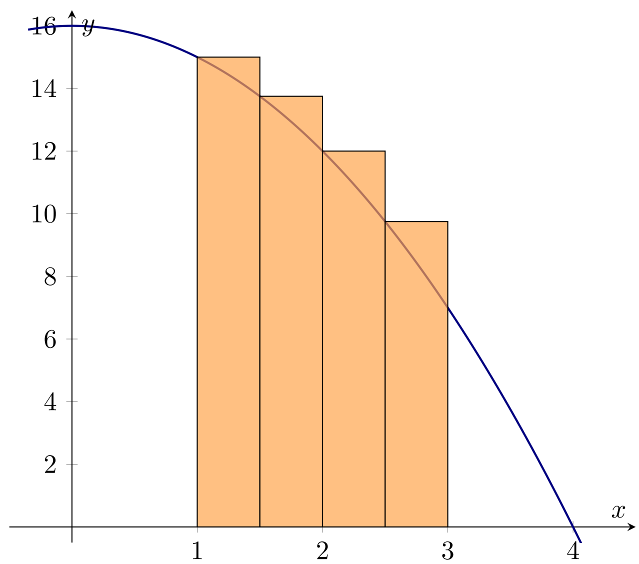
En esta sección el problema que se trata de resolver es encontrar el área que se encierra entre una curva y el eje x desde un punto $x = a$ a un punto $x = b$.

Para iniciar, se buscará el área entre la curva $y = 16 - x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 3$.



Se debe observar que esta área no se puede encontrar de forma directa con las fórmulas conocidas hasta ahora, lo que se puede hacer son algunas aproximaciones tratando de rellenar el área, lo más sencillo es utilizar rectángulos.

Se iniciará con una aproximación muy "mala", se tratará de llenar el área con cuatro rectángulos, por tanto, se partirá la base en cuatro partes iguales y se introducirán los rectángulos, las alturas se tomarán con la función al lado izquierdo del rectángulo.



La base de todos estos rectángulos mide lo mismo $\Delta x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$

Ahora, la altura del primer rectángulo es $f(1)$, la del segundo es $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, el tercero es $f(2)$ y el del cuarto es $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

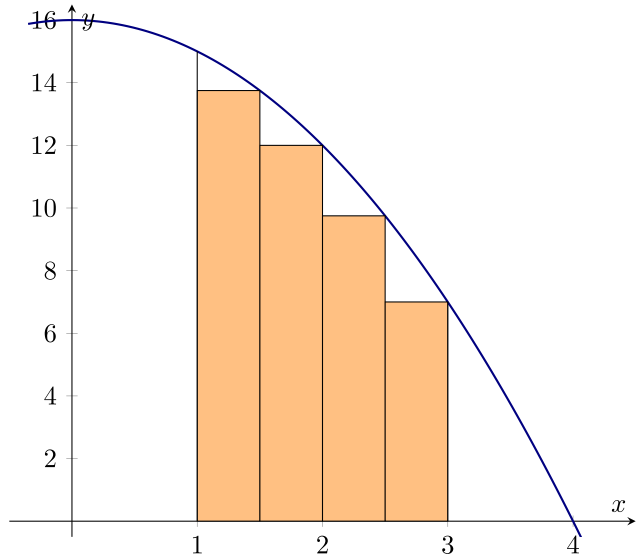
Por lo tanto, el área de los cuatro rectángulos es

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2}\cdot f(1) + \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot f(2) + \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{5}{2}\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(15 + \frac{55}{4} + 12 + \frac{39}{4}\right)\\
&\approx 25{,}25
\end{aligned}$$

Otra forma de calcularlo es con la notación $\sum$:

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2}\cdot f(1) + \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot f(2) + \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{5}{2}\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(f\left(1+(k-1)\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(16-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{k^2}{4}-\frac{k}{2}+\frac{63}{4}\right)\\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4(4+1)}{2} + 63\right)\\
&\approx 25{,}25
\end{aligned}$$

Se nota que en este caso la altura de los rectángulos se tomó del lado izquierdo y que el área de los rectángulos es mayor que el área buscada. Esta área también se pudo encontrar tomando la altura del lado derecho, se realizará este cálculo.



El área de los cuatro rectángulos es

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(3) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2} + f(3)\right)\right) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{55}{4} + 12 + \frac{39}{4} + 7\right) \\
&\approx 21{,}25
\end{aligned}$$

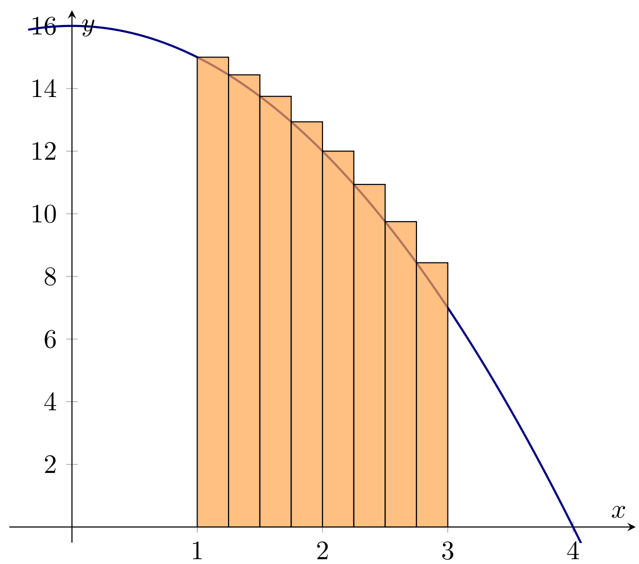
O con la notación $\sum$:

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(3) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(f\left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right)\right) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(16 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)^2\right) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(-\frac{k^2}{4} - k + 15\right) \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} - \frac{4(4+1)}{2} + 60\right) \\
&\approx 21{,}25
\end{aligned}$$

Si se observa, esta área es menor al área que se busca, así se puede decir con seguridad que $21{,}25 < A < 25{,}25$.

Como se dijo anteriormente, esta aproximación es "muy mala", se realizará el mismo cálculo, pero ahora utilizando ocho rectángulos y utilizando la notación $\sum$.

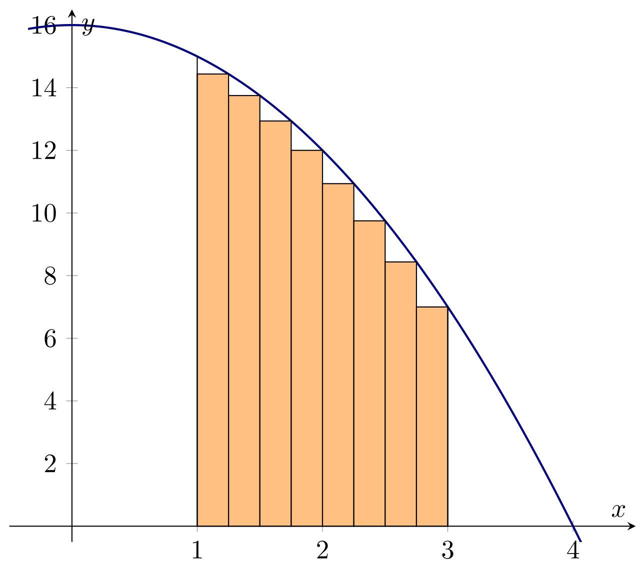
Por la izquierda:



Distancia: $\Delta x = \dfrac{3-1}{8} = \dfrac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{4}\cdot\left(f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(2)+f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(f\left(1+(k-1)\cdot\frac{1}{4}\right)\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(16-\left(\frac{k}{4}+\frac{3}{4}\right)^2\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{k^2}{16}-\frac{3k}{8}+\frac{247}{16}\right)\\
&\approx \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{16}\cdot\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6}-\frac{3}{8}\cdot\frac{8(8+1)}{2}+\frac{247}{16}\cdot 8\right)\\
&\approx 24{,}31
\end{aligned}
$$

Por la derecha:



Distancia: $\Delta x = \dfrac{3-1}{8} = \dfrac{1}{4}$

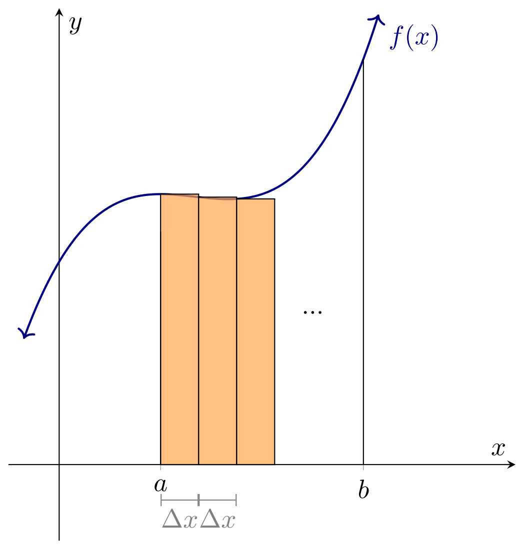
$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right) + f(3) \right) \\
&\approx \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{8} \left(f\left(1 + k \cdot \frac{1}{4}\right) \right) \\
&\approx \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{8} \left(16 - \left(1 + \frac{k}{4}\right)^2 \right) \\
&\approx \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{8} \left(-\frac{k^2}{16} - \frac{k}{2} + 15 \right) \\
&\approx \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{16} \cdot \frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8(8+1)}{2} + 15 \cdot 8 \right) \\
&\approx 22{,}31
\end{aligned}$$

Por lo que $22{,}31 < A < 24{,}31$

Se puede notar que entre mayor sea la cantidad de rectángulos, mejor es la aproximación, para encontrar el área buscada lo que se hace es introducir una infinita cantidad de rectángulos (se toma el límite conforme el número de rectángulos tienda a infinito).

Ahora se hará el procedimiento general para una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, las alturas se tomarán por la izquierda del rectángulo.

Se inicia introduciendo una cantidad n de rectángulos.



Se divide el intervalo en n partes $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, este es el ancho de todos los rectángulos.

La altura del primer rectángulo es $f(a)$, la del segundo $f(a+\Delta x)$, luego $f(a+2\cdot\Delta x)$, etc. Así, la altura del k-ésimo rectángulo es

$$f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

Y el área será

$$A_k = \Delta x\cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

El área de los n rectángulos es

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)$$

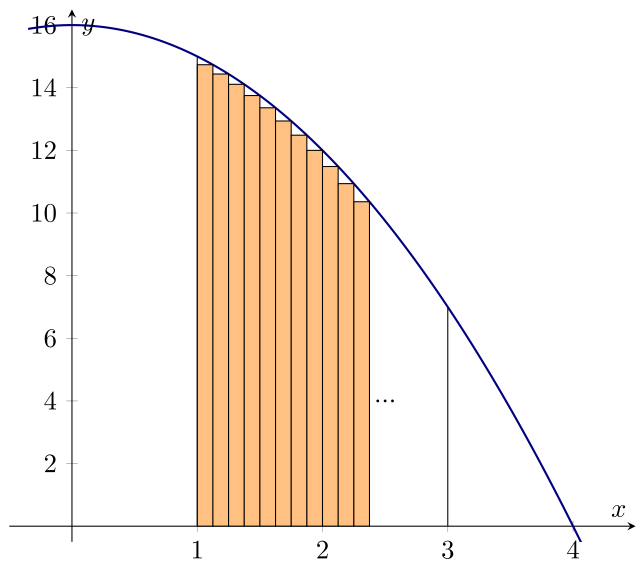
Y tomando un infinito número de rectángulos se tiene

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f\left(a+(k-1)\cdot\Delta x\right)}$$

Si se toma la altura por la derecha se obtiene

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f\left(a+k\cdot\Delta x\right)}$$

Así, al retomar el ejemplo inicial ($f(x)=16-x^2$ de $x=1$ a $x=3$) y se calculará por la derecha, de esta forma se tiene



$\Delta x = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot f\left(1 + k \cdot \frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(16 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(15 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(15n - \frac{4}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} - \frac{4}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{78n^2 - 12n - 8n^2 - 12n - 4}{6n} \\
&= 2 \cdot \frac{70}{6} \\
&= \frac{70}{3} = 23.\overline{3}
\end{aligned}$$

Nota:

En los ejemplos y ejercicios por lo regular se indica si el cálculo se debe hacer por la derecha o por la izquierda, si no se indica, se puede hacer por cualquiera de los dos lados, en este caso se prefiere por la derecha ya que la fórmula es más simple.

Ejemplo 237.

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Se va a partir el intervalo en n subintervalos igualmente espaciados, en donde cada uno de ellos mide $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$

El cálculo se hará tomando las alturas de los rectángulos por la derecha.

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(a + k \cdot \Delta x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(0 + k \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6n^{\cancel{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

†

Ejercicio 9.

1. Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x - x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$. R/ $\dfrac{1}{6}$
2. Encuentre el área bajo la curva de la función $g(x) = 2x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$. R/ $\dfrac{52}{3}$

6.2.3. La integral definida

Como se vio en la sección anterior, el método de Riemann sirve para econtrar el área bajo la curva de una función f en un intervalo $[a, b]$, esto con la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x^*) \cdot \Delta x$$

donde x^* es el valor tomado por la derecha o por la izquierda del rectángulo.

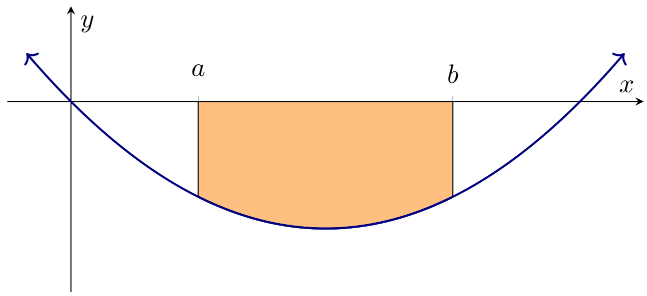
Esta suma de términos infinitos se va a llamar *la integral definida* y se denotará como

$$\int_a^b f(x)dx$$

De esta forma

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x^*) \cdot \Delta x}$$

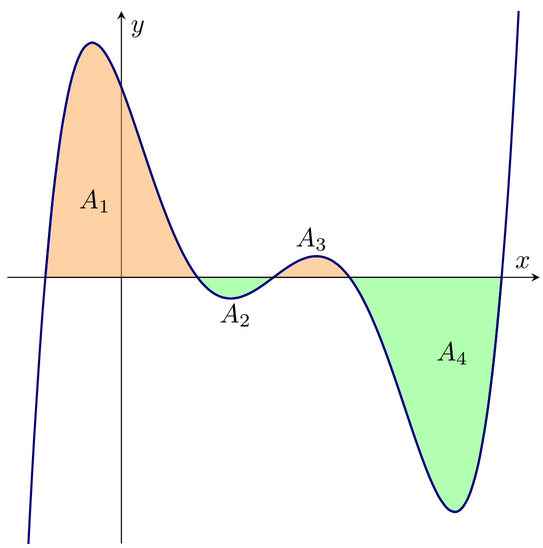
Aunque hasta el momento se ha hablado del área bajo la curva, no es cierto que este límite la represente, ¿qué sucede si el área buscada está debajo del eje x?



Aquí las evaluaciones de f son negativas y, por lo tanto, el límite de las sumas da un valor negativo.

Así, se puede observar que la integral es positiva si la función está sobre el eje x y negativa si está por debajo del eje x.

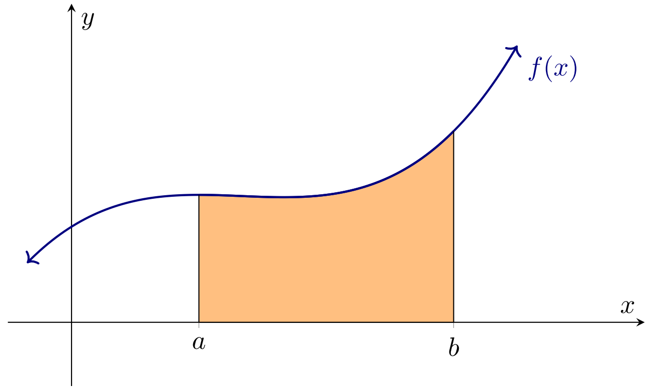
Por lo tanto, en futuros ejercicios y ejemplos en los que se pida el área bajo la curva se tendrán que calcular las áreas positivas y restarle las negativas.



Así, $A = A_1 + A_3 - A_2 - A_4$.

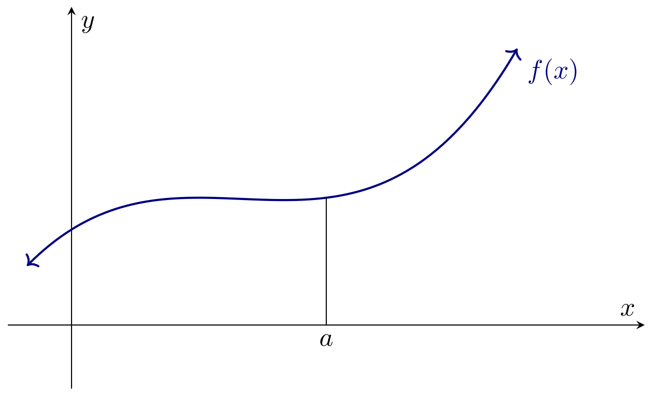
Algunas propiedades de la integral definida

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

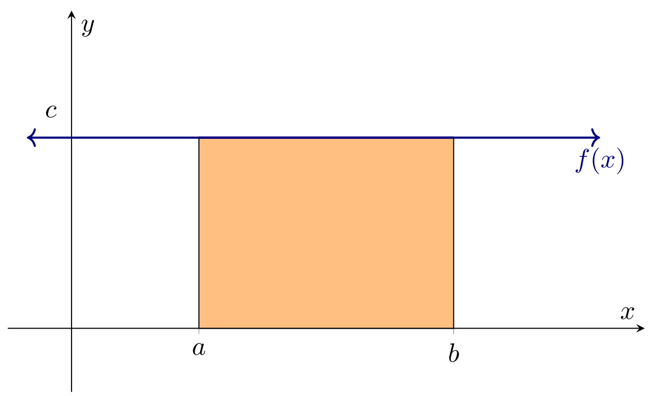


Aquí se tiene $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} > 0$ de a a b y $\Delta x = \dfrac{a-b}{n} < 0$ de b a a, por ello es la diferencia de signos.

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$



3. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)$ con c constante.

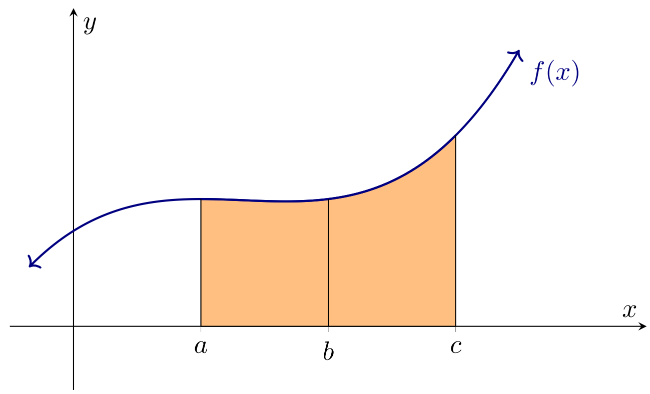


4. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5. $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

6. $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

7. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

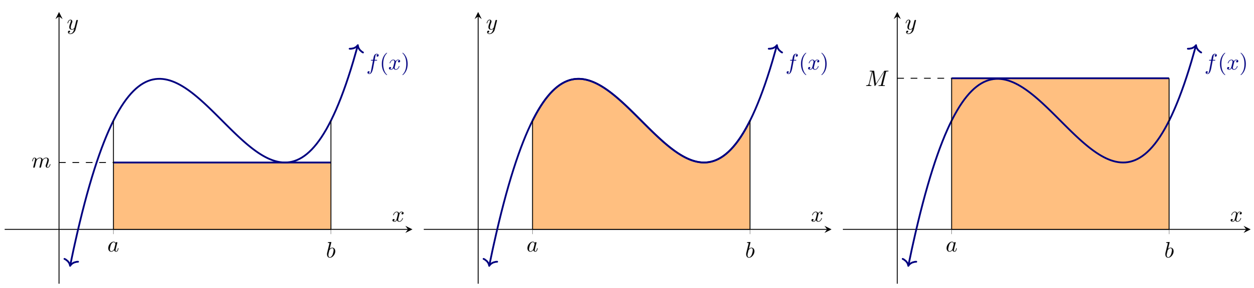


8. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

9. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$

10. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$



Ejemplo 238.

Utilice las propiedades para hallar el valor de $\displaystyle\int_0^1 3 + 4x^2 dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3 + 4x^2 dx &= \int_0^1 3dx + 4 \cdot \int_0^1 x^2 dx \\
&= 3(1-0) + 4 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Nota: La integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ se calculó en la sección de sumas de Riemann.

Ejemplo 239.

Utilice las propiedades para hallar el valor de $\int_7^{10} f(x)dx$ si se sabe que $\int_0^{10} f(x)dx = 18$ y $\int_0^7 f(x)dx = 11$.

Se cumple que

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx$$

De aquí

$$\int_7^{10} f(x)dx = 7$$

Ejemplo 240.

Sabiendo que $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{14}{3}$, ¿Cuánto es $\int_4^1 \sqrt{t}dt$?

$$\begin{aligned}\int_4^1 \sqrt{t}dt &= -\int_1^4 \sqrt{t}dt \\ &= -\frac{14}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 241.

Evalúe $\int_1^1 x^2 \cos x dx$

$$\int_1^1 x^2 \cos x dx = 0$$

6.2.4. Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo es el resultado más importante en este campo de la matemática.

Este teorema relaciona el cálculo diferencial (derivadas) con el cálculo integral (integrales), dos temas que, en principio, no parecen tener conexión.

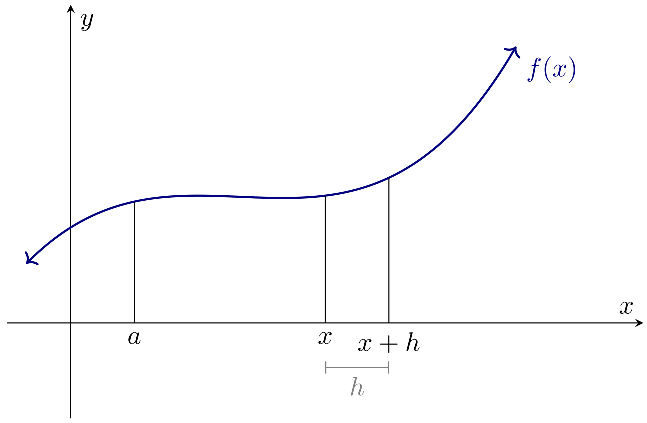
De hecho, lo que indica el teorema es que la integral y la derivada son funciones inversas.

Teorema 15. Teorema Fundamental del Cálculo, primera parte

Si f es continua en $[a, b]$, entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Lo que quiere decir el teorema es que si se tiene una función f y primero se integra hasta un valor x y luego el resultado se deriva, se vuelve a obtener $f(x)$.



Si se calcula la derivada por definición, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot f(x)}{\cancel{h}}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Al restar las integrales queda el área bajo la curva de la función f entre x y $x+h$, que se puede aproximar como un rectángulo de base h y altura $f(x)$.

Teorema 16. Teorema Fundamental del Cálculo, segunda parte

Si f es continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de f, esto es, una función tal que $F' = f$.

Lo que quiere decir que si se conoce una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Ejemplo 242.

Determine la derivada de $f(x) = \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen} t\, dt$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 243.

Determine la derivada de $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^3} t^2\,dt$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^3} t^2\,dt \\ &= (x^3)^2 \cdot [x^3]' \\ &= x^6 \cdot 3x^2 \\ &= 3x^8 \end{aligned}$$

Ejemplo 244.

Determine la derivada de $h(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{5} \arctan t\,dt$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{5} \arctan t\,dt \\ &= -\frac{d}{dx}\int_{5}^{x^2} \arctan t\,dt \\ &= -\arctan(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

Ejemplo 245.

Determine la derivada de $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{3x^2} e^{-t^2}\,dt$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{x}^{3x^2} e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{3x^2} e^{-t^2}\,dt - \int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt\right) \\ &= e^{-(3x^2)^2} \cdot 6x - e^{-x^2} \\ &= 6xe^{-9x^4} - e^{-x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 246.

Si f es una función integrable, determine f y a de modo que se cumpla que

$$2 - \int_a^x f(t)\,dt = x^2 - x$$

Al derivar a ambos lados se obtiene

$$-f(x) = 2x - 1 \implies f(x) = -2x + 1$$

Ahora se realiza el cálculo de la integral con esta función para determinar el valor de a.

$$\begin{aligned} 2 - \int_a^x (-2x+1)\,dt = x^2 - x &\implies 2 - (-x^2 + x)\big|_a^x = x^2 - x \\ &\implies 2 + x^2 - x - a^2 + a = x^2 - x \\ &\implies -a^2 + a + 2 = 0 \\ &\implies a = -1 \vee a = 2 \end{aligned}$$

Por lo que $f(x) = -2x + 1$ y $a = -1$ ó $a = 2$

Ejemplo 247.

Calcule $\displaystyle\int_1^4 x^2\,dx$

$$\begin{aligned} \int_1^4 x^2\,dx &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 \\ &= \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= 21 \end{aligned}$$

Ejemplo 248.

Calcule $\displaystyle\int_1^3 16 - x^2\,dx$

$$\begin{aligned} \int_1^3 16 - x^2\,dx &= 16x - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 \\ &= 16 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(16 - \frac{1^3}{3}\right) \\ &= \frac{70}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 249.

Calcule $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|\Big|_3^5\\ &= \ln 5 - \ln 3\end{aligned}$$

Ejemplo 250.

Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx &= -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= -\cos\pi + \cos(-\pi)\\ &= 0\end{aligned}$$

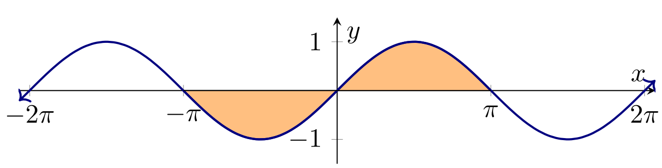
Ejemplo 251.

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^x\,dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} e^x\,dx &= e^x\Big|_{-1}^{3}\\ &= e^3 - e^{-1}\end{aligned}$$

Ejemplo 252.

Observe que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$, esto no representa el área bajo la curva de la función, encuentre el valor de esta área.



$$A = -\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x\big|_{-\pi}^{0} - \cos x\big|_{0}^{\pi} \\
&= \cos 0 - \cos(-\pi) - \cos \pi + \cos 0 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Ejemplo 253.

¿Dónde está el error en el siguiente cálculo?

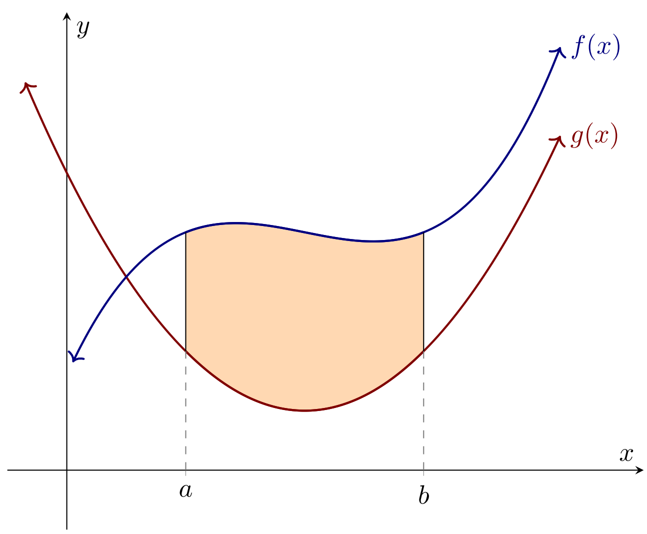
$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

El error está en que la función NO es continua, el teorema fundamental del cálculo no se puede utilizar.

6.3. Aplicaciones de la integral

6.3.1. Área entre curvas

Suponga que se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se quiere encontrar el área comprendida entre estas curvas desde $x = a$ hasta $x = b$.



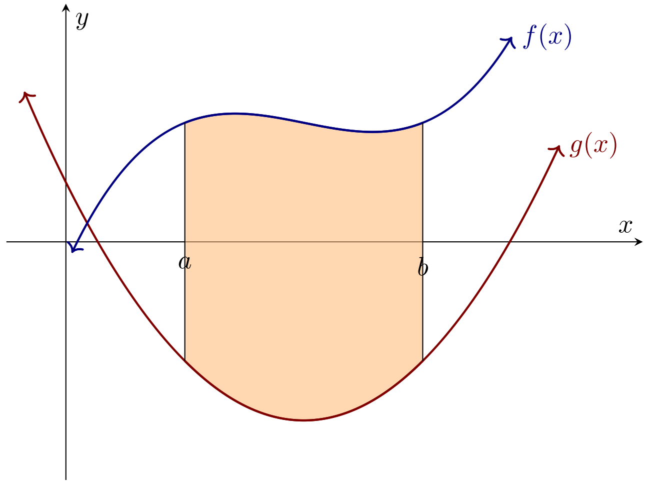
Se obtiene que el área es

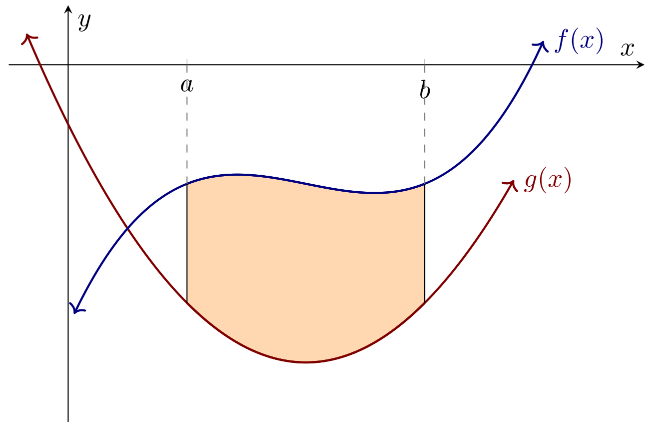
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

siempre y cuando f y g sean continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

En otras palabras, se debe encontrar la integral de la función mayor menos la función menor.

Note que no hay problema si alguna (o ambas) de las funciones es negativa (se encuentra debajo del eje y), la fórmula sigue funcionando igual.

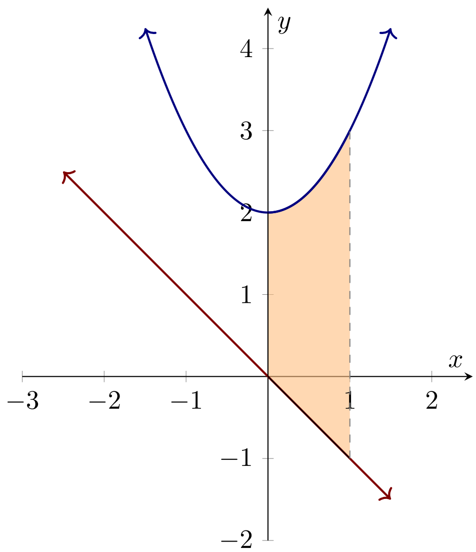




Ejemplo 254.

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura



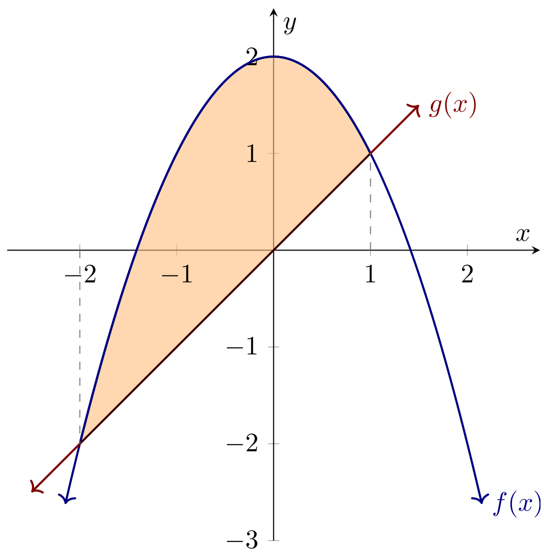
$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x^2 + 2 + x)\, dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Ejemplo 255.

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$, y $g(x) = x$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$2 - x^2 = x \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1 \text{ ó } x = -2$$



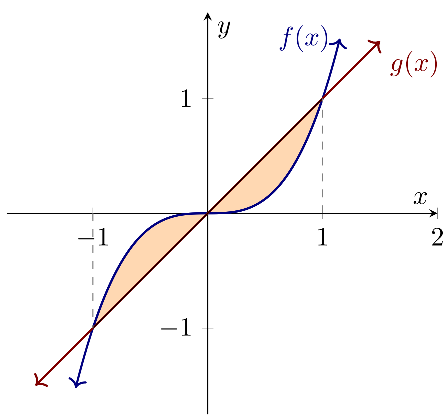
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx \\
&= 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{1} \\
&= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 256.

Calcule el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$x^3 = x \implies x^3 - x = 0 \implies x(x^2 - 1) = 0 \implies x(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1$$



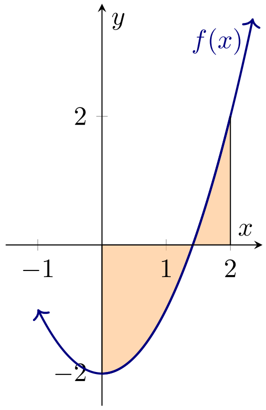
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\bigg|_{0}^{1} \\
&= 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 257.

Hallar el área que forma la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2$ con el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 2$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de la curva con el eje x son

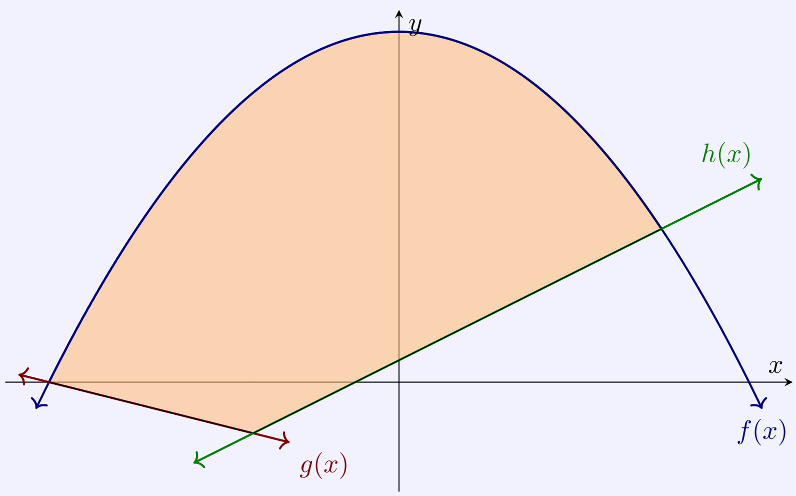
$$x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$$



$$A = \int_0^{\sqrt{2}} (0 - x^2 + 2)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2 - 2 - 0)\,dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} + 2x\Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3} - 2x\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{\sqrt{2}^3}{3} + 2\sqrt{2}$$
$$= 2{,}438$$

Ejemplo 258.

Calcule el área sombreada, donde $f(x) = 16 - x^2$, $g(x) = -x - 4$ y $h(x) = 2x + 1$.



Intersecciones:

- $-x^2 + 16 = -x - 4 \implies -x^2 + x + 20 = 0 \implies x = 5$ ó $x = -4$
- $-x^2 + 16 = 2x + 1 \implies -x^2 - 2x + 15 = 0 \implies x = -5$ ó $x = 3$
- $-x - 4 = 2x + 1 \implies x = \dfrac{-5}{3}$

Así

$$A = \int_{-4}^{\frac{-5}{3}} (-x^2 + 16 - (-x - 4))\,dx + \int_{\frac{-5}{3}}^{3} (-x^2 + 16 - 2x - 1)\,dx$$
$$= \int_{-4}^{\frac{-5}{3}} (-x^2 + x + 20)\,dx + \int_{\frac{-5}{3}}^{3} (-x^2 - 2x + 15)\,dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 20x\Big|_{-4}^{\frac{-5}{3}} + -\frac{x^3}{3} - x^2 + 15x\Big|_{\frac{-5}{3}}^{3}$$

$$= -\frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^2}{2} + 20\cdot\frac{-5}{3} + \frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 20\cdot -4 - \frac{3^3}{3} - 3^2 + 15\cdot 3 + \frac{\left(\frac{-5}{3}\right)^3}{3}$$
$$+ \left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 15\cdot\frac{-5}{3}$$
$$= \frac{147}{2} = 73{,}5$$

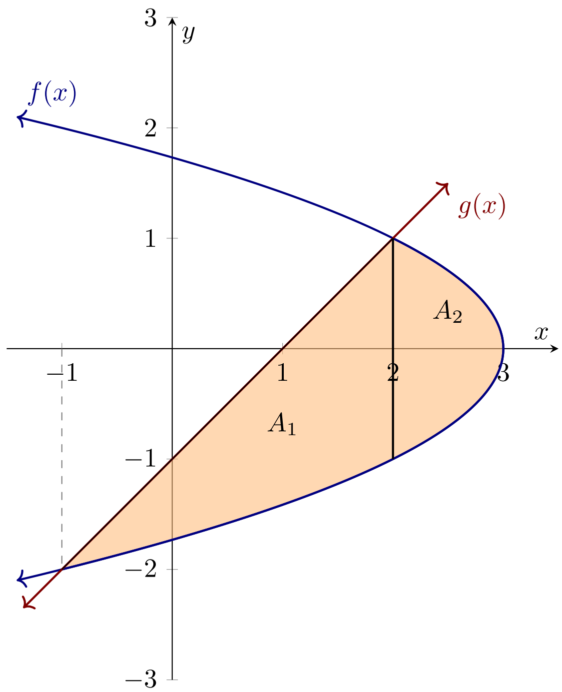
†

Ejemplo 259.

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $y = x - 1$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas son

$$\pm\sqrt{3-x} = x - 1 \implies 3 - x = x^2 - 2x + 1 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = 2 \text{ ó } x = -1$$

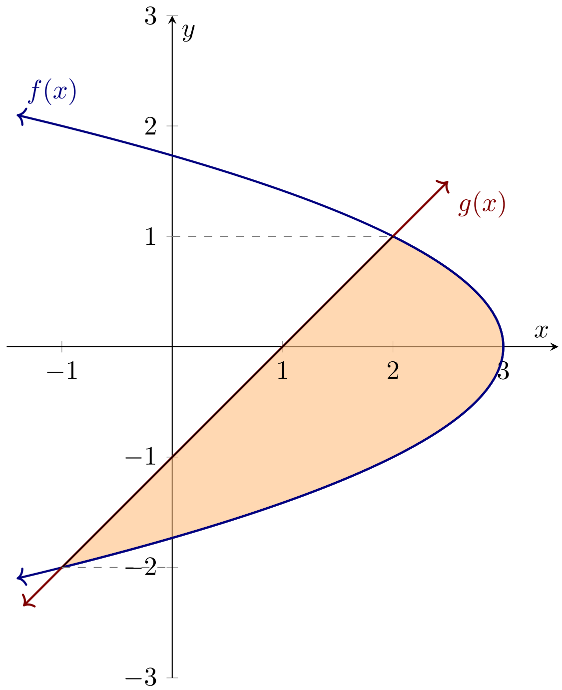


$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left(x - 1 + \sqrt{3-x}\right)\, dx \\ &\quad + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}\right)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{4(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{2}^{3} \\ &= 2 - 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{16}{3} - 0 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Sin embargo, esta área se puede calcular de manera más sencilla si se toma con respecto a y.

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas en y son

$$3 - y^2 = y - 1 \implies y^2 + y - 2 = 0 \implies y = 1 \text{ ó } y = -2$$



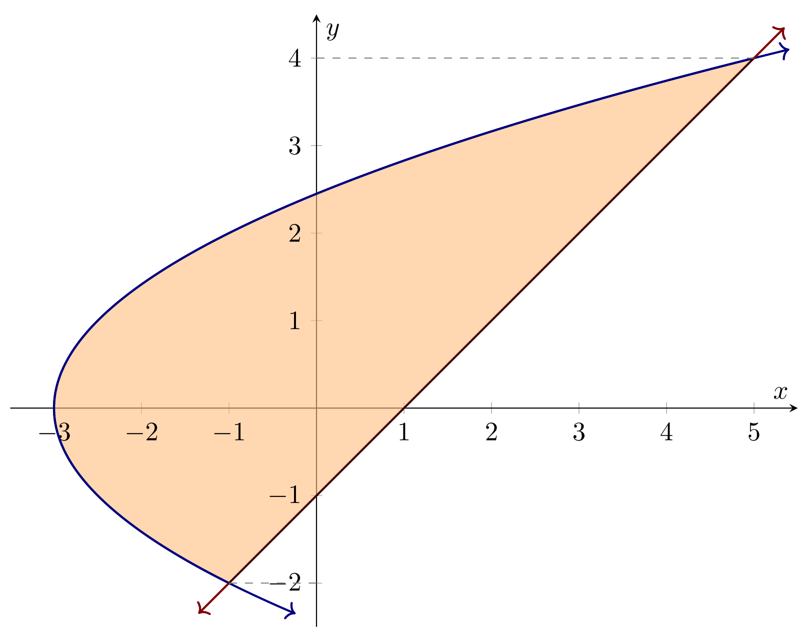
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} (3 - y^2 - y - 1)\, dy \\
&= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy \\
&= -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \Big|_{-2}^{1} \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 260.

Determine el área encerrada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$

La región encerrada por las curvas se muestra en la figura, las intersecciones de las curvas en y son

$$
y + 1 = \frac{y^2 - 6}{2} \implies y^2 - 2y - 8 = 0 \implies y = -2 \text{ ó } y = 4
$$

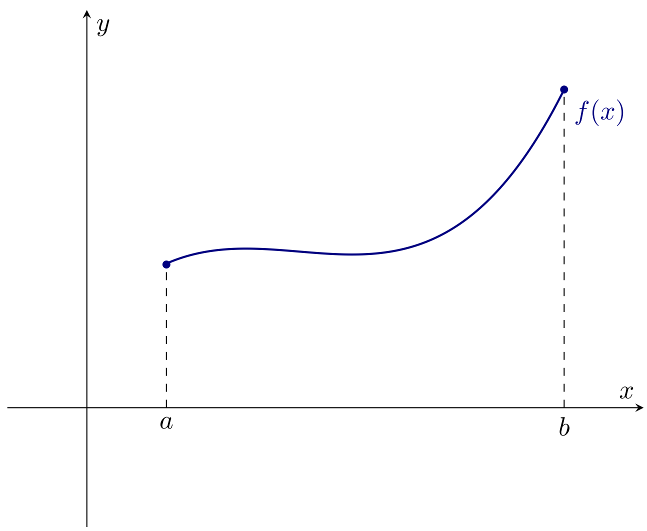


$$
A = \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 6}{2} \right) dy
$$

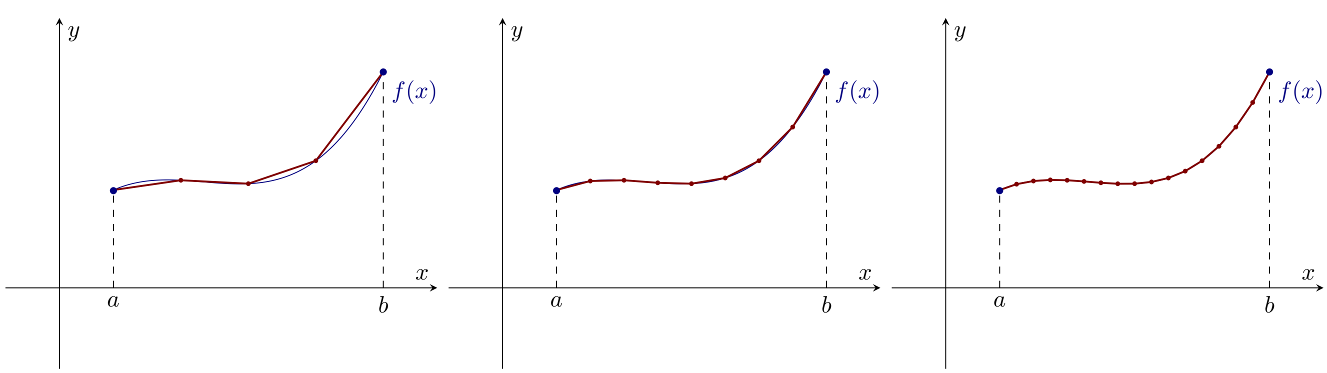
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-y^2+2y+8\right)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-y^3}{3}+y^2+8y\right)\Big|_{-2}^{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-4^3}{3}+4^2+8\cdot 4\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-(-2)^3}{3}+(-2)^2+8\cdot -2\right)$$
$$= \frac{40}{3}+\frac{14}{3}=18$$

6.3.2. Longitud de curva

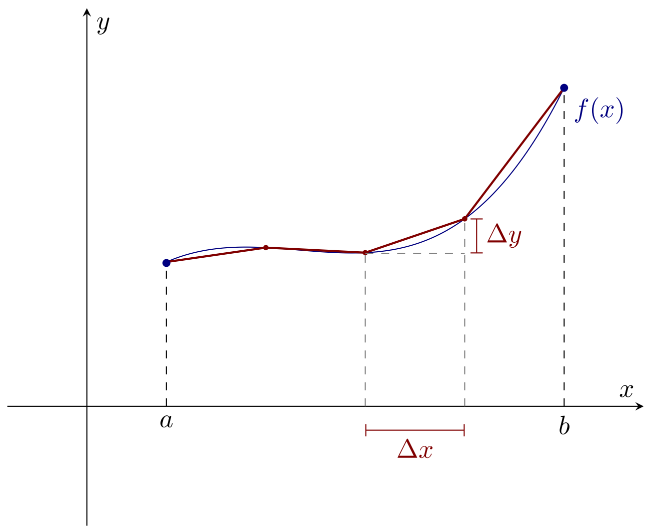
Suponga que se quiere calcular la longitud de una curva que está dada por una función f en un intervalo $[a,b]$.



Al igual que se hizo con el área bajo la curva, se puede iniciar con una aproximación tomando algunos segmentos, al inicio puede estar muy alejada del valor real, pero esa aproximación mejorará conforme se tome una mayor cantidad de segmentos.



Analicemos cómo calcular la distancia de cada uno de estos segmentos.



Si se toma la distancia entre cada segmento en el eje x como Δx (al igual que en las sumas de Riemann, este depende de la cantidad de segmentos que se quieran, en general, si son n segmentos entonces $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$) y la diferencia de las y en ese intervalo como Δy (que se aproximará con el diferencial dy cuando $\Delta x \to 0$), entonces la longitud del segmento es $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Ahora se suman todos los segmentos y se hace que $\Delta x \to 0$, recuerde que $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx
\end{aligned}$$

Nota: Por simplicidad acá se evitó el contador de la suma, en realidad debería ser $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}$, donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $\Delta y_i = f(a + (i+1) \cdot \Delta x) - f(a + i \cdot \Delta x)$.

Ejemplo 261.

Determine la longitud de la curva definida por la función $f(x) = x^2$ de $x = 0$ a $x = 2$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx & 2x &= \tan\theta \\
&= \int_0^{\arctan 4} \sqrt{1 + \tan^2\theta} \cdot \frac{\sec^2\theta}{2} d\theta & 2dx &= \sec^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\arctan 4} \frac{\sec^3\theta}{2} d\theta
\end{aligned}$$

En el ejemplo 220 se había encontrado que:

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\arctan 4} \frac{\sec^3\theta}{2} d\theta &= \left.\frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{4}\right|_0^{\arctan 4} \\
&= \frac{4\sec(\arctan 4) + \ln|\sec(\arctan 4) + 4|}{4} \\
&\approx 4{,}646784
\end{aligned}$$

Ejemplo 262.

Determine la longitud de la curva definida por la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ de $x = 4$ a $x = 9$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_4^9 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx \\
&= \int_4^9 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx && u^2 = 1 + \frac{9}{4}x \\
&= \frac{8}{9}\int_{\sqrt{10}}^{\frac{\sqrt{85}}{2}} u^2\, du && 2u\, du = \frac{9}{4}dx \\
&= \left.\frac{8}{27}u^3\right|_{\sqrt{10}}^{\frac{\sqrt{85}}{2}} \\
&= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^3 - \left(\sqrt{10}\right)^3\right) \\
&\approx 19{,}65478
\end{aligned}$$

6.3.3. Trabajo efectuado por una fuerza

De Física se sabe que el trabajo es igual a la fuerza por el desplazamiento ($W = F \cdot d$), en esta fórmula se parte que la fuerza es constante a lo largo de todo el desplazamiento del objeto. Sin embargo, ¿qué sucede si la fuerza varía?

Suponga que la fuerza está dada por una función que depende de la posición del objeto $F(x)$, para aproximar el trabajo efectuado se podría dividir el desplazamiento en n partes iguales, calcular el trabajo en cada una de esas partes y luego sumarlas todas. La aproximación mejorará entre mayor sea la cantidad de divisiones que se realicen, esto es exactamente lo que se hizo en sumas de Riemann.

Por tanto, se divide el desplazamiento x en n partes iguales, cada una se denotará Δx y se tomará un punto x_i^* de cada subintervalo, de esta forma, el trabajo en cada uno de los segmentos es $F(x_i^*)\Delta x$ y al sumarlos se tendría una aproximación del trabajo

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x$$

Para obtener el trabajo exacto se hace que la n tienda a infinito (se introducen una cantidad infinita de subdivisiones del desplazamiento).

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)dx$$

En el sistema internacional de medidas, el trabajo se mide en Joules (J).

Ejemplo 263.

Una partícula se desplaza por el eje x, a la partícula se le aplica una fuerza dada por $F(x) = x^2 + 5x$ que depende de la distancia de la partícula al origen (x), determine el trabajo que se efectúa sobre la partícula para moverla desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 (x^2 + 5x)dx \\ &= \left.\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right|_1^2 \\ &= \frac{8}{3} + 10 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} \\ &= \frac{59}{6} \approx 9{,}833J \end{aligned}$$

†

La ley de Hooke indica que la fuerza necesaria para estirar un resorte es proporcional a la longitud desplazada, es decir, entre menos se estire el resorte se necesita menor fuerza y entre más se estire el resorte se necesitará mayor fuerza. Si F es la fuerza y x la longitud, entonces esto se expresa como

$$F(x) = -kx$$

Donde k se conoce como la constante del resorte y es una característica propia de cada resorte (cada resorte posee un valor para k).

Ejemplo 264.

En estado natural se tiene que un resorte presenta una longitud de $15cm$ y se requiere una fuerza de $30N$ para mantenerlo a $15cm$ ($5cm$ más que su posición natural). ¿Cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte de $15cm$ a $21cm$?

Primero se debe encontrar la constante del resorte, note que se requieren $30N$ para estirar el resorte $5cm = 0{,}05m$ (de $10cm$ a $15cm$, se debe pasar a metros pues los Newtons se calculan en kilogramos por metro entre segundo).

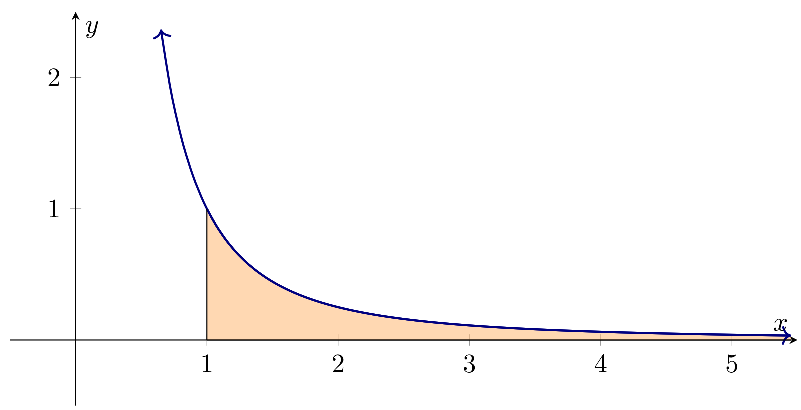
$$\begin{aligned} F(5) = -0{,}05k &\implies 30 = -0{,}05k \\ &\implies k = -600 \end{aligned}$$

Por lo que $F(x) = 600x$, ahora se calculará el trabajo que se requiere para mover el resorte de $15cm$ a $21cm$, esto es, estirar el resorte de $0{,}05m$ a $0{,}11m$.

$$\begin{aligned} W &= \int_{0{,}05}^{0{,}11} 600x\,dx \\ &= 300x^2\Big|_{0{,}05}^{0{,}11} \\ &= 300\cdot(0{,}11^2 - 0{,}05^2) \\ &= \frac{72}{25} = 2{,}88J \end{aligned}$$

6.4. Integrales impropias

Suponga que se quiere calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ de 1 en adelante.



Esta área es $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Pero para calcular esto se debe expresar la integral como

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{-1}{x^2}dx &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} + \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Este es el procedimiento que se debe seguir al calcular integrales al infinito, así :

1. Si f es continua en $[a,\infty[$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

2. Si f es continua en el intervalo $]-\infty, b]$ entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $]-\infty,\infty[$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

   donde c es cualquier número real.

Las anteriores se conocen como Integrales Impropias de Primera Especie. Si el límite existe, se dice que la integral converge, de lo contrario la integral diverge.

Ejemplo 265.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_{1}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(1)) \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln(b) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

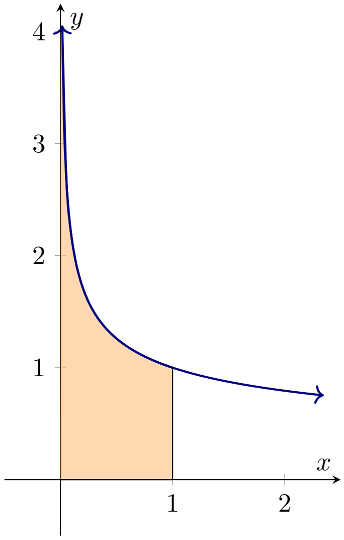
Ejemplo 266.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que la integral converge a 1. †

Ahora suponga que se quiere encontrar $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$, el problema es que la función $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ no está definida en cero.



$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx\\ &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 x^{\frac{-1}{3}}\,dx\\ &= \lim_{a\to 0+} \left.\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\right|_a^1\\ &= \lim_{a\to 0+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2}\right)\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Este procedimiento se va a realizar para los casos en donde hayan asíntotas verticales (discontinuidades infinitas).

Así:

1. Si f es continua en $[a, b[$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

2. Si f es continua en $]a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

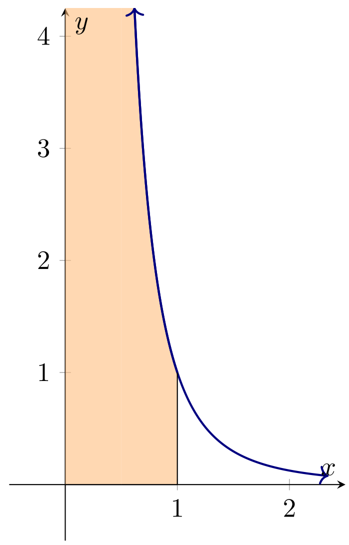
3. Si f es continua a $[a, b]$ excepto en algún c en $]a, b[$ en el cual f tiene una discontinuidad infinita, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Estas se conocen como Integrales Impropias de Segunda Especie e, igual que en el caso anterior, se dice que converge si el límite existe y que diverge si no existe.

Ejemplo 267.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

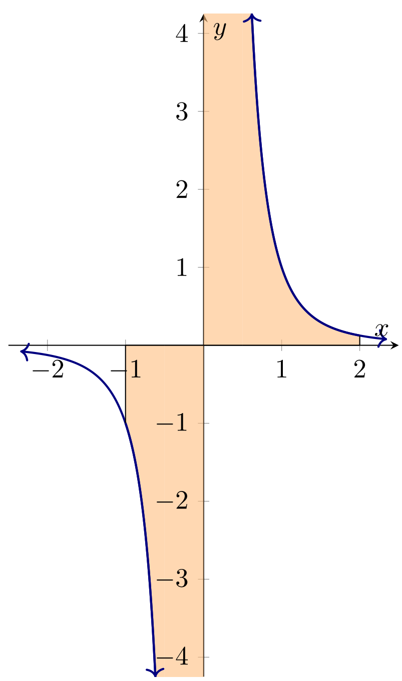


$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^3}\,dx\\ &= \lim_{a\to 0+} \left.\frac{-x^{-}2}{2}\right|_a^1\\ &= \lim_{a\to 0+} \frac{-1}{2} + \frac{1}{2a^2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Por lo que la integral diverge.

Ejemplo 268.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.



$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Pero ya se sabe que la segunda integral diverge por lo que la integral diverge.

†

Si en una integral se presentan los dos casos (un límite de integración es infinito y el otro es donde se tiene una asíntota vertical) entonces se conoce como una Integral Impropia de Tercera Especie, la integral se separa de forma tal que se presente un tipo de integral por cada una y se resuelve cada una. Si alguna diverge entonces se dice que la integral diverge, sino entonces se dice que converge.

Ejemplo 269.

Determine si la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ es convergente o divergente, en caso de que converja indique el valor al que converge.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \\
&= \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0+} \int_a^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx + \lim_{b\to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx
\end{aligned}$$

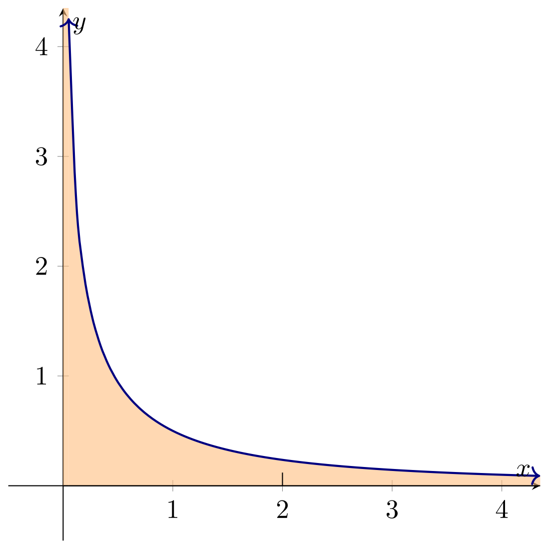
Ahora

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx && \text{Sea } u^2 = x \\
&= \int \frac{2u}{u(u^2+1)}\,du && 2u\,du = dx \\
&= 2\int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= 2\arctan u \\
&= 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 0+} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big|_a^1 + \lim_{b\to +\infty} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big|_1^b \\
&= \lim_{a\to 0+} \left(2\arctan\left(\sqrt{1}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{a}\right)\right) + \lim_{b\to +\infty} \left(2\arctan\left(\sqrt{b}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{1}\right)\right) \\
&= 2\arctan(1) - 2\arctan(0) + 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\arctan(1) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Por lo que la integral converge a π.



6.4.1. Criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie

Existen varios criterios para decidir si una integral impropia converge o diverge, en esta sección sólo se trabajará el criterio de comparación para las integrales impropias de primera especie.

Teorema 17.

Si $f(x) \geqslant 0$ y $g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$ entonces:

- Si $g(x) \geqslant f(x)$ para $x \geqslant a$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge.
- Si $g(x) \leqslant f(x)$ para $x \geqslant a$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

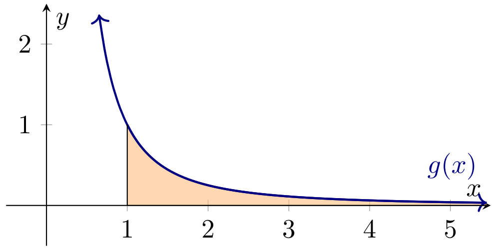
Nota: Se puede plantear el Teorema equivalente cuando se tiene $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ o hacer el cambio $u = -x$.

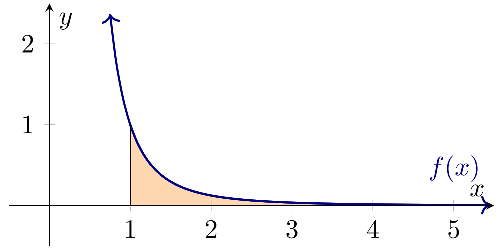
Ejemplo 270.

Analice la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$, recordando que en la sección anterior se encontró que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge a 1.

Se cumple que $\dfrac{1}{x^2} \geqslant \dfrac{1}{x^3}$, para $x \geqslant 1$ y como la integral de la función mayor converge, entonces la de la menor también.

Si $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ a continuación se muestran ambas gráficas, si g es mayor entonces encierra un área mayor y si esa área converge entonces la de f que es menor, también debe converger.



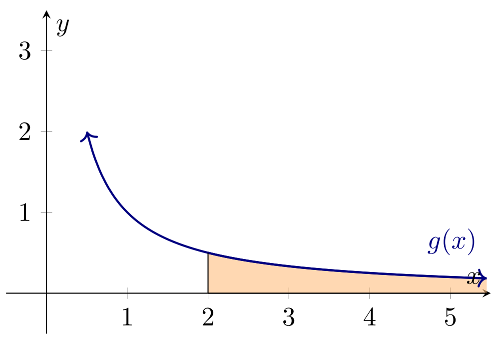


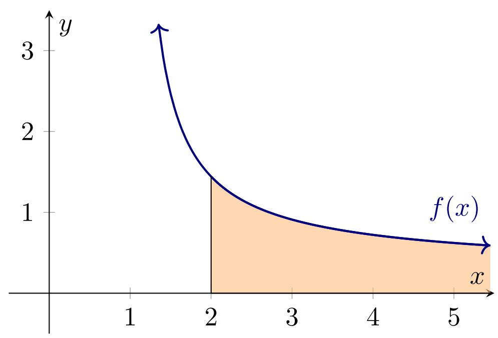
Ejemplo 271.

Analice la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\ln x}dx$, recordando que en la sección anterior se encontró que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge.

Se cumple que $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\ln x}$ para $x \geqslant 1$ y como la integral de la función menor diverge, entonces la de la mayor también.

Si $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ a continuación se muestran ambas gráficas, si g es menor entonces encierra un área más pequeña y si esa área diverge entonces la de f que es mayor, también debe diverger.





Bibliografía

[1] Edwards y Penney. (1989). Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall. Editorial Hispanoamericana.

[2] Larson, Hostetler y Edwards (1999). Cálculo, Volumen 1, 6ta. ed. McGrawhHill.

[3] Stewart, J. (1999) Cálculo de una variable, 4ta edición.

[4] Zill, Dennis G (1987) Cálculo con geometría analítica, Grupo Editorial Iberoamérica.