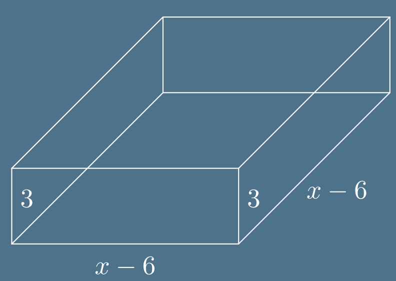
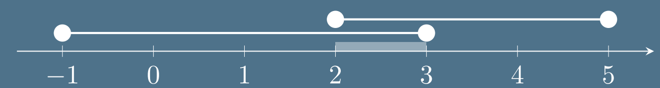
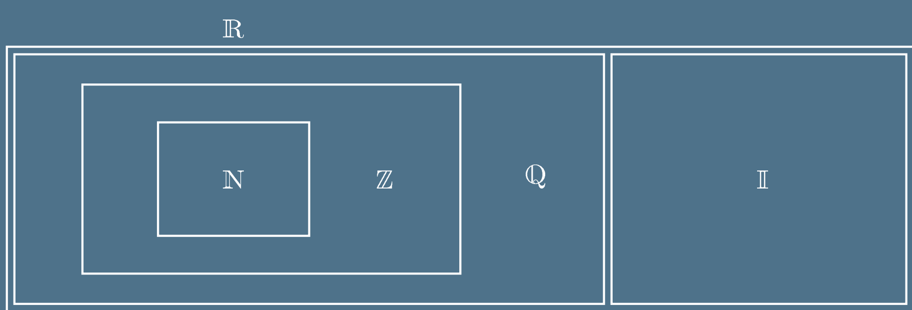
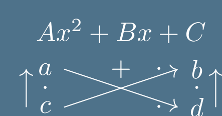
Fundamentos de Matemática I

Material para el curso
con un enfoque
axiomático formal









M.Sc. Alexander Borbón Alpízar

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

2024

Fundamentos de matemática I

Material para el curso con un enfoque axiomático formal

Alexander Borbón Alpízar
aborbon@itcr.ac.cr

Octubre, 2024

Prólogo

En este material se busca mostrar de una manera completa y accesible la teoría que se desarrolla en el curso de Fundamentos de Matemática I que se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica para la carrera de Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos, se busca mostrar un enfoque axiomático formal de los números reales, junto con una serie de ejemplos representativos sobre cada tema.

Fundamentos de Matemática I es el primer curso que deben matricular los estudiantes de Enseñanza de la Matemática al ingresar a la universidad, en él se estudian los conceptos básicos de números reales, números complejos, expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones. El enfoque principal del libro es el axiomático, de donde se parte para construir los demás teoremas y resultados, sin embargo, también se presentan ejemplos prácticos para cada uno de los temas que se desarrollan.

Para los temas de Ecuaciones e Inecuaciones se presentan algunas aplicaciones prácticas para la resolución de problemas. De esta manera, se le desea hacer llegar a los nuevos estudiantes una obra clara y concisa para el abordaje del curso con el material necesario para enfrentarse a los temas mencionados.

Siempre se recomienda complementar este texto con la práctica que se ofrece del curso, la cual profundiza aún más en ejercicios que no son posibles de abarcar en el documento.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se estudiarán algunos conceptos preliminares sobre lógica, términos y métodos de demostración, será necesario conocerlos para poder formalizar la teoría que se presentará en los siguientes capítulos.

1.1. Lógica

La lógica es muy importante en matemáticas, esta muestra las reglas básicas que se dan al realizar proposiciones y cómo utilizar conectivas lógicas para combinarlas, además de mostrarnos la manera de demostrar que una proposición se cumple.

1.1.1. Proposiciones

Definición 1. Proposición

Una proposición es una afirmación a la que se le puede dar uno y sólo un valor de verdad: verdadero (V) o falso (F).

Las proposiciones usualmente se denotan con letras mayúsculas: P, Q, R, etc. y cumplen con las siguientes características o principios:

1. Principio de identidad: El valor de verdad de la proposición no puede variar, así, si una proposición es verdadera, entonces siempre será verdadera y si es falsa, entonces siempre será falsa.
2. Principio de no contradicción: Una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo.
3. Principio del tercero excluido: No existe una tercera posibilidad para una proposición, es decir, sólo puede ser verdadera o falsa.

Ejemplo 1.

Las siguientes son proposiciones:

1. P: El número 2 es un número par.
2. Q: Todo número elevado al cuadrado es impar.
3. R: En Marte viven panteras rosas.
4. S: Los elefantes pesan más que los ratones.
5. T: $3 > 5$

Tal como se mencionó, las proposiciones tienen un valor de verdad, es decir, son verdaderas o falsas.

Ejemplo 2.

Las proposiciones del Ejemplo 1 anterior cumplen que:

1. P es verdadera ($P \equiv V$)
2. Q es falsa ($Q \equiv F$).
3. R es falsa ($R \equiv F$).
4. S es verdadera ($P \equiv V$).
5. T es falsa ($T \equiv F$).

El símbolo "$\equiv$" se lee "equivalente" y muestra que las dos proposiciones son equivalentes, esto es, que tienen el mismo valor de verdad.

1.1.2. Conectivas lógicas

A partir de las proposiciones sencillas se pueden construir proposiciones más complejas por medio de las conectivas lógicas: negación, conjunción, disyunción, implicación y doble implicación.

Negación

La negación de la proposición P se denota $\neg P$ y se lee "no P" o "No es cierto P" y posee la siguiente como tabla de verdad.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ejemplo 3.

Si se tiene la proposición

P: El 3 es un número primo.

entonces

$\neg P$: El 3 no es un número primo.

Note que $P \equiv V$ y que $\neg P \equiv F$

Nota: Otra forma de leer la negación es: "No es cierto que el 3 es un número primo".

Ejemplo 4.

Si se tiene la proposición

Q: El Campus Central del TEC queda en San José.

entonces

$\neg Q$: El Campus Central del TEC no queda en San José.

Note que $Q \equiv F$ y que $\neg Q \equiv V$

Conjunción

La conjunción[1] lógica de dos proposiciones P y Q se denota $P \wedge Q$ y se lee "P y Q", se conoce como el "Y lógico" y posee la siguiente como tabla de verdad.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 5.

Si se tienen las proposiciones

P: El 5 es un número impar.

Q: El 3 es menor que el 7.

entonces

$P \wedge Q$: El 5 es un número impar y el 3 es menor que el 7.

Note que $P \equiv V$ y que $Q \equiv V$, por lo tanto $P \wedge Q \equiv V$

[1] Del latín *coniunctĭo*, *coniunctĭōnis*, que significaba unión, relación, unión conjunta de las partes, acción y efecto de unirse dos o más cosas.

Ejemplo 6.

Si se tienen las proposiciones

P: Las piedras están conformadas por agua.

Q: El agua es necesaria para la vida.

entonces

$P \wedge Q$: Las piedras están conformadas por agua y el agua es necesaria para la vida.

Note que $P \equiv F$ y que $Q \equiv V$, por lo tanto $P \wedge Q \equiv F$

Disyunción

La disyunción[2] lógica de dos proposiciones P y Q se denota $P \vee Q$ y se lee "P o Q", se conoce como el "O lógico" y posee la siguiente como tabla de verdad.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 7.

Si se tienen las proposiciones

P: El 6 es divisible por 3.

Q: El 6 es menor que el 2.

entonces

$P \vee Q$: El 6 es divisible por 3 o el 6 es menor que el 2.

Note que $P \equiv V$ y que $Q \equiv F$, por lo tanto $P \vee Q \equiv V$

La disyunción a veces se tiende a confundir al utilizar el lenguaje común, pues al utilizar el "o" en una conversación usualmente no se permite que se cumplan ambas proposiciones al mismo tiempo, así por ejemplo, si se afirma "Hoy voy al cine o duermo temprano" se entiende que voy a realizar una actividad o la otra, sin que se permitan ambas, en lógica este comportamiento se llama una "disyunción exclusiva" o un "o exclusivo", se denota por $\veebar$ y su tabla de verdad es:

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

[2] Del latín *disiunctĭo*, *disiunctĭōnis* que significa separar o desunir.

Ejemplo 8.

Si se tienen las proposiciones

P: El 12 es mayor que el 6.

Q: El 7 es un número primo.

entonces

$P \veebar Q$: O el 12 es mayor que el 6 o el 7 es un número primo, pero no ambos.

Note que $P \equiv V$ y que $Q \equiv V$, por lo tanto $P \veebar Q \equiv F$

Implicación

La implicación[3] de la proposiciones P a Q se denota $P \to Q$ y se lee "P implica a Q" o "Si ocurre P entonces va a ocurrir Q", posee la siguiente como tabla de verdad.

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 9.

Si se tienen las proposiciones

P: Hoy es mi cumpleaños.

Q: Hoy comeré pastel.

entonces

$P \to Q$: Si hoy es mi cumpleaños entonces hoy comeré pastel.

Suponga que hoy efectivamente es mi cumpleaños y que sí voy a comer pastel, es decir, que estoy diciendo algo cierto, así, $P \equiv V$ y que $Q \equiv V$, por lo tanto $P \to Q \equiv V$.

Si por el contrario, hoy es mi cumpleaños, pero no comeré pastel entonces estaría diciendo algo falso, es decir, $P \equiv V$ y $Q \equiv F$, por lo tanto $P \to Q \equiv F$.

Si por otro lado, hoy no es mi cumpleaños, entonces no importa si comeré pastel o no, de igual forma sería una proposición verdadera. $P \equiv F$, por lo tanto $P \to Q \equiv V$.

En las demostraciones matemáticas siempre se parte de una proposición verdadera, en esos casos se dice que se utiliza una "implicación tautológica" y se utiliza el símbolo $\Rightarrow$ en vez de $\to$, así, la proposición $P \Rightarrow Q$ se lee "Si P es verdadero, entonces se cumple Q". En este caso, si se parte de algo verdadero, según la tabla de verdad. sólo se puede llegar a algo verdadero para que la implicación sea verdadera.

Note que, por otro lado, si en la implicación se parte de algo falso, entonces se puede llegar a algo

[3] Repercusión o consecuencia de algo. Real Academia Española.

falso o verdadero, por esto al resolver ejercicios a veces se pueden seguir procedimientos errados y aún así llegar a la respuesta correcta, lo cual no significa que el ejercicio se haya resuelto bien; por esto no se puede partir de un resultado falso o aplicar un resultado falso para una demostración o un procedimiento.

Ejemplo 10.

En este ejemplo se mostrará que se puede partir de algo falso para llegar a algo verdadero:

$-1 = 1$	Claramente esto es falso.
$(-1)^2 = (1)^2$	Se eleva al cuadrado a ambos lados.
$1 = 1$	Se llega a una afirmación verdadera.

Doble implicación

La doble implicación de la proposiciones P y Q se denota $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y sólo si Q", posee la siguiente como tabla de verdad.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esto es, que P y Q son equivalentes, es decir, que una es verdadera cuando la otra también lo es y que una es falsa cuando la otra también es falsa. Así, si se pide verificar que una proposición P es equivalente a una proposición Q, se debe demostrar que $P \leftrightarrow Q$.

Se cumple que $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, es decir, la doble implicación es equivalente a que se cumpla la implicación en ambas direcciones.

Otra manera en que se puede leer es "P es necesario y suficiente para Q", así P es necesaria para que se cumpla Q (Q no puede ser verdadera a menos que P sea verdadera) y es suficiente (no se necesita ninguna otra condición, cuando sea que ocurra A entonces B ocurrirá).

Ejemplo 11.

Si se dice

Tener cédula de identidad es necesario y suficiente para tener 18 años.

se quiere indicar que el tener 18 años y tener cédula de identidad son equivalentes, se necesita de una para que se cumpla la otra y es suficiente con una para que la otra sea cierta.

En lenguaje natural es un poco difícil encontrar ejemplos concretos, pues se sabe que una persona podría cumplir los 18 años sin sacar su cédula de identidad.

En una demostración se parte de algo verdadero para llegar a una conclusión también verdadera ($P \Rightarrow Q$), si se verifica además que es válida en la dirección contraria ($Q \Rightarrow P$) entonces se puede escribir que se cumple una doble implicación tautológica ($P \Leftrightarrow Q$), lo que indicaría que el resultado se cumple en ambas direcciones.

Tablas de verdad de proposiciones complejas

Definición 2. Tautología, falacia y contingencia

Se dice que una proposición compleja es una *tautología* si su tabla de verdad siempre es verdadera.

Se dice que una proposición compleja es una *falacia* si su tabla de verdad siempre es falsa.

Si una proposición compleja no es tautología ni falacia, entonces se dice que es una *contingencia* o *eventualidad*.

Si $P \to Q$ es una tautología entonces se acostumbra decir que P *implica tautológicamente* a Q y se escribe $P \Rightarrow Q$. De la misma forma, si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología entonces se acostumbra decir que P es *tautológicamente equivalente* a Q y se escribe $P \Leftrightarrow Q$ o $P \equiv Q$, esto pues P y Q poseen la misma tabla de verdad.

Ejemplo 12.

Realice la tabla de verdad para la proposición $(P \wedge \neg Q) \to (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \wedge \neg Q) \to (\neg P \vee Q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

†

Ejemplo 13.

Una falacia muy simple de probar es $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

†

Ejemplo 14.

Verifique mediante una tabla de verdad que $P \to Q$ es tautológicamente equivalente a $\neg P \vee Q$

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Nota: Otra manera de escribir el enunciado de este ejercicio es:

Verifique que $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ o que $(P \to Q) \equiv (\neg P \vee Q)$. †

Ejemplo 15.

Verifique que $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es decir $(P \to Q) \equiv (\neg Q \to \neg P)$. †

1.2. Conceptos importantes

En matemática se utilizan una serie de conceptos que es importante conocer, a continuación se definen los más usuales:

Definición 3. Axioma

Un *axioma* es una proposición que se asume que es cierta (no hace falta demostrarlo).

Los axiomas son las proposiciones básicas, a partir de las cuales, se construye el resto de la teoría matemática, a veces se consideran como "evidentes", aunque en la historia el cambio de alguno de esos axiomas por otro que se consideraba falso ha llevado al desarrollo de teorías matemáticas nuevas y, gracias a ello, se ha encontrado aplicaciones que no se tenían con la teoría anterior.

Ejemplo 16.

Dos de los axiomas más básicos que se conocen en las ciencias (incluyendo matemática) son el axioma de identidad y el de sustitución, estos se van a necesitar a lo largo del curso, por lo que se enuncian a continuación.

Axioma 1. Axioma de identidad

Para cualquier objeto a, se cumple que $a = a$.

En matemáticas este primer axioma se conoce como la propiedad reflexiva de la igualdad.

Axioma 2. Axioma de sustitución

Si $a = b$ entonces a puede ser sustituido por b en cualquier proposición que contenga a a, sin alterar la validez de dicha proposición.

Definición 4. Postulado

Un *postulado* es una proposición que se asume que es cierta (no hace falta demostrarlo) para una ciencia en particular.

Los axiomas y los postulados se pueden ver como sinónimos, en este texto lo hacemos así, sin embargo, a veces se hace la diferencia en que los axiomas son los principios que se aceptan en todas las ciencias, mientras que los *postulados* se refieren a una ciencia en particular.

Ejemplo 17.

Posiblemente los postulados más famosos en matemática son los cinco postulados de Euclides para la geometría:

1. Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.
2. Toda recta se puede prolongar indefinidamente.
3. Con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos[a].

[a] El quinto postulado se ha simplificado de una manera más simple como "Si se tiene una recta y un punto fuera de ella, sólo se puede trazar una única recta paralela a la primera por dicho punto".

A partir de estos cinco postulados, se puede construir toda la geometría Euclídea. Con sólo variar el quinto postulado por otros menos "evidentes" es que se crearon las geometrías no Euclídeas (la geometría hiperbólica y la elíptica).

Definición 5. Definición

Una *definición* indica las características de un objeto matemático que lo distinguen de los demás. Las definiciones señalan con precisión los objetos matemáticos.

Ejemplo 18. Definición de cuadrado

Un cuadrado es una figura geométrica poligonal compuesta por cuatro lados de igual medida y los cuatro ángulos que se forman en sus vértices son rectos.

Definición 6. Teorema

Un *teorema* es una proposición que puede ser demostrada a partir de los axiomas, las hipótesis y los teoremas demostrados con anterioridad.

Definición 7. Demostración

Una *demostración* es un procedimiento lógico mediante el cual se muestra, de manera contundente, que el resultado que se enuncia es verdadero.

Definición 8. Conjetura

Una *conjetura* es un resultado que se cree que es cierto, pero que todavía no ha sido demostrado.

Ejemplo 19. Conjetura de Golbach

En 1742, Christian Golbach propuso la siguiente proposición:

Todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos.

Hasta el momento no se ha podido demostrar su validez ni se ha encontrado un contraejemplo.

Existen otros términos que se utilizan en matemáticas en menor medida, de igual forma se presentan a continuación.

Definición 9. Corolario

Un *corolario* es un teorema que se deduce de forma directa a partir de un teorema anterior o es un caso particular de él.

Ejemplo 20.

Suponga que ya se demostró el Teorema siguiente:

Para todo número real x se cumple que $x^2 + 1 > 0$.

A partir de dicho teorema, se puede demostrar como corolario que

$1 > 0$

Para demostrarlo, simplemente se debe tomar $x = 0$ en el teorema anterior.

Definición 10. Lema

Un *lema* es un teorema que es necesario para demostrar un teorema posterior, pero que no tiene relación directa con el tema que se está desarrollando (aunque puede ser un teorema central en el desarrollo de otro tema).

Definición 11. Escolio

Un *escolio* es un resultado que se obtiene durante el desarrollo de una demostración pero que no tiene relación con el tema desarrollado.

Definición 12. Paradoja

Una *paradoja* es una proposición que no puede ser ni verdadera ni falsa.

Ejemplo 21. Paradoja

Las siguientes se consideran paradojas:

1. Solo sé que no sé nada (Sócrates).
2. La presente oración es falsa (Paradoja del mentiroso).
3. El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos; entonces, ¿quién afeitará al barbero? (Paradoja de Russell, más conocida como la Paradoja del barbero).

1.3. Métodos de demostración

En esta sección se mostrará la forma en que se puede demostrar que una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$ es cierta.

De acuerdo con la tabla de verdad para la implicación, se tendría que demostrar que si la hipótesis (P) es cierta entonces la conclusión (Q) también lo es.

La hipótesis no necesariamente es única, es decir, una demostración puede partir de varias hipótesis.

Para los ejemplos que se muestran en esta sección se parte que ya se conocen muchos resultados de los números reales que se verán más adelante.

1.3.1. Demostración directa

Se asume que P es verdadera y, mediante las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce que Q es verdadera. Es decir, se parte de P y se llega a Q.

Ejemplo 22. Prueba directa

Demuestre el teorema:

Para la función lineal $f(x) = mx + b$, si $m \in \mathbb{R}, m < 0$ y $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

Demostración (Prueba directa)

Las hipótesis que se tienen son $f(x) = mx + b$, $m < 0$, $x_1 < x_2$.

Se debe demostrar que $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 && \text{Hipótesis.} \\ \Rightarrow\ & mx_1 > mx_2 && \text{Por hipótesis, } m < 0 \\ \Rightarrow\ & mx_1 + b > mx_2 + b && \\ \Rightarrow\ & f(x_1) > f(x_2) && \text{Definición dada de } f \end{aligned}$$

En realidad esto demuestra que si la pendiente es negativa entonces la función lineal es decreciente.

1.3.2. Prueba indirecta

Si se tiene que demostrar $P \Rightarrow Q$ se puede demostrar su contrapositiva, es decir, se puede demostrar que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ya que son equivalentes (esto se verificó con anterioridad, ver ejemplo 15).

Ejemplo 23. Prueba indirecta

Demuestre el teorema:

Si x y y son dos números enteros tales que su producto es impar, entonces ambos deben ser impares.

Demostración (Prueba indirecta)

Se debe demostrar la contrapositiva, es decir, que si alguno de los números x y y es par entonces su producto $x \cdot y$ es par.

Supongamos sin perder generalidad que x es par, es decir, que $x = 2k$

Ahora, $x \cdot y = (2k) \cdot y = 2 \cdot (ky)$

Por lo que el producto es par.

1.3.3. Por contradicción

En este caso se asume que la hipótesis P es cierta y se parte de que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se deduce $\neg P$ o Q, por lo que se tendría $P \wedge \neg P$ o $Q \wedge \neg Q$ que sería una falacia o contradicción. Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis que $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 24. Por contradicción

Demuestre el teorema:

Una función lineal con criterio $f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0$ sólo tiene una intersección con el eje x.

Demostración (por contradicción)

Suponga que la función lineal tiene más intersecciones con el eje x, es decir, que existen x_1 y x_2 distintos $x_1 \neq x_2$ tal que ambos son intersecciones con el eje x de la función $f(x) = mx + b$, es decir, que $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Como f es una función lineal, sea $f(x) = mx + b$

Como $f(x_1) = mx_1 + b = 0$ entonces $x_1 = \dfrac{-b}{m}$

Y como $f(x_2) = mx_2 + b = 0$ entonces $x_2 = \dfrac{-b}{m}$

Por lo que $x_1 = x_2$ que contradice la hipótesis ($\Rightarrow\Leftarrow$), por lo tanto la intersección es única.

1.3.4. Reducción al absurdo

Este método es muy similar al anterior, se parte de que la hipótesis P es cierta y que $\neg Q$ es cierta, por medio de las reglas de la lógica y utilizando las definiciones, axiomas y otros teoremas conocidos se llega a alguna afirmación que ya se sepa con anterioridad que es falsa (por lo que se llega a un absurdo). Por lo tanto, como conclusión, la hipótesis de donde se partió $\neg Q$ es falsa y, por tanto Q es cierta, que es lo que se quería demostrar.

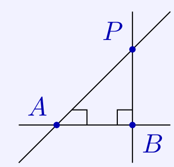
Ejemplo 25.

Demuestre el Teorema:

Sean A y B dos puntos distintos de una recta y P un punto externo a ella. Si $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ entonces $\overline{AB}$ no es perpendicular a $\overline{BP}$

Demostración (por reducción al absurdo)

Suponga que $\overline{AB}$ sí es perpendicular a $\overline{BP}$, así se tendría que $\overline{AB} \perp \overline{AP}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BP}$.
Por lo que se tendría un triángulo con dos ángulos rectos (ver figura)



Lo cual es una clara contradicción ($\Rightarrow\Leftarrow$) o un absurdo, ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo es de $180°$ (un triángulo no puede tener dos ángulos rectos).

Por lo tanto se concluye que lo que se supuso es falso, por lo tanto, $\overline{AB}$ no puede ser perpendicular a $\overline{BP}$.

1.3.5. Otros métodos

Para demostrar que $P \Rightarrow Q$ es falso sólo basta con dar un contraejemplo en donde no se cumpla.

Ejemplo 26.

Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

Si n es un número entero entonces n^2 es par.

Demostración (por contraejemplo):

Tome $n = 3$, se cumple que $n \in \mathbb{Z}$ y, sin embargo, $n^2 = 9$ no es un número par.

Para demostrar $P \Leftrightarrow Q$ se deben demostrar $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$.

Ejemplo 27.

Considere los siguientes axiomas para un conjunto A que es subconjunto de los números reales:

Axioma 1: $5 \in A$

Axioma 2: $x \in A \Rightarrow (2x + 1) \in A$

Axioma 3: $(x \in A) \wedge (y \in A) \Rightarrow (x \cdot y) \in A$

Demuestre, a partir de dichos axiomas, que:

Teorema 1: Si $4 \in A$ entonces $45 \in A$.

Teorema 2: Si $2 \in A$ entonces $20 \in A$.

Teorema 3: Si $15 \notin A$ entonces $1 \notin A$.

Demostración:

1. Para el primer teorema se toma como hipótesis que $4 \in A$ y se debe demostrar que $45 \in A$, se realizará una demostración directa, esto es, se va a partir de que $4 \in A$ y se llegará a que $45 \in A$.

$$\begin{aligned} 4 \in A &\Rightarrow (2 \cdot 4 + 1) \in A && \text{Axioma 2} \\ &\Rightarrow 9 \in A && \\ &\Rightarrow 9 \in A \wedge 5 \in A && \text{Axioma 1} \\ &\Rightarrow 9 \cdot 5 \in A && \text{Axioma 3} \\ &\Rightarrow 45 \in A && \end{aligned}$$

   Por lo tanto, se cumple que si $4 \in A$ entonces $45 \in A$.

2. Para el segundo teorema se toma como hipótesis que $2 \in A$ y se debe demostrar que $20 \in A$, se realizará una demostración directa, esto es, se va a partir de que $2 \in A$ y se llegará a que $20 \in A$.

$$\begin{aligned} 2 \in A &\Rightarrow 2 \in A \wedge 2 \in A && \\ &\Rightarrow 2 \cdot 2 \in A && \text{Axioma 3} \\ &\Rightarrow 4 \in A && \\ &\Rightarrow 4 \in A \wedge 5 \in A && \text{Axioma 1} \\ &\Rightarrow 4 \cdot 5 \in A && \text{Axioma 3} \\ &\Rightarrow 20 \in A && \end{aligned}$$

   Por lo tanto, se cumple que si $2 \in A$ entonces $20 \in A$.

3. El tercer teorema se puede demostrar por su contrapositiva, es decir, demostrar que si $1 \in A$ entonces $15 \in A$, así, se toma como hipótesis que $1 \in A$ y se debe demostrar que $15 \in A$.

$$\begin{aligned} 1 \in A &\Rightarrow 2 \cdot 1 + 1 \in A && \text{Axioma 2} \\ &\Rightarrow 3 \in A && \\ &\Rightarrow 3 \in A \wedge 5 \in A && \text{Axioma 1} \\ &\Rightarrow 3 \cdot 5 \in A && \text{Axioma 3} \\ &\Rightarrow 15 \in A && \end{aligned}$$

   Por lo tanto, se cumple que si $15 \notin A$ entonces $1 \notin A$.

   Esta última demostración es prácticamente igual que hacerla por contradicción, en ese caso se asume que $15 \notin A$ es cierta y se parte de que $1 \in A$, con el mismo procedimiento se concluye que $15 \in A$, que contradice la hipótesis, por tanto, el supuesto de que $1 \in A$ debe ser falso y entonces $1 \notin A$ es verdadero. †

1.4. Cuantificadores

En ciertas ocasiones se desea indicar que una proposición se cumple para todos los elementos de un conjunto, o que sólo se cumple por lo menos para uno, para esto se utilizan los cuantificadores.

Definición 13. Proposición abierta

Una proposición abierta es una familia de proposiciones que dependen de uno o más parámetros de un conjunto al que se le denomina universo.

Ejemplo 28.

Considere la proposición: Para todo número natural n, $P(n) : (n^2 + 3)$ es impar.

Note que algunas de las proposiciones serían:

$P(1)$: 4 es un número impar.

$P(2)$: 7 es un número impar.

$P(3)$: 12 es un número impar.

Que brindan proposiciones falsas o verdaderas, dependiendo del valor de n que se utilice.

Definición 14. Cuantificador existencial y universal

Sea $P(n)$ una proposición abierta, con $n \in U$.

- El *cuantificador existencial* se denota $\exists$ y se lee "existe". De esta forma, la expresión "existe al menos un elemento en el universo que cumple la proposición P", se puede simbolizar $(\exists n \in U)[P(n)]$.
- El *cuantificador universal* se denota $\forall$ y se lee "para todo". De esta forma, la expresión "para todos los elementos del universo se cumple la proposición P", se puede simbolizar $(\forall n \in U)[P(n)]$.

Así, la proposición $(\exists n \in U)[P(n)]$ es verdadera con sólo determinar un elemento n del conjunto tal que $P(n)$ es verdadera y la proposición $(\exists n \in U)[P(n)]$ es falsa si todos los elementos n de U hacen que $P(n)$ sea falsa.

De igual forma, la proposición $(\forall n \in U)[P(n)]$ es verdadera si la proposición $P(n)$ es verdadera para todos los elementos del conjunto U y la proposición $(\forall n \in U)[P(n)]$ es falsa si existe al menos un elemento n de U tal que $P(n)$ sea falsa.

Siguiendo el razonamiento anterior, se cumple que

$$\neg(\forall n \in U)[P(n)] \equiv (\exists n \in U)[\neg P(n)]$$

$$\neg(\exists n \in U)[P(n)] \equiv (\forall n \in U)[\neg P(n)]$$

Es decir, la expresión "No es cierto que todos los elementos del universo cumplan la proposición P" es equivalente a "Existe al menos un elemento del universo que no cumple la proposición P". De la misma forma, decir "No es cierto que exista algún elemento del universo que cumple la proposición P" es equivalente a decir "Todos los elementos del universo no cumplen con la proposición P".

Para demostrar que se cumple la expresión $(\forall n \in U)[P(n)]$, se puede tomar un elemento arbitrario del conjunto (un representante general del conjunto) y probar que la proposición se cumple para dicho elemento, como era un representante general, entonces se va a cumplir para todos los elementos de U. Otra opción es utilizar inducción matemática (que se explicará más adelante).

Para demostrar que se cumple la expresión $(\exists n \in U)[P(n)]$ se debe buscar un elemento de U que cumpla la proposición e indicar cuál es.

Ejemplo 29.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| > 0]$.

La proposición es falsa, existe un contraejemplo, ya que $0 \in \mathbb{R} \wedge |0| = 0$.

Ejemplo 30.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists n \in \mathbb{N})[n \cdot (n+1)$ es divisible por $30]$.

La proposición es verdadera, ya que $5 \in \mathbb{N} \wedge 5 \cdot 6 = 30$.

Ejemplo 31.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists n \in \mathbb{N})\,[(n$ es primo $) \wedge (n+3$ es primo$)]$.

La proposición es verdadera, ya que 2 y 5 son primos y $2 + 3 = 5$ (y es el único n que cumple la proposición).

Ejemplo 32.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists n \in \mathbb{N})\,[-n \in \mathbb{N}]$.

La proposición es falsa, ya que si n es un número natural, entonces $n > 0$ y $-n < 0$ y no hay números negativos en $\mathbb{N}$ (más adelante se profundizará más en las propiedades de las desigualdades).

Ejemplo 33.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\forall n \in \mathbb{Z})[n$ es impar $\Rightarrow n^2$ es impar$]$.

La proposición es cierta, se demostrará de manera directa. Se tiene como hipótesis que n es impar, es decir, que $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, se debe demostrar que n^2 es impar, es decir, que $n^2 = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 & \\ &= 4k^2 + 4k + 1 & \text{Primer fórmula notable.} \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 & \text{Factor común.} \\ &= 2p + 1 & p = (2k^2 + 2k), p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por lo que n^2 es un número impar.

Ejemplo 34.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\forall x \in \mathbb{R})[x < x + 1]$.

La proposición es cierta, de manera directa:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 && \text{Un resultado verdadero.} \\ x + 0 &< x + 1 && (*) \\ x &< x + 1 && (*) \end{aligned}$$

Los dos pasos marcados con $(*)$ se justificarán más adelante.

Ejemplo 35.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists n \in \mathbb{Z})[n > 0 \wedge n - 1 < 0]$.

La proposición es falsa, se demostrará por contradicción, suponga que dicho número sí existe, de esta forma

$$n > 0 \wedge n - 1 < 0 \Rightarrow n > 0 \wedge n < 1$$

Y no hay ningún número entero entre 0 y 1.

Cuando una proposición abierta depende de dos parámetros $P(x, y)$, se pueden dar los *cuantificadores dobles*, estos son:

- $(\forall x \in U)(\forall y \in V)[P(x, y)]$: Para toda x en U y y en V, la proposición P es verdadera.
- $(\forall x \in U)(\exists y \in V)[P(x, y)]$: Para toda x dada de U, se puede determinar una y en V, para que la proposición P sea verdadera.
- $(\exists x \in U)(\forall y \in V)[P(x, y)]$: Existe un elemento x en U tal que, sin importar el elemento y de V que se tome, la proposición P será verdadera.
- $(\exists x \in U)(\exists y \in V)[P(x, y)]$: Se puede determinar un elemento x en U y un elemento y en V, particulares, para que la proposición P sea verdadera.

En el primer y último caso, si $U = V$ se puede escribir de forma más simplificada $(\forall x, y \in U)[P(x, y)]$ y $(\exists x, y \in U)[P(x, y)]$. Si el conjunto se sobreentiende entonces se puede obviar.

Ejemplo 36.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \left[x^2 + y^2 \geqslant 0\right]$.

La proposición es verdadera, ya que en los números reales $x^2 \geqslant 0 \wedge y^2 \geqslant 0$, por lo que $x^2 + y^2 \geqslant 0$ (más adelante se realizará la demostración de que $x^2 \geqslant 0$).

Ejemplo 37.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\,[2x = y - 1]$.

La proposición es verdadera, ya que para toda x dada, se puede determinar una y por medio de la fórmula $y = 2x + 1$, que cumple lo solicitado, note que si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $y = 2x + 1 \in \mathbb{Z}$.

Por ejemplo, para $x = 3$, se debe tomar $y = 7$; para $x = -2$ se debe tomar $y = -3$.

Ejemplo 38.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\,[xy - y = 0 \geqslant 0]$.

La proposición es verdadera, ya que basta tomar a $x = 1$, de esta forma, sin importar el valor de y, se cumple que $1 \cdot y - y = y - y = 0$.

Ejemplo 39.

Determine el valor de verdad de la proposición $(\exists x, y \in \mathbb{Z})\left[x^2 + y^2 = 0\right]$.

La proposición es verdadera, ya que basta tomar a $x = y = 0$, de tal forma que se cumple que $0^2 + 0^2 = 0$.

Capítulo 2

El Conjunto de los Números Reales

En este capítulo se realizará mostrarán el conjunto de los números reales desde un punto de vista axiomático, se partirá del hecho de que no se conoce más que la operación de la adición, a partir de allí se definirán las demás operaciones y se demostrarán sus propiedades; por último, se verán los subconjuntos de los números reales y sus características, brindando un breve resumen histórico de los mismos.

2.1. El conjunto de los números reales y sus operaciones

Inicialmente se va a suponer que existe un conjunto de números, que se llamará el conjunto de los números reales y se denotará $\mathbb{R}$, para el cual se tienen dos operaciones básicas: la adición y la multiplicación[1].

2.1.1. Adición, multiplicación e igualdad

La adición[2] la aprendemos a muy corta edad, usualmente cuando somos niños, por ejemplo, al comprar en una pulpería o al jugar "monopolio" o algo similar.

Para la adición se acostumbra utilizar el símbolo $+$, así por ejemplo, $2 + 3$ significa que al dos se le adiciona el tres.

Hay una diferencia entre adición y suma, adición es la operación y la suma es el resultado; por ejemplo, se sabe que $2 + 3$ da como resultado 5, esto es, al 2 se le adiciona 3 y la suma es 5. En el lenguaje común estos dos términos se han llegado a utilizar como sinónimos y en este momento es complejo marcar esta diferencia, sobre todo cuando se agrega la palabra "más" a esta situación. A los números que se están sumando se le conocen como *sumandos*[3].

Los axiomas básicos de la adición son: cerradura, conmutatividad[4], asociatividad, elemento neutro[5]

[1] Se podría pensar que la única operación básica es la adición, pues la multiplicación es una adición realizada varias veces, sin embargo, se parte de los axiomas de ambas para desarrollar las demostraciones.

[2] Del latín *additĭo* que se refiere al acto de "agregar".

[3] Del latín medieval *summandus*, forma gerundivo de *summare* (sumar), que significa, "el que debe de ser sumado".

[4] Conmutativa: Dicho de ciertas operaciones, de resultado que no varía al cambiar el orden de sus términos o elementos. Real Academia Española.

[5] Elemento neutro: Elemento que, operado con otro elemento del mismo conjunto, da como resultado este último.

y existencia de inversos[6], dichos axiomas se enuncian a continuación.

Axioma 3. Cerradura de la adición

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x + y \in \mathbb{R}]$.

Si se suman dos números reales, el resultado será otro número real.

Axioma 4. Conmutatividad de la adición

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x + y = y + x]$.

La suma de dos números es la misma, independientemente del orden en que se tomen los sumandos.

Axioma 5. Asociatividad de la adición

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[(x + y) + z = x + (y + z)]$.

La suma de tres o más números es igual, independientemente, de la forma en que se agrupen para ser sumados. Una implicación de esta propiedad es que al sumar tres cantidades $a + b + c$ no hace falta escribir paréntesis para indicar el orden en el que se debe sumar, por ejemplo, $2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$

Axioma 6. Elemento neutro de la adición

$(\exists n \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[x + n = n + x = x]$.

Existe un número real tal que, al ser adicionado a cualquier otro número, da como resultado este último. Al elemento neutro de la suma se le llama “cero” y se acostumbra denotar como 0.

Axioma 7. Inversos para la adición

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists i \in \mathbb{R})[x + i = i + x = 0]$.

Dado cualquier número real, es posible hallar otro número real, de tal forma que al sumarlos, el resultado sea el neutro aditivo, es decir, cero. Al inverso aditivo de x se le acostumbra llamar el “opuesto” de x y normalmente se denota $-x$.

Es muy común en los procedimientos matemáticos decir que un número y su opuesto se “cancelan”, pues, por ejemplo

$$
\begin{aligned}
5 + (-5) + 4 &= (5 + (-5)) + 4 && \text{Axioma 5} \\
&= 0 + 4 && \text{Axioma 7} \\
&= 4 && \text{Axioma 6}
\end{aligned}
$$

Haciendo esto de forma directa $\cancel{5} + \cancel{(-5)} + 4 = 4$, lo cual ahorra hacer todos los pasos anteriores, esto es correcto, pero debe quedar claro que se justifica gracias a los axiomas.

Real Academia Española.

[6]Elemento inverso: Elemento que, operado con su elemento correspondiente, da como resultado el elemento neutro. Real Academia Española.

La multiplicación[7] de a por b se denota $a \cdot b$ (cuando se están operando números se puede utilizar $a \times b$, pero esta última notación no es conveniente en álgebra pues el símbolo $\times$ se puede confundir fácilmente con x), y es una operación que resume el realizar una suma repetitiva, es decir, $a \cdot b$ significa sumar a veces la b, o sumar b veces el a, así

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + ... + b}_{a \text{ veces}} = \underbrace{a + a + ... + a}_{b \text{ veces}}$$

Si se asume que en un inicio lo único que se conoce es la adición entonces, si se tiene una operación matemática combinada con adición y multiplicación, se debe resolver primero la multiplicación y luego la adición (la multiplicación tiene prioridad sobre la adición).

Ejemplo 40.

$3 + 2 \cdot 5 = 3 + (5 + 5) = 3 + 5 + 5 = 13$

A los números que se están multiplicando se les conoce como *factores* (también se puede decir que a es el *multiplicando*[8] y b es el *multiplicador*[9]), al resultado se le conoce como el *producto*.

La multiplicación posee los mismos axiomas básicos que se presentaron para la adición estos son: cerradura, conmutatividad, asociatividad, elemento neutro y existencia de inversos, dichos axiomas se enuncian a continuación.

Axioma 8. Cerradura de la multiplicación

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x \cdot y \in \mathbb{R}]$.

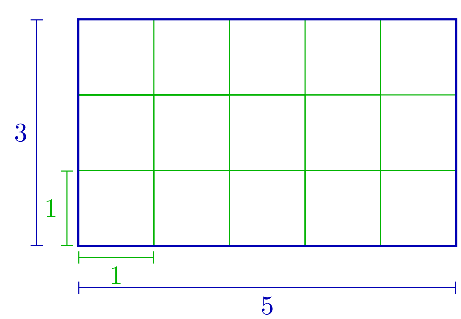
Si se multiplican dos números reales, el resultado será otro número real.

Axioma 9. Conmutatividad de la multiplicación

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x \cdot y = y \cdot x]$.

La multiplicación de dos números es la misma, independientemente del orden en que se tomen los factores (el orden de los factores no altera el producto).

Es probable que la multiplicación haya iniciado con el cálculo de áreas en geometría, en particular, el área de un rectángulo.



[7]Del latín *multiplicāre* que está compuesto por *multi* que significa “muchos” y *plicare* que significa “plegar”, “hacer pliegues” o “doblar algo sobre sí mismo”.

[8]Del latín medieval *multiplicandus*, forma gerundivo del verbo *multiplicāre* que significa “lo que se ha de multiplicar”.

[9]Del latín *multiplicātor* que significa igual que en español: “el que multiplica”.

Recuerde que calcular un área es contar la cantidad de cuadrados de una unidad de lado que caben en dicha figura, de esta forma contar 5 veces el 3, es lo mismo que contar 3 veces el 5, pues representan el área del rectángulo de lados 3 y 5.

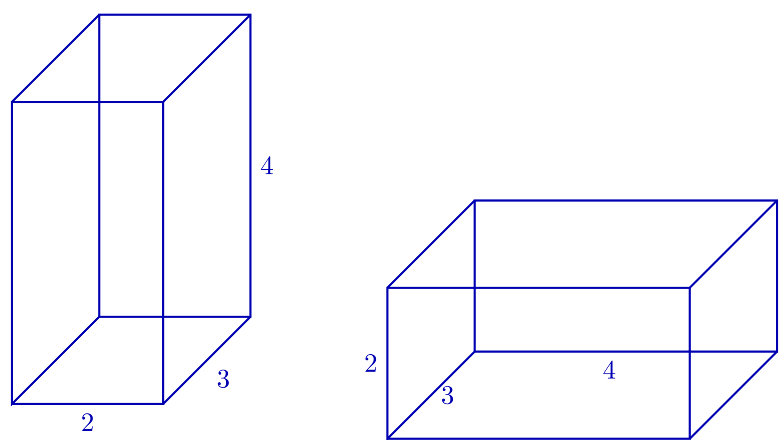
Al tener que hacer estos cálculos de forma muy repetitiva, se determinó que era más sencillo saber esta operación "de memoria" y colocar un símbolo nuevo, es decir, que $3 \times 5 = 15$.

Axioma 10. Asociatividad de la multiplicación

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$.

La multiplicación de tres o más números es igual, independientemente, de la forma en que se agrupen para ser multiplicados. Una implicación de esta propiedad es que al multiplicar tres cantidades $a \cdot b \cdot c$ no hace falta escribir paréntesis para indicar el orden en el que se debe multiplicar, por ejemplo, $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$.

Sobre esto podemos analizar que el volumen de una caja es el mismo, ya sea que tome como base cualquiera de las tapas.



Axioma 11. Elemento neutro de la multiplicación

$(\exists n \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[x \cdot n = n \cdot x = x]$.

Existe un número real tal que, al ser multiplicado por cualquier otro número, da como resultado este último. Al elemento neutro de la multiplicación se le llama "uno" y se acostumbra denotar como 1.

Axioma 12. Inversos para la multiplicación

$(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\})(\exists i \in \mathbb{R})[x \cdot i = i \cdot x = 1]$.

Dado cualquier número real distinto de cero, es posible hallar otro número real, de tal forma que al multiplicarlos, el resultado sea el neutro multiplicativo, es decir, uno. Al inverso multiplicativo de x se le acostumbra denotar x^{-1} y usualmente se le llama simplemente "inverso".

Es muy común en los procedimientos matemáticos decir que un número y su inverso se "cancelan", pues, por ejemplo

$$5 \cdot 5^{-1} \cdot 4 = (5 \cdot 5^{-1}) \cdot 4 \qquad \text{Axioma 10}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot 4 && \text{Axioma } 12\\
&= 4 && \text{Axioma } 11
\end{aligned}
$$

Haciendo esto de forma directa $\cancel{5} \cdot \cancel{5^{-1}} \cdot 4 = 4$, lo cual ahorra hacer todos los pasos anteriores, esto es correcto, pero debe quedar claro que se justifica gracias a los axiomas.

Algunas propiedades no se cumplen para el cero, note que en el axioma de inversos multiplicativos se indica que existen para todos los números reales, excepto para el cero; por esto, es común quitar dicho elemento de los conjuntos, para ello, se utilizará la notación $\mathbb{R}^*$, que indica que es el conjunto de los números reales, excepto el cero, es decir, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, esto también se puede utilizar con los demás subconjuntos de $\mathbb{R}$.

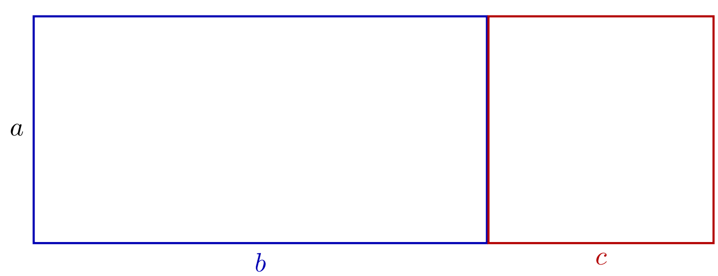
Además de las propiedades anteriores, la multiplicación es distributiva respecto a la adición en $\mathbb{R}$; es decir

Axioma 13. Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición

$(\forall a, b, c \in R)[a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c]$.

Esta propiedad establece que el producto de un número por la suma de otros dos o más números, es igual a la suma de los productos del primer número con cada uno de los sumandos. Esta propiedad es muy importante y se va a utilizar varias veces durante el curso (por ejemplo, para multiplicar polinomios y factorizar).

De manera geométrica, se puede analizar como el área de un rectángulo de ancho $b + c$ y alto a, que se puede calcular como el área del rectángulo de ancho b y alto a mas el área del rectángulo de ancho c y alto a.



Esta propiedad tiene otra característica curiosa, pues se utiliza un nombre distinto dependiendo de la dirección en que se aplique, así:

- Distributividad: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Factor común: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

Definición 15. Relación de igualdad

Sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se define la relación de igualdad, denotada por $=$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $(\forall x \in \mathbb{R})[x = x]$.
2. Simétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{R})[x = y \Rightarrow y = x]$.
3. Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z]$.

Note la semejanza que se tiene entre esta definición y los axiomas 1 y 2, todas estas propiedades se pueden verificar con dichos axiomas.

Ejemplo 41.

Realice las operaciones $4 \cdot (3+5)$.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3+5) &= 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ &= 32 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4 \cdot (3+5) &= 4 \cdot 8 \\ &= 32 \end{aligned}$$

†

Ejemplo 42.

Realice las operaciones $(-3-5+4) \cdot 2$.

$$\begin{aligned} (-3-5+4) \cdot 2 &= -3 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ &= -8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (-3-5+4) \cdot 2 &= -4 \cdot 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

†

Ejercicio 1.

Indique, para cada paso, la propiedad de los números reales que se utiliza en el desarrollo de la siguiente demostración.

Demostrar que $a \cdot (b + b \cdot a^{-1}) = b \cdot (1+a)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + b \cdot a^{-1}) &= a \cdot b + a \cdot (b \cdot a^{-1}) \\ &= a \cdot b + (a \cdot b) \cdot a^{-1} \\ &= a \cdot b + (b \cdot a) \cdot a^{-1} \\ &= a \cdot b + b \cdot (a \cdot a^{-1}) \\ &= a \cdot b + b \cdot 1 \\ &= a \cdot b + b \\ &= (a+1) \cdot b \\ &= b \cdot (a+1) \\ &= b \cdot (1+a) \end{aligned}$$

Teorema 1.

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[x = y \Leftrightarrow x + z = y + z]$.

Para demostrar el $\Leftrightarrow$ se debe demostrar en ambas direcciones.

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $x = y$.

Se debe demostrar que $x + z = y + z$.

$$\begin{aligned} x + z &= x + z && \text{Axioma 1.} \\ x + z &= y + z && \text{Axioma 2, ya que, por hipótesis } x = y. \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $x + z = y + z$.

Se debe demostrar que $x = y$.

$$\begin{aligned} x + z &= y + z && \text{Hipótesis.} \\ (x + z) + (-z) &= (y + z) + (-z) && \text{Demostración del caso anterior y Axioma 7.} \\ x + (z + (-z)) &= y + (z + (-z)) && \text{Axioma 5.} \\ x + 0 &= y + 0 && \text{Axioma 7.} \\ x &= y && \text{Axioma 6.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall x, y, z \in \mathbb{R})[x = y \Leftrightarrow x + z = y + z]$. †

Este teorema nos permite sumar un número cualquiera a ambos lados de una igualdad, también nos permite "cancelar" el mismo término que se esté sumando a ambos lados de una igualdad. Así

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Rightarrow x + \cancel{z} = y + \cancel{z} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Teorema 2.

$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}^*)[x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z]$.

Para demostrar el $\Leftrightarrow$ se debe demostrar en ambas direcciones.

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $x = y$.

Se debe demostrar que $x \cdot z = y \cdot z$.

$$\begin{aligned} x \cdot z &= x \cdot z && \text{Axioma 1.} \\ x \cdot z &= y \cdot z && \text{Axioma 2 } (x = y). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $x \cdot z = y \cdot z$.

Se debe demostrar que $x = y$.

$$\begin{aligned} x \cdot z &= y \cdot z && \text{Hipótesis.} \\ (x \cdot z) \cdot z^{-1} &= (y \cdot z) \cdot z^{-1} && \text{Demostración del caso anterior y Axioma 12.} \\ x \cdot (z \cdot z^{-1}) &= y \cdot (z \cdot z^{-1}) && \text{Axioma 10.} \\ x \cdot 1 &= y \cdot 1 && \text{Axioma 12.} \\ x &= y && \text{Axioma 11.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}^*)[x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z]$. †

Al igual que el caso anterior, este teorema nos permite multiplicar un número cualquiera a ambos lados de una igualdad, también nos permite "cancelar" el mismo factor que se esté multiplicando a ambos lados de una igualdad. Así

$$\begin{aligned} x \cdot z = y \cdot z &\Rightarrow x \cdot \cancel{z} = y \cdot \cancel{z} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Se debe tener mucho cuidado al aplicar este último resultado de "cancelación", pues la operación principal de las expresiones debe ser la multiplicación, así se cancela uno de los factores, considere, por ejemplo,

$$6 + 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

Allí no es posible cancelar el 3, pues en el miembro izquierdo de la igualdad la operación principal es la adición y no la multiplicación, la expresión es equivalente a $6 + (2 \cdot 3) = 4 \cdot 3$ y es claro que en el miembro izquierdo no hay una multiplicación como operación principal, sino una adición y que el 3 no sería un factor que se cancele a ambos lados.

Para cancelar el mismo factor a ambos lados del igual es necesario verificar que es distinto de cero pues, por ejemplo, $5 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, sin embargo, si se cancela el cero, se obtiene $5 = 3$, que es falso.

Es interesante hacer notar que la dirección "$\Rightarrow$" sí es válida con $z = 0$ ya que $x = y \Rightarrow x \cdot 0 = y \cdot 0$.

Teorema 3. Unicidad de la adición

El resultado de la adición es único.

Demostración (por contradicción):

Suponga que el resultado de la adición no es único, es decir, que $a + b = c$ y que $a + b = d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq d$.

$a + b = a + b$	Axioma de identidad (Axioma 1)
$c = d$	Axioma de sustitución (Axioma 2)

Que contradice la hipótesis que $c \neq d$, por lo tanto, el resultado de la adición es único. †

Teorema 4. Unicidad del neutro aditivo

El elemento neutro de la adición es único.

Demostración (por contradicción):

Suponga que el elemento neutro no es único, es decir, que existen dos elementos 0 y $0'$, distintos, tales que

$$(\forall a \in \mathbb{R})[a + 0 = 0 + a = a \ \wedge \ a + 0' = 0' + a = a[$$

De esta forma

$0 = 0 + 0'$	Pues $0'$ es neutro aditivo.
$= 0'$	Pues 0 es neutro aditivo.

Es decir, $0 = 0'$, que contradice la hipótesis de que eran distintos, por lo que el neutro aditivo es único. †

Teorema 5. Unicidad del opuesto

Para todo número real, el inverso aditivo es único.

Demostración (por contradicción):

Suponga que para algún elemento $x \in \mathbb{R}^*$, su inverso aditivo no es único, es decir, que existen dos elementos i y i', distintos, tales que

$$(\forall a \in \mathbb{R})[a + i = i + a = 0 \ \wedge \ a + i' = i' + a = 0[$$

De esta forma

$$\begin{aligned} 0 &= 0 && \text{Axioma 1.} \\ a + i &= a + i' && \text{Axioma 2.} \\ i &= i' && \text{Teorema 1} \end{aligned}$$

Que contradice la hipótesis de que eran distintos, por lo que el inverso aditivo es único. †

Teorema 6. Multiplicación por cero

$(\forall x \in \mathbb{R})[x \cdot 0 = 0]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) && 0 + 0 = 0 \text{ (Axioma 6)} \\ &= x \cdot 0 + x \cdot 0 && \text{Distributividad (Axioma 13)} \end{aligned}$$

Así $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$, por lo que $x \cdot 0$ es el neutro aditivo que, como es único, entonces $x \cdot 0 = 0$. †

Teorema 7. Opuesto de un número opuesto

$\forall a \in \mathbb{R}, -(-a) = a$.

Demostración:

Se cumple que $(-a) + (-(-a)) = 0$, pues $-(-a)$ es el opuesto de $-a$.

También se cumple que $(-a) + a = 0$ (Axioma 7)

Por lo tanto, a y $-(-a)$ son inversos aditivos de $-a$ y, como el inverso aditivo de un número es único, entonces $a = -(-a)$. †

Teorema 8. Unicidad de la multiplicación

El resultado de la multiplicación es único.

Demostración (por contradicción):

Suponga que el resultado de la multiplicación no es único, es decir, que $a \cdot b = c$ y que $a \cdot b = d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq d$.

$a \cdot b = a \cdot b$	Axioma de identidad (Axioma 1)
$c = d$	Axioma de sustitución (Axioma 2)

Que contradice la hipótesis que $c \neq d$, por lo tanto, el resultado de la multiplicación es único. †

Teorema 9. Unicidad del neutro multiplicativo

El elemento neutro de la multiplicación es único.

Demostración (por contradicción):

Suponga que el elemento neutro no es único, es decir, que existen dos elementos 1 y 1′, distintos, tales que

$$(\forall a \in \mathbb{R})[a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \;\wedge\; a \cdot 1' = 1' \cdot a = a[$$

De esta forma

$1 = 1 \cdot 1'$	Pues $1'$ es neutro multiplicativo.
$= 1'$	Pues 1 es neutro multiplicativo.

Es decir, $1 = 1'$, que contradice la hipótesis de que eran distintos, por lo que el neutro multiplicativo es único. †

Teorema 10. Unicidad del inverso multiplicativo

Para todo número real, su inverso multiplicativo es único.

Demostración (ejercicio).

Teorema 11. Inverso de un número inverso

$\forall a \in \mathbb{R}, (a^{-1})^{-1} = a$.

Demostración:

Se cumple que $(a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$, pues $(a^{-1})^{-1}$ es el inverso multiplicativo de a^{-1}.

También se cumple que $a^{-1} \cdot a = 1$ (Axioma 12)

Por lo tanto, a y $(a^{-1})^{-1}$ son inversos multiplicativos de a^{-1} y, como el inverso multiplicativo de un número es único, entonces $a = (a^{-1})^{-1}$. †

Teorema 12.

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0]$.

Se deben demostrar ambas direcciones:

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $x \cdot y = 0$

Se debe demostrar que: $x = 0 \vee y = 0$

Demostración:

Suponga primero que $x \neq 0$, de manera directa, se cumple que

$$\begin{aligned}
x \cdot y = 0 &\Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 && \text{Hipótesis, Axioma 12 y Teorema 2.}\\
&\Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0 && \text{Axioma 10 y Teorema 6.}\\
&\Rightarrow 1 \cdot y = 0 && \text{Axioma 12.}\\
&\Rightarrow y = 0 && \text{Axioma 11.}
\end{aligned}$$

De igual forma, si $y \neq 0$, de manera directa, se cumple que

$$\begin{aligned}
x \cdot y = 0 &\Rightarrow (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} && \text{Hipótesis, Axioma 12 y Teorema 2.}\\
&\Rightarrow x \cdot (y \cdot y^{-1}) = 0 && \text{Axioma 10 y Teorema 6.}\\
&\Rightarrow x \cdot 1 = 0 && \text{Axioma 12.}\\
&\Rightarrow x = 0 && \text{Axioma 11.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $x = 0 \vee y = 0$

Se debe demostrar que $x \cdot y = 0$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
0 \cdot y = 0 \wedge x \cdot 0 = 0 &\Rightarrow x \cdot y = 0 \vee x \cdot y = 0 && \text{Teorema 6 e Hipótesis.}\\
&\Rightarrow x \cdot y = 0
\end{aligned}$$

En el último paso se utiliza una regla de la lógica que se conoce como la ley de idempotencia, si se tiene un "O lógico" verdadero (recuerde que se partió de verdadero), entonces alguno de los dos debe ser verdadero, ¡pero ambos son iguales! La ley dice que $P \vee P \equiv P$.

$\therefore (\forall x, y \in \mathbb{R})[x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0]$. †

Este teorema es muy útil cuando se estén resolviendo ecuaciones en el capítulo 5, la única forma que una multiplicación dé como resultado cero, es que alguno de los factores sea cero.

Teorema 13. Regla de signos para el inverso aditivo

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)]$.
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[(-a) \cdot (-b) = a \cdot b]$.

Para iniciar, se demostrará que $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

$$\begin{aligned}
0 \cdot b = 0 &\Rightarrow ((-a) + a) \cdot b = 0 && \text{Teorema 12, Axioma 7}\\
&\Rightarrow (-a) \cdot b + a \cdot b = 0 && \text{Axioma 13}
\end{aligned}$$

Por lo que $(-a) \cdot b$ es el inverso aditivo de $a \cdot b$, que es único, es decir $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

De forma similar se demuestra que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ y, por la transitividad de la igualdad, se cumple que $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Para el segundo resultado se puede utilizar el primero:

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &= -(a \cdot (-b)) && \text{Resultado anterior.} \\
&= -(-(a \cdot b)) && \text{Resultado anterior.} \\
&= a \cdot b && \text{Teorema 7.}
\end{aligned}$$

Por lo que se demuestran ambos resultados. †

De forma resumida y abusando de la notación:

$$+ \cdot + = + \qquad\qquad - \cdot + = -$$
$$+ \cdot - = - \qquad\qquad - \cdot - = +$$

Para aprender y enseñar de una forma más sencilla la regla de signos, a veces se utiliza el siguiente juego de palabras:

$+ \cdot + = +$: El amigo de mi amigo es mi amigo.

$+ \cdot - = -$: El amigo de mi enemigo es mi enemigo.

$- \cdot + = -$: El enemigo de mi amigo es mi enemigo.

$- \cdot - = +$: El enemigo de mi enemigo es mi amigo.

Teorema 14. Sustracción

$(\forall a, b \in \mathbb{R}^*)[(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 15.

$0 = -0$.

Demostración (ejercicio).

Este teorema indica que el 0 no posee signo, como se profundizará más adelante.

Teorema 16.

$1^{-1} = 1$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 17.

$(\forall a \in \mathbb{R})[-a = -1 \cdot a]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 18.

$(-1) \cdot (-1) = 1$.

Demostración (ejercicio).

Este último teorema demuestra que $(-1)^{-1} = -1$.

2.1.2. Sustracción y división

Además de las dos operaciones básicas en $\mathbb{R}$, se definen otras dos operaciones a partir de ellas: la *sustracción*[10] y la *división*[11].

Definición 16. Sustracción

Se llamará **sustracción** de a por b, y se denotará $a - b$, a la operación definida por:

$$a - b = a + (-b)$$

Es decir, a a se le suma el inverso aditivo de b.

Al número a se le conoce como el *minuendo*[12] y a b se le denomina el *sustraendo*[13], el resultado es la *diferencia* o *resta*.

Definición 17. División

Se llamará **división** de a por b, y se denotará $a \div b$, a la operación definida por:

$$a \div b = a \cdot b^{-1}, \quad b \neq 0$$

Como notación se acepta que $a \div b = \dfrac{a}{b}$.

Es decir, el número a se multiplica por el inverso multiplicativo de b, el número a se conoce como el *dividendo*[14] y b se conoce como el *divisor*[15].

En la división de dos números $a \div b$, lo que se busca es determinar un número c (que se conoce como el *cociente*), tal que $a = b \cdot c$. En división entera, a veces no se puede hacer que dicho producto de exacto, por lo que se busca que el producto dé lo más cercano a a, pero siempre un número menor que a y se tiene un *residuo* r tal que $0 \leqslant r < b$, así, se cumple que

$$a = b \cdot c + r$$

[10] Del latín *subtrahō* o *subtrahere* que significa "sacar", es la acción y el efecto de sacar.

[11] Del latín *divisĭo*, forma sustantiva abstracta de *divĭsus* que significa "separado" o "dividido" mas el sufijo *sión* que simboliza la acción o el efecto, es decir, es la acción de separar en partes iguales.

[12] Del latín *minuendus*, gerundivo del verbo *minuĕre* (disminuir) que significa "el que ha de ser disminuido".

[13] Del latín *substrahendus*, gerundivo del verbo *subtrahō* (sacar o quitar) que significa "lo que se ha de quitar".

[14] Del latín *dividendus*, participio futuro pasivo del verbo *dividere* (dividir o repartir) que significa "lo que se ha de dividir".

[15] Del latín *divīsor*, con el mismo significado que en español: "el que divide".

Otra forma equivalente a la anterior es

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$$

Sobre el algoritmo de la división se profundizará más adelante.

Al escribir la división como una fracción $a \div b = \dfrac{a}{b}$ se acostumbra llamar a a el numerador[16] y a b el denominador[17].

En el fondo, la sustracción es una suma y el cociente es un producto, por lo tanto, cuando se tengan operaciones combinadas, la sustracción y el cociente tendrán la misma prioridad que la adición y el producto, respectivamente.

Se debe tener cuidado ya que la sustracción y la división no son operaciones conmutativas, es decir, en general $a - b \neq b - a$ y $a \div b \neq b \div a$. ¿Las demás propiedades se cumplen?

Teorema 19.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[a - b = -(b - a)]$.

Demostración (directa):

Se debe demostrar, que $a - b$ es el opuesto de $b - a$, para que sea el opuesto se debe cumplir que $(a - b) + (b - a) = 0$, vamos a demostrar que esto sucede.

$$\begin{aligned}
(a - b) + (b - a) &= (a + (-b)) + (b + (-a)) && \text{Definición 16.}\\
&= a + ((-b) + b) + (-a) && \text{Axioma 5.}\\
&= a + 0 + (-a) && \text{Axioma 7.}\\
&= a + (-a) && \text{Axioma 6.}\\
&= 0 && \text{Axioma 7.}
\end{aligned}$$

Así $(a - b) + (b - a) = 0$ por lo que $a - b$ es el opuesto de $b - a$, que es lo que se quería demostrar. †

Teorema 20.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[-a - b = -(a + b)]$.

Demostración (directa):

De igual forma que la demostración anterior, se quiere demostrar que $-a - b$ es el inverso aditivo de $a + b$, esto es, que $(-a - b) + (a + b) = 0$, demostremos que esto último es cierto.

$$\begin{aligned}
(-a - b) + (a + b) &= (-a) + (-b) + a + b && \text{Definición 16, Axioma 5.}\\
&= ((-a) + a) + ((-b) + b) && \text{Axioma 5.}\\
&= 0 + 0 && \text{Axioma 7.}\\
&= 0 && \text{Axioma 6.}
\end{aligned}$$

[16]Del latín *numerātor* que significa "el que numera", este es el que indica la cantidad de elementos que se toman de la unidad fraccionada.

[17]Del latín *denominātor* que significa "el que denomina", hace referencia al que da un nombre, en matemáticas es el que indica en cuántas partes se divide la unidad.

Por lo que $-a-b$ es, efectivamente, el inverso aditivo de $a+b$, esto es $-a-b=-(a+b)$. †

Teorema 21. Distributividad de la multiplicación con respecto a la sustracción

$(\forall a,b,c\in\mathbb{R})[(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c)]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot c &= (a+(-b))\cdot c && \text{Definición 16.}\\
&= a\cdot c+(-b)\cdot c && \text{Axioma 13.}\\
&= a\cdot c+-(b\cdot c) && \text{Teorema 13.}\\
&= a\cdot c-(b\cdot c) && \text{Definición 16.}
\end{aligned}$$

$\therefore\ (a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c)$. †

Este teorema nos indica que también se cumple la ley distributiva con respecto a la resta.

Teorema 22. Pasar a restar o sumar

$(\forall a,b,c\in\mathbb{R})[a+c=b\Leftrightarrow a=b-c]$.

Se realizará la demostración de forma directa (verificando en cada paso que se cumplen ambas direcciones).

$$\begin{aligned}
a+c=b &\Leftrightarrow (a+c)+(-c)=b+(-c) && \text{Teorema 1}\\
&\Leftrightarrow a+(c+(-c))=b-c && \text{Axioma 5, Definición 16}\\
&\Leftrightarrow a+0=b-c && \text{Axioma 7}\\
&\Leftrightarrow a=b-c && \text{Axioma 6}
\end{aligned}$$

$\therefore\ a+c=b\Leftrightarrow a=b-c$. †

Teorema 23. Pasar a dividir o multiplicar

$(\forall a,b\in\mathbb{R})(\forall c\in\mathbb{R}^*)\left[a\cdot c=b\Leftrightarrow a=\dfrac{b}{c}\right]$.

Demostración (ejercicio)

Es muy común que los estudiantes utilicen las reglas de "si un número está sumando entonces pasa a restar", "si un número está restando pasa a sumar", "si un número está multiplicando, pasa a dividir" o "si un números está dividiendo pasa a multiplicar", gracias a estos dos teoremas, podremos utilizarlas, pues ya están demostradas. Sí se recalca que se debe tener cuidado pues esto se le aplica a la operación principal de uno de los miembros de la igualdad (la operación que está más afuera, de menor prioridad o que se debe realizar de último).

Teorema 24. Adición de fracciones con igual denominador

$(\forall a,b\in\mathbb{R})(\forall c\in\mathbb{R}^*)\left[\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}\right]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c}+\frac{b}{c} &= a\cdot c^{-1}+b\cdot c^{-1} && \text{Definición 17.}\\
&= (a+b)\cdot c^{-1} && \text{Axioma 13.}\\
&= \frac{a+b}{c} && \text{Definición 17.}
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$. †

Para sumar dos fracciones con igual denominador, se suman los numeradores y se mantiene el denominador.

Teorema 25. Sustracción de fracciones con igual denominador

$$(\forall a,b\in\mathbb{R})(\forall c\in\mathbb{R}^*)\left[\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}\right].$$

Demostración (ejercicio).

Teorema 26. Multiplicación de fracciones

$$(\forall a,c\in\mathbb{R})(\forall b,d\in\mathbb{R}^*)\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right].$$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= (a\cdot b^{-1})\cdot(c\cdot d^{-1}) && \text{Definición 17.}\\
&= (a\cdot c)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) && \text{Axiomas 9 y 10.}\\
&= (a\cdot c)\cdot(b\cdot d)^{-1} && \text{Teorema 14.}\\
&= \frac{a\cdot c}{b\cdot d} && \text{Definición 17.}
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$. †

Es decir, para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{a\ \to}{b\ \to}\!\cdot\!\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Teorema 27. División de fracciones

$$(\forall a\in\mathbb{R})(\forall b,c,d\in\mathbb{R}^*)\left[\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\right].$$

Demostración (directa):

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=(a\cdot b^{-1})\div(c\cdot d^{-1}) \qquad \text{Definición 17.}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} && \text{Definición 17.}\\
&= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1}) && \text{Teorema 14.}\\
&= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d) && \text{Teorema 11.}\\
&= (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) && \text{Axiomas 10 y 9.}\\
&= (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)^{-1} && \text{Teorema 14.}\\
&= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} && \text{Definición 17.}
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ †

Si se quieren dividir dos fracciones entonces se multiplica en cruz (el numerador de la primera por el denominador de la segunda, luego el denominador de la primera por el denominador de la segunda.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Si la división está escrita como una fracción entonces se multiplican los extremos y los medios.

$$\left\{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right\} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Se debe tener cuidado si el numerador o el denominador de la división no es una fracción, esto para poder distinguir cuál es la línea fraccionaria de las distintas fracciones, en estos casos es conveniente escribir una más grande que las otras, así

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{2}$$

Mientras que

$$\frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{5}{6}$$

Teorema 28. Simplificación y amplificación de fracciones

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b, c \in \mathbb{R}^*)\left[\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b}\right].$

Demostración (directa):

$$
\begin{aligned}
\frac{a \cdot c}{b \cdot c} &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot c)^{-1} && \text{Definición 17.}\\
&= (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot (c^{-1})) && \text{Teorema 14.}\\
&= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot c^{-1}) && \text{Axiomas 10 y 9.}\\
&= (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 && \text{Axioma 12.}\\
&= a \cdot b^{-1} && \text{Axioma 11.}\\
&= \frac{a}{b} && \text{Definición 17.}
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b}$ †

Así, si se tiene el mismo factor en el numerador y en el denominador, entonces dicho factor se puede simplificar.

$$\frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Nuevamente se hace la advertencia que la operación del numerador y el denominador debe ser multiplicación y se simplifica uno de sus factores, se debe tener cuidado con expresiones como $\dfrac{1+2\cdot 3}{5 \cdot 3}$, pues en este caso el 3 no es posible simplificarlo ya que en el numerador la operación principal (de menor prioridad o última en realizarse) es adición y no multiplicación.

Esta regla también permite amplificar fracciones, por ejemplo

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Teorema 29. Adición de fracciones con distinto denominador (primera versión)

$$(\forall a, c \in \mathbb{R})(\forall b, d \in \mathbb{R}^*) \left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right].$$

Demostración (directa)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} && \text{Teorema 28.} \\ &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} && \text{Teorema 24.} \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$ †

Esta opción para realizar la suma es muy fácil de recordar, pues sólo se debe multiplicar en cruz y sumar los resultados para obtener el nuevo numerador y multiplicar los denominadores para el nuevo denominador, también es muy fácil de escribir, sin embargo, si se realiza de esta forma no se obtiene un resultado simplificado.

Posteriormente se verá una versión mejorada de este teorema, muy útil si los cálculos se hacen sin ayuda de una calculadora, donde se utiliza el mínimo común múltiplo de c y d, que se denotará $mcm(c, d)$, adelantando el resultado que se verá de manera posterior:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{mcm(b,d)}{b} + c \cdot \frac{mcm(b,d)}{d}}{mcm(b, d)}$$

Teorema 30. Sustracción de fracciones con distinto denominador (primera versión)

$$(\forall a, c \in \mathbb{R})(\forall b, d \in \mathbb{R}^*) \left[\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}\right].$$

Demostración (ejercicio).

Teorema 31. Igualdad de fracciones

$(\forall a, c \in \mathbb{R})(\forall b, d \in \mathbb{R}^*)\left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 32. Inverso multiplicativo de una fracción

$(\forall a, b \in \mathbb{R}^*)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 33. Opuesto del inverso multiplicativo

$(\forall a \in \mathbb{R})\left[-(a^{-1}) = (-a)^{-1}\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 34. Inverso aditivo de una fracción

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)\left[-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 35.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)\left[\frac{a}{b^{-1}} = a \cdot b\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 36. Inverso multiplicativo como fracción

$(\forall b \in \mathbb{R}^*)\left[b^{-1} = \frac{1}{b}\right].$

Demostración (ejercicio)

Teorema 37. División por 1

$(\forall a \in \mathbb{R})\left[\frac{a}{1} = a\right].$

Demostración (ejercicio)

Este último teorema es el que nos permite escribir un número entero como racional, por ejemplo, $5 = \frac{5}{1}$, así, el 5 es natural, entero y racional.

2.1.3. Axiomas de orden

Anteriormente se indicó que el conjunto de los números reales (y sus subconjuntos) son ordenados, se mencionó además que esto significa que en $\mathbb{R}$ es posible indicar si un número es menor, mayor o igual a otro, en esta sección se profundizará más sobre este concepto.

Se va a iniciar asumiendo que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío, al que se le llamará el *conjunto de los números reales positivos* y que se denotará con $\mathbb{R}^+$. Dicho conjunto cumple los siguientes axiomas de orden.

Axioma 14. Cerradura de la adición en $\mathbb{R}^+$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)[a + b \in \mathbb{R}^+]$.

Axioma 15. Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}^+$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)[a \cdot b \in \mathbb{R}^+]$.

Axioma 16. Ley de tricotomía

$(\forall a \in \mathbb{R})$ se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones

1. $a \in \mathbb{R}^+$.
2. $a = 0$.
3. $-a \in \mathbb{R}^+$.

La tercera condición de la ley de tricotomía es el que asegura la existencia de un subconjunto de los números reales denominado el *conjunto de los números reales negativos*. Esta ley también se podría escribir de manera reducida como

$$(\forall a \in \mathbb{R})[a \in \mathbb{R}^+ \veebar a = 0 \veebar a \in \mathbb{R}^-]$$

Definición 18. Conjunto de los números reales negativos

El *conjunto de los números reales negativos* se denota por $\mathbb{R}^-$ y se define

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / -x \in \mathbb{R}^+\}$$

A los números que pertenecen a $\mathbb{R}^+$ se le conocen como *números positivos* y aquellos que pertenecen a $\mathbb{R}^-$ se lo conocen como *números negativos*.

El cero no pertenece a $\mathbb{R}^+$ ni a $\mathbb{R}^-$, pues ya se había demostrado que $0 = -0$, por ello es que se maneja aparte de los demás números reales y se dice que cero no posee signo (no es positivo ni negativo).

De esta forma $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

Definición 19. Relación $a < b$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})[a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+]$$

La relación $a < b$ se lee "a es menor que b".

La relación $a < b$ es equivalente a escribirla como $b > a$, que se leería "b es mayor que a", ambos casos son equivalentes e indicarían que a es menor que b o que b es mayor que a. Es decir $a < b \Leftrightarrow b > a$.

Definición 20. Relación $a \leqslant b$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})[a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \vee a = b]$$

La relación $a \leqslant b$ se lee "a es menor o igual que b".

De forma similar $a \leqslant b \Leftrightarrow b \geqslant a$, esta segunda se lee "$b$ es mayor o igual que a".

Como notación, se cumple que

$$a < b < c \equiv a < b \wedge b < c$$

$$a \leqslant b \leqslant c \equiv a \leqslant b \wedge b \leqslant c$$

$$a < b \leqslant c \equiv a < b \wedge b \leqslant c$$

$$a \leqslant b < c \equiv a \leqslant b \wedge b < c$$

De igual forma se puede definir para $>$ y $\geqslant$.

Teorema 38. Orden de los números reales

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[a < b \veebar a = b \veebar a > b]$.

Demostración (directa):

Por la ley de tricotomía, para el número $b - a \in \mathbb{R}$, sólo se puede tener una de tres opciones:

1. $b - a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a < b$.
2. $b - a = 0 \Rightarrow b = a$.
3. $-(b - a) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -b + a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow b < a \Rightarrow a > b$.

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})[a < b \veebar a = b \veebar a > b]$. †

Es gracias a este teorema que se dice que los números reales son *ordenados*, esto significaba que, dados dos números reales, era posible indicar si uno es menor, mayor o igual al otro.

Teorema 39.

1. $(\forall a \in \mathbb{R})[a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+]$.
2. $(\forall a \in \mathbb{R})[a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^-]$.

Demostración (se demostrará el segundo de manera directa).

$$\begin{aligned} a < 0 &\Leftrightarrow 0 - a \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 19.} \\ &\Leftrightarrow -a \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 6.} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^- \qquad \text{Definición 18.}$$

$\therefore (\forall a \in \mathbb{R})[a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^-]$. †

Ejercicio 2.

Demuestre cada uno de los siguientes teoremas:

1. $(\forall a \in \mathbb{R}^*)[a \cdot a > 0]$.
2. $(\forall a \in \mathbb{R})[a \cdot a \geqslant 0]$ (utilice el resultado del ejercicio anterior).
3. $1 > 0$ (utilice el resultado del ejercicio tras anterior).
4. $(\forall x \in \mathbb{R})[x \cdot x + 1 > 0]$ (utilice los resultados anteriores).

El tercer ejercicio indica que $1 \in \mathbb{R}^+$ o que es positivo, este resultado se utilizará más adelante.

Teorema 40.

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[a \cdot b > 0 \wedge a > 0 \Rightarrow b > 0]$.
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[a \cdot b > 0 \wedge a < 0 \Rightarrow b < 0]$.
3. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[a \cdot b < 0 \wedge a > 0 \Rightarrow b < 0]$.
4. $(\forall a, b \in \mathbb{R})[a \cdot b < 0 \wedge a < 0 \Rightarrow b > 0]$.

Demostración (Se demostrará el segundo de manera directa, los demás son similares)

Hipótesis:

1. $a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
2. $a < 0 \Rightarrow -a \in \mathbb{R}^+$

Se debe demostrar que $b < 0$, es decir, que $-b \in \mathbb{R}^+$.

Por la ley de tricotomía, b sólo tiene tres opciones, $b < 0 \veebar b = 0 \veebar b > 0$, analicemos cada una.

- $b > 0$: En este caso $b \in \mathbb{R}^+$, por tanto:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b \in R^+ &\Rightarrow -(a \cdot b) \in R^+ && \text{Axioma 14 y Teorema 13.} \\ &\Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

  Que contradice la hipótesis 1, se descarta la opción de que $b > 0$.

- $b = 0$: En este caso $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$, que contradice la hipótesis 1 ($0 \notin \mathbb{R}^+$).

En este punto a b sólo le queda la opción $b < 0$, no haría falta probarla pues b debe cumplir alguna de las tres opciones y las dos anteriores no son posibles, sin embargo, se puede notar que sí se cumple.

- $b < 0$: En este caso $-b \in \mathbb{R}^+$, por tanto:

$$(-a) \cdot (-b) \in R^+ \Rightarrow a \cdot b \in R^+ \qquad \text{Axioma 14 y Teorema 13.}$$

  Que cumple con la hipótesis 1.

Por lo que, la única opción es que $b < 0$. †

Los siguientes teoremas se enunciarán con la desigualdad $<$, pero también son válidos para las demás desigualdades haciendo los ajustes necesarios (ver ejercicios 3).

Teorema 41. Transitividad

$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned} a < b \wedge b < c &\Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c - b \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 19.} \\ &\Rightarrow (b-a) + (c-b) \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 14} \\ &\Rightarrow b - a + c - b \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 5.} \\ &\Rightarrow c - a \in \mathbb{R}^+ && \text{Axiomas 4, 5 y 7.} \\ &\Rightarrow a < c && \text{Definición 19.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c]$. †

Teorema 42. Sumar a ambos lados de una desigualdad

$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \Leftrightarrow a + c < b + c]$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 19.} \\ &\Leftrightarrow b + c - a - c \in \mathbb{R}^+ && \text{Axiomas 4, 6 y 7.} \\ &\Leftrightarrow (b+c) - (a+c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 5 y Teorema 20.} \\ &\Leftrightarrow a + c < b + c && \text{Definición 19.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \Leftrightarrow a + c < b + c]$ †

Teorema 43. Pasar a sumar o restar

$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a + c < b \Leftrightarrow a < b - c]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 44. Multiplicar o dividir por un número positivo

$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^+)[a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 45. Multiplicar o dividir por un número negativo

$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^-)[a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c]$.

Demostración (directa):

Por hipótesis $c \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow -c \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
a < b &\Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 19 y Teorema 40 para ``}\Leftarrow\text{''.}\\
&\Leftrightarrow (b-a)\cdot -c \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 15 y Teorema 39.}\\
&\Leftrightarrow (b\cdot -c) - (a\cdot -c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Teorema 21.}\\
&\Leftrightarrow -(b\cdot c) + (a\cdot c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Teorema 13.}\\
&\Leftrightarrow (a\cdot c) - (b\cdot c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 4.}\\
&\Leftrightarrow b\cdot c < a\cdot c && \text{Definición 19.}\\
&\Leftrightarrow a\cdot c > b\cdot c
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^-)[a < b \Leftrightarrow a\cdot c > b\cdot c]$. †

Teorema 46. Adición de desigualdades

$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
a < b \wedge c < d &\Rightarrow (b-a) \in \mathbb{R}^+ \wedge (d-c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 19.}\\
&\Rightarrow (b-a) + (d-c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 14.}\\
&\Rightarrow (b+d) - (a+c) \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 5 y Teorema 21.}\\
&\Rightarrow a + c < b + d && \text{Definición 19.}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d]$. †

Teorema 47. Multiplicación de desigualdades

1. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+)\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a\cdot c < b\cdot d]$.
2. $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^-)\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a\cdot c > b\cdot d]$.
3. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)(\forall c, d \in \mathbb{R}^-)\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a\cdot d > b\cdot c]$.

Demostración (se realizará el segundo de manera directa, las demás se dejan como ejercicio):

$$\begin{aligned}
a < b \wedge c < d &\Rightarrow a\cdot c > b\cdot c \wedge b\cdot c > b\cdot d && \text{Teorema 45.}\\
&\Rightarrow a\cdot c > b\cdot d \in \mathbb{R}^+ && \text{Teorema 41.}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^-)\,[a < b \wedge c < d \Rightarrow a\cdot c > b\cdot d]$. †

Ejercicio 3.

Enuncie y demuestre los teoremas del 41 al 47 para las desigualdades $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.

Teorema 48.

$(\forall a \in \mathbb{R}^+)[a^{-1} > 0]$.

Demostración (directa).

Por hipótesis $a \in \mathbb{R}^+$ y ya se había demostrado que $1 \in \mathbb{R}^+$ (ejercicios 2), así

$$\begin{aligned} a^{-1} \cdot a = 1 &\Rightarrow a^{-1} \cdot a \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+ && \text{Teorema 40.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a \in \mathbb{R}^+)[a^{-1} > 0]$. †

Teorema 49.

$(\forall a \in \mathbb{R}^-)[a^{-1} < 0]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 50. Pasar a multiplicar o dividir un número positivo

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^+)\left[a \cdot c < b \Leftrightarrow a < \frac{b}{c}\right].$$

Demostración (directa).

Por hipótesis $c \in \mathbb{R}^+$, por el Teorema 48, $c^{-1} \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} a \cdot c < b &\Leftrightarrow a \cdot c \cdot c^{-1} < b \cdot c^{-1} && \text{Teorema 44.} \\ &\Leftrightarrow a < \frac{b}{c} && \text{Axiomas 11, 12 y definición 17.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^+)\left[a \cdot c < b \Leftrightarrow a < \frac{b}{c}\right]$. †

Teorema 51. Pasar a multiplicar o dividir un número negativo

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}^-)\left[a \cdot c < b \Leftrightarrow a > \frac{b}{c}\right].$$

Demostración (ejercicio).

Teorema 52. Reglas de signos para la multiplicación

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\,[a \cdot b > 0]$.
2. $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^-)\,[a \cdot b < 0]$.
3. $(\forall a \in \mathbb{R}^-)(\forall b \in \mathbb{R}^+)\,[a \cdot b < 0]$.
4. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)\,[a \cdot b > 0]$.

Demostración (se realizará el segundo de manera directa, las demás se dejan como ejercicio).

Por hipótesis, $a \in \mathbb{R}^+$, además $b \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow -b \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^+ \wedge -b \in \mathbb{R}^+ &\Rightarrow a \cdot (-b) \in R^+ && \text{Axioma 15.} \\ &\Rightarrow -(a \cdot b) \in R^+ && \text{Teorema 13.} \\ &\Rightarrow a \cdot b < 0 && \text{Teorema 39.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^-)\,[a \cdot b < 0]$. †

Teorema 53. Reglas de signos para la división

1. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left[\dfrac{a}{b} > 0\right]$.
2. $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^-)\left[\dfrac{a}{b} < 0\right]$.
3. $(\forall a \in \mathbb{R}^-)(\forall b \in \mathbb{R}^+)\left[\dfrac{a}{b} < 0\right]$.
4. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)\left[\dfrac{a}{b} > 0\right]$.

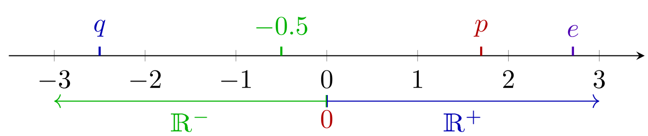
Demostración (se realizará el tercero de manera directa, los demás dejan como ejercicio).

$$
\begin{aligned}
a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^+ &\Rightarrow -a \in \mathbb{R}^+ \wedge b^{-1} \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 18 y Teorema 48.}\\
&\Rightarrow (-a) \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^+ && \text{Axioma 15.}\\
&\Rightarrow -(a \cdot b^{-1}) \in \mathbb{R}^+ && \text{Teorema 13.}\\
&\Rightarrow -\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{R}^+ && \text{Definición 17.}\\
&\Rightarrow \frac{a}{b} < 0 && \text{Teorema 39.}
\end{aligned}
$$

$\therefore (\forall a \in \mathbb{R}^-)(\forall b \in \mathbb{R}^+)\left[\dfrac{a}{b} < 0\right]$ †

Representación de los números reales en la recta numérica

Un concepto fundamental en geometría analítica es la representación de todos los números reales mediante puntos de una recta dirigida. En general, cualquier número positivo p se representa con el punto que se encuentra p unidades a la derecha del origen, y un número negativo q se representa con el punto q que se encuentra q unidades a la izquierda del origen. Además, se supone que todo número real corresponde con un punto en la recta y, recíprocamente, que todo punto en la recta corresponde a un número real. Esta relación del conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta dirigida se llama **correspondencia uno a uno**.



2.1.4. Valor absoluto de un número real

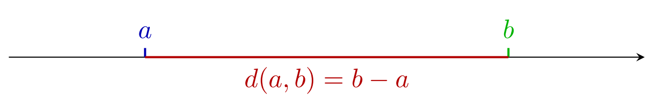
Otro concepto matemático que usaremos al tratar con los números reales, es el del **valor absoluto** de un número real, se analizará la definición y sus propiedades.

Definición 21. Distancia entre dos números reales

Sean a y b dos números reales cualesquiera, tales que $a \leqslant b$, la distancia entre a y b se denota por $d(a, b)$ y se define como

$$d(a, b) = b - a$$

Esto es, al número mayor (o igual) se le resta el número menor.



Ejemplo 43.

1. La distancia que hay del 8 al 3 es $d(8,3) = 8 - 3 = 5$ unidades.
2. $d(-6,-3) = (-3) - (-6) = -3 + 6 = 3$ unidades.
3. $d(-1,7) = 7 - (-1) = 7 + 1 = 8$ unidades.

Teorema 54.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b]$.

Demostración (directa, se debe demostrar en ambas direcciones).

"$\Rightarrow$" Por la ley de tricotomía sólo se tienen las opciones $a < b \vee a > b \vee a = b$.

Si $a \leqslant b$ entonces:

$$\begin{aligned} d(a,b) = 0 &\Rightarrow b - a = 0 && \text{Definición 21.} \\ &\Rightarrow b = a && \text{Teorema 22 y Axioma 6.} \end{aligned}$$

Si $a > b$ entonces:

$$\begin{aligned} d(a,b) = 0 &\Rightarrow a - b = 0 && \text{Definición 21.} \\ &\Rightarrow a = b && \text{Teorema 22 y Axioma 6.} \end{aligned}$$

Que contradice que $a > b$. Por lo que, la única posibilidad es que $a = b$.

"$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} a = b &\Rightarrow b - a = 0 && \text{Teorema 22 y Axioma 6.} \\ &\Rightarrow d(a,b) = 0 && \text{Definición 21.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b]$. †

Teorema 55.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) \geqslant 0]$.

Demostración (directa):

Por la ley de tricotomía sólo se tienen las opciones $a < b \vee a > b \vee a = b$.

Si $a < b$, entonces $d(a,b) = b - a \in \mathbb{R}^+$ (Definición 19), es decir, $d(a,b) > 0$.

Si $a > b$, entonces $d(a,b) = a - b \in \mathbb{R}^+$ (Definición 19), es decir, $d(a,b) > 0$.

Si $a = b$, ya se demostró que $d(a,b) = 0$.

Por lo tanto $d(a,b) \geqslant 0$. †

Teorema 56.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = d(b,a)]$.

Demostración (directa):

Por la ley de tricotomía sólo se tienen las opciones $a < b \vee a > b \vee a = b$.

Si $a > b$ entonces $d(a,b) = a - b = d(b,a)$.

Si $a \leqslant b$ entonces $d(a,b) = b - a = d(b,a)$.

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = d(b,a)]$. †

Teorema 57.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)]$.

Demostración (directa).

Para demostrar este resultado en este momento, se deben analizar muchos casos, se realizarán dos y se dejan los demás como ejercicio.

I. Caso: $a \leqslant b \leqslant c$

$$\begin{aligned} d(a,b) &= b - a \\ &= c - a + b - c \\ &= d(a,c) + d(c,b) \end{aligned}$$

II. Caso: $b \leqslant a \leqslant c$

$$\begin{aligned} d(a,b) &= a - b \\ &= a - c + c - b \\ &= -(c-a) + (c-b) \\ &= -d(a,c) + d(c,b) && d(a,c) \geqslant 0 \\ &\leqslant -d(a,c) + d(c,b) + 2d(a,c) && \Rightarrow 2d(a,c) \geqslant 0 \\ &\leqslant d(a,c) + d(c,b) && \Rightarrow -d(a,c) + d(c,b) + 2d(a,c) \geqslant -d(a,c) + d(c,b) \end{aligned}$$

III. Caso: $b \leqslant c \leqslant a$ (ejercicio)

IV. Caso: $a \leqslant c \leqslant b$ (ejercicio)

V. Caso: $c \leqslant b \leqslant a$ (ejercicio)

VI. Caso: $c \leqslant a \leqslant b$ (ejercicio)

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)]$. †

A una función que cumple los cuatro resultados anteriores (como la distancia d) se le conoce como una *métrica* y se dice que $\mathbb{R}$ con dicha función forma un *espacio métrico*.

Definición 22. Valor absoluto

Sea x un número real cualquiera, el valor absoluto de x se denota como $|x|$ y se define como

$$|x| = d(x,0)$$

Esto es, la distancia que hay del número al cero.

Teorema 58. Valor absoluto

$(\forall x \in \mathbb{R})\left[|x| = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array}\right.\right].$

Demostración (directa):

- Si $x > 0$ entonces $|x| = d(x,0) = x - 0 = x$.
- Si $x = 0$, entonces $|x| = d(0,0) = 0 - 0 = 0 = x$.
- Si $x < 0$ entonces $|x| = d(x,0) = 0 - x = -x$.

$\therefore (\forall x \in \mathbb{R})\left[|x| = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array}\right.\right].$ †

De forma más compacta se puede enunciar el teorema anterior como:

$$(\forall x \in \mathbb{R})[(x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x) \vee (x < 0 \Rightarrow |x| = -x)]$$

Teorema 59.

$(\forall x \in \mathbb{R})[|x| = |-x|]$.

Demostración (directa)

I. Caso: Si $x \geqslant 0$.

Si $x \geqslant 0 \Rightarrow -x \leqslant 0$, entonces

$$\begin{aligned} |x| &= x && \text{Definición 22.} \\ &= -(-x) && \text{Teorema 7.} \\ &= |-x| && \text{Definición 22.} \end{aligned}$$

II. Caso: Si $x < 0$.

Si $x < 0 \Rightarrow -x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |x| &= -x && \text{Definición 22.} \\ &= |-x| && \text{Definición 22.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall x \in \mathbb{R})[|x| = |-x|]$. †

Teorema 60.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = |a-b|]$.

Demostración (directa)

I. Caso: Si $a \leqslant b$.

Si $a \leqslant b \Rightarrow b - a \geqslant 0$, entonces

$$\begin{aligned} d(a,b) &= b - a && \text{Definición 21.} \\ &= |b-a| && \text{Definición 22.} \\ &= |-(b-a)| && \text{Teorema anterior.} \\ &= |a-b| && \text{Teoremas 20, 7 y Axioma 4.} \end{aligned}$$

II. Caso: Si $a > b$.

Si $a > b \Rightarrow a - b > 0$, entonces

$$\begin{aligned} d(a,b) &= a - b && \text{Definición 21.} \\ &= |a-b| && \text{Definición 22.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})[d(a,b) = |a-b|]$. †

Teorema 61.

$(\forall x \in \mathbb{R})[|x| \geqslant 0]$.

Demostración (directa)

$$\begin{aligned} |x| &= d(x,0) && \text{Definición 22.} \\ &\geqslant 0 && \text{Teorema 55.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall x \in \mathbb{R})[|x| \geqslant 0]$. †

Teorema 62.

$(\forall x \in \mathbb{R})[|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$.

Demostración (ejercicio, utilice el Teorema 54).

Teorema 63.

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[|x+y| \geqslant |x| + |y|]$.

Demostración (ejercicio, utilice el Teorema 57).

Teorema 64.

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[|x| - |y| \geqslant |x-y|]$.

Demostración (directa)

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| && \text{Axiomas 6 y 7.} \\ &\geqslant |x-y| + |y| && \text{Teorema anterior.} \end{aligned}$$

Así $|x| \geqslant |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \geqslant |x-y|$. †

Teorema 65.

$(\forall x, y \in \mathbb{R})[|x \cdot y| = |x| \cdot |y|]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 66.

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[|x|^{-1} = |x^{-1}|]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 67.

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^*)\left[\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}\right]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 68.

$(\forall x \in \mathbb{R})\left[-|x| \leqslant x \leqslant |x|\right]$.

Demostración (directa).

Si $x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x$, además $-x < 0$, así

$$-|x| = -x < 0 \leqslant x = |x|$$

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, además $-x > 0$, así

$$-|x| = -(-x) = x < 0 < -x = |x|$$

En ambos casos se cumple que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. †

Teorema 69.

Sea $k \in \mathbb{R}^+$, entonces

1. $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k]$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k]$.
3. $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k]$.

Demostración (se realizará la demostración del primer y segundo resultado, el tercero queda como ejercicio).

En todos los casos considere que $k \in \mathbb{R}^+$ y, por lo tanto $-k \in \mathbb{R}^-$.

1. $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k]$

   Se debe demostrar en ambas direcciones.

   "$\Rightarrow$" Por la ley de tricotomía $x \geqslant 0 \vee x < 0$.

   Si $x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x$, así

$$|x| = k \Rightarrow x = k$$

   Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, así

$$-x = k \Rightarrow x = -k$$

   $\therefore x = k \vee x = -k$.

   "$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} x = k \vee x = -k &\Rightarrow |x| = |k| \vee |x| = |-k| \\ &\Rightarrow |x| = |k| \vee |x| = |k| && \text{Teorema 59.} \\ &\Rightarrow |x| = |k| \end{aligned}$$

2. $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k]$

   Se debe demostrar en ambas direcciones.

   "$\Rightarrow$" Por la ley de tricotomía $x \geqslant 0 \vee x < 0$.

   Si $x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x$, así

$$\begin{aligned} |x| < k &\Rightarrow x < k \\ &\Rightarrow -k < 0 \leqslant x < k \end{aligned}$$

   Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, así

$$\begin{aligned} -x < k &\Rightarrow -(-x) > -k && \text{Teoema 45} \\ &\Rightarrow k > 0 > x > -k \end{aligned}$$

   En ambos casos $-k < x < k$.

   "$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} -k < x < k &\Rightarrow -k < x \wedge x < k \\ &\Rightarrow k > -x \wedge x < k && \text{Teorema 45} \end{aligned}$$

   Si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x$, así $x < k \Rightarrow |x| < k$.

   Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, así $k > -x \Rightarrow k > |x|$.

   En ambos casos se obtiene que $|x| < k$.

$\therefore (\forall x \in \mathbb{R})[|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k]$ y $(\forall x \in \mathbb{R})[|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k]$. †

Teorema 70.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})[0 \leqslant a < n \wedge 0 \leqslant b < n \Rightarrow |a - b| < n]$.

Demostración (ejercicio).

Ejemplo 44.

La magnitud de 6 es 6, y la magnitud de -7 es 7. Esto se puede expresar como: $|6| = 6$ y $|-7| = 7$.

Ejemplo 45.

1. $|\pi| = \pi$.
2. $\left|\frac{7}{5}\right| = \frac{7}{5}$.
3. $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.
4. $|-e| = e$.

Ejemplo 46.

Si se sabe que $a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b$, simplifique la expresión $\dfrac{|a| + |b|}{|a - b|}$.

Como $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y como $b > 0$ entonces $|b| = b$.

Además, si $a < b$ entonces $a - b < 0$, por lo tanto $|a - b| = -(a - b)$, así

$$\begin{aligned} \frac{|a| + |b|}{|a - b|} &= \frac{-a + b}{-(a - b)} \\ &= \frac{\cancel{-a + b}}{\cancel{-a + b}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{|a| + |b|}{|a - b|} = 1$ †

Ejemplo 47.

Si se sabe que $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 3$ y $b < -1$, simplifique la expresión $\dfrac{|2(a - 3)(b - 3)|}{-|ab| + 2a - 3b - 6}$.

$$\frac{|(a - 3)(b - 3)|}{-|ab| + 2a - 3b - 6} = \frac{|a - 3| \cdot |b - 3|}{-|a| \cdot |b| + 2a - 3b - 6}$$

Si $a > 3 \Rightarrow a - 3 > 0$ por lo que $|a - 3| = a - 3$.

Además si $b < -1 \Rightarrow b - 3 < -4$ ($b - 3$ es negativo), así $|b + 3| = -(b + 3)$.

Por último, si $a > 3$ (a es positivo) entonces $|a| = a$ y si $b < -1$ (b es negativo) entonces $|b| = -b$, así

$$\begin{aligned}
\frac{|a-3|\cdot|b+3|}{-|a|\cdot|b|+2a-3b-6} &= \frac{(a-3)\cdot -(b+3)}{-a\cdot -b+2a-3b-6}\\
&= \frac{-(a-3)(b+3)}{ab+2a-3b-6}\\
&= \frac{-(a-3)(b+3)}{a(b+2)-3(b+2)}\\
&= \frac{-\cancel{(a-3)}(b+3)}{(b+2)\cancel{(a-3)}}\\
&= \frac{-(b+3)}{b+2}
\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{|2(a-3)(b-3)|}{-|ab|+2a-3b-6} = \dfrac{-(b+3)}{b+2}$. †

Ejercicio 4.

1. Si $a > 5$, determine $|4-a|$. R/ $a-4$
2. Considerando que $x < -3$, determine $|x|$. R/ $-x$
3. Si se sabe que $a < b < 0$, simplifique la expresión $\dfrac{|a+b|-|a-b|}{|a|+|b|}$ R/ $\dfrac{-2a}{a+b}$

2.1.5. Potencias. Definición y propiedades

En la multiplicación encontramos a menudo el caso de un número que debe ser multiplicado por sí mismo varias veces. En vez de escribir este número repetidamente, utilizamos la notación a^n, donde a es el número real y n es el número de veces que aparece en el producto.

Definición 23. Potencia

La n-ésima potencia de a se denota a^n y se define:

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\left[a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ veces}}\right]$$

Se define además

$$(\forall a \in \mathbb{R}^*)[a^0 = 1]$$

El número a es llamado **base**, el número n es llamado **exponente**; la expresión a^n se lee como: *"la n-ésima potencia de a"* o *"a elevado a la n"*.

Definir que $a^0 = 1$, tiene mucho sentido pues si

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ veces}} = 1\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ veces}}$$

entonces

$$a^0 = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{0 \text{ veces}} = 1$$

Con las propiedades que se verán más adelante se puede justificar de la siguiente forma

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$$

Siempre es importante recalcar que la propiedad $a^0 = 1$ es para cualquier a real, excepto el cero, es decir 0^0 no está definido.

La potencia, al ser un producto repetido, tiene prioridad sobre el producto y la división, es por esta razón que

$$-a^n = -1 \cdot a^n = -(a^n)$$

Ejemplo 48.

Los siguientes son ejemplos de potencias

1. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$ (la quinta potencia de tres).
2. $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^4$ (la cuarta potencia del opuesto de siete).
3. $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \left(\frac{7}{5}\right)^8$ (la octava potencia de siete quintos).
4. $-3^6 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$ (el opuesto de la sexta potencia de tres).

Definición 24. Potencia con exponente negativo

$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}) \left[a^{-n} = (a^{-1})^n\right]$.

Esto nos indica que al tener un exponente negativo, se obtiene primero el inverso multiplicativo del número y ese inverso se eleva a la n.

En los siguientes teoremas, más que demostraciones, lo que se muestran son justificaciones, la mayoría de demostraciones de este tema se deben realizar por inducción, si ya conoce este método, puede hacerlas de esa forma, en el anexo D.

Teorema 71. Multiplicación de potencias de igual base

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}_0) \left[a^m \cdot a^n = a^{m+n}\right]$.

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ veces}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}) && \text{Definición 23.} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(m+n) \text{ veces}} && \text{Axioma 10.} \\
&= a^{m+n} && \text{Definición 23.}
\end{aligned}$$

$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. †

Para realizar la multiplicación de potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.

Teorema 72. División de potencias de igual base

$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall m, n \in \mathbb{N}_0)\left[\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}\right].$

Demostración (ejercicio).

Para realizar la división de potencias de igual base, se conserva la base y se restan los exponentes.

Teorema 73. Potencia de una potencia

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}_0)\left[(a^m)^n = a^{m\cdot n}\right].$

Demostración (directa):

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ veces}} && \text{Definición 23.}\\
&= \underbrace{(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m \text{ veces}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m \text{ veces}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m \text{ veces}})\cdots(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m \text{ veces}})}_{n \text{ veces}} && \text{Definición 23.}\\
&= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m\cdot n \text{ veces}} && \text{Axioma 10.}\\
&= a^{m\cdot n} && \text{Definición 23.}
\end{aligned}
$$

$\therefore (a^m)^n = a^{m\cdot n}$ †

Para realizar la potencia de una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Teorema 74. Potencia de una multiplicación

$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n\right].$

Demostración (directa):

$$
\begin{aligned}
(a\cdot b)^n &= (\underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdots(a\cdot b)}_{n \text{ veces}}) && \text{Definición 23.}\\
&= (\underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b\cdots a\cdot b}_{n \text{ veces}}) && \text{Axioma 5.}\\
&= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ veces}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdots b}_{n \text{ veces}} && \text{Axioma 9.}\\
&= a^n\cdot b^n && \text{Definición 23.}
\end{aligned}
$$

$\therefore (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n.$ †

Teorema 75. Potencia con exponente negativo

$$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right].$$

Demostración (ejercicio).

Si se tiene un exponente negativo, entonces se convierte en una fracción con la potencia con el exponente positivo en el denominador.

Teorema 76. Potencia de una fracción

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\right].$$

Demostración (ejercicio).

Para la potencia de una fracción, se eleva el numerador y el denominador al exponente.

Teorema 77. Potencia con exponente negativo de una fracción

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}\right].$$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^n && \text{Definición 24.}\\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^n && \text{Teorema 32.}\\
&= \frac{b^n}{a^n} && \text{Teorema 76.}
\end{aligned}$$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$. †

Para realizar una potencia con exponente negativo de una fracción, se invierte el numerador y el denominador de la fracción y cada uno de ellos se eleva al exponente.

Teorema 78. Primer fórmula notable

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right]$$

Demostración(directa).

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && \text{Definición 23.}\\
&= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b && \text{Axioma 13.}\\
&= (a\cdot a + b\cdot a) + (a\cdot b + b\cdot b) && \text{Axioma 13.}\\
&= a^2 + (a\cdot b + a\cdot b) + b^2 && \text{Definición 23 y Axiomas 4 y 5.}\\
&= a^2 + (1+1)\cdot a\cdot b + b^2 && \text{Axioma 13.}
\end{aligned}$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. †

Teorema 79. Segunda fórmula notable

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\right]$

Demostración(ejercicio).

Teorema 80. Tercer fórmula notable

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2\right]$

Demostración(ejercicio).

Teorema 81.

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3\right]$

Demostración(ejercicio).

Teorema 82.

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3\right]$

Demostración(ejercicio).

Teorema 83.

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right]$

Demostración(ejercicio).

Teorema 84.

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \left[(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\right]$

Demostración(ejercicio).

Ejemplo 49.

Simplifique las expresión $\left(\dfrac{a^3 t}{b^2 x}\right)^{-2}$, donde las variables son distintas de cero.

$$\left(\frac{a^3 t}{b^2 x}\right)^{-2} = \left(\frac{b^2 x}{a^3 t}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b^2x)^2}{(a^3t)^2} \\
&= \frac{b^4x^2}{a^6t^2}
\end{aligned}
$$

$\therefore \left(\dfrac{a^3t}{b^2x}\right)^{-2} = \dfrac{b^4x^2}{a^6t^2}.$ †

Ejemplo 50.

Simplifique las expresión $(-a^0b^2c)^{-3}$, donde las variables son distintas de cero.

$$
\begin{aligned}
(-a^0b^2c)^{-3} &= \left(\frac{1}{-a^0b^2c}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{-1\cdot b^2c}\right)^3 \\
&= \frac{1^3}{(-1\cdot b^2c)^3} \\
&= \frac{1}{-1\cdot b^6c^3} \\
&= \frac{-1}{b^6c^3}
\end{aligned}
$$

$\therefore (-a^0b^2c)^{-3} = \dfrac{-1}{b^6c^3}.$ †

Ejemplo 51.

Simplifique la expresión $\dfrac{100^{93}}{25^{95}\cdot -2^{192}}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{100^{93}}{25^{95}\cdot -2^{192}} &= \frac{(2^2\cdot 5^2)^{93}}{(5^2)^{95}\cdot -2^{192}} \\
&= \frac{(2^2)^{93}\cdot (5^2)^{93}}{(5^2)^{95}\cdot -2^{192}} \\
&= \frac{2^{2\cdot 93}\cdot 5^{2\cdot 93}}{5^{2\cdot 95}\cdot -2^{192}} \\
&= \frac{2^{186}\cdot 5^{186}}{5^{190}\cdot -2^{192}} \\
&= \frac{1}{5^{190-186}\cdot -2^{192-186}} \\
&= \frac{1}{5^4\cdot -2^6} \\
&= \frac{1}{-40000}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{-1}{40000}$$

$\therefore \dfrac{100^{93}}{25^{95} \cdot -2^{192}} = \dfrac{-1}{40000}$. †

Ejemplo 52.

Simplifique la expresión $\dfrac{\left(3^2 \cdot k \cdot t^{-1}\right)^4}{k^5 \cdot t^3}$, donde las variables son distintas de cero.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(3^2 \cdot k \cdot t^{-1}\right)^4}{k^5 \cdot t^3} &= \frac{(3^2)^4 \cdot k^4 \cdot (t^{-1})^4}{k^5 \cdot t^3} \\
&= \frac{3^{2\cdot 4} \cdot k^4 \cdot t^{-1\cdot 4}}{k^5 \cdot t^3} \\
&= \frac{3^8 \cdot k^4 \cdot t^{-4}}{k^5 \cdot t^3} \\
&= 3^8 \cdot k^{4-5} \cdot t^{-4-3} \\
&= 3^8 \cdot k^{-1} \cdot t^{-7} \\
&= \frac{3^8}{k^1 \cdot t^7} \\
&= \frac{6561}{k \cdot t^7} \\
&= \frac{6561}{kt^7}
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\left(3^2 \cdot k \cdot t^{-1}\right)^4}{k^5 \cdot t^3} = \dfrac{6561}{kt^7}$. †

Ejemplo 53.

Simplifique la expresión $\left(\dfrac{3^3 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot (-1)^2}{-2^2 - 2^3}\right)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3^3 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot (-1)^2}{-2^2 - 2^3}\right)^{-1} &= \left(\frac{3^{3-2} + 2 \cdot 1}{-4 - 8}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{3 + 2}{-12}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{5}{-12}\right)^{-1} \\
&= \frac{-12}{5}
\end{aligned}$$

$\therefore \left(\dfrac{3^3 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot (-1)^2}{-2^2 - 2^3}\right)^{-1} = \dfrac{-12}{5}$. †

Ejercicio 5.

Simplifique las siguientes expresiones

1. $-\left(\dfrac{-2^{-2}+(-1)^{-4}}{2^{-1}+\frac{2^{-3}}{2}}\right)^{-1}$ R/ $-\dfrac{36}{48}$

2. $\left(\dfrac{5^{-2}-2^{-1}}{\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right)$ R/ $\dfrac{-414}{1075}$

Ejercicio 6.

El procedimiento realizado en la siguiente simplificación contiene pasos incorrectos (aplicación errónea de las leyes de potencias), determine los errores que se cometen en dicho desarrollo.

Simplificar $\dfrac{(2^3x^5)^0\cdot(-2a^{-1})^4}{(32-8\cdot 4)^0}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{(2^3x^5)^0\cdot(-2a^{-1})^4}{(32-8\cdot 4)^0} &= \frac{(2^3x^5)^0\cdot(-2)^4\cdot a^{-4}}{(32-8\cdot 4)^0}\\
&= \frac{(2^3x^5)^0\cdot -16\cdot a^{-4}}{(32-8\cdot 4)^0}\\
&= \frac{1\cdot -16\cdot a^{-4}}{1}\\
&= -16\cdot a^{-4}\\
&= -16\cdot\frac{1}{a^4}\\
&= \frac{-16}{a^4}
\end{aligned}$$

2.1.6. Radicales. Definición y propiedades

En la Escuela Pitagórica se estudiaba, sobre todo, la geometría y sabían que el área de un cuadrado de lado l se calculaba como $l\cdot l=l^2$; sabían además que debía existir un cuadrado que tuviera área 2 ya que se puede dibujar un cuadrado de cualquier área, pero, ¿qué medida del lado tendría un cuadrado así?

Recuerde que en esa época sólo se aceptaban los números racionales, por lo que era "lógico" suponer entonces que tenía que existir un número racional que multiplicado por sí mismo diera como resultado 2. En esta sección se verificará que dicho número racional no existe, lo que llevó a analizar la existencia de otros números además de los racionales.

De igual forma, se puede analizar la forma de determinar la medida del lado de un cubo cuyo volumen es 2.

Así, dado un cuadrado o un cubo, se necesitaba encontrar el lado a partir del cual se creó la figura, es decir, el lado que le dio origen. A la palabra "raíz"[18] se le puede dar una connotación de origen, como cuando se indica "las raíces del pueblo maya".

De ahí se supone que surgió el nombre de raíz cuadrada, o sea, "determinar la medida del lado que dio origen a un cuadrado con el área dada"; también la raíz cúbica indicaría "determinar la medida del lado que dio origen a un cubo con el volumen dado"[19] y, por la misma razón, a una expresión con una raíz se le conoce como un radical[20].

La búsqueda de funciones inversas es común en matemáticas, para la suma y la resta se indicó que, para cada número real, existe el inverso (excepto para el cero en la multiplicación). Una propiedad de una operación y su inversa es que, si se le aplica a un número una operación e inmediatamente se le aplica la misma operación con el inverso, entonces se obtiene el número original, es decir, por ejemplo, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\begin{aligned} (a+b)+(-b) &= a+(b+(-b)) && \text{Axiomas 5 y 7.} \\ &= a+0 && \text{Axioma 7.} \\ &= a && \text{Axiomas 6.} \end{aligned}$$

Resumiendo $a+b+(-b)=a$.

De igual manera, para la multiplicación, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*$, se cumple que

$$\begin{aligned} (a\cdot b)\cdot b^{-1} &= a\cdot (b\cdot b^{-1}) && \text{Axiomas 10 y 12.} \\ &= a\cdot 1 && \text{Axioma 12.} \\ &= a && \text{Axiomas 11.} \end{aligned}$$

Resumiendo $a\cdot b\cdot b^{-1}=a$.

Por esto es que se indica que la resta es la operación inversa a la suma y que la división es la operación inversa a la multiplicación.

Así, la raíz n-ésima es la operación inversa a la potencia con exponente n, siguiendo un razonamiento similar a la suma y la resta, al aplicar la operación y luego la misma operación para encontrar el número original, se debería intuir cuál es dicha inversa, así:

$$\begin{aligned} (a^n)^x = a \Rightarrow a^{nx} &= a^1 && \text{Suponiendo que sigue las mismas reglas de potencias.} \\ \Rightarrow nx &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que x tendría que ser el inverso multiplicativo de n, es decir n^{-1} que es igual a $\frac{1}{n}$.

Así, la raíz n-ésima de un número a sería $a^{\frac{1}{n}}$, y esto representa lo inverso a elevar un número a la n.

Así, el lado del cuadrado de área 2 es $2^{\frac{1}{2}}$ y el lado de un cubo de volumen 2 es $2^{\frac{1}{3}}$. La raíz es una potencia con exponente racional de numerador uno, la escritura de estos números, con el tiempo, se realizó mediante una "r" (de raíz) que se fue estilizando como $\sqrt{\ }$, símbolo que se conoce como el *signo radical* que fue adoptado universalmente.

[18] Del latín *radix* o *radīcis* que significa la raíz de una planta, pero que también podía significar "base", "fundamento", "origen" o "fuente".

[19] Esta es una suposición del autor, no se encontró bibliografía que respaldara esta interpretación.

[20] Del latín *radicālis*, que significa "relativo a la raíz"

De esta manera, la notación general para indicar la n-ésima raíz de a es $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (cuando $n = 2$, es usual omitir el 2 en el símbolo radical y se conoce como raíz cuadrada), a la n se le conoce como el *índice*, a la a como el *radicando*, como ya se mencionó, al símbolo $\sqrt{\ }$ se le conoce como el *signo radical* y al resultado se le llama la *raíz*.

Hasta ese momento, geométricamente, no había conflicto con el significado de raíz, sin embargo, cuando se inició con el estudio de los números negativos, sí se encontró un posible problema pues, por ejemplo, si se tiene que $x^2 = 4$, si se toman en cuenta los números positivos y los números negativos, entonces existen dos números que al ser elevados al cuadrado da 4 como resultado: el 2 y el -2.

No se puede aceptar ambos valores como resultado de la operación $\sqrt{4}$, pues se podrían seguir razonamientos claramente falsos, por ejemplo

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \Rightarrow -2 = 2 \qquad\qquad \text{Axiomas 1 y 2.}$$

Por supuesto $-2 \neq 2$, pero, si se partió de algo verdadero, no es posible llegar a algo falso. Para evitar esta situación, se define que el resultado de la raíz par de un número positivo es positivo. Más adelante, cuando se estudien funciones inversas, se analizará con mayor profundidad esta situación.

Definición 25. Raíz n-ésima

La raíz n-ésima del número a, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $a \in \mathbb{R}$, se denota $a^{\frac{1}{n}}$ o $\sqrt[n]{a}$ y es el número real b que cumple que:

$$a^{\frac{1}{n}} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Con b positivo si a es positivo y n es par.

Note que si $a < 0$ (es negativo) y n es par, entonces no existe ningún número b real que cumpla que $b^n = a$, pues cualquier número b elevado a un número par tendrá signo positivo (demostrado anteriormente), es decir, por ejemplo, $\sqrt{-1}$ no existe, pues no hay ningún número real b tal que $b^2 = -1$ (cualquier número real al cuadrado tendrá un resultado positivo)[21].

Ejemplo 54.

Los siguientes son ejemplos de radicales:

1. $\sqrt[7]{6}$ (la raíz séptima de seis).
2. $\sqrt{5}$ (la raíz cuadrada de cinco).
3. $\sqrt[3]{-8}$ (la raíz cúbica del opuesto aditivo de ocho).

[21] La base de los números complejos está en suponer que sí existe un número que cumple esta limitante de los reales, dicho conjunto se estudiará en el capítulo 3.

Ejemplo 55.

1. $\sqrt[3]{64} = 4$, ya que $4^3 = 64$.
2. $\sqrt{4} = 2$, ya que $2^2 = 4$.
3. $\sqrt{4} \neq -2$, aunque $(-2)^2 = 4$.
4. $\sqrt{169} = 13$, ya que $13^2 = 169$.
5. $\sqrt[4]{-81}$ no es un número real, ya que no existe un número real b, tal que $b^4 = -81$.
6. $\sqrt[3]{-64} = -4$, ya que $(-4)^3 = -64$.
7. $-\sqrt[3]{27} = -3$, ya que es el opuesto de $\sqrt[3]{27}$ y $3^3 = 27$.

Verifiquemos que esta nueva operación cumple las mismas propiedades que las potencias.

Teorema 85.

$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right]$.

Con $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ si n es par.

Demostración (directa):

De acuerdo con la definición de raíz n-ésima, se debe demostrar alguno de los dos resultados siguientes:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \cdot b = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$$

De esta forma, demostrar $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ es equivalente a demostrar $a \cdot b = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$.

Por la definición de raíz n-ésima, se cumple que

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} = c &\Leftrightarrow a = c^n \\ \sqrt[n]{b} = d &\Leftrightarrow b = d^n \end{aligned}$$

con c y d positivos, si a y b son positivos y n es par.

Así,

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= (c \cdot d)^n \\ &= c^n \cdot d^n \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right]$. †

Teorema 86.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1)\left[\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m\right]$.

Con $a \geqslant 0$ si n es par.

Demostración (directa):

De acuerdo con la definición de raíz n-ésima, se debe demostrar alguno de los dos resultados siguientes:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \Leftrightarrow a^m = \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n$$

De esta forma, demostrar $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ es equivalente a demostrar $a^m = ((\sqrt[n]{a})^m)^n$.

Por la definición de raíz n-ésima, se cumple que

$$\sqrt[n]{a} = c \Leftrightarrow a = c^n$$

con c positivo, si a es positivo y n es par.

Así,

$$\begin{aligned} \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n &= (c^m)^n \\ &= c^{m\cdot n} \\ &= (c^n)^m \\ &= a^m \end{aligned}$$

$\therefore (\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1)\left[\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m\right].$ †

Teorema 87.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right].$

Con $a \geqslant 0$ y $b > 0$, si n es par.

Demostración (ejercicio).

Teorema 88.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}\right].$

Con $a \geqslant 0$ si m es par.

Demostración (ejercicio).

Teorema 89.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, n \text{ par})\left[\sqrt[n]{a^n} = |a|\right].$

Demostración (directa).

Hipótesis: n es par $\Leftrightarrow n = 2k, k \in \mathbb{N}$.

De acuerdo con la definición de raíz n-ésima, se debe demostrar alguno de los dos resultados siguientes:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow a^n = |a|^n$$

De esta forma, demostrar $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^n} = |a|$ es equivalente a demostrar que $a^n = |a|^n$, con n par.

Así,

$$\begin{aligned} a^n &= a^{2k} && k \in \mathbb{N} \\ &= (a^2)^k \\ &= (|a|^2)^k && (*) \\ &= (|a|)^{2k} \\ &= |a|^n \end{aligned}$$

(*) Queda pendiente probar que $a^2 = |a|^2$, se deja como ejercicio.

Por lo tanto, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. †

Teorema 90.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, n \text{ impar})\left[\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a\right]$.

Demostración (ejercicio).

Teorema 91.

$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}\right]$.

Con $b \geqslant 0$ si n es par.

Demostración (ejercicio, es inmediato por el Axioma 13).

Teorema 92.

$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\left[a\sqrt[n]{c} \cdot b\sqrt[n]{d} = (a \cdot b)\sqrt[n]{c \cdot d}\right]$.

Con $b \geqslant 0 \wedge d \geqslant 0$ si n es par.

Demostración (ejercicio, es inmediato por el Axioma 10 y el Teorema 85).

Como la raíz cumple las mismas propiedades de las potencias, efectivamente se pueden tratar como una y se define como notación que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

con a positivo, si n es par.

Teorema 93.

$(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left[a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}\right]$.

Con $a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0$.

Demostración (directa).

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a} < \sqrt{b} &\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 < 0 && \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0 \\
&\Leftrightarrow a - b < 0 \\
&\Leftrightarrow a = b
\end{aligned}
$$

Como se demostró en cada paso para $\Leftrightarrow$, queda demostrado en ambas direcciones. †

Nota:

- Además de las propiedades que se cumplen con el uso de los radicales, es importante resaltar uno de los errores más frecuentes en el desarrollo de simplificaciones de radicales.

  Si $a \neq 0, b \neq 0$, se tiene que:

  $$\sqrt[n]{a^n + b^n} \neq \sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n}$$

  De aquí, los errores más comunes son:

  $$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b \qquad \text{y} \qquad \sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

  Observe, por ejemplo, que $\sqrt{13^2 - 6^2} \neq 13 - 6 = 7$

Ejemplo 56.

Simplifique la expresión $\sqrt[3]{320}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} \\
&= 4\sqrt[3]{5}
\end{aligned}
$$

$\therefore \sqrt[3]{320} = 4\sqrt[3]{5}$. †

Ejemplo 57.

Simplifique la expresión $\sqrt{225000}$.

$$\sqrt{225000} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5^2\sqrt{2 \cdot 5}$$
$$= 150\sqrt{10}$$

$\therefore \sqrt{225000} = 150\sqrt{10}$. †

Ejemplo 58.

Simplifique la expresión $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} &= (2-4)\sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$. †

Ejemplo 59.

Simplifique la expresión $-3\sqrt{54} + 2\sqrt{24}$.

$$\begin{aligned} -3\sqrt{54} + 2\sqrt{24} &= -3 \cdot 3\sqrt{6} + 2 \cdot 2\sqrt{6} \\ &= -9\sqrt{6} + 4\sqrt{6} \\ &= -5\sqrt{6} \end{aligned}$$

$\therefore -3\sqrt{54} + 2\sqrt{24} = -5\sqrt{6}$. †

Ejemplo 60.

Simplifique la expresión $\sqrt{x^2y}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2y} &= \sqrt{x^2}\sqrt{y} \\ &= |x|\sqrt{y} \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{x^2y} = |x|\sqrt{y}$. †

Ejemplo 61.

Simplifique la expresión $(-8)^{\frac{2}{3}}$.

$$\begin{aligned} (-8)^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{(-8)^2} \\ &= \sqrt[3]{64} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore (-8)^{\frac{2}{3}} = 4.$ †

Ejemplo 62.

Simplifique la expresión $\sqrt[3]{\dfrac{2}{8}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{2}{8}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt[3]{\dfrac{2}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}.$ †

Ejemplo 63.

Simplifique la expresión $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{64}} &= \sqrt[2\cdot 3]{64}\\ &= \sqrt[6]{2^6}\\ &= |2| = 2\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\sqrt[3]{64}} = 2.$ †

Ejemplo 64.

Simplifique la expresión $\dfrac{\left(\sqrt{72} - 3\sqrt{162}\right)\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9261}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\sqrt{72} - 3\sqrt{162}\right)\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9261}} &= \frac{\left(6\sqrt{2} - 3\cdot 9\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{21}\\ &= \frac{\left(-\cancel{21}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{\cancel{21}}\\ &= -2\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\left(\sqrt{72} - 3\sqrt{162}\right)\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9261}} = -2.$ †

Ejercicio 7.

1. Simplifique la siguiente expresión

   a) $\left(\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[\sqrt{2}]{2}}}}\right)^{72}$ R/ 8.

2. Exprese las potencias de la siguiente expresión como radicales y simplifique aplicando las propiedades de radicación.

   a) $\left(\dfrac{x^6}{9y^{-4}}\right)^{\frac{-1}{2}}$. R/ $\dfrac{3}{|x^3|y^2}$

   b) $\left(\dfrac{d^{-4}}{16a^8}\right)^{\frac{3}{4}}$. R/ $\dfrac{1}{8a^6|d^3|}$

2.2. El conjunto de los números reales y sus subconjuntos

2.2.1. El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$)

Cuando un niño aprende a contar junto con una secuencia de palabras: uno, dos, tres... aprende el primer conjunto numérico: el **Conjunto de los Números Naturales**, este se denota por $\mathbb{N}$.

Este conjunto está formado por los números 1, 2, 3,...; tiene un primer elemento: el uno, y se entiende que es un conjunto sin final y compuesto por un tipo de unidad entera.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}}$$

El conjunto de los números naturales posee las siguientes características:

- Infinito: tiene una infinita cantidad de elementos.
- Ordenado: dados dos números naturales, se puede decir si uno es mayor, menor o igual al otro.
- Discreto: Entre dos elementos del conjunto hay una cantidad finita de números naturales.
- Principio del buen orden: Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ no vacío posee primer elemento o elemento mínimo.

El conjunto de los números naturales se puede definir iniciando en cero, esta es una controversia que se da entre los matemáticos, es común nombrar al conjunto que incluye al cero como el conjunto de los números cardinales[22], este se denota como $\mathbb{N}^*$ o $\mathbb{N}_0$, así, se tendría que $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

En el caso que el conjunto de los números naturales se defina iniciando en cero, entonces más bien $\mathbb{N}^*$ simbolizaría el conjunto sin incluir al cero.

La arqueología muestra que la utilización de los números naturales se remonta a más de 30000 años, inicialmente para ordenar la participación de las personas en los rituales religiosos y de manera

[22]Numeral cardinal: que expresa el valor numérico o la cantidad de elementos de un conjunto. Definición de la Real Academia Española

posterior para contar.

El uso del cero no fue nada sencillo y merece un breve recuento histórico.

En la historia, los registros del uso del cero aparecen por primera vez en el Papiro Boulaq 18, en el año 1700 a.C., en el sistema de numeración egipcio.

Aunque se encuentran tablillas de arcilla de los babilonios de 2000 a.C, no se tiene registro del uso del cero en esta civilización sino hasta el año 1700 a.C., muy similar a la egipcia, sin embargo, con su notación no era posible diferenciar entre, por ejemplo, 15, 105 y 150.

Los mayas utilizaron el cero en su sistema de numeración en el año 36 a.C, pero un problema en su notación posicional no les permitió explotar sus posibilidades operativas (los mayas utilizaban base 20 y la tercer posición era para multiplicar).

En el año 130 d.C. Ptolomeo utilizó el 0 (vacío) entre los dígitos, pero no lo consideró como un número, sino como una anotación.

Los romanos nunca designaron un símbolo para el cero, en su notación, después del número 4000 se dibujaba una línea horizontal sobre el número, para indicar que dicho número se debía multiplicar por 1000.

La primera civilización que utilizó realmente el cero como un dígito en la notación posicional fue la india, el primer uso de dicho dígito se remonta al año 683 d.C., este es el sistema de uso casi universal hoy en día, los árabes lo fueron transmitieron hasta llegar a Europa, el empuje principal para la introducción del cero la realizó el italiano Fibonacci en el siglo XII, en un inicio, por la facilidad del nuevo sistema, las autoridades eclesiásticas lo tildaron de mágico o demoníaco y ellos, junto con los calculadores profesionales, se opusieron a la nueva álgebra, incluso en algunos lugares, hasta el siglo XV.

El nombre "cero" viene entonces del término árabe *sifr*, que significa "vacío", esta palabra derivó en el latín *zephyrum*, que acabó convirtiéndose en el idioma italiano en *zefiro* y se contrajo en Venecia a *zero*, término utilizado por Fibonacci para nombrar al "0" y que, como se mencionó anteriormente, popularizó en Europa.

En el conjunto de los números naturales se tiene que la adición y la multiplicación son operaciones cerradas, es decir $(\forall a, b \in \mathbb{N})[a + b \in \mathbb{N} \wedge a \cdot b \in \mathbb{N}]$.

Algoritmo de la adición para números naturales

Los algoritmos son procedimientos muy depurados para operar dos números, para realizar la adición de dos números naturales[23] se puede seguir el siguiente algoritmo:

1. Coloque los dos números en orden por columnas, de forma tal que las cifras del mismo nivel quedan en la misma columna (unidades, decenas, centenas, etc.).

2. Sume las cifras de la primer columna y coloque el resultado abajo en la misma columna, si el resultado es mayor a 9, sólo coloque las unidades y el uno de las decenas lo debe colocar arriba de la siguiente columna a la izquierda, esto se conoce como el acarreo.

3. Repita el procedimiento en la siguiente columna a la izquierda, al sumar las cifras debe tomar en cuenta también el acarreo.

[23]El algoritmo también sirve para sumar números reales positivos en su notación decimal.

Ejemplo 65. Una adición sin acarreo

Determine la suma de 1286 + 512

Primero se ordenan los números de acuerdo con las unidades, decenas, centenas, etc.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & + \\ \hline \end{array}$$

Se suman las cifras de las unidades.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & + \\ \hline & & & 8 & \end{array}$$

Ahora se suman las decenas.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & + \\ \hline & & 9 & 8 & \end{array}$$

Se sigue con la suma de las centenas.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & + \\ \hline & 7 & 9 & 8 & \end{array}$$

Y se termina con las unidades de millar, para obtener el resultado final.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & + \\ \hline 1 & 7 & 9 & 8 & \end{array}$$

Así 1286 + 512 = 1798. †

Ejemplo 66. Una adición con acarreo

Determine la suma de 6798 + 5176

Se ordenan los números.

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 7 & 9 & 8 & \\ 5 & 6 & 7 & 6 & + \\ \hline \end{array}$$

Se suman las cifras de las unidades, al dar mayor que 9, el uno de las decenas se coloca en el acarreo.

$$\begin{array}{cccccl} & & \color{green}{1} & & & \color{green}{\leftarrow \text{ acarreo}} \\ 6 & 7 & 9 & 8 & & \\ 5 & 1 & 7 & 6 & + & \\ \hline & & & 4 & & \end{array}$$

Ahora se suman las decenas, incluyendo el acarreo, se vuelve a colocar el uno de las decenas en el acarreo pues el resultado da mayor a 9.

$$\begin{array}{cccccl} & \color{green}{1} & \color{green}{1} & & & \color{green}{\leftarrow \text{ acarreo}} \\ 6 & 7 & 9 & 8 & & \\ 5 & 1 & 7 & 6 & + & \\ \hline & & 7 & 4 & & \end{array}$$

Se sigue con la suma de las centenas

$$
\begin{array}{ccccl}
 & \color{green}{1} & \color{green}{1} & & \qquad \color{green}{\leftarrow \text{ acarreo}} \\
6 & 7 & 9 & 8 & \\
5 & 1 & 7 & 6 & + \\
\hline
 & 9 & 7 & 4 &
\end{array}
$$

Y se termina con las unidades de millar, para obtener el resultado final, acá no hace falta escribir el acarreo, aunque funcionaría igual.

$$
\begin{array}{ccccl}
 & \color{green}{1} & \color{green}{1} & & \qquad \color{green}{\leftarrow \text{ acarreo}} \\
6 & 7 & 9 & 8 & \\
5 & 1 & 7 & 6 & + \\
\hline
11 & 9 & 7 & 4 &
\end{array}
$$

Así $6798 + 5676 = 11974$. †

Justificación del algoritmo de la adición

Como se dijo anteriormente, los algoritmos son procedimientos sumamente depurados que se han ido perfeccionando a lo largo del tiempo, sin embargo, siempre hay una justificación de la forma en que se realizan, en el caso de la adición se utilizan sus propiedades, las de las potencias (que se estudiarán más adelante) y la ley distributiva.

Antes de explicar el algoritmo como tal, se debe recordar primero que el sistema de numeración que se utiliza en la actualidad es un sistema de numeración posicional en base 10, esto es, que se tienen una serie de símbolos para los dígitos del 0 al 9 y que depende de la posición del dígito así tendrá un valor distinto. Por ejemplo, el número 12526 es equivalente a $10000 + 2000 + 500 + 20 + 6$, note que el dígito 2 aparece dos veces, pero en una posición representa a 2000 y en otra posición a 20. Así, por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
12526 &= 10000 + 2000 + 500 + 20 + 6 \\
&= 1 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\
&= 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0
\end{aligned}
$$

Definición 26. Representación decimal de un número natural

El número natural n que posee k decimales se puede representar de manera decimal mediante el numeral $n = d_{k-1}d_{k-2}...d_2d_1d_0$, donde d_i representa el i-ésimo dígito del número, tal que $0 \leqslant d_i \leqslant 9$.

Ejemplo 67.

El númeral 7364 posee los dígitos $d_3 = 7$, $d_2 = 3$, $d_1 = 6$ y $d_0 = 4$, dicho numeral representa al número 7364.

Definición 27. Sistema posicional en base 10

Para representar un número natural n se utiliza el sistema posicional en base 10, para ello se cuenta con 10 símbolos a los que se les conoce como dígitos, a saber: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, el valor del dígito depende de la posición que ocupa, de la siguiente forma:

$$n = d_{k-1}d_{k-2}...d_2d_1d_0 = d_{k-1}\cdot 10^{k-1} + d_{k-2}\cdot 10^{k-2} + ... + d_2\cdot 10^2 + d_1\cdot 10^1 + d_0\cdot 10^0$$

Un número es una idea de un conjunto que contiene elementos, por ejemplo, cuando se indica que se tienen tres confites, este es un conjunto que contiene tres elementos, a esta idea se le relaciona el numeral 3 que identifica a cualquier conjunto que contenga tres elementos (no necesariamente confites).

Se mostrará la justificación del algoritmo con la adición de 12526 y 35783.

$$\begin{aligned}
& 12526 + 35783 \\
&= (1\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0) + (3\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 + 3\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^4 + 3\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 8\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 + 3\cdot 10^0 \\
&= (1\cdot 10^4 + 3\cdot 10^4) + (2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^3) + (5\cdot 10^2 + 7\cdot 10^2) + (2\cdot 10^1 + 8\cdot 10^1) + (6\cdot 10^0 + 3\cdot 10^0) \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + (2+8)\cdot 10^1 + (6+3)\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + (2+8)\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + 10\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + (1\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0)\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7)\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (5+7+1)\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + 13\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + (1\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0)\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + 1\cdot 10^1\cdot 10^2 + 3\cdot 10^0\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5)\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + (2+5+1)\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= (1+3)\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= 4\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 \\
&= 48309
\end{aligned}$$

De esta forma, al escribir los números en base 10 se nota que se pueden acomodar los dígitos de acuerdo a su posición, tal como sucede donde se muestran los colores, de esta forma se suman los dígitos de las mismas posiciones (gracias a la asociatividad y conmutatividad de la adición y de la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición[24]).

Se suman primero las unidades (las que están acompañadas por 10^0), luego las decenas (los que están multiplicados por 10^1) y así consecutivamente. En el caso que alguno de los resultados da

[24]Utilizado en sus dos direcciones, es decir, como la distributividad usual $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ y como factor común $a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c)$, que por conmutatividad $b\cdot a + c\cdot a = (b+c)\cdot a$.

mayor que nueve, entonces se debe desarrollar ese número en base 10 (pues sólo deberían estar los dígitos del 0 al 9 en cada posición) y se observa que el 1 de las decenas se le suma a la siguiente posición, esto se muestra con el color rojo, en el algoritmo esto era el acarreo.

Algoritmo de la multiplicación para números naturales

Para realizar la multiplicación de dos números naturales[25] se puede seguir el siguiente algoritmo:

1. Coloque los dos números, el primero arriba del segundo.
2. Realice el producto de la cifra de las unidades del segundo número por cada una de las cifras del primer número y coloque el resultado abajo en una primer fila de resultados, si el resultado es mayor a 9, sólo coloque las unidades y la cifra de las decenas lo debe colocar arriba de la siguiente columna a la izquierda, este, al igual que en la adición, es el acarreo. Cuando hay acarreo, se realiza la multiplicación de las cifras y se le suma el acarreo.
3. Repita el procedimiento con las siguientes cifras del segundo número, pero para cada paso dicho resultado lo escribe en una nueva línea en el área de resultados y deje un espacio adicional sin utilizar en la columna de la derecha.
4. Sume todas las cifras de los resultados intermedios por columna.

Ejemplo 68.

Determine la multiplicación de $1286 \cdot 512$.

Primero se colocan los números, uno arriba del otro

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 8 & 6 & \\ & 5 & 1 & 2 & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica la cifra de las unidades del 512 (el dos) por cada una de las cifras de 1286, si en algún caso da mayor a 9 se escribe el acarreo y dicho acarreo se suma en el siguiente producto.

$$\begin{array}{ccccccl} & & 1 & & & & \leftarrow \text{acarreo} \\ 1 & 2 & 8 & 6 & & & \\ & 5 & 1 & 2 & \cdot & & \\ \hline & & & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} & 1 & 1 & & & & \leftarrow \text{acarreo} \\ 1 & 2 & 8 & 6 & & & \\ & 5 & 1 & 2 & \cdot & & \\ \hline & & 7 & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} & 1 & 1 & & & & \leftarrow \text{acarreo} \\ 1 & 2 & 8 & 6 & & & \\ & 5 & 1 & 2 & \cdot & & \\ \hline & 5 & 7 & 2 & & & \end{array}$$

[25] El algoritmo también funciona para multiplicar dos números reales en su notación decimal, adecuando la ubicación de la coma al final.

$$\begin{array}{ccccc l}
 & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo}\\
1 & 2 & 8 & 6 & & \\
 & 5 & 1 & 2 & \cdot & \\ \hline
2 & 5 & 7 & 2 & &
\end{array}$$

Acá se terminó con las unidades del segundo número, se realiza lo mismo con las decenas, es decir, se toma el uno, pero en una nueva línea de resultados y dejando un espacio a la derecha.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 8 & 6 & \\
 & 5 & 1 & 2 & \cdot \\ \hline
2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & & 6 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 8 & 6 & \\
 & 5 & 1 & 2 & \cdot \\ \hline
2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 8 & 6 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 8 & 6 & \\
 & 5 & 1 & 2 & \cdot \\ \hline
2 & 5 & 7 & 2 & \\
2 & 8 & 6 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 8 & 6 & \\
 & & 5 & 1 & 2 & \cdot \\ \hline
 & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
1 & 2 & 8 & 6 & &
\end{array}$$

Por último, se hace lo mismo con las centenas del segundo número (el cinco), dejando un espacio adicional en la nueva fila de los resultados.

$$\begin{array}{cccccc l}
 & & & 3 & & & \leftarrow \text{acarreo}\\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
 & & 5 & 1 & 2 & \cdot & \\ \hline
 & 2 & 5 & 7 & 2 & & \\
1 & 2 & 8 & 6 & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc l}
 & & 4 & 3 & & & \leftarrow \text{acarreo}\\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
 & & 5 & 1 & 2 & \cdot & \\ \hline
 & 2 & 5 & 7 & 2 & & \\
1 & 2 & 8 & 6 & & & \\
 & 3 & 0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc l}
 & 1 & 4 & 3 & & & \leftarrow \text{acarreo}\\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
 & & 5 & 1 & 2 & \cdot & \\ \hline
 & 2 & 5 & 7 & 2 & & \\
1 & 2 & 8 & 6 & & & \\
4 & 3 & 0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & 1 & 4 & 3 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
 & & & 5 & 1 & 2 & \cdot & \\
\hline
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & &
\end{array}$$

Por último, se suman los resultados intermedios por columna (no olvide llevar el acarreo de las sumas).

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & & & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
 & & & & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
 & & & 4 & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
 & & 8 & 4 & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & 1 & 1 & & & \leftarrow \text{acarreo} \\
 & & 2 & 5 & 7 & 2 & \\
 & 1 & 2 & 8 & 6 & & \\
6 & 4 & 3 & 0 & & & \\
\hline
6 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 &
\end{array}$$

Así $1286 \cdot 512 = 658432$. †

Ejemplo 69.

Determine el resultado de $6798 \cdot 5176$

Por supuesto, el ejemplo anterior se fue mostrando paso por paso, pero la idea es hacerlo de forma compacta, como se mostrará en este ejemplo:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 6 & 7 & 9 & 8 & \\
 & & & & 5 & 1 & 7 & 6 & \cdot \\
\hline
 & & & 4 & 0 & 7 & 8 & 8 & \\
 & & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & & \\
 & & 6 & 7 & 9 & 8 & & & \\
3 & 3 & 9 & 9 & 0 & & & & + \\
\hline
3 & 5 & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 8 &
\end{array}
$$

Así $6798 \cdot 5176 = 35186448$. †

Justificación del algoritmo de la multiplicación

De igual forma, la justificación del algoritmo de la multiplicación se realizará con un ejemplo, suponga que se quiere multiplicar $524 \cdot 37$.

$$
\begin{aligned}
& 524 \cdot 37 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot (3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 7 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 \cdot 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^0 \cdot 7 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 35 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10^1 + 28 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + (3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 10^1 \\
& \quad + (2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \cdot 10^1 \\
& \quad + 2 \cdot 10^1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^0 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + (5+1) \cdot 10^2 + (4+2) \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \cdot 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 \cdot 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \cdot 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 15 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & (1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 \\
& \quad + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + (6+1) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + (5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3) + (7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^1) + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + (5+3) \cdot 10^3 + (7+6) \cdot 10^2 + (2+6) \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
= & 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 13 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + (1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
&= 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
&= 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
&= 1 \cdot 10^4 + (8 + 1) \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
&= 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
&= 19388
\end{aligned}
$$

Observe que la propiedad distributiva de la adición con respecto a la multiplicación justifica los primeros pasos del algoritmo, donde se toma cada dígito del multiplicador y se multiplica por cada dígito del multiplicando.

En el ejemplo, se realiza la primera distribución (el factor izquierdo por la suma del factor derecho) y se inicia multiplicando el dígito de las unidades del multiplicador por todos los dígitos del multiplicando (procedimiento que se muestra en verde), también se identifica que si se da un resultado mayor que 9, se utiliza su valor posicional para acarrear el dígito de las decenas.

Se justifica además, la razón por la que al multiplicar el siguiente dígito del multiplicador se debe dejar un espacio adicional en las filas de resultados, por ejemplo, al multiplicar el multiplicando por la cifra de las decenas del multiplicador, entonces todos los dígitos se multiplican por 10^1, que corre en una posición el resultado (procedimiento mostrado en azul).

Por último, se nota como al final se suman las cantidades en las posiciones correspondientes, llevando también el acarreo (procedimiento que se muestra en negro).

Algoritmo de la sustracción para números naturales

Para realizar la sustracción de dos números naturales[26] $a - b$, con $a > b$, es decir, que el resultado sea positivo, se puede seguir el siguiente algoritmo:

1. Coloque los dos números en orden por columnas, el minuendo arriba del sustraendo, de forma tal que las cifras del mismo nivel quedan en la misma columna (unidades, decenas, centenas, etc.).

2. Iniciando con la primer columna a la derecha, realice la resta del número de la fila de arriba menos el de la fila de abajo, coloque el resultado abajo en la misma columna, si la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo entonces se le debe “pedir prestado” a la cifra de la siguiente columna a la izquierda, esto es, se disminuye en 1 y se le suma 10 a la cifra del minuendo con la que se está trabajando, ahora sí dará un resultado positivo.

3. Repita el procedimiento en la siguiente columna a la izquierda.

Si $a < b$, entonces realice la sustracción $b - a$ y aplique el resultado $a - b = -(b - a)$.

Ejemplo 70. Una sustracción sin acarreo

Determine la resta de $5387 - 123$.

[26]También es posible utilizarlo para números reales en su notación decimal, siempre que el resultado sea positivo.

Primero se ordenan los números de acuerdo con las unidades, decenas, centenas, etc.

$$\begin{array}{cccc c} 5 & 3 & 8 & 7 & \\ & 1 & 2 & 3 & - \\ \hline \end{array}$$

Se restan las cifras de las unidades.

$$\begin{array}{cccc c} 5 & 3 & 8 & 7 & \\ & 1 & 2 & 3 & - \\ \hline & & & 4 & \end{array}$$

Ahora se restan las decenas.

$$\begin{array}{cccc c} 5 & 3 & 8 & 7 & \\ & 1 & 2 & 3 & - \\ \hline & & 6 & 4 & \end{array}$$

Se sigue con la resta de las centenas.

$$\begin{array}{cccc c} 5 & 3 & 8 & 7 & \\ & 1 & 2 & 3 & - \\ \hline & 2 & 6 & 4 & \end{array}$$

Y se termina con las unidades de millar, para obtener el resultado final.

$$\begin{array}{cccc c} 5 & 3 & 8 & 7 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & - \\ \hline 5 & 2 & 6 & 4 & \end{array}$$

Así $5387 - 123 = 5264$. †

Ejemplo 71. Una sustracción con acarreo

Determine la suma de $1250 - 567$

Se ordenan los números.

$$\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 5 & 0 & \\ & 5 & 6 & 7 & + \\ \hline \end{array}$$

Se restan las cifras de las unidades, al ser el 0 menor que el 7, se debe "pedir prestado" del 5, se le resta uno a dicho número y se le suma 10 al dígito con el que se está trabajando.

$$\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 4 & 10 & \\ & 5 & 6 & 7 & - \\ \hline \end{array}$$

Ahora sí se realiza la resta de las unidades.

$$\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 4 & 10 & \\ & 5 & 6 & 7 & - \\ \hline & & & 3 & \end{array}$$

Ahora se restan las decenas, como el 4 es menor que el 6, se debe volver a "pedir prestado", en este caso del 2.

$$\begin{array}{cccc c} 1 & 1 & 14 & 10 & \\ & 5 & 6 & 7 & - \\ \hline & & 8 & 3 & \end{array}$$

Se vuelve a tener la misma situación, pues el 1 es menor que el 5, se "pide prestado" del 1 de las unidades de millar.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 11 & 14 & 10 & \\ & 5 & 6 & 7 & - \\ \hline & 6 & 8 & 3 & \end{array}$$

Como nos quedó 0 en las unidades de millar, ya se termina el procedimiento.

Así $1250 - 567 = 683$. †

Justificación del algoritmo de la sustracción

Tal y como se hizo con los algoritmos de la adición y de la multiplicación, se realizará con un ejemplo detallado el procedimiento para realizar una sustracción.

Se realizará la misma sustracción que se mostró en el Ejemplo 71, es decir, $1250 - 567$.

$$\begin{aligned}
& 1250 - 567 \\
&= (1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0) - (5\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 - 5\cdot 10^2 - 6\cdot 10^1 - 7\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (5\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + ((1+4)\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (1\cdot 10^1 + 4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (1\cdot 10^1\cdot 10^0 + 4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + 10\cdot 10^0 + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (10\cdot 10^0 + 0\cdot 10^0 - 7\cdot 10^0) \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + (10 + 0 - 7)\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (2\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + ((1+1)\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (1\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (1\cdot 10^1\cdot 10^1 + 1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + 10\cdot 10^1 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (10\cdot 10^1 + 4\cdot 10^1 - 6\cdot 10^1) + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + (10 + 4 - 6)\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^3 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 1\cdot 10^1\cdot 10^2 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 10\cdot 10^2 + (1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= (10\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 - 5\cdot 10^2) + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= (10 + 1 - 5)\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 6\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 \\
&= 683
\end{aligned}$$

Al igual que el algoritmo de la adición, se inicia colocando los números en orden según su posición, se inicia con las unidades (procedimiento en verde), si el dígito del minuendo es menor que el del sustraendo, entonces se debe "pedir prestado" de la siguiente cifra del minuendo (esto se muestra en el ejemplo con el color rojo).

El procedimiento se repite con las decenas (que se muestra en azul) y con las centenas que se muestra en morado.

Se debe recalcar que este algoritmo se utiliza para sustracciones donde el resultado es positivo, es decir, para poder hacer la sustracción $a - b$ se necesita que $a \geqslant b$, en el caso que esto no sea así, entonces se puede utilizar el resultado $a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) - (-a) = -(b - a)$, o sea, se debe realizar primero la sustracción $b - a$ (que ahora sí dará un resultado positivo) y posteriormente se le cambia el signo (el resultado final es negativo).

2.2.2. El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

El **Conjunto de los Números Enteros** es una ampliación del conjunto de los números naturales, este nuevo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$. Este conjunto contiene al cero (un elemento neutro para la suma) y por cada número natural a contiene otro número, denotado por $-a$, que cumple $a + (-a) = 0$, este se conoce como el inverso aditivo o el opuesto de a.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}}$$

El símbolo $\mathbb{Z}$ proviene del alemán *Zahlen* que significa "números", el conjunto de los números enteros tiene las siguientes características:

- Infinito: tiene una infinita cantidad de elementos.
- Ordenado: dados dos números enteros, se puede decir si uno es mayor, menor o igual al otro.
- Discreto: Entre dos elementos del conjunto hay una cantidad finita de números enteros.

En este caso no tiene primer ni último elemento y se cumple que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (el conjunto de los números naturales es subconjunto del conjunto de los números enteros), es decir, todos los números naturales son números enteros.

En la historia, los números negativos surgen de la mano con el número cero, esto es en la civilización india por el año 628, se le atribuye al matemático y astrónomo indio Brahmagupta (568 - 670) quien llamaba a los números negativos "deudas" y al cero "nada". Los chinos también trabajaron con números negativos, ellos utilizaba varillas negras para representar los números negativos y rojas para los positivos.

Este conjunto entonces surge como una necesidad, pues fue una manera de simbolizar las "deudas" al comercializar productos.

En el conjunto de los números enteros se tiene que la adición, la multiplicación y la sustracción son operaciones cerradas, es decir $(\forall a, b \in \mathbb{Z})[a + b \in \mathbb{Z} \wedge a - b \in \mathbb{Z} \wedge a \cdot b \in \mathbb{Z}]$.

Divisibilidad

Definición 28.

Sean $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$, se dice que "$n$ divide a m" o que "m es divisible por n" si se cumple

$$(\exists k \in \mathbb{Z})[m = n \cdot k]$$

Para denotar que n divide a m se escribe $n|m$, así

$$n|m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})[m = n \cdot k]$$

También se puede escribir que $n|m \Leftrightarrow m = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, pero es menos formal.

Si $n|m$ entonces se dice que n es un divisor de m, también que m es un múltiplo de n.

Ejemplo 72.

- $4|12$ ya que $12 = 4 \cdot 3$ (en la definición $k = 3$).
- $5|20$ ya que $20 = 5 \cdot 4$ (en la definición $k = 4$).
- $2|10$ ya que $10 = 2 \cdot 5$ (en la definición $k = 5$).

Si el número entero n no divide a m entonces se escribe $m \nmid n$ e indicaría que no es posible encontrar el número k, es decir

$$n \nmid m \Leftrightarrow \neg(\exists k \in \mathbb{Z})[m = n \cdot k] \equiv (\forall k \in \mathbb{Z})[m \neq n \cdot k]$$

Ejemplo 73.

$3 \nmid 10$ ya que $\neg(\exists k \in \mathbb{Z})[10 = 3 \cdot k]$ (el único número que cumple es $k = \frac{10}{3}$, pero $\frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$).

Teorema 94.

$(\forall m \in \mathbb{Z})[1|m]$.

Demostración (directa).

Tome $k = m$, así $m = 1 \cdot m$. †

Teorema 95.

$(\forall n \in \mathbb{Z}^*)[n|0]$.

Demostración (directa).

Tome $k = 0$, así $0 = m \cdot 0$. †

Teorema 96.

$(\forall m, n \in \mathbb{Z}^*)[n|m \wedge m|n \Leftrightarrow m = n \vee m = -n]$.

Demostración (directa).

Se deben demostrar ambas direcciones.

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $n|m \wedge m|n$

Se debe demostrar que $m = n \vee m = -n$.

$$\begin{aligned} n|m \wedge m|n &\Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{Z})[m = n \cdot p \wedge n = m \cdot q] \\ &\Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{Z})[m = m \cdot q \cdot p] \\ &\Rightarrow (\exists p, q \in \mathbb{Z})[1 = q \cdot p] && \text{p y q son inversos multiplicativos.} \\ &\Rightarrow p = q = 1 \vee p = q = -1 \end{aligned}$$

Los únicos números enteros cuyos inversos multiplicativos son números enteros son 1 y -1.

Como $m = n \cdot p \Rightarrow m = n \vee m = -n$.

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $m = n \vee m = -n$

Se debe demostrar que $n|m \wedge m|n$.

$$\begin{aligned} m = n \vee m = -n &\Rightarrow m = n \cdot 1 \vee m = n \cdot -1 \\ &\Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Z})[m = n \cdot p] && \text{Existe para los dos casos posibles.} \\ &\Rightarrow n|m \end{aligned}$$

Se procede igual tomando $n = m \vee n = -m$.

Por lo que $n|m \wedge m|n$.

$\therefore (\forall m, n \in \mathbb{Z}^*)[n|m \wedge m|n \Leftrightarrow m = n \vee m = -n]$. †

Algoritmo de la división en números enteros

Teorema 97.

$(\forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0)(\exists q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r < n)[m = n \cdot q + r]$, con q y r únicos.

Demostración (se omite, verla en el anexo E).

A m se le conoce como el dividendo, n es el divisor, q es el cociente y r es el residuo. Con respecto al tema de divisibilidad que se abarcó anteriormente, se diría que n divide a m si al realizar la división entera se obtiene como residuo 0.

Ejemplo 74.

Realice la división entera para $23 \div 6$.

Como $23 = 6 \cdot 3 + 5$, entonces el cociente es 3 y el residuo es 5. †

Para realizar la división entera[27] de dos números $a \div b$, tal que $a > b$, se puede seguir el siguiente algoritmo:

[27] El algoritmo también funciona para realizar la división en el conjunto de los números reales (obteniendo decimales), agregando una coma al cociente cuando se finaliza la división entera y agregando un cero al residuo en cada paso posterior.

1. Coloque los dos números, el dividendo a la izquierda del divisor, separados por una línea.
2. Se toma el primer dígito a la izquierda del dividendo, si dicho dígito es menor que el divisor entonces se le agrega el siguiente dígito hasta que se obtenga un número mayor, llamemos a este un dividendo parcial. Si no es el primer paso, entonces al agregar un dígito adicional se debe agregar un cero en el cociente.
3. Se determina un número (de un dígito) que al multiplicarlo por el divisor dé como resultado el número más cercano al dividendo parcial, pero siempre menor o igual que éste.
4. Multiplique el dígito encontrado por el divisor y el resultado se pone debajo del dividendo parcial, y se restan. Al resultado de la resta se le agrega el siguiente dígito del dividendo para repetir el procedimiento.
5. El proceso se detiene cuando ya se le agregaron todas las cifras posibles al dividendo parcial y es menor que el divisor, ese sería el residuo de la división.

Nota: Si la división no es entera y se quieren determinar decimales, en el último paso se agrega un cero al dividendo parcial y una coma en el cociente, se agrega un cero adicional al dividendo parcial en cada nuevo paso, así se obtiene la cantidad de decimales que se quiera.

Ejemplo 75. Una división entera exacta

Determine el cociente de $5388 \div 3$.

Primero se ordenan los números, el dividendo a la izquierda del divisor, separados por una línea.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 8 & 8 & 3 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Se toma el primer dígito del dividendo, el 5, como es mayor que 3 entonces se busca un número (de un dígito) que multiplicado por 3 de lo más cercano a 5, pero menor o igual que 5, este es el 1, éste se coloca debajo del divisor.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3 & 8 & 8 & 3 \\ \cline{5-5} & & & & 1 \end{array}$$

Se multiplica el 1 por el divisor (el 3), el resultado se coloca debajo del 5 y se restan estos dos números.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3 & 8 & 8 & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 1 \\ \cline{1-1} 2 & & & & \end{array}$$

A la resta anterior se le agrega el siguiente dígito del dividendo para repetir el proceso.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3' & 8 & 8 & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 1 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & & & \end{array}$$

Se busca el dígito que multiplicado por 3 de lo más cerca de 23, esto es el 7, el resultado de $7 \cdot 3$ se coloca debajo del 23 y se restan.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3' & 8 & 8 & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 17 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ \cline{1-2} & 2 & & & \end{array}$$

Se continúa con el primer 8 del dividendo.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3' & 8' & 8 & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 17 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ \cline{1-2} & 2 & 8 & & \end{array}$$

Así, se debe agregar un nueve al cociente y restarle 27 al 28.

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3' & 8' & 8 & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 179 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ \cline{1-2} & 2 & 8 & & \\ & 2 & 7 & & \\ \cline{2-3} & & 1 & & \end{array}$$

Sólo falta realizar el proceso con el último 8

$$\begin{array}{cccc|c} 5' & 3' & 8' & 8' & 3 \\ \cline{5-5} 3 & & & & 179 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ \cline{1-2} & 2 & 8 & & \\ & 2 & 7 & & \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & \end{array}$$

En el cociente se agregaría el 6 para obtener un cero como residuo y terminar el proceso.

$$\begin{array}{cccc|c}
5' & 3' & 8' & 8' & 3 \\ \cline{5-5}
\underline{3} & & & & 1796 \\
2 & 3 & & & \\
2 & 1 & & & \\ \cline{1-2}
 & 2 & 8 & & \\
 & 2 & 7 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 8 & \\
 & & 1 & 8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Así $5388 \div 3 = 1796$, esto ya que $5388 = 1796 \cdot 3$. †

En este caso, al obtener como residuo 0, se dice que el dividendo es divisible por el divisor, es decir, que 5388 es divisible por 3, otra manera de indicarlo que es 5388 es un múltiplo de 3 o que 3 es un divisor de 5388.

Ejemplo 76. Una división no exacta

Determine el cociente de $6945 \div 12$.

Primero se ordenan los números, el dividendo a la izquierda del divisor, separados por una línea.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9 & 4 & 5 & 12 \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Se toma el primer dígito del dividendo, el 6, como es menor que 12 entonces se agrega el siguiente dígito (el 9), ahora se busca un número (de un dígito) que multiplicado por 12 de lo más cercano a 69, pero menor o igual que 69, este es el 5, éste se coloca debajo del divisor.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4 & 5 & 12 \\ \cline{5-5}
 & & & & 5
\end{array}$$

Se multiplica el 5 por el divisor (el 12), el resultado se coloca debajo del 69 y se restan estos dos números.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4 & 5 & 12 \\ \cline{5-5}
6 & 0 & & & 5 \\ \cline{1-2}
 & 9 & & &
\end{array}$$

A la resta anterior se le agrega el siguiente dígito del dividendo para repetir el proceso.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4' & 5 & 12 \\ \cline{5-5}
6 & 0 & & & 5 \\ \cline{1-2}
 & 9 & 4 & &
\end{array}$$

Se busca el dígito que multiplicado por 12 de lo más cerca de 94, esto es el 7, el resultado de $7 \cdot 12$ se coloca debajo del 94 y se restan.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4' & 5 & 12 \\ \cline{5-5}
6 & 0 & & & 57 \\ \cline{1-2}
& 9 & 4 & & \\
& 8 & 4 & & \\ \cline{2-3}
& 1 & 0 & &
\end{array}$$

Se continúa con el 5 del dividendo.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4' & 5' & 12 \\ \cline{5-5}
6 & 0 & & & 57 \\ \cline{1-2}
& 9 & 4 & & \\
& 8 & 4 & & \\ \cline{2-3}
& 1 & 0 & 5 &
\end{array}$$

Así, se debe agregar un ocho al cociente y restarle 96 al 105.

$$\begin{array}{cccc|c}
6 & 9' & 4' & 5' & 12 \\ \cline{5-5}
6 & 0 & & & 578 \\ \cline{1-2}
& 9 & 4 & & \\
& 8 & 4 & & \\ \cline{2-3}
& 1 & 0 & 5 & \\
& & 9 & 6 & \\ \cline{2-4}
& & & 9 &
\end{array}$$

Así $6945 \div 12 = 578 + \dfrac{9}{12}$, esto ya que $6945 = 578 \cdot 12 + 9$. †

En este caso se dice que el 6945 no es divisible por 12, pues el residuo es distinto de cero, también se pudo haber dicho que el 12 no es un divisor de 6945 y que el 6945 no es un múltiplo de 12.

Justificación del algoritmo de la división

Para mostrar la justificación del algoritmo de la división se realizará la misma operación que se desarrolló en el ejemplo 76, es decir, $6945 \div 12$.

Recuerde que se busca un número que multiplicado por 12 dé como resultado un valor lo más cercano posible de 6945, pero que sea menor a dicho número, con un residuo menor que 12. Así, se busca un número p tal que $6945 = 12 \cdot p + r$, con $0 \leqslant r < 12$, suponga que p es un número de, a lo sumo, 4 dígitos, pues $p < 6945$, digamos que dicho número es $p = abcd = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$ (note que acá las letras simbolizan los dígitos del número).

$$\begin{aligned}
& 6945 = 12 \cdot p + r \\
\Rightarrow\ & 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 12 \cdot (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0) + r \qquad a = 0 \\
\Rightarrow\ & 6 \cdot 10 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 12 \cdot (b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0) + r \\
\Rightarrow\ & 60 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 12 \cdot (b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0) + r
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow (60+9)\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 69\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & b=5\\
\Rightarrow 69\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(5\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 69\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot 5\cdot 10^2 + 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 69\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 60\cdot 10^2 + 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 69\cdot 10^2 - 60\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow (69-60)\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 9\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 9\cdot 10^1\cdot 10^1 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 90\cdot 10^1 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow (90+4)\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 94\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & c=7\\
\Rightarrow 94\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot(7\cdot 10^1 + d\cdot 10^0) + r & \\
\Rightarrow 94\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot 7\cdot 10^1 + 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 94\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 84\cdot 10^1 + 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 94\cdot 10^1 - 84\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 10\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 10\cdot 10^1\cdot 10^0 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 100\cdot 10^0 + 5\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow (100+5)\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 105\cdot 10^0 = 12\cdot d\cdot 10^0 + r & d=8\\
\Rightarrow 105\cdot 10^0 = 12\cdot 8\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 105\cdot 10^0 = 96\cdot 10^0 + r & \\
\Rightarrow 105\cdot 10^0 - 96\cdot 10^0 = r & \\
\Rightarrow (105-96)\cdot 10^0 = r & \\
\Rightarrow 9\cdot 10^0 = r &
\end{array}
$$

Así, $p = abcd = 578$ y $r = 9$, de esta forma $6945 = 12\cdot 578 + 9$.

En el procedimiento se asumió que el número p tendría 4 dígitos, este era el número máximo que podría tener, sin embargo, en el primer paso no se podía encontrar un dígito a, distinto de cero, que al ser multiplicado por 12 dé como resultado un número menor que 6, por lo tanto, $a = 0$.

Posteriormente, el 6 se de las unidades de millar se agrupa con el 9 de las centenas, esto es lo que se hace en el algoritmo cuando se "baja" el siguiente dígito, en este paso se busca b tal que $12\cdot b$ dé menor a 69, esto es con 5, el 12 se distribuye y el $60\cdot 10^2$ se "pasa" a restar a la izquierda de la igualdad, lo que sucede en el algoritmo.

El proceso se repite hasta que se obtiene un número menor que el divisor.

Reglas de divisibilidad

En esta sección se justificarán algunas reglas de divisibilidad, estas reglas son criterios que permiten verificar rápidamente si un número es divisible por otro.

Se analizarán las reglas del 2, 3, 5 y se dejarán como investigación las del 7, 11 y 13.

Para que un número sea divisible por 2 se debe cumplir que su último dígito sea par, es decir, que finalice en 0, 2, 4, 6 o 8.

Teorema 98. Divisibilidad por 2

$(\forall n \in \mathbb{Z}, n = \pm d_{k-1}...d_1d_0)[2|n \Leftrightarrow 2|d_0]$.

Demostración (directa).

Se deben demostrar ambas direcciones, para las dos se utilizará que:

$$\begin{aligned} n &= \pm d_{k-1}d_{k-2}...d_2d_1d_0 \\ &= \pm(d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + d_{k-2} \cdot 10^{k-2} + ... + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10^1 + d_0) \\ &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0) \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $2|n$, es decir, que $(\exists p \in \mathbb{Z})[n = 2 \cdot p]$.

Se debe demostrar que $2|d_0$, es decir, que $(\exists r \in \mathbb{Z})[d_0 = 2 \cdot r]$.

$$\begin{aligned} n &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0) \\ 2 \cdot p &= \pm 2 \cdot (d_{k-1} \cdot 5 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 5 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 5 \cdot 10 + d_1 \cdot 5) \pm d_0 \\ 2 \cdot p &= 2k \pm d_0 \\ 2 \cdot p - 2 \cdot k &= \pm(2 \cdot p_{k-1} \cdot 10^{k-1} + 2 \cdot p_{k-2} \cdot 10^{k-2} + ... + 2 \cdot p_2 \cdot 10^2 + 2 \cdot p_1 \cdot 10^1 + 2 \cdot p_0) \\ 2 \cdot (p - k) &= \pm d_0 \\ 2 \cdot r &= \pm d_0 \end{aligned}$$

donde $k = \pm(d_{k-1} \cdot 5 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 5 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 5 \cdot 10 + d_1 \cdot 5)$, que es un número entero por la cerradura de las operaciones y $r = p - k$ que también pertenece a los números enteros por la misma razón, por lo tanto, $2|d_0$.

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $2|d_0$, es decir, que $(\exists q \in \mathbb{Z})[d_0 = 2 \cdot q]$.

Se debe demostrar que $2|n$, es decir, que $(\exists r \in \mathbb{Z})[n = 2 \cdot r]$.

$$\begin{aligned} n &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0) \\ &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + 2q) \\ &= \pm 2 \cdot (d_{k-1} \cdot 5 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 5 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 5 \cdot 10 + d_1 \cdot 5 + q) \\ &= \pm 2 \cdot r \end{aligned}$$

Donde $r = d_{k-1} \cdot 5 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 5 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 5 \cdot 10 + d_1 \cdot 5 + q$, que, por la cerradura de la suma y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ (incluye también la potencia con exponente positivo), entonces $k \in \mathbb{Z}$.

$\therefore 2|n \Leftrightarrow 2|d_0$. †

Para que un número sea divisible por 3 se debe cumplir que la suma de los dígitos del número sea divisible por 3. Para verificar este teorema, se necesita un resultado previo cuya demostración se realiza por inducción matemática, esta demostración se muestra en el anexo **??**.

Teorema 99.

$(\forall n \in \mathbb{N})[9|(10^n - 1)]$.

Demostración (por inducción, se omite, ver anexo **??**).

Teorema 100. Divisibilidad por 3

$(\forall n \in \mathbb{Z}, n = \pm d_{k-1}...d_1 d_0)[3|n \Leftrightarrow 3|(d_{k-1} + ... + d_1 + d_0)]$.

Demostración (directa).

Se deben demostrar ambas direcciones, para ambas se utilizará que

$$\begin{aligned}
n &= \pm d_{k-1}d_{k-2}...d_2d_1d_0 \\
&= \pm(d_{k-1}\cdot 10^{k-1} + d_{k-2}\cdot 10^{k-2} + ... + d_2\cdot 10^2 + d_1\cdot 10^1 + d_0) \\
&= \pm(d_{k-1}\cdot(10^{k-1} - 1 + 1) + d_{k-2}\cdot(10^{k-2} - 1 + 1) + ... + d_2\cdot(10^2 - 1 + 1) \\
&\qquad + d_1\cdot(10 - 1 + 1) + d_0) \\
&= \pm(d_{k-1}\cdot(10^{k-1} - 1) + d_{k-1}\cdot 1 + d_{k-2}\cdot(10^{k-2} - 1) + d_{k-2}\cdot 1 + ... + d_2\cdot(10^2 - 1) \\
&\qquad + d_2\cdot 1 + d_1\cdot(10 - 1) + d_1\cdot 1 + d_0) \\
&= \pm(d_{k-1}\cdot 9\cdot q_{k-1} + d_{k-1} + d_{k-2}\cdot 9\cdot q_{k-2} + d_{k-2} + ... + d_2\cdot 9q_2 + d_2 + d_1\cdot 9q_1 + d_1 + d_0) \\
&= \pm\left(9\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1) + d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0\right)
\end{aligned}$$

Donde $10^i - 1$ se sustituyó por $9\cdot q_i$, por el teorema anterior.

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $3|n$, esto es, $(\exists p \in \mathbb{Z})[n = 3\cdot p]$.

Se debe demostrar que $3|(d_{k-1} + ... + d_1 + d_0)$, esto es, $(\exists r \in \mathbb{Z})[d_{k-1} + ... + d_1 + d_0 = 3\cdot r]$.

$$\begin{aligned}
n &= \pm(9\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1) \\
&\qquad + d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0) \\
3\cdot p &= \pm 3\cdot(3\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1)) \\
&\qquad \pm (d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0) \\
3\cdot p &= 3\cdot t \pm (d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0) \\
3\cdot p - 3\cdot t &= \pm(d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0) \\
3\cdot(p - t) &= \pm(d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0) \\
3\cdot r &= \pm(d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0)
\end{aligned}$$

Donde $t = \pm 3\cdot(3\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1))$, que es un número entero por la cerradura de las operaciones y $r = p - t$, que también es entero por la misma razón. Por lo que $3|(d_{k-1} + ... + d_1 + d_0)$.

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $3|(d_{k-1} + ... + d_1 + d_0)$, esto es que $(\exists p \in \mathbb{Z})[d_{k-1} + ... + d_1 + d_0 = 3p]$.

Se debe demostrar que $3|n$, es decir, que $(\exists r \in \mathbb{Z})[n = 3r]$.

$$\begin{aligned}
n &= \pm\left(9\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1) + d_{k-1} + d_{k-2} + ... + d_1 + d_0\right) \\
&= \pm\left(9\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1) + 3p\right) \\
&= \pm 3\cdot(3\cdot(d_{k-1}\cdot q_{k-1} + d_{k-2}\cdot q_{k-2} + ... + d_2\cdot q_2 + d_1\cdot q_1) + p)
\end{aligned}$$

$$= \pm 3 \cdot r$$

Donde $r = 3 \cdot (d_{k-1} \cdot q_{k-1} + d_{k-2} \cdot q_{k-2} + ... + d_2 \cdot q_2 + d_1 \cdot q_1) + p$, tal que $r \in \mathbb{Z}$ por la cerradura de las operaciones, por lo que $3|n$.

$\therefore 3|n \Leftrightarrow 3|(d_{k-1} + ... + d_1 + d_0)$ †

En esta demostración se puede ver fácilmente que si la suma de los dígitos de un número es divisible por 9 entonces el número es divisible por 9.

La regla de la divisibilidad por 5 indica que el último dígito del número debe ser 0 ó 5, es decir, debe ser divisible por 5, la demostración es muy similar a la divisibilidad por 2.

Teorema 101. Divisibilidad por 5

$(\forall n \in \mathbb{Z}, n = \pm d_{k-1}...d_1 d_0)[5|n \Leftrightarrow 5|d_0]$.

Demostración (directa).

Se deben demostrar ambas direcciones.

$$\begin{aligned}
n &= \pm d_{k-1} d_{k-2} ... d_2 d_1 d_0 \\
&= \pm(d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + d_{k-2} \cdot 10^{k-2} + ... + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10^1 + d_0) \\
&= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0)
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Hipótesis: $5|n$, es decir, que $(\exists p \in \mathbb{Z})[n = 5 \cdot p]$.

Se debe demostrar que $5|d_0$, es decir, que $(\exists r \in \mathbb{Z})[d_0 = 5 \cdot r]$.

$$\begin{aligned}
n &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0) \\
5 \cdot p &= \pm 5 \cdot (d_{k-1} \cdot 2 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 2 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 2 \cdot 10 + d_1 \cdot 2) \pm d_0 \\
5 \cdot p &= 5 \cdot q \pm d_0 \\
5 \cdot p - 5 \cdot q &= \pm d_0 \\
5 \cdot (p - q) &= \pm d_0 \\
5 \cdot r &= \pm d_0
\end{aligned}$$

Donde $q = d_{k-1} \cdot 2 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 2 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 2 \cdot 10 + d_1 \cdot 2$ que es entero por la cerradura de la suma y la multiplicación en $\mathbb{Z}$, además $r = p - q$ que también es entero por la misma razón, por lo tanto $5|d_0$.

"$\Leftarrow$" Hipótesis: $5|d_0$, es decir, que $(\exists p \in \mathbb{Z})[d_0 = 5 \cdot p]$.

Se debe demostrar que $5|n$, es decir, que $(\exists q \in \mathbb{Z})[n = 5 \cdot q]$.

$$\begin{aligned}
n &= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + d_0) \\
&= \pm(d_{k-1} \cdot 10 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 10 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 10 \cdot 10 + d_1 \cdot 10 + 5p) \\
&= \pm 5 \cdot (d_{k-1} \cdot 2 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 2 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 2 \cdot 10 + d_1 \cdot 2 + p) \\
&= \pm 5q
\end{aligned}$$

Donde $q = d_{k-1} \cdot 2 \cdot 10^{k-2} + d_{k-2} \cdot 2 \cdot 10^{k-3} + ... + d_2 \cdot 2 \cdot 10 + d_1 \cdot 2 + p$, que, por la cerradura de la suma y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ (incluye también la potencia con exponente positivo), por lo que $5|n$.

$\therefore 5|n \Leftrightarrow 5|d_0$. †

Ejercicio 8.

Investigue las reglas de divisibilidad por 7, 11 y 13.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Definición 29. Máximo común divisor (MCD)

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, el *máximo común divisor* de m y n se denota $MCD(m, n)$ y se define como el número natural más grande que divide a m y a n.

Matemáticamente, si $c = MCD(m, n)$ entonces:

1. $c \in \mathbb{N}, c > 0$.
2. $c|m \wedge c|n$.
3. $(\forall d \in \mathbb{N})[(d|m \wedge d|n) \Rightarrow d \leqslant c]$.

La última condición asegura que c sea el mayor de todos los números que dividen a m y a n al mismo tiempo, otra manera de escribir esta condición es $(\forall d \in \mathbb{N})[(d|m \wedge d|n) \Rightarrow d|c]$.

Ejemplo 77.

Determine el Máximo común divisor de 16 y 24.

Todos los divisores de 16 son: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, 16.

Todos los divisores de 24 son: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, 3, $\boxed{4}$, 6, $\boxed{8}$, 12, 24.

Se tiene que los números que dividen a ambos números al mismo tiempo son: 1, 2, 4, 8 y, de ellos, el mayor es 8.

Por lo tanto $MCD(16, 24) = 8$. †

Ejemplo 78.

Determine el Máximo común divisor de 36 y 24.

Se cumple que $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $24 = 2^3 \cdot 3$.

Así, el Máximo común divisor debe tener como factores los que se repiten en ambos, es decir 2^2 y 3, por lo tanto $MCD(36, 24) = 2^2 \cdot 3 = 12$. †

Ejemplo 79.

Determine el Máximo común divisor de 60 y 90.

El algoritmo más famoso para calcular el Máximo común divisor es colocar los dos números uno al lado del otro e ir dividiéndolos a ambos por los divisores comunes que posean.

$$\begin{array}{cc|c} 60 & 90 & 2 \\ 30 & 45 & 3 \\ 10 & 15 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \end{array}$$

Por lo que $MCD(60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. †

Definición 30. Mínimo común múltiplo (mcm)

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, el *mínimo común múltiplo* de m y n se denota $mcm(m, n)$ y se define como el número natural más pequeño que es múltiplo de m y n, es decir que m lo divide y que n lo divide.

Matemáticamente, si $c = mcm(m, n)$ entonces:

1. $c \in \mathbb{N}, c > 0$.
2. $m|c \wedge n|c$.
3. $(\forall d \in \mathbb{N})[(m|d \wedge n|d) \Rightarrow d \geqslant c]$.

La última condición asegura que c sea el menor de todos los múltiplos comunes, al igual que el anterior, otra manera de escribir esta condición es $(\forall d \in \mathbb{N})[(m|d \wedge n|d) \Rightarrow c|d]$.

Ejemplo 80.

Determine el mínimo común múltiplo de 16 y 24.

Los primeros múltiplos de 16 son: 16, 32, $\boxed{48}$, 64, 80, $\boxed{96}$, ...

Los primeros múltiplos de 24 son: 24, $\boxed{48}$, 72, $\boxed{96}$, 120, ...

Se tiene que los números que son múltiplos de ambos al mismo tiempo son: 48, 96, etc., de ellos, el menor es 48.

Por lo tanto $mcm(16, 24) = 48$. †

Ejemplo 81.

Determine el mínimo común múltiplo de 14 y 12.

Se cumple que $14 = 2 \cdot 7$ y $12 = 2^2 \cdot 3$.

Así, el mínimo común múltiplo debe tener como factores al menos a 2^2, 3 y 7, por lo tanto se tiene que $mcm(14, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. †

Ejemplo 82.

Determine el mínimo común múltiplo de 16 y 18.

El algoritmo más famoso para calcular el mínimo común múltiplo es colocar los dos números uno al lado del otro e ir dividiéndolos por sus divisores (excepto el 1), si algún divisor es común, entonces se dividen ambos.

$$\begin{array}{cc|c} 16 & 18 & 2 \\ 8 & 9 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 1 & \end{array}$$

Por lo que $mcm(16, 18) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. †

Ejemplo 83.

En una ciudad se tiene dos semáforos, uno de ellos tarda 42 segundos entre una señal de verde y la siguiente, el segundo semáforo tarda 52 segundos en hacer lo mismo. Si a las 10 a.m. los dos semáforos encendieron la señal de verde al mismo tiempo, ¿a qué hora volverán a poner la señal de verde al mismo tiempo?

$$\begin{array}{cc|c} 42 & 52 & 2 \\ 21 & 26 & 2 \\ 21 & 13 & 3 \\ 7 & 13 & 7 \\ 1 & 13 & 13 \\ \hline 1 & 1 & \end{array}$$

Así, los semáforos se encuentran en verde al mismo tiempo cada $mcm(42, 52) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 1092$ segundos. Esto es, cada 18 minutos y 12 segundos. Por lo tanto, los semáforos volverán a encender la señal de verde al mismo tiempo a las 10 horas, 18 minutos y 12 segundos de la mañana. †

Números primos y números compuestos

Definición 31. Número primo

Al número $n \in \mathbb{Z}$ se le llama *número primo* si sólo posee dos divisores naturales distintos: 1 y n.

Note que el número 1 no es primo, pues, de acuerdo a esta definición, debe tener dos divisores naturales y deben ser distintos, el único divisor natural del 1 es 1.

Definición 32. Número compuesto

Al número $n \in \mathbb{Z}$ se le llama *número compuesto* si posee más de dos divisores naturales distintos.

Ejemplo 84.

Los siguientes son los primeros números primos naturales: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, ...

Ejemplo 85.

Los siguientes son algunos números compuestos:

12 pues lo divide 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

26 pues lo divide 1, 2 y 13.

1763 pues lo divide 1, 41, 43 y 1763.

Teorema fundamental de la aritmética

El teorema fundamental de la aritmética indica que todo número natural $n \geqslant 2$ tiene una representación única como producto de factores primos (salvo el orden de los mismos), de manera que un primo puede aparecer más de una vez.

Por ejemplo, el número 18 puede ser escrito como $2 \cdot 3 \cdot 3$ o $2 \cdot 3^2$, no existe otra manera de escribir 18 como producto de primos, salvo el orden de los mismos, por ejemplo $18 = 3 \cdot 2 \cdot 3$.

Teorema 102. Teorema fundamental de la aritmética

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geqslant 2)[n = (-1)^{e_0} \cdot p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}]$$

Donde

- $e_0 \in \{0, 1\}$.
- $p_1, p_2, ..., p_k$ números primos naturales distintos.
- $(\forall i \in \{1, 2, ..., k\})[e_i \in \mathbb{N}]$.

Demostración (ver anexo E).

Operaciones combinadas con números enteros

Por lo general, las operaciones se combinan para realizar expresiones complejas; en estos casos donde interviene una gran variedad de operaciones, se debe seguir una serie de reglas, las cuales se enuncian a continuación:

1. En una expresión que involucre paréntesis, se deben realizar primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis.
2. Si se presenta un paréntesis dentro de otro, se realizan las operaciones del paréntesis interno.
3. El producto y el cociente tienen prioridad sobre la suma y la resta y estas operaciones se realizan de izquierda a derecha.

Ejemplo 86.

Realice las operaciones $12 - \{-2 + 3[4 - (-8 + 12) + 1] - 2\} + 3$.

$$\begin{aligned} & 12 - \{-2 + 3[4 - (-8 + 12) + 1] - 2\} + 3 \\ = {} & 12 - \{-2 + 3[4 - 4 + 1] - 2\} + 3 && \text{Se realiza el paréntesis interno} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 12 - \{-2 + 3 \cdot 1 - 2\} + 3 && \text{Se realiza el paréntesis siguiente}\\
&= 12 - \{-2 + 3 - 2\} + 3 && \text{Tiene prioridad la multiplicación}\\
&= 12 -^{-} 1 + 3 && \text{Se realiza el siguiente paréntesis}\\
&= 16
\end{aligned}
$$

$\therefore 12 - \{-2 + 3[4 - (-8 + 12) + 1] - 2\} + 3 = 16.$ †

Ejemplo 87.

Realice las operaciones $5 - 2[3(7 - 4) - (-12 + 3)] - 6$.

$$
\begin{aligned}
5 - 2[3(7 - 4) - (-12 + 3)] - 6 &= 5 - 2[3 \cdot 3 - -9] - 6\\
&= 5 - 2[9 + 9] - 6\\
&= 5 - 2 \cdot 18 - 6\\
&= 5 - 36 - 6\\
&= -37
\end{aligned}
$$

$\therefore 5 - 2[3(7 - 4) - (-12 + 3)] - 6 = -37.$ †

Ejemplo 88.

Realice las operaciones $-7(3 - 4 \cdot 2) + 2[-2(-6 - 1) + 3]$.

$$
\begin{aligned}
-7(3 - 4 \cdot 2) + 2[-2(-6 - 1) + 3] &= -7(3 - 8) + 2[-2 \cdot -7 + 3]\\
&= -7 \cdot -5 + 2[14 + 3]\\
&= 35 + 2 \cdot 17\\
&= 35 + 34\\
&= 69
\end{aligned}
$$

$\therefore -7(3 - 4 \cdot 2) + 2[-2(-6 - 1) + 3] = 69.$ †

2.2.3. El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

El tercer conjunto en esta secuencia también es una ampliación del anterior. Este conjunto se llama el **Conjunto de los Números Racionales**[28] y se denota por $\mathbb{Q}$, además de contener a $\mathbb{Z}$ contiene todos los números fraccionarios definidos de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}}$$

donde

[28] Del latín *rationālis*, que significa "relativo a la razón".

$$\text{Fracción} \rightarrow \frac{a}{b} \begin{array}{l} \nearrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Línea fraccionaria} \\ \searrow \text{Denominador} \end{array}$$

Se cumple que $\frac{a}{b} = a \div b = a \cdot b^{-1}$. Anteriormente se afirmó que todos los números enteros son racionales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), esto es cierto ya que todos los números enteros pueden ser escritos de forma fraccionaria de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \left\{ ..., \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, ... \right\}$$

El conjunto de los números racionales tiene las siguientes características:

- Infinito: tiene una infinita cantidad de elementos.
- Ordenado: dados dos números racionales, se puede decir si uno es mayor, menor o igual al otro.
- Denso: Entre dos elementos del conjunto hay al menos un elemento del conjunto.
- Poseen una expansión decimal finita o infinita periódica.

En el conjunto de los números racionales se tiene que la adición, la multiplicación, la sustracción y la división son operaciones cerradas, es decir $(\forall a, b \in \mathbb{Q})[a + b \in \mathbb{Q} \wedge a - b \in \mathbb{Q} \wedge a \cdot b \in \mathbb{Q} \wedge a \div b \in \mathbb{Q}]$.

La penúltima propiedad indica que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso, esto es, que entre dos números racionales siempre se puede determinar al menos otro número racional, se va a verificar que esto se cumple.

Considere los números racionales $\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$ tales que $a, c \in \mathbb{Z}, c, d \in \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, considere el número

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2}$$

que es racional por la cerradura de las operaciones en $\mathbb{Q}$.

Se demostrará que $\frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d}$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} && \text{Teorema 42.} \\ &\Rightarrow 2 \cdot \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} && \text{Teorema 42.} \\ &\Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{a}{b}}{2} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} && \text{Teorema 44.} \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} && \text{Teorema 28.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \frac{c}{d} + \frac{c}{d} && \text{Teorema 42.} \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 2 \cdot \frac{c}{d} && \text{Teorema 42.} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{2 \cdot \frac{c}{d}}{2} && \text{Teorema 44.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d} \qquad \text{Teorema 28.}$$

Por lo tanto $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \dfrac{c}{d}$.

La última propiedad indica que los números racionales se pueden representar por una expansión decimal que es finita o infinita periódica. Lo contrario también es cierto, es decir, todo número con expansión decimal finita o infinita periódica es un número racional.

Ejemplo 89.

La fracción $\dfrac{2}{5}$ corresponde con el decimal finito $0,2$.

La fracción $\dfrac{7}{3}$ corresponde con el decimal infinito $0,3333... = 0,\overline{3}$.

La fracción $\dfrac{3}{11}$ corresponde con el decimal infinito $0,272727... = 0,\overline{27}$

De acuerdo con el algoritmo de la división, al realizar $m \div n$ el residuo es un número $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant r < n$, es decir, $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, esto es un conjunto finito de elementos (posee exactamente n elementos). Al continuar el proceso de la división para obtener decimales, a lo sumo en $n+1$ iteraciones se tendrá que repetir alguno de los números anteriores y se repetirá el ciclo de los decimales.

Ejemplo 90.

$$\begin{array}{cccccc|l}
3, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ \cline{7-7}
3 & 0 & & & & & 0{,}2727... \\
2 & 2 & & & & & \\ \cline{1-2}
 & 8 & 0 & & & & \\
 & 7 & 7 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3 & 0 & & & \\
 & & 2 & 2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 8 & 0 & & \\
 & & & 7 & 7 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 3 & 0 &
\end{array}$$

Ejemplo 91.

Determine el número racional que corresponde con el número decimal $0,243243243\overline{243}$.

El decimal $0,243243243...$ corresponde con un racional; para encontrarlo usamos el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
x &= 0,243243243... && \text{Al número original se le llama } x \\
1000x &= 243,243243243... && \text{Se multiplica ambos lados por 1000} \\
1000x - x &= 243,\overline{243} - 0,\overline{243} && \text{Se resta miembro a miembro las igualdades anteriores} \\
999x &= 243
\end{aligned}$$

$$x = \frac{243}{999} \qquad \text{Se despeja } x$$
$$x = \frac{9}{37} \qquad \text{Se simplifica la fracción}$$

†

La notación de $\mathbb{Q}$ surge de la palabra italiana *quoziente*, utilizada por Giuseppe Peano en 1895. El surgimiento de estos números no fue tan problemático como el cero, los babilónicos, griegos y romanos los utilizaron para simbolizar las partes de una unidad, de hecho, para muchos sólo existían las fracciones con numerador uno. La línea fraccionaria fue introducida por Fibonacci en el siglo XIII, el árabe Al Kashi generalizó el uso de los números decimales, pero no fue hasta el siglo XVII que se escribieron tal como los utilizamos hoy en día, separados por un punto decimal o una coma.

Note cómo estos números también surgen ante una necesidad de representar una situación cotidiana, en este caso, la de dividir una unidad en partes, por ejemplo, un bollo de pan, una fruta, una pizza (más actual), etc.

Operaciones combinadas con números racionales (fracciones)

En este caso se siguen las mismas reglas anteriores, recordando que una fracción es una división y las fórmulas que se demostraron para las operaciones con números racionales.

Ejemplo 92.

Realice las operaciones $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$ y simplifique al máximo el resultado.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{4\cdot 2 - 1\cdot 3}{3\cdot 2} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{8-3}{3\cdot 2} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3\cdot 2} \\
&= \frac{2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\therefore \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$. †

Ejemplo 93.

Realice las operaciones $\frac{-2}{3} \div \frac{6-2}{5-2}$ y simplifique al máximo el resultado.

$$\begin{aligned}\frac{-2}{3} \div \frac{6-2}{5-2} &= \frac{-2}{3} \div \frac{2}{3}\\ &= \frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{2}\\ &= -1\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{-2}{3} \div \dfrac{6-2}{5-2}$. †

Ejemplo 94.

Realice las operaciones $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}}$ y simplifique al máximo el resultado.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}} &= \frac{\frac{2-5}{10}}{\frac{3}{4}}\\ &= \frac{\frac{-3}{10}}{\frac{3}{4}}\\ &= \frac{-3\cdot 4}{10\cdot 3}\\ &= \frac{-2}{5}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}} = \dfrac{-2}{5}$. †

Ejemplo 95.

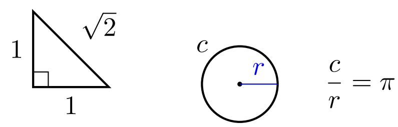
Realice las operaciones $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}-1}$ y simplifique al máximo el resultado.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}-1} &= \frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{15}}{\frac{3}{2}-1}\\ &= \frac{\frac{2\cdot 5+4}{15}}{\frac{3-2}{2}}\\ &= \frac{\frac{14}{15}}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{14\cdot 2}{15}\\ &= \frac{28}{15}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}-1} = \dfrac{28}{15}$. †

2.2.4. El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$)

Si bien el conjunto de los números racionales pareciera suficiente para representar la mayoría de los números "cotidianos", lo cierto es que también existen muchos números que no se pueden representar como racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ surge como la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de cateto 1, este número no es racional; π es la relación entre la circunferencia de un círculo y radio, este número tampoco es un número racional.



Estos números pertenecen a un conjunto llamado **Conjunto de los Números Irracionales**[29] y denotado por $\mathbb{I}$; a este conjunto pertenecen los números que tienen una expansión decimal infinita no periódica; estos números son de gran utilidad en matemática aplicada.

Para este caso, contrario a los anteriores, note que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, es decir, que estos conjuntos no tienen ningún elemento en común[30], o sea, que los números racionales NO son irracionales.

Lema 1.

$(\forall n \in \mathbb{Z})[n^2 \text{ es par } \Rightarrow n \text{ es par}]$.

Demostración (contrapositiva).

Se demostrará que n es impar $\Rightarrow n^2$ es impar, esta es la contrapositiva y, por lo tanto, tautológicamente equivalente a la original.

Hipótesis: n es impar, es decir $(\exists p \in \mathbb{Z})[n = 2p + 1]$

Hay que demostrar que n^2 es impar, es decir $(\exists q \in \mathbb{Z})[n^2 = 2q + 1]$

$$\begin{aligned} n = 2p + 1 &\Rightarrow n^2 = (2p+1)^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 4p^2 + 4p + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2 \cdot (2p^2 + 2p) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2 \cdot q + 1 \end{aligned}$$

Donde $q = 2p^2 + 2p$, que es entero por la cerradura de las operaciones en $\mathbb{Z}$.

Por lo tanto $(\forall n \in \mathbb{Z})[n^2 \text{ es par } \Rightarrow n \text{ es par}]$. †

Teorema 103.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demostración (por contradicción).

[29] Que no es racional, es decir, que no es una razón.

[30] En teoría de conjuntos se dice que son disjuntos.

Suponga que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, esto es, $(\exists a \in \mathbb{Z})(\exists b \in \mathbb{Z}^*)\left[\sqrt{2} = \frac{a}{b}\right]$, siendo $\frac{a}{b}$ canónica, es decir, $MCD(a, b) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{a}{b} &\Rightarrow \sqrt{2}b = a \\
&\Rightarrow (\sqrt{2}b)^2 = (a)^2 \\
&\Rightarrow 2b^2 = a^2 && a^2 \text{ es par } \Rightarrow a \text{ es par} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})[a = 2k]. \\
&\Rightarrow 2b^2 = (2k)^2 \\
&\Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \\
&\Rightarrow b^2 = 2k^2 && b^2 \text{ es par } \Rightarrow b \text{ es par} \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Z})[b = 2r].
\end{aligned}$$

De acá $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2r}$ que no es una fracción canónica, por lo menos tendría al 2 como divisor común.

Por tanto, $\sqrt{2}$ no se podría representar como una fracción canónica y por ende, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. †

Ejemplo 96.

Los siguientes números pertenecen al conjunto de los números irracionales:

1. π.
2. e.
3. $\sqrt{2}$.
4. $0,202002000200002...$
5. $5,122223222422225222226...$
6. $0,123456789101112131415...$

El conjunto de los números irracionales tiene las siguientes características:

- Infinito: tiene una infinita cantidad de elementos.
- Ordenado: dados dos números racionales, se puede decir si uno es mayor, menor o igual al otro.
- Denso: Entre dos elementos del conjunto hay al menos un elemento del conjunto.
- Poseen una expansión decimal infinita no periódica.

Históricamente este conjunto surgió gracias a la geometría y la Escuela Pitagórica, esto al tratar de determinar, por ejemplo, la medida de la diagonal de un cuadrado de lado entero, o la relación entre la circunferencia y el radio, esto en el sigo VI a.C., en esos casos se descubrió que estas medidas eran inconmensurables[31], es interesante observar que el descubrimiento de estos números se da cuando todavía no se había trabajado con los números negativos ni el cero. Tuvo que pasar mucho tiempo para que los números irracionales fueran reconocidos como verdaderos números y para hacerlo hubo que desarrollar mucha teoría matemática.

Este teorema sólo nos afirma que si $\sqrt{2}$ existe, entonces no puede ser racional, posteriormente en análisis se verificará que $\sqrt{2}$ sí existe.

[31] Que es muy difícil o imposible de medir.

Ejemplo 97.

En el conjunto de los números irracionales no se cumple la cerradura de las operaciones definidas anteriormente, considere por ejemplo:

1. $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0.$
2. $e - e = 0.$
3. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$
4. $\dfrac{\pi}{\pi} = 1.$

En todos los casos se están operando números irracionales y el resultado es un número entero.

Ejercicio 9.

1. Demuestre que la adición de un número racional y un irracional da como suma un número irracional.
2. Demuestre que la multiplicación de un número racional y un irracional da como producto un número irracional.

Algoritmo de la raíz cuadrada

El algoritmo de la raíz cuadrada se mostrará por medio de un ejemplo, se va a calcular la raíz cuadrada de $53587,4$.

El primer paso es dividir el número en parejas, tanto delante de la coma decimal, como después. Para el procedimiento se puede realizar una línea similar a la de la división.

$$5 \quad 35 \quad 87. \quad 40 \,\big|\underline{\quad}$$

Ahora se determina el número cuyo cuadrado se aproxime más a 05, pero siempre que sea menor, en este caso, es el 2, pues $2^2 = 4$, al 5 le restamos este resultado.

$$\begin{array}{llll|l} 5 & 35 & 87. & 40 & \underline{\;2\;} \\ \underline{4} & & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

La siguiente pareja de números se "baja" y el 2 del resultado se multiplica por 2 y se coloca abajo de manera temporal.

$$\begin{array}{llll|l} 5 & 35 & 87. & 40 & \underline{\;2\;} \\ \underline{4} & & & & 4 \\ 1 & 35 & & & \end{array}$$

Lo que sigue es determinar un número tal que $4\_ \times \_$ de un resultado lo más cercano a 135.

$$\begin{array}{llll|l} 5 & 35 & 87. & 40 & \underline{\;2\qquad\;} \\ \underline{4} & & & & \\ 1 & 35 & & & 4\_ \times \_ \end{array}$$

Este es el 3, ya que $43 \times 3 = 129$; así, el 3 se coloca como el siguiente dígito del resultado y a 135 se le resta 129.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & 35 & 87. & 40 & 23 \\ \cline{5-5}
4 & & & & \\ \cline{1-1}
1 & 35 & & & 4\underline{3} \times \underline{3} = 129 \\
1 & 29 & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & & &
\end{array}
$$

Se "baja" el siguiente par de dígitos y se repite el proceso, cuando se llega a la coma decimal se le coloca la coma al resultado.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & 35 & 87. & 40 & 23 \\ \cline{5-5}
4 & & & & \\ \cline{1-1}
1 & 35 & & & 4\underline{3} \times \underline{3} = 129 \\
1 & 29 & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & 87 & & 46\underline{1} \times \underline{1} = 461
\end{array}
$$

De esta forma, se coloca el 1 en el resultado y a 687 se le resta 461.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & 35 & 87. & 40 & 231 \\ \cline{5-5}
4 & & & & \\ \cline{1-1}
1 & 35 & & & 4\underline{3} \times \underline{3} = 129 \\
1 & 29 & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & 87 & & 46\underline{1} \times \underline{1} = 461 \\
 & 4 & 61 & & \\ \cline{2-3}
 & 2 & 26 & &
\end{array}
$$

Para el siguiente paso, como se llegó a la coma decimal, se debe agregar la coma al resultado después del 1 que se encontró y seguir el mismo procedimiento "bajando" el 40.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & 35 & 87. & 40 & 231,4 \\ \cline{5-5}
4 & & & & \\ \cline{1-1}
1 & 35 & & & 4\underline{3} \times \underline{3} = 129 \\
1 & 29 & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & 87 & & 46\underline{1} \times \underline{1} = 461 \\
 & 4 & 61 & & \\ \cline{2-3}
 & 2 & 26 & 40 & 462\underline{4} \times \underline{4} = 18496
\end{array}
$$

El procedimiento puede llegar hasta acá o se pueden seguir sacando más decimales de precisión agregando ceros a la expansión decimal del número original.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
5 & 35 & 87. & 40 & 00 & 231{,}48 \\ \cline{6-6}
4 & & & & & \\ \cline{1-1}
1 & 35 & & & & 4\underline{3} \times \underline{3} = 129 \\
1 & 29 & & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & 87 & & & 46\underline{1} \times \underline{1} = 461 \\
 & 4 & 61 & & & \\ \cline{2-3}
 & 2 & 26 & 40 & & 462\underline{4} \times \underline{4} = 18496 \\
 & 1 & 84 & 96 & & \\ \cline{2-4}
 & & 41 & 44 & 00 & 4628\underline{8} \times \underline{8} = 370304
\end{array}
$$

Por lo tanto $\sqrt{53587{,}4} \approx 231{,}48$

Ejercicio 10. Justificación del algoritmo de la raíz cuadrada

Analice el algoritmo de la raíz cuadrada de una manera similar a como se realizó el de la división y así deducir la razón por la que se realiza de dicha manera.

Sugerencias:

- Realice el procedimiento con números más pequeños, puede analizarlo con un número de tres cifras.
- Analice primero por qué se deben agrupar las cifras en parejas.
- Recuerde que si $b = \sqrt{a}$ entonces $b^2 = a$; además $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

2.2.5. El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)

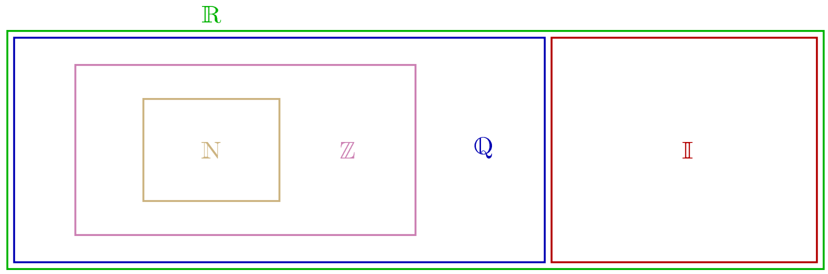
El conjunto que resulta de unir los Números Racionales con los Irracionales recibe el nombre de **Conjunto de los Números Reales** y se denota por $\mathbb{R}$. Es decir

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$$

El conjunto de los números reales tiene las siguientes características:

- Infinito: tiene una infinita cantidad de elementos.
- Ordenado: dados dos números reales, se puede decir si uno es mayor, menor o igual al otro.
- Denso: Entre dos elementos del conjunto hay al menos un elemento del conjunto.

Para representar los conjuntos y sus relaciones por lo general se puede pensar en ellos como cajas que contienen números, de esta manera se tendría:



Con esta representación se observa fácilmente que los números naturales ($\mathbb{N}$) es la caja más pequeña; hay otra caja más grande que los contiene que son los números enteros ($\mathbb{Z}$); la siguiente caja contiene a las dos anteriores, estas son los números racionales ($\mathbb{Q}$); los irracionales es una caja totalmente aparte a las anteriores y, por último, se encuentra la caja más grande que son los reales ($\mathbb{R}$) y que los contiene a todos. Más adelante también se mostrará una caja aún mayor que contiene a los reales que son los números complejos o números imaginarios.

Ejemplo 98.

1. El número -7 es un número entero y racional, porque $-7 = \dfrac{-7}{1}$ y es un número real porque los números reales incluyen a todos los números racionales.
2. El número $\sqrt{-10}$ no es un número real, ya que las raíces cuadradas de números negativos no pertenecen a este conjunto (en radicales se profundiza este aspecto).
3. El número $\dfrac{1}{8}$ es racional y real.
4. El número $\dfrac{-3}{7}$ es racional y real.
5. El número $\sqrt{-7}$ no es un número real.
6. El número $\dfrac{2}{0}$ no es un número real.
7. El número $\sqrt{4}$ es natural, entero, racional y real.

Se debe tener clara la diferencia entre un número racional y una fracción, un número racional es una fracción con numerador entero y denominador entero distinto de cero mientras que una **fracción** puede contener cualquier número o símbolo que represente a un número en su numerador o en su denominador, no necesariamente enteros. Así, una fracción en $\mathbb{R}$ puede ser racional o irracional.

Ejemplo 99.

1. Los números $\dfrac{2}{7}$ y $\dfrac{-3}{2}$ son fracciones y también son números racionales.
2. Los números $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$ y $\dfrac{6}{\pi}$ son fracciones, pero son números irracionales.
3. El número $\dfrac{-\sqrt{7}}{2}$ es una fracción irracional y real.
4. El número $\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$ es una fracción y no es un número real.

Ejercicio 11.

Complete la siguiente tabla indicando **Sí** si el número dado pertenece al conjunto correspondiente, en caso contrario escribir **No**.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
4					
-6					
$\sqrt{2}$	No	No	No	Sí	Sí
$-\sqrt{4}$					
$\dfrac{3}{-5}$					
$\dfrac{\pi}{e}$					
$\dfrac{\sqrt{-9}}{2}$					
$\dfrac{9}{0}$					
$\sqrt{9}$					

Operaciones combinadas

Por lo general, las operaciones se combinan para realizar expresiones complejas; en estos casos donde interviene una gran variedad de operaciones, se debe seguir una serie de reglas, las cuales se enuncian a continuación:

1. En una expresión que involucre paréntesis, se deben realizar primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis. El valor absoluto tiene la misma prioridad que un paréntesis.

2. Si se presenta un paréntesis dentro de otro, se realizan las operaciones del paréntesis interno.
3. Las potencias y los radicales tienen prioridad sobre la multiplicación y la división.
4. La multiplicación y la división tienen prioridad sobre la adición y la sustracción.

Nota: La potencia es la única operación matemática que se agrupa de derecha a izquierda en el caso que no haya paréntesis, es decir, $a^{b^c} = a^{(b^c)}$

Ejemplo 100.

Simplifique la expresión $\dfrac{5^{-2} - 2^{-1}}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{5^{-2} - 2^{-1}}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)^2} &= \frac{\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{2^2}{3^2}} \\
&= \frac{\frac{1}{25} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{4}{9}} \\
&= \frac{\frac{2-25}{50}}{\frac{3\cdot 9 + 4\cdot 4}{36}} \\
&= \frac{\frac{-23}{50}}{\frac{43}{36}} \\
&= \frac{-828}{2150} \\
&= \frac{-414}{1075}
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{5^{-2} - 2^{-1}}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{-414}{1075}$. †

Ejemplo 101.

Simplifique la expresión $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \\
&= \frac{(\sqrt{3})^2}{3} \\
&= \frac{3}{3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = 1$. †

Capítulo 3

El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

3.1. Introducción

Hasta el momento se han estudiado los subconjuntos de los números reales ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$) y sus propiedades. Estos conjuntos dieron respuesta a muchas de las interrogantes matemáticas que se presentaron hasta el momento pero dejaban algunos vacíos:

Por ejemplo la ecuación $x^2 + 1 = 0$ ¿Esta ecuación no tiene solución? ¿No existirá algún número que cumpla esta igualdad? Como se ha visto, en los números reales NO es posible resolverla, pero, ¿no existen otros números "no reales" que vengan a darle solución a esta ecuación, números irreales o imaginarios?

En este capítulo se le dará respuesta a esta interrogante, se estudiará una extensión a los números reales que son los números complejos, en este conjunto se le dará respuesta a la ecuación planteada anteriormente y se verán algunas de las propiedades y operaciones que tienen estos números "imaginarios".

3.2. El número i

El conjunto de los números complejos se representa con el símbolo $\mathbb{C}$ y la base de este conjunto está en la existencia de un número i que cumpla que $i = \sqrt{-1}$.

Definición 33. El número i

El número i es el número que cumple que $i = \sqrt{-1}$, es decir, que $i^2 = -1$.

¿Es posible hablar de un número cuyo cuadrado de -1? Siempre se ha dicho que los números negativos no tienen raíz par, en particular, siempre se ha dicho que los números negativos no tienen raíz cuadrada, ¿cómo podemos entonces definir un número cuyo cuadrado de -1?

Se debe tener muy claro que los números negativos no tienen raíz cuadrada en el conjunto de los números reales, esto es un hecho. Pero, ¿si no estamos en el conjunto de los reales, si nos salimos de este conjunto y lo extendemos con esta definición?

¿Acaso en algún momento no aceptamos que existía un número cuyo cuadrado es 3? Es decir, un número que cumple que $x^2 = 3$ y que ese número se representa por $\sqrt{3}$ ¿Este número realmente existe? Sabemos que $\sqrt{3} \approx 1{,}732050808...$ pero ¿podemos decir cuál es el valor exacto? El número no existía en el conjunto de los números racionales, la clave está en que este no es un número racional, sino que es irracional; en este caso simplemente aceptamos que existe y que está en el conjunto de los números irracional representado por $\sqrt{3}$.

Del mismo modo podemos aceptar que sí existe un número que cumple que $x^2 = -1$ y este número es i que no está en los números reales pero sí en un conjunto mayor, el de los complejos ¡POR DEFINICIÓN!

Ahora ya podemos dar respuesta a la interrogante planteada al inicio: ¿$x^2 + 1 = 0$ tiene solución? Sí, una solución es i ya que $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$, la otra es $-i$ ya que $(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Por convenio, al número i se le considera como un número positivo.

En este nuevo conjunto también se puede ver que ahora cualquier número (inclusive siendo negativo) tiene raíz cuadrada.

Ejemplo 102.

1. $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot -1} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$
2. $\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot -1} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

Se debe tener cuidado cuando se trabaja con los números complejos ya que algunas propiedades que se cumplían en los números reales ahora no son válidas.

Ejemplo 103.

La propiedad de los números reales $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ no es válida en los complejos. Observe por ejemplo:

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$$

que es distinto a

$$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6$$

3.3. Números complejos

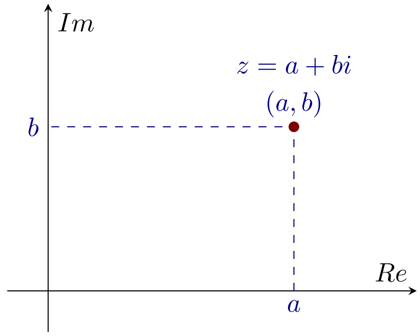
Al tomar el número i definido en la sección anterior y combinarlo con los números reales se obtiene el conjunto de los números complejos.

Definición 34. Número complejo

Un número complejo z es un número de la forma $z = a + bi$ con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Al número a se le conoce como la parte real de z y se denota $Re(z)$, el número b es la parte imaginaria de z y se denota $Im(z)$.

Así como los números reales se representan de manera gráfica en una recta numérica, los números complejos se pueden representar de manera gráfica con dos ejes (como los ejes cartesianos). La parte real se representa en el eje horizontal, llamado eje real, y la parte imaginaria en el eje vertical, llamado eje imaginario. A este plano cartesiano se le denomina el plano complejo y cada punto en este plano representa un número complejo.



Así, el número $z = a+bi$ viene representado en este plano por el punto (a, b). Dada esta representación gráfica, a esta forma del número complejo ($z = a + bi$) se le llama la forma rectangular de z y los números a y b son las coordenadas rectangulares de z.

Definición 35. Conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{z/z = a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 104.

En la siguiente tabla se muestran varios números complejos junto con su parte real y su parte imaginaria

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$2 - i$	2	-1
$\frac{4 + 3i}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$4i$	0	4
5	5	0

En el penúltimo número de la tabla anterior se observa un número imaginario que no tiene parte real, a estos números se les conoce como números imaginarios puros.

En el último ejemplo se observa que todos los números reales son números imaginarios con su parte imaginaria igual a cero, de esto se concluye fácilmente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Teorema 104.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Demostración:

Se debe demostrar que todo elemento de $\mathbb{R}$ también es elemento de $\mathbb{C}$, es decir, hay que demostrar que $(\forall x\mathbb{R})[x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{C}]$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ un elemento arbitrario del conjunto de los números reales.

$$x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$$

Por lo que $x \in \mathbb{C}$. †

Definición 36. Imaginario puro

Al número $z = a + bi$ se le llama un número imaginario puro si $Re(z) = 0$, es decir, si $a = 0$.

Es decir, los números imaginarios puros tienen la forma $z = bi$.

3.4. Operaciones con complejos

3.4.1. Adición y sustracción de números complejos

Definición 37. Igualdad de dos números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Es decir, dos números complejos son iguales si poseen tanto la misma parte real como la misma parte imaginaria.

Definición 38. Adición de números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define la adición de estos números como:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Definición 39. Sustracción de números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define la sustracción de estos números como:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Note la semejanza de estas operaciones con la adición y sustracción de binomios, donde se suman o restan sus términos semejantes.

Ejemplo 105.

Si se tienen los números $z = 2 - 5i$ y $w = -1 + 4i$ se cumple que

$$z + w = (2 - 5i) + (-1 + 4i) = 2 - 5i - 1 + 4i = 1 - i$$

$$z - w = (2 - 5i) - (-1 + 4i) = 2 - 5i + 1 - 4i = 3 - 9i$$

Ejemplo 106.

Si se tienen los números $z = 1 - i$ y $w = 1 + i$ se cumple que

$$z + w = (1 - i) + (1 + i) = 1 - i + 1 + i = 2$$

$$z - w = (1 - i) - (1 + i) = 1 - i - 1 - i = -2i$$

Teorema 105. Conmutatividad de la adición compleja

$(\forall w, z \in \mathbb{C})[w + z = z + w]$

Demostración:

Sea $w = a + bi$ y $z = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
w + z &= (a + bi) + (c + di) && \text{Axioma ??.}\\
&= (a + c) + (b + d)i && \text{Definición 38.}\\
&= (c + a) + (d + b)i && \text{Axioma 4.}\\
&= (c + di) + (a + bi) && \text{Axioma 38.}\\
&= z + w && \text{Axioma ??.}
\end{aligned}
$$

$\therefore (\forall w, z \in \mathbb{C})[w + z = z + w]$ †

Teorema 106. Asociatividad de la adición compleja

$(\forall x, y, z \in \mathbb{C})[x + (y + z) = (x + y) + z]$

Demostración:

Sea $x = a + bi$, $y = c + di$ y $z = e + fi$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] && \text{Axioma ??.}\\
&= (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i] && \text{Definición 38.}\\
&= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i] && \text{Definición 38.}\\
&= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i] && \text{Axioma 5.}\\
&= [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) && \text{Definición 38.}\\
&= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) && \text{Definición 38.}\\
&= (x + y) + z && \text{Axioma ??.}
\end{aligned}
$$

$\therefore (\forall x, y, z \in \mathbb{C})[x + (y + z) = (x + y) + z]$ †

Teorema 107. Neutro aditivo complejo

$(\exists n \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})[n + z = z + n = z]$

Demostración (directa):

Sea $n = 0 + 0i$, note que si $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
z + n &= (a + bi) + (0 + 0i) && \text{Axioma ??.}\\
&= (a + 0) + (b + 0)i && \text{Definición 38.}\\
&= a + bi && \text{Axioma 6.}\\
&= z && \text{Axioma ??.}
\end{aligned}
$$

Como la adición es conmutativa, se obtiene el mismo resultado para $n + z$.

$\therefore (\exists n \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})[n + z = z + n = z]$ †

Al neutro aditivo complejo se le denota simplemente como 0, así, $0 = 0 + 0i$.

Teorema 108. Inverso aditivo complejo

$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists w \in \mathbb{C})[w + z = z + w = 0]$

Demostración (directa):

Para $z = a + bi$, un elemento arbitrario de $\mathbb{C}$, tome $w = (-a) + (-b)i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + ((-a) + (-b)i) && \text{Axioma ??.} \\ &= (a + (-a)) + (b + (-b))i && \text{Definición 38.} \\ &= 0 + 0i && \text{Axioma 7.} \\ &= 0 && \text{Axioma ??.} \end{aligned}$$

Como la adición es conmutativa, se obtiene el mismo resultado para $i + z$.

$\therefore (\forall z \in \mathbb{C})(\exists i \in \mathbb{C})[w + z = z + w = 0]$ †

El inverso aditivo de z se le denota como $-z$ y se cumple que si $z = a+bi$ entonces $-z = (-a)+(-b)i$.

3.4.2. Multiplicación

La multiplicación de dos números complejos también se realiza de una forma similar a la multiplicación de binomios teniendo el cuidado que $i^2 = -1$.

Definición 40. Multiplicación de números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ se define la sustracción de estos números como:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

No hace falta aprenderse este resultado de memoria, pues al desarrollar el producto como si los números complejos fueran binomios, se obtiene:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd && i^2 = -1 \\ &= (ac - bd) + (adi + bci) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Ejemplo 107.

Determine, para cada caso, $z \cdot w$.

1. $z = 2 - 5i$, $w = -1 + 4i$
2. $z = 3 - i$, $w = -1 + 2i$
3. $z = 1 - i$, $w = 1 + i$

1. $z \cdot w = (2-5i) \cdot (-1+4i) = 2 \cdot (-1) + (-5i) \cdot (-1) + 2 \cdot (4i) + (-5i) \cdot (4i) = -2+5i+8i-20i^2 = -2+13i-20 \cdot (-1) = 18+13i$
2. $z \cdot w = (3-i) \cdot (-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -3+7i+2 = -1+7i$
3. $z \cdot w = (1-i) \cdot (1+i) = 1+i-i-i^2 = 1+1 = 2$

†

Ejemplo 108.

Si se tiene el número $z = 1-i$, entonces

$z^2 = z \cdot z = (1-i) \cdot (1-i) = 1-i-i+i^2 = 1+-2i-1 = -2i$

Teorema 109. Conmutatividad de la multiplicación compleja

$(\forall w, z \in \mathbb{C})[w \cdot z = z \cdot w]$

Demostración:

Sea $w = a+bi$ y $z = c+di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
w \cdot z &= (a+bi) \cdot (c+di) && \text{Axioma \textbf{??}.}\\
&= (ac-bd) + (ad+bc)i && \text{Definición 40.}\\
&= (ca-db) + (cb+da)i && \text{Axiomas 4 y 9.}\\
&= (c+di) \cdot (a+bi) && \text{Axioma 40.}\\
&= z \cdot w && \text{Axioma \textbf{??}.}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall w, z \in \mathbb{C})[w \cdot z = z \cdot w]$ †

Teorema 110. Asociatividad de la multiplicación compleja

$(\forall x, y, z \in \mathbb{C})[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$

Demostración:

Sea $x = a+bi$, $y = c+di$ y $z = e+fi$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= (a+bi) \cdot [(c+di) \cdot (e+fi)] && \text{Axioma \textbf{??}.}\\
&= (a+bi) \cdot [(ce-df) + (cf+de)i] && \text{Definición 40.}\\
&= [a \cdot (ce-df) - b \cdot (cf+de)] + [a \cdot (cf+de) + b \cdot (ce-df)]i && \text{Definición 40.}\\
&= [ace-adf-bcf-bde)] + [acf+ade+bce-bdf)]i && \text{Axioma \textbf{??}.}\\
&= [ace-bde-adf-bcf)] + [ade+bce+acf-bdf)]i && \text{Axioma 105.}\\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f] + [(ac-bd)f+(ad+bc)e)]i && \text{Axioma 106.}\\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i] \cdot (e+fi) && \text{Definición 40.}\\
&= [(a+bi) \cdot (c+di)] \cdot (e+fi) && \text{Definición 40.}\\
&= (x \cdot y) \cdot z && \text{Axioma \textbf{??}.}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall x, y, z \in \mathbb{C})[x + (y + z) = (x + y) + z]$ †

Teorema 111. Neutro multiplicativo complejo

$(\exists n \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})[n \cdot z = z \cdot n = n]$

Demostración (directa):

Sea $n = 1 + 0i$, note que si $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
z \cdot n &= (a + bi) \cdot (1 + 0i) && \text{Axioma ??.}\\
&= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i && \text{Definición 40.}\\
&= a + bi && \text{Axioma 11 y Teorema 12.}\\
&= z && \text{Axioma ??.}
\end{aligned}$$

Como la multiplicación es conmutativa, se obtiene el mismo resultado para $n \cdot z$.

$\therefore (\exists n \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})[n \cdot z = z \cdot n = z]$ †

Al neutro aditivo complejo se le denota simplemente como 1, así, $1 = 1 + 0i$.

Teorema 112. Inverso multiplicativo complejo

$(\forall z \in \mathbb{C}^*)(\exists w \in \mathbb{C})[w \cdot z = z \cdot w = 1]$

Demostración (directa):

Para $z = a + bi$, un elemento arbitrario de $\mathbb{C}$, tome $w = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) && \text{Axioma ??.}\\
&= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) + (b \cdot (-b))\, i && \text{Definición 38.}\\
&= 0 + 0i && \text{Axioma 7.}\\
&= 0 && \text{Axioma ??.}
\end{aligned}$$

Como la adición es conmutativa, se obtiene el mismo resultado para $i + z$.

$\therefore (\forall z \in \mathbb{C})(\exists w \in \mathbb{C})[w \cdot z = z \cdot w = 1]$ †

El inverso aditivo de z se le denota como $-z$ y se cumple que si $z = a + bi$ entonces $-z = (-a) + (-b)i$.

3.4.3. El conjugado y sus propiedades

El concepto de conjugado ya se ha utilizado anteriormente en matemática cuando se tiene que racionalizar una fracción como:

$$\frac{3}{2 - \sqrt{3}}$$

En este caso el procedimiento es multiplicar tanto el numerador como el denominador por el "conjugado" del denominador, en este caso $2 + \sqrt{3}$. En números complejos tiene el mismo significado, el cual se define a continuación.

Definición 41. Conjugado

Si se tiene un número complejo $z = a + bi$, el conjugado de z se representa por $\overline{z}$ y se define como $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo 109.

1. El conjugado de $2 + 3i$ es $2 - 3i$
2. El conjugado de $\dfrac{5-2i}{3}$ es $\dfrac{5+2i}{3}$

Teorema 113. Propiedades del conjugado

1. $(\forall z, w \in \mathbb{C})[\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}]$
2. $(\forall z, w \in \mathbb{C})[\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}]$
3. $(\forall z, w \in \mathbb{C})[\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}]$
4. $(\forall z \in \mathbb{C})[\overline{\overline{z}} = z]$

Demostración (se realizará el tercero, los demás son similares y se dejan como ejercicio).

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, así

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi) \cdot (c - di) \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}\end{aligned}$$

$\therefore (\forall z, w \in \mathbb{C})[\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}]$ †

3.4.4. División

Definición 42. División de números complejos

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, $w \neq 0$, se define la división de estos números como:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Esta definición no es necesario memorizarla, para realizar la división de dos números complejos se puede realizar un procedimiento similar al de la racionalización de denominadores, en ese contexto, se multiplicaba el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Teorema 114.

$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}^*) \left[\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}\right]$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\overline{z/w} &= \overline{\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \\
&= \frac{a-bi}{c-di} \\
&= \overline{z}/\overline{w}
\end{aligned}$$

$\therefore (\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}^*) \left[\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}\right]$ †

Ejemplo 110.

Determine, para los números dados en cada caso, $\dfrac{z}{w}$

1. $z = 1-2i$, $w = 3+5i$
2. $z = 5+i$ y $w = 2-i$
3. $z = -3+2i$, $w = 2+3i$
4. $z = 2-i$, $w = 3i$

1. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1-2i}{3+5i} = \dfrac{1-2i}{3+5i} \cdot \dfrac{3-5i}{3-5i} = \dfrac{3-5i-6i+10i^2}{9-15i+15i-25i^2} = \dfrac{3-11i-10}{9+25} = \dfrac{-7-11i}{34}$
2. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{5+i}{2-i} = \dfrac{5+i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{10+5i+2i+i^2}{4+2i-2i-i^2} = \dfrac{10+7i-1}{4+1} = \dfrac{9+7i}{5}$
3. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{-3+2i}{2+3i} = \dfrac{-3+2i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{-6+9i+4i+6}{4+9} = \dfrac{13i}{13} = i$
4. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2-i}{3i} = \dfrac{2-i}{3i} \cdot \dfrac{3i}{3i} = \dfrac{6i+3}{-9} = \dfrac{-1}{3} - \dfrac{2}{3} i$

†

3.4.5. Potencias de i

Un caso particular de las operaciones en el conjunto de los números complejos son las potencias del número i. Este número tiene la particularidad que sus potencias son cíclicas, es decir, que se repiten una y otra vez. Calculemos algunas de ellas y busquemos el patrón.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = -1$ $\qquad$ $i^8 = i^7 \cdot i = 1$ $\qquad$ $i^{10} = i^9 \cdot i = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -i$ $\qquad$ $i^9 = i^8 \cdot i = i$ $\qquad$ $i^{11} = i^{10} \cdot i = -i$

De aquí se ve claramente que $i^0 = i^4 = i^8 = ... = 1$, es decir, que todas las potencias de i cuyo exponente es múltiplo de cuatro dan uno.

Teorema 115.

$(\forall k \in \mathbb{N})[i^{4k} = 1]$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned} i^{4k} &= (i^4)^k && \text{Teorema 73.} \\ &= (1)^k && i^4 = 1 \\ &= 1 && \text{Axioma 6.} \end{aligned}$$

$\therefore (\forall n \in \mathbb{N})[i^{4n} = 1]$ †

Así, se puede deducir el procedimiento para calcular i^n, simplemente se determina el múltiplo de cuatro que está antes de n, para concluir se usan los primeros resultados de los cálculos que se realizaron anteriormente.

Ejemplo 111.

1. $i^{475} = i^{472} \cdot i^3 = i^{4 \cdot 118} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$
2. $i^{1765} = i^{1764} \cdot i = i^{4 \cdot 441} \cdot i = 1 \cdot i = i$

3.4.6. Igualdad de dos complejos

Una propiedad que cumplen los números complejos es que se escriben de una única forma, es decir, si se tienen dos números $z = a + bi$ y $w = c + di$, para que estos números sean iguales sus partes reales deben ser iguales y sus partes imaginarias también. De manera formal, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ entonces:

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplo 112.

Determine, en cada caso, los valores de a y b de manera que se cumpla la igualdad dada.

1. $(2 - a) + (3 + b)i = (1 - 2b) + ai$
2. $(2a + 5b) + (a + 2)i = -b + (a - 2b)i$

1. $(2 - a) + (3 + b)i = (1 - 2b) + ai$

   Por la propiedad anterior se pueden igualar las partes reales y las partes imaginarias obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} 2 - a = 1 - 2b \\ 3 + b = a \end{cases}$$

De donde se obtiene que $a = 5$ y $b = 2$

2. $(2a + 5b) + (a + 2)i = -b + (a - 2b)i$

   Por la propiedad anterior se pueden igualar las partes reales y las partes imaginarias obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 5b = -b \\ a + 2 = a - 2b \end{cases}$$

   De donde se obtiene que $a = 3$ y $b = -1$

†

Ejemplo 113.

Determine los números complejos z y w que cumplan las siguientes condiciones

- $2z - w = -1 + 9i$
- $z + 3w = 10 - 13i$

Existen dos maneras de resolver un ejercicio como este

- Decir que $z = a + bi$ y $w = c + di$ y poner el ejercicio en términos de cuatro variables

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a + bi) - (c + di) = -1 + 9i \\ a + bi + 3(c + di) = 10 - 13i \end{cases}$$

  De aquí se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro variables:

$$\begin{cases} 2a - c = -1 \\ 2b - d = 9 \\ a + 3c = 10 \\ b + 3d = -13 \end{cases}$$

  De la segunda ecuación se obtiene que $d = 2b - 9$, sustituyendo en todas las demás nos queda un sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - c = -1 \\ a + 3c = 10 \\ 7b = 14 \end{cases}$$

  De donde se obtiene que $a = 1, b = 2, c = 3, d = -5$

  Por lo que los números buscados son $z = 1 + 2i$ y $w = 3 - 5i$

- La segunda manera es manejar los números como tales y resolver el sistema como si tuviera dos ecuaciones con dos variables

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z - w = -1 + 9i \\ z + 3w = 10 - 13i \end{cases}$$

  Multiplicando la segunda ecuación por -2 se obtiene

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z - w = -1 + 9i \\ -2z - 6w = -20 + 26i \end{cases}$$

Y sumando miembro a miembro estas igualdades se obtiene

$2z - w - 2z - 6w = -1 + 9i - 20 + 26i \Rightarrow -7w = -21 + 35i \Rightarrow w = 3 - 5i$

Y sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones

$2z - w = -1 + 9i \Rightarrow 2z - (3 - 5i) = -1 + 9i \Rightarrow 2z = 2 + 4i \Rightarrow z = 1 + 2i$

Por lo que se obtiene que $z = 1 + 2i$ y $w = 3 - 5i$

†

Ejercicio 12.

1. Realice las operaciones indicadas

   a) $(1 + 2i)(3 - i)(2 + 5i)$

   b) $i^{50} - i^{65} + i^{76}$

   c) $\dfrac{-i(1-i)}{(4+i)(2-i)}$

   d) $\dfrac{1-i}{1+i} + \dfrac{1+i}{1-i}$

   e) $\dfrac{3}{i(2-i)^2}$

2. Determine los valores de a y b de forma que se cumplan las siguientes igualdades

   a) $b - ai = (4a - b) + (a - b)i$

   b) $2b - (a + b)i = (2a - b) + (a + 2)i$

   c) $b + bi + ai = b + 6a - 2ai$

   d) $a - b(1 + i) = 2b - 1 - (a - 7)i$

3. Determine los números complejos z y w que cumplan las condiciones dadas

   a) $w + z = 4$

   $w - z = 2i$

   b) $2z - w = 1 + 14i$

   $z + 2w = 8 - 3i$

   c) $2z - 10 = 3w + 9i$

   $3z + 2w = -1 + 7i$

   d) $w - i = z$

   $3w - 4i = -2z - 3$

Capítulo 4

Expresiones Algebraicas

4.1. Constantes, variables y expresiones algebraicas

Definición 43. Constante

Una *constante* es una letra o símbolo que representa un elemento específico invariante de un conjunto. Si la constante pertenece al conjunto de los números reales entonces se le denomina *constante real*.

Ejemplo 114.

Los siguientes son ejemplos de constantes

1. 5
2. $-\sqrt{2}$
3. π
4. e

Definición 44. Variable

Una *variable* es una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto. Si la variable pertenece al conjunto de los números reales entonces se le conoce como *variable real*.

Ejemplo 115.

Los siguientes son ejemplos de variables

1. $x,$ tal que $x \in \mathbb{R}$
2. $y,$ tal que $y \in \mathbb{Z}$

Definición 45. Expresión algebraica

Al combinar una colección finita de variables y constantes utilizando las operaciones aritméticas que se definieron en $\mathbb{R}$ se obtiene una *expresión algebraica*.

Ejemplo 116.

Las siguientes son expresiones algebraicas

1. $x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$
2. $\dfrac{2xy + \frac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{y-1}}$

4.2. Valor numérico

Definición 46. Valor numérico

Que resultado que se obtiene al sustituir las variables de una expresión algebraica por constantes específicas se llama *valor numérico* de la expresión para dichas constantes.

Ejemplo 117.

Determine el valor numérico de la expresión $x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$, si $x = 4$.

Al sustituir $x = 4$ en la expresión se tiene

$$4^3 - 5 \cdot 4 + \frac{6}{\sqrt{4}} = 47$$

Así, el valor numérico de la expresión cuando $x = 4$ es 47. †

Ejemplo 118.

Determine el valor numérico de la expresión $\dfrac{2xy + \frac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{y-1}}$, si $x = 1$ y $y = 9$.

Al sustituir $x = 1$ y $y = 9$ en la expresión $\dfrac{2xy + \frac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{y-1}}$ se tiene

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 9 + \frac{3}{1^2}}{\sqrt[3]{9-1}} = \frac{21}{2}$$

Así, el valor numérico de la expresión cuando $x = 4$ y $y = 9$ es $\dfrac{21}{2}$. †

4.3. Monomios

Definición 47. Monomio en una variable

Un *monomio* es una expresión formada por la multiplicación de un número real por una o más variables elevadas a un exponente natural.

Al número real se le conoce como el factor numérico y a las variables como el factor literal.

Así, un monomio posee la forma $a \cdot {x_1}^{n_1} \cdot {x_2}^{n_2} \cdot ... \cdot {x_k}^{n_k}$, en donde $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}, n_1 \geqslant 0, ..., n_k \geqslant 0$. Dicho monomio se dice que está en las variables $x_1, x_2, ..., x_k$.

Ejemplo 119.

Los siguientes son ejemplos de monomios:

1. $5x^4$.
2. $-3x$.
3. 2.
4. $-4x^3$.
5. $7x^3y^2z$.
6. $-xy^3z^4$.

Notas:

- En el ejemplo 2 se entiende que el monomio es $-3x^1$, en donde el 1 no hace falta escribirlo.
- El ejemplo 3 representa al monomio $2x^0$, como $x^0 = 1$, entonces no hace falta escribir este término.

Ejemplo 120.

Los siguientes no son monomios:

1. x^{-4}.
2. $x + y$.
3. $3x^2 - y^2$.
4. $-4x^2y^{-2}$.

Justifique la razón por la que cada uno de los ejemplos anteriores no es un monomio.

Definición 48. Grado de un monomio

El *grado de un monomio* está dado por la suma de los exponentes de las variables, es decir, si el monomio es $a \cdot {x_1}^{n_1} \cdot {x_2}^{n_2} \cdot ...x_k^{n_k}$ entonces su grado es $n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Ejemplo 121.

1. El grado del monomio $2x^3$ es: 3
2. El grado del monomio $3x^2$ es: 2
3. El grado del monomio $-4x$ es: 1
4. El grado del monomio x^2y^4z es: 7
5. El grado del monomio $-5xy^3z^2$ es: 6
6. El grado del monomio -2 es: 0

Nota:

- En el último ejemplo el grado es cero ya que, como se habló en el apartado anterior, este monomio tiene la forma $-2x^0$

Definición 49. Monomios semejantes

Se dice que dos monomios son *semejantes* si poseen el mismo factor literal.

Ejemplo 122.

1. Los monomios $2x^4$ y $-3x^4$ son semejantes.
2. Los monomios x y $-5x$ son semejantes.
3. Los monomios $2xy^2z$ y $-xy^2z$ son semejantes.
4. Los monomios $2x^4$ y $-3x^4y$ NO son semejantes.
5. Los monomios $-xy^2$ y $3y^2$ NO son semejantes.
6. Los monomios 2 y $-3x$ NO son semejantes.

4.3.1. Suma y resta de monomios

Para que se pueda realizar la suma o la resta de dos monomios, estos deben ser semejantes. Para realizar estas operaciones se utiliza la propiedad distributiva, es decir:

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Esto quiere decir que se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se mantiene el factor literal.

Ejemplo 123.

Realice la siguiente operación de monomios $3x + 8x$

$$\begin{aligned} 3x + 8x &= (3+8)x \\ &= 11x \end{aligned}$$

Ejemplo 124.

Realice la siguiente operación de monomios $5x^2 - 3x^2$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 3x^2 &= (5-3)x^2 \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 125.

Realice la siguiente operación de monomios $3x^3yz^2 + 6x^3yz^2$

$$3x^3yz^2 + 6x^3yz^2 = 9x^3yz^2$$

Ejemplo 126.

Realice la siguiente operación de monomios $14x^2y - 16x^2y$

$$14x^2y - 16x^2y = -2x^2y$$

4.3.2. Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios se aplica la asociatividad de la multiplicación, de esta forma, se multiplican sus factores numéricos y se utilizan las propiedades de potencias para multiplicar sus factores literales, es decir:

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$$

En este caso no es necesario que los monomios sean semejantes.

Ejemplo 127.

Realice la siguiente multiplicación de monomios $5x^3 \cdot 3x^2$

$$\begin{aligned} 5x^3 \cdot 3x^2 &= (5 \cdot 3)x^{3+2} \\ &= 15x^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 128.

Realice la siguiente multiplicación de monomios $3x \cdot -2x^5$

$$\begin{aligned} 3x \cdot -2x^5 &= (3 \cdot -2)x^{1+5} \\ &= -6x^6 \end{aligned}$$

Ejemplo 129.

Realice la siguiente multiplicación de monomios $3 \cdot -5x^2$

$$3 \cdot -5x^2 = -15x^2$$

Ejemplo 130.

Realice la siguiente multiplicación de monomios $x^2yz^3 \cdot 3xy^2$

$$x^2yz^3 \cdot 3x^2y^2 = 3x^4y^3z^3$$

4.3.3. División de monomios

Al dividir dos monomios se obtiene una fracción, esta fracción está completamente simplificada si cumple los siguientes puntos:

1. La fracción numérica está simplificada al máximo.
2. Las variables del numerador son distintas a las del denominador.
3. Las potencias de las variables involucradas tienen exponentes positivos.

Así, para dividir dos monomios, se simplifica al máximo la fracción numérica y se utilizan las propiedades de potencias para simplificar los factores literales.

Note que esta operación no es cerrada, pues al dividir dos monomios puede dar como resultado una expresión que no es un monomio.

Ejemplo 131.

Realice la división de monomios $\dfrac{6x^5}{2x^3}$

$$\begin{aligned}\frac{6x^5}{2x^3} &= \frac{6x^{5-3}}{2} \\ &= 3x^2\end{aligned}$$

Ejemplo 132.

Realice la división de monomios $\dfrac{3x^4}{27x^6}$

$$\begin{aligned}\frac{3x^4}{27x^6} &= \frac{3x^{4-6}}{27} \\ &= \frac{x^{-2}}{9} \\ &= \frac{1}{9x^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 133.

Realice la división de monomios $\dfrac{5x^2y^5}{100x^6y^3}$

$$\frac{5x^2y^5}{100x^6y^3} = \frac{x^{2-6}y^{5-3}}{25}$$

$$= \frac{x^{-4}y^2}{25}$$
$$= \frac{y^2}{25x^4}$$

Ejemplo 134.

Realice la división de monomios $\dfrac{72x^4y^3}{48x^2y^5}$

$$\frac{72x^4y^3}{48x^2y^5} = \frac{3x^2}{2y^2}$$

Observe que en los últimos tres ejemplos, el resultado no es un monomio.

Se debe tener cuidado cuando se utiliza el símbolo $\div$ para representar la división, pues por ejemplo

$$(72x^4y^3) \div (48x^2y^5) \neq 72x^4y^3 \div 48x^2y^5$$

En el segundo caso, el primer monomio sólo se divide entre 48 y al resultado se le multiplica x^2y^5.

4.4. Polinomios

Definición 50. Polinomio

Un polinomio en las variables $x_1, x_2, ..., x_k$, $k \in \mathbb{N}$ es una suma finita de monomios cuyo factor literal contiene a dichas variables.

A los polinomios se les acostumbra denotar con letras mayúsculas: P, Q, R.

Definición 51. Polinomio en una variable de grado n

Un polinomio en la variable x de grado n es una expresión de la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde:

- $a_n \neq 0$.
- El grado del polinomio es el mayor grado de la variable con factor numérico distinto de cero.
- Los números $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ son, todos ellos, números reales constantes a los que se les llama coeficientes.
- Los exponentes de la variable han de ser números naturales incluyendo al cero.
- Se llama *término de un polinomio* a cada uno de los monomios que componen el polinomio.

Ejemplo 135.

Los siguientes son ejemplos de polinomios en una variable

1. $8x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$
2. $6x - 2x^2 + 7$
3. $-2x^5 + 5x - 3$
4. $15x^3 - 4x$

En el primer ejemplo, los coeficientes son: 8, -3, 2, 1, -1 y 5; y los términos de dicho polinomio son $8x^5$, $-3x^4$, $2x^3$, x^2, $-x$ y 5.

Los grados de los polinomios de los ejemplos anteriores son: 5, 2, 5, 3, respectivamente.

Definición 52. Término independiente

El *término independiente* de un polinomio es el término de grado 0.

Ejemplo 136.

1. El término independiente del polinomio $5x^5 - 1$ es -1.
2. El término independiente del polinomio $2 - 3x + 5x^4$ es 2.

Ejemplo 137.

Considere el polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x - 1$, se cumple que:

Término	Grado	Coeficiente
$2x^5$	5	2
$-3x^4$	4	-3
No aparece	3	0
$2x^2$	2	2
$-x$	1	-1

Note que el término de grado 3 no aparece; su coeficiente es, por tanto, 0.

El término independiente es -1

El grado del polinomio es 5 (Es el mayor de todos los grados).

El valor numérico de $P(x)$ para $x = 0$ es $P(0) = 1$

El valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$ es $P(2) = 2 \cdot 25 - 3 \cdot 24 + 2 \cdot 22 - 2 + 1 = 119$

4.4.1. Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar dos polinomios basta con sumar o restar los términos semejantes (con igual factor literal), para esto se utiliza la asociatividad y conmutatividad de la adición y la distributividad.

Ejemplo 138.

Siendo $P(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^4 + 7x^2 + 5x + 2$, determine:

1. $P(x) + Q(x)$
2. $P(x) - Q(x)$

1. $$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (2x^5-3x^2+2x-1)+(x^4+7x^2+5x+2) \\ &= 2x^5+x^4+(-3x^2+7x^2)+(2x+5x)+(-1+2) \\ &= 2x^5+x^4+(-3+7)x^2+(2+5)x+(-1+2) \\ &= 2x^5+x^4+4x^2+7x+1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} P(x)-Q(x) &= (2x^5-3x^2+2x-1)-(x^4+7x^2+5x+2) \\ &= 2x^5+x^4+(-3x^2-7x^2)+(2x-5x)+(-1-2) \\ &= 2x^5-x^4-10x^2-3x-3 \end{aligned}$$

4.4.2. Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro. Se puede observar que este algoritmo se basa plenamente en la propiedad distributiva de los número reales.

Ejemplo 139.

Sea $P(x)=3x^4-2x$ y $Q(x)=2x^3-2x^2+3$, calcule $P(x)\cdot Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (3x^4-2x)(2x^3-2x^2+3) \\ &= 3x^4(2x^3-2x^2+3)-2x(2x^3-2x^2+3) \\ &= 3x^4\cdot 2x^3+3x^4(-2x^2)+3x^4\cdot 3-2x\cdot 2x^3-2x(-2x^2)-2x\cdot 3 \\ &= 6x^7-6x^6+5x^4+4x^3-6x \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando la notación vertical igual a la que se utiliza al multiplicar números enteros:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2x^3 & -2x^2 & & +3 \\ & & 3x^4 & & & -2x & \\ \hline & & -4x^4 & +4x^3 & & -6x & \\ 6x^7 & -6x^6 & +9x^4 & & & & \\ \hline 6x^7 & -6x^6 & +5x^4 & +4x^3 & & -6x & \end{array}$$

Ejemplo 140.

Sea $P(x)=2x^5-3x^2+2$ y $Q(x)=4x^3-2x^2$, calcule $P(x)\cdot Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (2x^5-3x^2+2)(4x^3-2x^2) \\ &= 2x^5\cdot 4x^3+2x^5\cdot 2x^2+(-3x^2)\cdot 4x^3+(-3x^2)\cdot 2x^2+2\cdot 4x^3+2\cdot -2x^2 \\ &= 8x^8+4x^7-12x^5-6x^4+8x^3-4x^2 \end{aligned}$$

Igual que para la suma, el producto de polinomios verifica las propiedades asociativa, conmutativa y la existencia de neutro. No así el de inverso multiplicativo. Es decir, el producto cumple las siguientes propiedades:

1. Asociativa:
$$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$$

2. Conmutativa:
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$$

3. Existe elemento neutro $Q(x) = 1$, tal que
$$P(x) \cdot 1 = 1 \cdot P(x) = P(x)$$

4. Distributividad del producto respecto de la suma:
$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

Nota:

- El 1 es un polinomio de grado 0.
- Se podría pensar que el inverso multiplicativo del polinomio $P(x)$ es $\dfrac{1}{P(x)}$, pero este último NO es un polinomio.

4.4.3. Productos notables

1. Cuadrado de un binomio.
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

2. Producto de suma por diferencia
$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Por lo que se obtienen las fórmulas:

- $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
- $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
- $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

De igual manera se pueden encontrar las siguientes fórmulas:

- $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
- $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Ejemplo 141.

Realice la operación $(2x+1)^2$

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot 1 + 1^2\\ &= 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Ejemplo 142.

Realice la operación $(3x+1)(3x-1)$

$$\begin{aligned}(3x+1)(3x-1) &= (3x)^2 - 1^2\\ &= 9x^2 - 1\end{aligned}$$

4.4.4. División de polinomios

Recuerde que en los números enteros se presentó el Teorema de la División, en donde, dados los números $a, b \in \mathbb{Z}$, existen $c, r \in \mathbb{Z}$, tales que $a = b\cdot c + r$, con $0 \leqslant r < b$.

Para realizar la división de dos polinomio, $A(x)$ (polinomio dividendo) entre $B(x)$ (polinomio divisor), se deben encontrar otros dos polinomios $Q(x)$ (polinomio cociente) y $R(x)$ (polinomio residuo) de forma que se verifique que:

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

En el caso de polinomios el grado del residuo debe ser menor al grado del divisor, se puede tener en cuenta que el grado de $R(x)$ es igual al grado de $A(x)$ menos el grado de $B(x)$.

Si $R(x) = 0$ entonces se dice que $B(x)$ divide a $A(x)$ o que $A(x)$ es un múltiplo de $B(x)$.

Para efectuar la división del polinomio $A(x)$ por el polinomio $B(x)$ se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Ordenar los polinomios $A(x)$ y $B(x)$, en forma descendente de acuerdo con el exponente de la variable.
2. Se divide el primer sumando del dividendo (el de mayor exponente) por el primer sumando del divisor; el resultado es un sumando del cociente.

3. Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor, y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un residuo "parcial".

4. Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el divisor entonces ahí termina el procedimiento; en caso contrario, se repiten todos los pasos anteriores tomando como el dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

Ejemplo 143.

Realice la división de polinomios $A(x) \div B(x)$, donde $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x - 1$

$$
\begin{array}{llll|lll}
x^3 & -5x^2 & +x & -1 & x & -1 & \\
\cline{5-7}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 & -4x & -3 \\
\cline{1-2}
 & -4x^2 & +x & -1 & & & \\
 & 4x^2 & -4x & & & & \\
\cline{2-3}
 & & -3x & -1 & & & \\
 & & -3x & -3 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -4 & & &
\end{array}
$$

Por lo que el resultado se puede expresar como:

$$
\frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 - 4x - 3 + \frac{-4}{x - 1}
$$

Ejemplo 144.

Realice la división $A(x) \div B(x)$, donde $A(x) = 2x^5 - 5x^3 + 6x - 4$ y $B(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

$$
\begin{array}{llllll|llll}
2x^5 & +0x^4 & -5x^3 & +0x^2 & +6x & -4 & x^3 & -3x^2 & +0x & +5 \\
\cline{7-10}
-2x^5 & +6x^4 & -0x^3 & -10x^2 & & & 2x^2 & +6x & +13 & \\
\cline{1-4}
 & 6x^4 & -5x^3 & -10x^2 & +6x & -4 & & & & \\
 & -6x^4 & +18x^3 & -0x^2 & -30x & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 13x^3 & -10x^2 & -24x & -4 & & & & \\
 & & -13x^3 & +39x^2 & -0x & -65 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & 29x^2 & -24x & -69 & & & &
\end{array}
$$

Por lo que el resultado se puede expresar como:

$$
\frac{2x^5 - 5x^3 + 6x - 4}{x^3 - 3x^2 + 5} = 2x^2 + 6x + 13 + \frac{29x^2 - 24x - 69}{x^3 - 3x^2 + 5}
$$

Ejemplo 145.

Efectuar la división de $A(x) \div B(x)$ donde $A(x) = 2 - x^5$ y $B(x) = x^2 + x$

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
-x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & x^2 & +x & +0 & \\
\cline{7-10}
x^5 & +x^4 & +0x^3 & & & & -x^3 & +x^2 & -x & +1 \\
\cline{1-3}
 & x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & & & & \\
 & -x^4 & -x^3 & +0x^2 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & & & & \\
 & & x^3 & +x^2 & +0x & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & x^2 & +0x & +2 & & & & \\
 & & & -x^2 & -x & +0 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -x & +2 & & & &
\end{array}
$$

Por lo que el resultado se puede expresar como:

$$\frac{2-x^5}{x^2+x} = -x^3+x^2-x+1+\frac{2-x}{x^2+x}$$

4.4.5. División sintética

La División Sintética es un procedimiento abreviado para realizar la división de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grado n, esto es $a_n \neq 0$, entre un polinomio lineal $ax+b$.

Para el procedimiento se van a utilizar todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ y el cero del polinomio $ax+b$, es decir $\dfrac{-b}{a}$, la cual, por facilidad, la seguiremos llamando c. Con estos números se construye una "tabla"que ayudará en el proceso:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\
 & & & & & c \\
\hline
 & & & & &
\end{array}
$$

El procedimiento nos ayudará a encontrar el polinomio $Q(x)$ y el número r (el residuo siempre será un número), de tal forma que la división la podremos expresar como:

$$\frac{P(x)}{ax+b} = \frac{Q(x)}{a} + \frac{r}{ax+b}$$

Lo primero es "bajar" el coeficiente a_n, a este coeficiente también lo denotamos por b_{n-1}, luego se multiplica por la constante c, el resultado se coloca en la segunda columna y se suma al siguiente coeficiente a_{n-1}, al resultado lo denotamos b_{n-2}

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\
\vdots & cb_{n-1} & & & & c \\
\hline
\underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{cb_{n-1}+a_{n-1}}_{b_{n-2}} & & & &
\end{array}
$$

Este último resultado se multiplica nuevamente por c y se le suma al coeficiente a_{n-2} y el proceso se repite hasta llegar a a_0. Los resultados parciales que se obtienen se denotan por $b_{n-1},\ b_{n-2},\ \cdots,\ b_1,\ b_0$ (se inicia con b_{n-1} pues el cociente tiene un grado menos que el dividendo), y el último valor obtenido se denota por r, pues es el residuo de la división, de esta manera lo que se obtiene es

$$\begin{array}{ccccc|c} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ \vdots & cb_{n-1} & \cdots & cb_1 & cb_0 & c \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{cb_{n-1}+a_{n-1}}_{b_{n-2}} & \cdots & \underbrace{cb_1+a_1}_{b_0} & \underbrace{cb_0+a_0}_{r} & \end{array}$$

Así, el cociente $Q(x)$ de la división de $P(x)$ por $ax+b$ es $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x^1+b_0$ con un residuo r, en donde los coeficientes se detallan como

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= cb_{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_1 &= cb_2 + a_2 \\ b_0 &= cb_1 + a_1 \\ r &= cb_0 + a_0 \end{aligned}$$

Ejemplo 146.

Realice la división de $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2$ entre $x + 2$.

Al realizar el algoritmo de la división sintética con los coeficientes de $P(x)$ y -2 como valor de c se obtiene

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 & 2 & \\ \vdots & -6 & 8 & -14 & 20 & -2 \\ \hline 3 & -4 & 7 & -10 & 22 & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es $3x^3 - 4x^2 + 7x - 10$ y se obtiene un residuo $r = 22$. Por lo que el resultado se puede expresar como:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 2}{x + 2} = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 10 + \frac{22}{x + 2}$$

Se debe notar que en este caso $a = 1$.

Ejemplo 147.

Realice la división de $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 5x - 1$ entre $2x - 1$.

Al realizar el algoritmo de la división sintética con los coeficientes de $P(x)$ y $\frac{1}{2}$ como valor de c se obtiene

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & -6 & 0 & 5 & -1 & \\ \vdots & 1 & 2 & -2 & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 1 & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de $P(x)$ entre $2x-1$ es $2x^4+4x^3-4x^2-2x+4$ y se obtiene un residuo $r=1$. Por lo que el resultado se puede expresar como:

$$\frac{2x^5+3x^4-6x^3+5x-1}{2x-1} = \frac{2x^4+4x^3-4x^2-2x+4}{2} + \frac{1}{2x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^5+3x^4-6x^3+5x-1}{2x-1} = x^4+2x^3-2x^2-x+2+\frac{1}{2x-1}$$

Ejemplo 148.

Realice utilizando división sintética $(x^3-5x^2+x-1)\div(x-1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 1 & -1 & \\ \vdots & 1 & -4 & -3 & 1 \\ \hline 1 & -4 & -3 & -4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-5x^2+x-1}{x-1} = x^2-4x-3+\frac{-4}{x-1}$$

Ejemplo 149.

Realice utilizando división sintética $(4x^3+3x^2-5x+2)\div(x-3)$

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -5 & 2 & \\ \vdots & 12 & 45 & 120 & 3 \\ \hline 4 & 15 & 40 & 122 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3+3x^2-5x+2}{x-3} = 4x^2+15x+40+\frac{122}{x-3}$$

Ejemplo 150.

Realice utilizando división sintética $(-8x^3+x^4-16+2x)\div(x-8)$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -8 & 0 & 2 & -16 & \\ \vdots & 8 & 0 & 0 & 16 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{-8x^3+x^4-16+2x}{x-8} = x^3+2$$

Ejemplo 151.

Realice utilizando división sintética $(x^3+x)\div(2x-1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+x}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right) + \frac{\frac{5}{8}}{2x-1}$$

4.4.6. Ceros de un polinomio

Definición 53.

Un cero de un polinomio es el número que toma la variable cuyo valor numérico es cero.

Ejemplo 152.

1. Los ceros del polinomio $P(x) = x^2 - x$ son $x = 0$ y $x = 1$ ya que

   $P(0) = 0^2 - 0 = 0 \quad$ y $\quad P(1) = 1^2 - 1 = 0$

2. Los ceros del polinomio $P(x) = x^2 - 1$ son $x = 1$ y $x = -1$ ya que

   $P(1) = 1^2 - 1 = 0 \quad$ y $\quad P(-1) = (-1)^2 -^- 1 = 0$

3. Los ceros del polinomio $P(x) = 4x^2 - x$ son $x = 0$ y $x = \frac{1}{4}$ ya que

   $P(0) = 4 \cdot 0^2 - 0 = 0 \quad$ y $\quad P\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

4.4.7. Teorema del factor y teorema del residuo

Teorema 116. Teorema del factor

c es un cero del polinomio $P(x)$ si y sólo si $(x - c)$ es un factor de dicho polinomio.

Demostración:

"$\Rightarrow$"

Hipótesis: c es un cero del polinomio, es decir, $P(c) = 0$.

HQD: $(x - c)$ es un factor del polinomio, es decir, $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$.

Por el algoritmo de la división, al dividir $P(x)$ por $x - c$, existen $Q(x)$ y $R(x) = r$, tales que

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Por hipótesis $P(c) = 0$, así

$$\begin{aligned} P(c) &= (c - c) \cdot Q(c) + r \\ 0 &= 0 \cdot Q(c) + r \\ 0 &= r \end{aligned}$$

Por lo que $(x - c)$ divide a $P(x)$ y $Q(x)$ es un factor de dicho polinomio.

"$\Leftarrow$"

Hipótesis: $(x-c)$ es un factor del polinomio, es decir, $P(x)=(x-c)\cdot Q(x)$.

HQD: c es un cero del polinomio, es decir, $P(c)=0$.

Al sustituir x por c en la hipótesis se tiene que $P(c)=(c-c)\cdot Q(c)=0\cdot Q(c)=0$. †

Ejemplo 153.

Tomando los ejemplos anteriores se tiene:

1. $P(x)=x^2-x=(x-0)(x-1)=x(x-1)$
2. $P(x)=x^2-1=(x-1)(x-^-1)=(x-1)(x+1)$
3. $P(x)=4x^2-x=4(x-0)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=x(4x-1)$

Teorema 117. Teorema del residuo

El residuo de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x-c)$ es $P(c)$.

Demostración:

Por el algoritmo de la división, existen $C(x)$ y $R(x)=r$, polinomios tales que

$$P(x)=(x-c)\cdot C(x)+r$$

Donde $R(x)$ debe tener grado menor al divisor, es decir, es de grado cero, por lo que es un número.

Así

$$\begin{aligned} P(x)=(x-c)\cdot C(x)+r &\Rightarrow P(c)=(c-c)\cdot C(c)+r\\ &\Rightarrow P(c)=0\cdot C(c)+r\\ &\Rightarrow P(c)=r \end{aligned}$$

Es decir, el residuo es igual a $P(c)$. †

Ejemplo 154.

Determine el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)=x^2+2x-1$ por $x-2$.

Dicho residuo es $P(2)=2^2+2\cdot 2-1=7$. †

Ejemplo 155.

Determine el valor de la constante real k de tal forma que al dividir el polinomio $P(x)=kx^2+x-k$ por $x-3$ se obtenga como residuo 2.

Dicho residuo es $P(3)$, así

$$\begin{aligned} P(3)=2 &\Rightarrow 9k+3-k=2\\ &\Rightarrow 8k=-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1}{8}$$

Así, se obtiene un residuo de 2 si $k = \dfrac{-1}{8}$. †

4.4.8. Factorización de polinomios

La factorización es el proceso por el cual se escribe un polinomio como producto de dos o más polinomios, en donde ninguno de ellos es el polinomio $P(x) = 1$.

Ejemplo 156.

Los siguientes son ejemplos de polinomios factorizados:

1. $x^2 + 2x = x(x + 2)$
2. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

En esta sección veremos algunas técnicas que nos permitirán factorizar polinomios.

Teorema 118.

Todo polinomio con coeficientes reales puede ser factorizado utilizando factores polinomiales lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

Este teorema se dejará sin demostración.

Factor común

Esta técnica consiste en encontrar factores repetidos en cada uno de los sumandos de la expresión que se quiere factorizar. En esta técnica lo que utilizamos es la propiedad distributiva "al contrario", es decir:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ejemplo 157.

Factorice completamente el polinomio $5a^2 + a$

$$\begin{aligned} 5a^2 + a &= a \cdot 5a + a \cdot 1 \\ &= a(5a + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 158.

Factorice completamente el polinomio $6a^2b^3 + 2ab^5$

$$\begin{aligned} 6a^2b^3 + 2ab^5 &= 2ab^3 \cdot 3a + 2ab^3 \cdot b^2 \\ &= 2ab^3(3a + b^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 159.

Factorice completamente el polinomio $8a^4bx^3 - 4a^3b^2x^5$

$$8a^4bx^3 - 4a^3b^2x^5 = 4a^3bx^3(2a - bx^2)$$

Ejemplo 160.

Factorice completamente el polinomio $3x^2y^3z^5 - 6xy^4z^3 + 12x^3y^2z^4$

$$3x^2y^3z^5 - 6xy^4z^3 + 12x^3y^2z^4 = 3xy^2z^3(xyz^2 - 2y^2 + 4x^2z)$$

Agrupación

Si una suma contiene cuatro o más términos, es posible agrupar los términos de manera adecuada y luego encontrar una factorización por factor común.

Ejemplo 161.

Factorice completamente el polinomio $4ac + 2bc - 2ad - bd$

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= \underbrace{4ac + 2bc} + \underbrace{-2ad - bd} \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2a + b)(2c - d) \end{aligned}$$

Ejemplo 162.

Factorice completamente el polinomio $15mx - 10xy - 6ny + 9mn$

$$\begin{aligned} 15mx - 10xy - 6ny + 9mn &= 5x(3m - 2y) + 3n(-2y + 3m) \\ &= 5x(3m - 2y) + 3n(3m - 2y) \\ &= (5x + 3n)(3m - 2y) \end{aligned}$$

Nota: : Note que, para aplicar factor común la segunda vez, los términos deben ser idénticos (por ejemplo, en este caso se tenía $(3m - 2y)$)

Ejemplo 163.

Factorice completamente el polinomio $5mx - 5xy + 3mn - 3ny + m - y$

$$\begin{aligned} 5mx - 5xy + 3mn - 3ny + m - y &= 5x(m-y) + 3n(m-y) + (m-y) \\ &= (m-y)(5x+3n+1) \end{aligned}$$

Ejemplo 164.

Factorice completamente el polinomio $2am - m - 2an + n + 2a - 1$

$$\begin{aligned} 2am - m - 2an + n + 2a - 1 &= m(2a-1) - n(2a-1) + (2a-1) \\ &= (2a-1)(m-n+1) \end{aligned}$$

Fórmulas Notables

Para esta técnica lo que se utilizan son las fórmulas notables "al contrario", es decir:

1. $\boxed{x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2}$
2. $\boxed{x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2}$
3. $\boxed{x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)}$
4. $\boxed{x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)}$
5. $\boxed{x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)}$

Ejemplo 165.

Factorice completamente el polinomio $9x^2 - 4y^4$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^4 &= (3x)^2 - (2y^2)^2 \\ &= (3x - 2y^2)(3x + 2y^2) \end{aligned}$$

Ejemplo 166.

Factorice completamente el polinomio $4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \\ &= (2x-3)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 167.

Factorice completamente el polinomio $16x^4 - (y-2z)^2$

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y-2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y-2z)^2 \\ &= [4x^2 + (y-2z)][4x^2 - (y-2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z) \end{aligned}$$

Ejemplo 168.

Factorice completamente el polinomio $8c^6 - 27d^9$

$$\begin{aligned} 8c^6 - 27d^9 &= (2c^2)^3 - (3d^3)^3 \\ &= [(2c^2) - (3d^3)][(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2] \\ &= (2x^2 + 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6) \end{aligned}$$

Ejemplo 169.

Factorice completamente el polinomio $a^2 - 4b^2 + 4a + 4$

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 + 4a + 4 &= a^2 + 4a + 4 - 4b^2 \\ &= (a+2)^2 - 4b^2 \\ &= (a+2+2b)(a+2-2b) \end{aligned}$$

Ejemplo 170.

Factorice completamente el polinomio $x^6 - y^{12}$

$$\begin{aligned} x^6 - y^{12} &= (x^3)^2 - (y^6)^2 \\ &= (x^3 - y^6)(x^3 + y^6) \\ &= (x^3 - (y^2)^3)(x^3 + (y^2)^3) \\ &= (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4)(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4) \end{aligned}$$

Completación de cuadrados

En esta técnica lo que se busca es factorizar un polinomio cuadrático; para esto se toman los dos primeros términos de la cuadrática y se les suma un término de forma tal que se forma una fórmula notable perfecta. Para que la igualdad se mantenga el término que se suma se debe restar. Iniciemos con un ejemplo:

Suponga que se quiere factorizar el polinomio cuadrático $x^2 - 4x + 3$, entonces sigamos el siguiente procedimiento:

Primero se toman los dos primeros términos.

$$\underbrace{x^2 - 4x}+3$$

A los dos términos se les suma 4 para formar una fórmula notable, se debe restar 4 al resto para mantener la igualdad.

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}-4+3$$

Se utiliza la fórmula notable

$$\underbrace{(x-2)^2}-1$$

Hasta aquí es la completación de cuadrados, si se quiere terminar de factorizar la expresión se vuelve a utilizar otra fórmula notable:

$$(x-2)^2 - 1^2$$

$$(x-2-1)(x-2+1)$$

$$(x-3)(x-1)$$

Ahora realicemos este procedimiento para generalizar el resultado, factoricemos el polinomio $ax^2 + bx + c$.

Primero se toman los dos primeros términos.

$$\underbrace{ax^2 + bx}+c$$

A estos dos términos se les suma el término $\frac{b^2}{4a}$ para formar una fórmula notable, se debe restar el mismo término al resto para mantener la igualdad.

$$\underbrace{ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}}-\frac{b^2}{4a}+c$$

Se utiliza la fórmula notable

$$\underbrace{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}-\frac{b^2}{4a}+c$$

De aquí se obtiene la regla general:

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y x es una variable real, entonces:

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Se debe nota que el término que se le debe sumar y restar a la cuadrática $ax^2 + bx + c$ es $\frac{b^2}{4a}$

Ejemplo 171.

Factorice completamente el polinomio $x^2 - x - 20$

Se debe sumar y restar $\dfrac{(-1)^2}{4 \cdot 1} = \dfrac{1}{4}$, así

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 20 &= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 20 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) \\
&= (x-5)(x+4)
\end{aligned}$$

Ejemplo 172.

Factorice completamente el polinomio $4x^2 - 9x + 2$

Se debe sumar y restar $\dfrac{(-9)^2}{4 \cdot 4} = \dfrac{81}{16}$, así

$$\begin{aligned}
4x^2 - 9x + 2 &= 4x^2 - 9x + \frac{81}{16} - \frac{81}{16} + 2 \\
&= \left(2x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \\
&= \left(2x - \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\
&= \left(2x - \frac{9}{4} - \frac{7}{4}\right)\left(2x - \frac{9}{4} + \frac{7}{4}\right) \\
&= (2x-4)\left(2x + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 173.

Factorice completamente el polinomio $x^2 + 5x + 4$

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 4 &= x + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\
&= \left(x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= (x+4)(x+1)$$

Ejemplo 174.

Factorice completamente el polinomio $4x^2 + 8x - 5$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x - 5 &= (2x)^2 + 8x + 2^2 - 2^2 - 5 \\ &= (2x+2)^2 - 9 \\ &= (2x+2+3)(2x+2-3) \\ &= (2x+5)(2x-1) \end{aligned}$$

Ejemplo 175.

Factorice completamente el polinomio $x^2 + 4x + 2$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &= x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 2 \\ &= (x+2)^2 - 2 \\ &= (x+2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Inspección

Este método se utiliza para factorizar polinomios de la forma $Ax^2 + Bx + C$, llamados polinomios cuadráticos.

La idea es buscar cuatro número a, b, c y d tales que:

$$a \cdot c = A, \quad b \cdot d = C \quad a \cdot d + b \cdot c = B$$

$$\begin{array}{c} Ax^2 + Bx + C \\ \uparrow \begin{array}{c} a \\ \cdot \\ c \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} b \\ \cdot \\ d \end{array} \uparrow \end{array}$$

De esta forma $Ax^2 + Bx + C = (ax+b)(cx+d)$

El procedimiento se simplifica si $A = 1$, en ese caso sólo se deben encontrar dos números que multiplicados den C y que sumados den B.

$$\begin{array}{c} x^2 + Bx + C \\ \uparrow \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ 1 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} b \\ \cdot \\ d \end{array} \uparrow \end{array}$$

Ejemplo 176.

Factorice el polinomio $x^2 - 4x + 3$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -4x & +3 \\ 1 & & -3 \\ 1 & & -1 \end{array}$$

Por lo que $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$

Ejemplo 177.

Factorice el polinomio $2x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & +3x & -2 \\ 2 & & -1 \\ 1 & & 2 \end{array}$$

Por lo que $2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)(x+2)$

Ejemplo 178.

Factorice el polinomio $x^2 - 4x + 3$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -5x & +6 \\ 1 & & -3 \\ 1 & & -2 \end{array}$$

Por lo que $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

Ejemplo 179.

Factorice el polinomio $3x^2 - 5x - 8$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & -5x & -8 \\ 1 & & 1 \\ 3 & & -8 \end{array}$$

Por lo que $3x^2 - 5x - 8 = (x+1)(3x-8)$

Fórmula General

Recordemos que el Teorema del Factor dice que si c es un cero de un polinomio $P(x)$ entonces $x - c$ es un factor de $P(x)$.

La fórmula general lo que nos da son los ceros de un polinomio cuadrático; una vez que obtenemos estos ceros entonces utilizamos el Teorema del Factor para factorizarlo.

Así, este método nos sirve para factorizar un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$; lo que hacemos es buscar los ceros de este polinomio (llamémoslos x_1 y x_2) y, utilizando el Teorema del Factor se obtiene:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Teorema 119. Fórmula General

El polinomio $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ tiene los ceros $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ en donde Δ se conoce como discriminante y se calcula como $\Delta = b^2 - 4ac$.

Además se cumple que:

- Si $\Delta < 0$, el polinomio no tiene soluciones reales.
- Si $\Delta = 0$, las dos soluciones son iguales $\dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, tiene dos soluciones distintas $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Demostración:

Una primera demostración se puede hacer resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, así se determina el valor de x que hace que el polinomio dé cero como valor numérico.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 && \text{Completación de cuadrados.}\\
&\Rightarrow \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c\\
&\Rightarrow \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}\\
&\Rightarrow \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}\\
&\Rightarrow \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a}}\\
&\Rightarrow \sqrt{a}x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}} - \frac{b}{2\sqrt{a}}\\
&\Rightarrow \sqrt{a}x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2\sqrt{a}}\\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} && \Delta = b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

Además se cumple que:

- Si $\Delta < 0$, entonces se tiene la raíz cuadrada de un número negativo, por lo que el polinomio no tiene soluciones reales.
- Si $\Delta = 0$, las dos soluciones son iguales $\dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, tiene dos soluciones distintas $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Otra opción para realizar la demostración es tomando el x que nos dan y sustituirlo en el polinomio para ver que efectivamente da cero como resultado:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\cdot\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 + b\cdot\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}+c \qquad\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Rightarrow a\cdot\frac{b^2\mp 2b\sqrt{\Delta}+\Delta}{4a^2}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{\Delta}}{2a}+c \\ &= \frac{b^2\mp 2b\sqrt{\Delta}+\Delta}{4a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{\Delta}}{2a}+c \\ &= \frac{b^2\mp \cancel{2b\sqrt{\Delta}}+\Delta+-2b^2\pm\cancel{2b\sqrt{\Delta}}+4ac}{4a} \\ &= \frac{b^2+b^2-4ac+-2b^2+4ac}{4a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ es cero del polinomio.

Ejemplo 180.

Factorice completamente el polinomio $2x^2+5x-3$

Primero se calcula el discriminante: $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot 2\cdot -3=25+24=49$

Esto quiere decir que dos hay soluciones reales distintas.

Ahora, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{-5\pm 7}{4}$

Por lo tanto $x_1=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$ y $x_2=\dfrac{-5-7}{4}=-3$

Así, la factorización es $2x^2+5x-3=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)$

Ejemplo 181.

Factorice completamente el polinomio $-4x^2+20x-25$

En este caso el discriminante es: $\Delta=20^2-4\cdot -4\cdot -25=0$

Esto quiere decir que las dos soluciones están repetidas.

Ahora, $x=\dfrac{-20\pm\sqrt{0}}{-8}=\dfrac{5}{2}$

Por lo tanto $-4x^2+20x-25=-4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$

Factorización de polinomios de grado mayor o igual que dos

Para este método debemos tener en cuenta los dos teoremas siguientes:

Teorema 120.

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ tiene a lo sumo n ceros reales.

Demostración (por contradicción):

Suponga que el polinomio $P(x)$ es de grado n y que posee $n+1$ ceros reales (o más), sean dichos ceros los números $c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}$, por el teorema del factor, por cada uno de estos ceros el polinomio tendría un factor, así

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_n) \cdot (x - c_{n+1})$$

Pero al realizar el producto de estos $n+1$ factores, se obtiene como término de mayor grado x^{n+1}, que contradice la hipótesis de que P era un polinomio de grado n.

Por lo tanto, n posee a lo sumo n ceros reales. †

Teorema 121. Posibles ceros racionales

Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $(\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\})[a_k \in \mathbb{Z}]$; entonces los posibles ceros racionales de $P(x)$ son los números $\dfrac{c}{d}$, donde c es un divisor de a_0 y d es un divisor de a_n.

Demostración (directa):

Suponga que el número racional $\dfrac{c}{d}$ está completamente simplificado, es decir, $MCD(c, d) = 1$ y es un cero del polinomio $P(x)$, se demostrará que $c|a_0$ y que $d|a_n$.

Como $\dfrac{c}{d}$ es un cero del polinomio $P(x)$, entonces $P\left(\frac{c}{d}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{c}{d}\right) = 0 &\Rightarrow a_n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{n-1} + ... + a_1 \cdot \left(\frac{c}{d}\right) + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow a_n \cdot \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1} \cdot \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + ... + a_1 \cdot \frac{c}{d} + a_0 = 0 \\ &\Rightarrow a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + ... + a_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + a_0 \cdot d^n = 0 \end{aligned}$$

Por un lado

$$\begin{aligned} &a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + ... + a_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + a_0 \cdot d^n = 0 \\ \Rightarrow\ &a_n \cdot c^n = -a_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d - ... - a_1 \cdot c \cdot d^{n-1} - a_0 \cdot d^n \\ \Rightarrow\ &a_n \cdot c^n = d \cdot \left(-a_{n-1} \cdot c^{n-1} - ... - a_1 \cdot c \cdot d^{n-2} - a_0 \cdot d^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Por lo que d es un divisor de $a_n \cdot c^n$, pero como c y d no tienen divisores comunes, entonces d debe dividir a a_n.

Por otra parte

$$\begin{aligned} &a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + ... + a_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + a_0 \cdot d^n = 0 \\ \Rightarrow\ &a_0 \cdot d^n = -a_n \cdot c^n - a_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d - ... - a_1 \cdot c \cdot d^{n-1} \\ \Rightarrow\ &a_0 \cdot d^n = c \cdot \left(-a_n \cdot c^{n-1} - a_{n-1} \cdot c^{n-2} \cdot d - ... - a_1 \cdot d^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Por lo que c es un divisor de $a_0 \cdot d^n$, pero como c y d no tienen divisores comunes, entonces d debe dividir a a_0. †

Con estos dos teoremas y el Teorema del factor y el residuo, se puede dar un procedimiento para factorizar polinomios de grado mayor o igual que dos:

1. Encuentre todos los divisores de a_0 (estos son los posibles valores de c).
2. Encuentre todos los divisores de a_n (estos son los posibles valores de d).
3. Realice todas las combinaciones posibles de $\frac{c}{d}$.
4. De las combinaciones anteriores, busque un α tal que $P(\alpha) = 0$.
5. Divida $P(x)$ por $x - \alpha$ utilizando división sintética y exprese la identidad $P(x) = (x - \alpha)C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división.
6. Si el grado de $C(x)$ es mayor que dos se repiten los pasos 4 y 5 para $C(x)$; si el grado es igual a dos se utiliza uno de los métodos ya vistos para estos polinomios.

Ejemplo 182.

Factorice completamente el polinomio $P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4$

Divisores de -4: $\{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

Divisores de 2: $\{1, 2\}$

Posibles ceros: $\left\{1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$

$P(1) = 2 - 4 - 6 - 4 = -12$

$P(-1) = 2 - 4 + 6 - 4 = 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & \\ \vdots & -2 & 2 & 2 & 4 & -1 \\ \hline 2 & -2 & -2 & -4 & 0 & \end{array}$$

Así, por el momento

$P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x + 1)\underbrace{(2x^3 - 2x^2 - 2x - 4)}_{C(x)}$

Ahora se repite el procedimiento con $C(x)$, con la ventaja que los ceros son los mismos para este polinomio, se continúa desde el último que se había evaluado.

$C(-1) = -2 - 2 + 2 - 4 = -6$

$C(2) = 16 - 8 - 4 - 4 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -2 & -4 & \\ \vdots & 4 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x+1)(x-2)(2x^2+2x+2)$

En la cuadrática se tiene $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -12$

Por lo tanto $P(x) = 2(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

Ejemplo 183.

Factorice completamente el polinomio $P(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x$

Por factor común $P(x) = x\underbrace{\left(2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2\right)}_{Q(x)}$

Divisores de -2: $\{1, -1, 2, -2\}$

Divisores de 2: $\{1, 2\}$

Posibles ceros: $\left\{1, -1, 2, -2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right\}$

$Q(1) = 2 + 1 + 3 + 2 - 2 = 6$

$Q(-1) = 2 - 1 + 3 - 2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & -2 & \\ \vdots & -2 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 4 & -2 & 0 & \end{array}$$

Así, por el momento

$P(x) = x(x+1)\underbrace{\left(2x^3 - x^2 + 4x - 2\right)}_{C(x)}$

$C(-1) = -2 + 1 - 4 - 2 = -7$

$C\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + 2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -2 & \\ \vdots & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x) = x(x+1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(2x^2 + 4)$

$P(x) = 2x(x+1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2 + 2)$

$P(x) = x(x+1)(2x-1)(x^2+2)$

Ejemplo 184.

Factorice completamente el polinomio $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + x - 2$

Divisores de -2: $\{1, -1, 2, -2\}$

Divisores de 2: $\{1, 3\}$

Posibles ceros: $\left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$

$P(1) = 3 + 7 + 1 - 2 = 9$

$P(-1) = -3 + 7 - 1 - 2 = 1$

$P(2) = 24 + 28 + 2 - 2 = 52$

$P(-2) = -24 + 28 - 2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 1 & -2 & \\ \vdots & -6 & -2 & 2 & -2 \\ \hline 3 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Así, $P(x) = (x+2)\underbrace{\left(3x^2 + x - 1\right)}_{C(x)}$

Resolviendo la cuadrática $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$

Por lo tanto $P(x) = (x+2)\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)$

$P(x) = (x+2)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$

Ejemplo 185.

Factorice completamente el polinomio $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

Divisores de -9: $\{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

Divisores de 1: $\{1\}$

Posibles ceros: $\{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

$P(1) = 1 - 8 - 9 = -16$

$P(-1) = 1 - 8 - 9 = -16$

$P(3) = 81 - 72 - 9 = 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -8 & 0 & -9 & \\ \vdots & 3 & 9 & 2 & 9 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

Así, por el momento

$P(x) = (x-3)\underbrace{\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right)}_{C(x)}$

$C(3) = 27 + 27 + 3 + 3 = 60$

$C(-3) = -27 + 27 - 3 + 3 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & \\ \vdots & -3 & 0 & -3 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2+1)$

Aquí, $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$

Por lo tanto $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2+1)$

Factorización de polinomios en números complejos

Para intuir lo que dice el teorema fundamental del álgebra, que se relaciona de manera directa con la factorización de polinomios en números complejos, primero se verán algunos casos particulares para llegar a generalizar al final el resultado.

Si se trabaja en el conjunto de los números reales se cumple que todas las ecuaciones lineales tienen una solución.

Ejemplo 186.

- $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{3}$
- $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Cuando se resuelve una ecuación de segundo grado en los números reales con la fórmula general se encuentran a lo sumo dos soluciones, sin embargo, ahora que se conocen los números complejos y se puede encontrar la raíz del discriminante si es negativo, es cierto que una ecuación de segundo grado siempre tiene dos soluciones (en ciertos casos se obtienen dos soluciones repetidas).

Ejemplo 187.

Resuelva la ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Así $x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -2$

Ejemplo 188.

Resuelva la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Así $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

Ejemplo 189.

Resuelva la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Así, en este caso se tienen dos raíces pero repetidas: $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. A estas soluciones repetidas las vamos a llamar ceros de multiplicidad dos (ya que en este caso se repiten dos veces).

¿Las ecuaciones cúbicas entonces tendrán tres soluciones?

Ejemplo 190.

- $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

  Por división sintética se factoriza esta expresión de forma que queda

  $$(x^2 + 2)(x + 2) = 0$$

  De donde se observa que $x_1 = -2$, $x_2 = \sqrt{2}i$ y $x_3 = -\sqrt{2}i$

- $x^3 + x^2 = 0$

  Factorizando se obtiene que $x^2(x + 1) = 0$

  De aquí $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$. El cero es una raíz de multiplicidad dos.

- $x^3 = 0$

  De aquí se tiene $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Este es un cero de multiplicidad tres.

De la misma forma se puede observar que una ecuación de grado cuatro tiene cuatro raíces.

Ejemplo 191.

- $x^4 + x^2 = 0$

  De aquí $x^2(x^2 + 1) = 0$

  Por lo tanto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = i$ y $x_4 = -i$. Aquí nuevamente el cero tiene multiplicidad dos.

Definición 54. Multiplicidad

Si en la factorización de un polinomio $P(x)$ aparece el factor $(x - c)$ repetido k veces, se dice que $(x - c)$ es un factor de multiplicidad k, además se dice que c es un cero con multiplicidad k.

Los ceros que no se repiten se llaman ceros simples mientras que los repetidos se llaman ceros múltiples.

De los ejemplos anteriores se puede intuir que una ecuación de grado n tiene n ceros complejos (contando las multiplicidades). Esta propiedad es válida gracias al teorema fundamental del álgebra que enunciamos a continuación.

Teorema 122. Teorema Fundamental del Álgebra

Un polinomio de grado $n \geqslant 1$, con coeficientes reales o complejos, tiene al menos un cero complejo.

La demostración del Teorema Fundamental del Álgebra utiliza resultados en los complejos que aún no se han desarrollado e ideas de límites por lo que no se demostrará en este curso.

Algo interesante es que este teorema garantiza sólo un cero, pero ya vimos que una ecuación de grado n parece tener n ceros, esta es la consecuencia de utilizar en forma repetida el Teorema sobre un polinomio, veamos.

Teorema 123.

Si P es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ se factoriza completamente como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son los ceros de $P(x)$ y a es el coeficiente que acompaña a x^n en el polinomio $P(x)$

Demostración:

Si se tiene un polinomio $P(x)$ de grado $n \geqslant 1$, por el Teorema Fundamental del Álgebra, este polinomio tiene al menos un cero c_1, es decir $P(c_1) = 0$. Por el Teorema del Factor, si c_1 es un cero del polinomio entonces $(x - c_1)$ es un factor, esto quiere decir que el polinomio $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x - c_1)Q_1(x)$$

donde Q_1 es un polinomio de grado $n - 1$.

Por el Teorema Fundamental, este polinomio Q_1 tiene al menos un cero c_2. Nuevamente, por el Teorema del Factor $Q_1 = (x - c_2)Q_2(x)$, es decir, $P(x)$ se puede escribir de la siguiente forma

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)Q_2(x)$$

donde Q_2 es un polinomio de grado $n - 2$.

Siguiendo este razonamiento n veces, se llega a

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)Q_n(x)$$

Donde Q_n es un polinomio de grado $n - n = 0$, ¡es una constante!, esta debe ser a para que al multiplicar las x de los factores se obtenga la constante que acompaña al término de mayor grado de P.

Así:

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son los ceros de $P(x)$ y a es el coeficiente que acompaña a x^n en el polinomio $P(x)$.

Por este último resultado se observa que una ecuación polinomial de grado n tiene n ceros (contando los ceros con multiplicidad). †

Ejemplo 192.

Factorice completamente el polinomio $x^4 + 3x^2 - 4$ e indique sus ceros

Utilizando división sintética se obtiene que

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 4)$$

Agrupando en este término y sacando factor común

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+1)(x^2+4)$$

Por último

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+1)(x+2i)(x-2i)$$

De donde los ceros del polinomio son $-1, 1, -2i, 2i$

†

Ejemplo 193.

Factorice completamente el polinomio $6x^4 + x^3 + 10x^2 + 2x - 4$, sabiendo que $\dfrac{1}{2}$ es un cero del mismo, e indique cuáles son los demás ceros.

Por división sintética se tiene

$$6x^4 + x^3 + 10x^2 + 2x - 4 = (2x-1)(3x^3 + 2x^2 + 6x + 4)$$

Agrupando y con factor común

$$6x^4 + x^3 + 10x^2 + 2x - 4 = (2x-1)(3x+2)(x^2+2)$$

Así

$$6x^4 + x^3 + 10x^2 + 2x - 4 = (2x-1)(3x+2)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$$

De donde los ceros del polinomio son $\dfrac{1}{2}, \dfrac{-2}{3}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

†

Observe en los ejemplos anteriores que los ceros complejos de los polinomios se dan conjugados, esto es cierto cuando los coeficientes del polinomio son reales.

Teorema 124. Ceros Conjugados

Si todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ son reales y $z = a + bi$ es un cero de P entonces su conjugado $\overline{z} = a - bi$ también es un cero de P.

Demostración:

Se indicó anteriormente que todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en factores lineales y cuadráticos irreducibles, cada polinomio de estos últimos tendrá soluciones complejas que, por la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, dichos ceros serán complejos conjugados. †

Ejemplo 194.

Resuelva la ecuación $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$ si se sabe que $1 + 2i$ es una de las soluciones.

Como $1 + 2i$ es una solución, por el teorema de los ceros conjugados $1 - 2i$ también es solución y por el teorema del factor $(x - (1 + 2i)) = (x - 1 - 2i)$ y $(x - (1 - 2i)) = (x - 1 + 2i)$ son factores. Para resolver este ejercicio existen dos posibilidades:

- Desarrollar el producto de los dos factores conocidos y realizar la división larga de los polinomios.

$$(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = (x^2 - 2x + 5)$$

  Así, al hacer la división larga se obtiene

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10}{x^2 - 2x + 5} = x^2 + x - 2$$

- Usar división sintética para ambos términos

  Primero con $(x - (1 + 2i))$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 & -10 & \\ & 1+2i & -4+2i & -7-4i & 10 & 1+2i \\ \hline 1 & 2i & -3+2i & 2-4i & 0 & \end{array}$$

  Ahora se divide este resultado entre $(x - (1 - 2i))$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2i & -3+2i & 2-4i & \\ & 1-2i & 1-2i & -2+4i & 1-2i \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

  Por lo que se obtiene el mismo resultado, el polinomio $x^2 + x - 2$

Al resolver la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ se obtiene que $x = -2$ y $x = 1$

Por lo que las soluciones de la ecuación $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$ son $-2, 1, 1 + 2i, 1 - 2i$

†

Ejemplo 195.

Resuelva la ecuación $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = 0$ si se sabe que $2i$ es un cero del polinomio

Si se sabe que $2i$ es un cero entonces $-2i$ también es un cero y se tendría que $(x - 2i)$ y $(x + 2i)$ son factores del polinomio. Al multiplicar estos dos factores se obtiene

$$(x-2i)(x+2i) = (x^2+4)$$

Haciendo la división se obtiene

$$\frac{x^4-2x^3+6x^2-8x+8}{x^2+4} = x^2-2x+2$$

Y al resolver la ecuación $x^2-2x+2=0$ se obtienen las otras dos soluciones: $1+i$ y $1-i$

Por lo que los ceros son $-2i, 2i, 1+i, 1-i$

†

4.5. Fracciones racionales y simplificación

Definición 55. Fracción racional

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en una variable. La expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ recibe el nombre de *fracción racional*, $P(x)$ recibe el nombre de numerador y $Q(x)$ recibe el nombre de denominador de la fracción.

Ejemplo 196.

Las siguientes expresiones son ejemplos de fracciones racionales

1. $\dfrac{x^2-3x+1}{2x+5}$
2. $\dfrac{-5x+10x^5-25}{3x^7-5x^5+8}$

4.5.1. Simplificación de fracciones racionales

Si $P(x)$, $Q(x)$ y $C(x)$ son polinomios entonces se cumple que:

$$\frac{P(x)\cdot C(x)}{Q(x)\cdot C(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

para todo x tal que $C(x) \neq 0$

Ejemplo 197.

Simplifique la fracción racional $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}$

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)} &= \frac{(x-1)\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} \qquad\qquad x \neq -3\\ &= \frac{x-1}{x+2}\end{aligned}$$

Ejemplo 198.

Simplifique la fracción racional $\dfrac{n^2-n}{n^2+3n-4}$

$$\begin{aligned}\frac{n^2-n}{n^2+3n-4} &= \frac{n\cancel{(n-1)}}{(n+4)\cancel{(n-1)}} \\ &= \frac{n}{n+4}\end{aligned} \qquad\qquad n \neq 1$$

4.5.2. Operaciones con fracciones racionales

Observe que las fracciones racionales son fracciones, por lo que son ciertas las mismas operaciones que se definieron para los números racionales.

Es decir, si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ son fracciones racionales, entonces son verdaderas las siguientes igualdades:

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)} + \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x) + C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$
2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} - \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x) - C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$
3. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \cdot \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$
4. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \div \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{\frac{A(x)}{B(x)}}{\frac{C(x)}{D(x)}} = \dfrac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$

Nota: : Al igual que en números, la suma y la resta de fracciones racionales con las fórmulas dadas puede dar un resultado sin simplificar, la manera en que se obtiene un resultado más simplificado es:

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)\cdot \frac{mcm(B(x),D(x))}{B(x)} + C(x)\cdot \frac{mcm(B(x),D(x))}{D(x)}}{mcm(B(x),D(x))}$$

Ejemplo 199.

Simplifique la fracción racional $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{1-x^2} &= \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{x(1-x)-2x}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{-x^2-x}{(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(1+x)}(1-x)} & x \neq -1 \\ &= \frac{-x}{1-x} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 200.

Simplifique la expresión $\dfrac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x-y}}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x-y}} &= \frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x+y}{x-y}} \\ &= \frac{\frac{(x+y)(x-y)}{xy}}{\frac{x+y}{x-y}} \\ &= \frac{\cancel{(x+y)}(x-y)(x-y)}{xy\cancel{(x+y)}} & x+y \neq 0 \\ &= \frac{(x-y)^2}{xy} \end{aligned}$$

Ejemplo 201.

Simplifique la expresión $\dfrac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{\frac{1}{(a+b)(a-b)}}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{\frac{1}{(a+b)(a-b)}} &= \frac{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{1}{(a+b)(a-b)}} \\ &= \frac{\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{1}{(a+b)(a-b)}} \\ &= \frac{\frac{2a^2+2b^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{1}{(a+b)(a-b)}} \\ &= \frac{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}(2a^2+2b^2)}{\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}} & a+b \neq 0, a-b \neq 0 \\ &= 2a^2+2b^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 202.

Simplifique la expresión $\dfrac{\frac{3}{3+x}-\frac{3}{6+2x}}{\frac{3}{3-x}+\frac{3}{3+x}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{3}{3+x}-\frac{3}{6+2x}}{\frac{3}{3-x}+\frac{3}{3+x}} &= \frac{\frac{3}{3+x}-\frac{3}{2(3+x)}}{\frac{3(3+x)+3(3-x)}{(3-x)(3+x)}} \\
&= \frac{\frac{6-3}{2(3+x)}}{\frac{9+\cancel{3x}+9-\cancel{3x}}{(3-x)(3+x)}} \\
&= \frac{\frac{3}{2(3+x)}}{\frac{18}{(3-x)(3+x)}} \\
&= \frac{3(3-x)\cancel{(3+x)}}{36\cancel{(3+x)}} & x \neq -3 \\
&= \frac{3-x}{12}
\end{aligned}$$

Ejemplo 203.

Simplifique la expresión $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} &= \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} \\
&= \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}} \\
&= \frac{a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}\cancel{(b+a)}}{\cancel{ab}(b-a)\cancel{(b+a)}} & a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0 \\
&= \frac{ab}{b-a}
\end{aligned}$$

Ejemplo 204.

Simplifique la expresión $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right) \div \left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right) \div \left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right) &= \frac{\cancel{x}+y-\cancel{x}+y}{(x-y)(x+y)} \div \frac{x+\cancel{y}+x-\cancel{y}}{(x-y)(x+y)} \\
&= \frac{\cancel{2}y\cancel{(x-y)(x+y)}}{\cancel{2}x\cancel{(x-y)(x+y)}} & x-y \neq 0, x+y \neq 0 \\
&= \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

4.6. Fracciones parciales

Esta técnica consiste en separar una fracción "compleja" en fracciones más sencillas, es lo opuesto a sumar o restar fracciones algebraicas.

Por ejemplo, por la resta de fracciones se puede calcular que

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{x-2-(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

Entonces, al aplicar fracciones parciales lo que se quiere obtener un método para lograr "separar" la fracción

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

La idea del método es convertir las fracciones "complejas" en fracciones "simples", para ello se debe seguir el siguiente procedimiento.

4.6.1. Fracción Impropia

Definición 56.

Una fracción polinomial de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se dice que es impropia si el grado del polinomio P es mayor o igual que el grado del polinomio Q.

Si la fracción de polinomios es impropia, entonces realice la división de dichos polinomios, en la fracción resultante debe aplicar el método en el caso de las fracciones no impropias.

Ejemplo 205.

Aplique la división de polinomios en la fracción impropia $\dfrac{x^3-x+3}{x^2+x-2}$.

$$\begin{array}{rrrr}
\big(\; x^3 & & -x & +3\big) \div \big(x^2+x-2\big) = x-1+\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} \\
-x^3 & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & -x^2 & +x & +3 \\
 & x^2 & +x & -2 \\ \hline
 & & 2x & +1
\end{array}$$

Por lo tanto $\dfrac{x^3-x+3}{x^2+x-2}=x-1+\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ †

Ejemplo 206.

Aplique la división de polinomios en la fracción impropia $\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1}$.

$$\begin{array}{rrr}
\big(\; x^2 & -x\big) \div \big(x^2+x+1\big) = 1+\dfrac{-2x-1}{x^2+x+1} & \\
-x^2 & -x & -1 \\ \hline
 & -2x & -1
\end{array}$$

Por lo tanto $\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1} = 1 - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ †

Ejemplo 207.

Aplique la división de polinomios en la fracción impropia $\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$.

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2 - x \right) \div \left(x^2+1\right) = 1 + \dfrac{-x-1}{x^2+1} \\ \underline{\;-x^2 \qquad -1\;} \\ \qquad -x-1 \end{array}$$

Por lo tanto $\dfrac{x^2-x}{x^2+1} = 1 - \dfrac{x+1}{x^2+1}$ †

4.6.2. Fracción no impropia

Si la fracción no es impropia entonces factorice completamente el denominador en factores lineales y cuadráticos irreducibles, cada uno de ellos tendrá la forma $(ax+b)^m$ ó $(ax^2+bx+c)^n$, donde en el segundo caso $b^2-4ac<0$.

1. Factores lineales:

   Por cada factor lineal de la forma $(ax+b)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de las m fracciones siguientes:

   $$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

   con $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathbb{R}$

Ejemplo 208.

Aplique el método de fracciones parciales en la fracción $\dfrac{3x-3}{x^2-x-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} &\Rightarrow 3x-3 = A(x+1) + B(x-2) \\ &\Rightarrow 3x-3 = (A+B)x + (A-2B) \\ &\Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ A-2B=-3 \end{cases} \\ &\Rightarrow A=1, B=2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{3x-3}{x^2-x-2} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x+1}$ †

Ejemplo 209.

Aplique el método de fracciones parciales en la fracción $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

Primero se tiene que $\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}$, así

$$
\begin{aligned}
&\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\
&\Rightarrow 5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \\
&\Rightarrow 5x^2+20x+6 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B+C=20 \\ A=6 \end{cases} \\
&\Rightarrow A=6, B=-1, C=9
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{9}{(x+1)^2}$ †

2. Factores cuadráticos:

   Por cada factor cuadrático de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones siguientes:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

   con $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 210.

Aplique el método de fracciones parciales en la fracción $\dfrac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}$

Primero se tiene que $\dfrac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \dfrac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)}$, así

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\
&\Rightarrow 2x^3-4x-8 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1) \\
&\Rightarrow 2x^3-4x-8 = (A+B+C)x^3 + (-A-C+D)x^2 + (4A+4B-D)x + (-4A) \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ -A-C+D=0 \\ 4A+4B-D=-4 \\ -4A=-8 \end{cases} \\
&\Rightarrow A=2, B=-2, C=2, D=4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2x+4}{x^2+4}$ †

Ejemplo 211.

Aplique el método de fracciones parciales en la fracción $\dfrac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}\\
&\Rightarrow 8x^3+13x = (Ax+B)(x^2+2)+Cx+D\\
&\Rightarrow 8x^3+13x = Ax^3+Bx^2+(2A+C)x+(2B+D)\\
&\Rightarrow \begin{cases} A=8\\ B=0\\ 2A+C=13\\ 2B+D=0 \end{cases}\\
&\Rightarrow A=8, B=0, C=-3, D=0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8x}{x^2+2} - \dfrac{3x}{(x^2+2)^2}$ †

Ejemplo 212.

Aplique el método de fracciones parciales en la fracción $\dfrac{3x+4}{x^3-2x-4}$

Primero se tiene que $\dfrac{3x+4}{x^3-2x-4} = \dfrac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}$, así

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\\
&\Rightarrow 3x+4 = A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-2)\\
&\Rightarrow 3x+4 = (A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(2A-2C)\\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=0\\ 2A-2B+C=3\\ 2A-2C=4 \end{cases}\\
&\Rightarrow A=1, B=-1, C=-1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{3x+4}{x^3-2x-4} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ †

4.7. Racionalización de expresiones numéricas y algebraicas

Dada una expresión algebraica cuyo denominador involucra radicales, se llama *racionalización del denominador* al proceso por el cual se determina otra expresión que no involucra radicales en el denominador y que es equivalente a la expresión algebraica dada.

En los ejemplos para esta sección se va a suponer que todas las raices están bien definidas.

Caso 1

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \text{ y } \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \text{ entonces } \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo 213.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 214.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} &= \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\\ &= \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)^2}}\\ &= \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\sqrt{x-2}}{\cancel{x-2}} && x \neq 2\\ &= (x+2)\sqrt{x-2}\end{aligned}$$

Ejemplo 215.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}}$

$$\begin{aligned}\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} &= \frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^4}}\\ &= \frac{2x^{\cancel{2}}\sqrt[7]{x^4}}{5\cancel{x}} && x \neq 0\\ &= \frac{2x\sqrt[7]{x^4}}{5}\end{aligned}$$

Caso 2

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ entonces } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 216.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} \\
&= \sqrt{3}-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 217.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$\begin{aligned}
\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} \\
&= \frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}} \qquad\qquad x-y \neq 0 \\
&= \sqrt{x}+\sqrt{y}
\end{aligned}$$

Ejemplo 218.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}$

$$\begin{aligned}
\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} &= \frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} \cdot \frac{2x-3\sqrt{y}}{2x-3\sqrt{y}} \\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{4x^2-9y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\cancel{(4x^2-9y)}(2x-3\sqrt{y})}{\cancel{(4x^2-9y)}} \qquad\qquad 4x^2-9y \neq 0 \\
&= 3\sqrt{y}-2x
\end{aligned}
$$

Caso 3

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando alguna de las siguientes propiedades:

$$
\text{Si } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ entonces:}
$$

$$
(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3
$$

$$
(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3
$$

Ejemplo 219.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3} \\
&= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{2+3} \\
&= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 220.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{x-2y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x-2y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y}} &= \frac{x-2y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2y}+(\sqrt[3]{2y})^2}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2y}+(\sqrt[3]{2y})^2} \\
&= \frac{(x-2y)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2y}+(\sqrt[3]{2y})^2)}{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{2y})^3} \\
&= \frac{\cancel{(x-2y)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2xy}+\sqrt[3]{4y^2})}{\cancel{x-2y}} \qquad\qquad x-2y \neq 0 \\
&= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2xy}+\sqrt[3]{4y^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 221.

Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}$

$$\begin{aligned}
\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} &= \frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} \cdot \frac{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3 + 3^2}{(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3 + 3^2} \\
&= \frac{(8x+11)\left[4\sqrt[3]{(x-2)^2} - 6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^3 + 3^3} \\
&= \frac{\cancel{(8x+11)}\left[4\sqrt[3]{(x-2)^2} - 6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{\cancel{(8x+11)}} \qquad\qquad x \neq \frac{-11}{8} \\
&= 4\sqrt[3]{(x-2)^2} - 6\sqrt[3]{x-2}+9
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones y Problemas

Definición 57. Ecuación

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones, estas expresiones pueden ser algebraicas, trigonométricas o de muchos otros tipos.

Definición 58. Solución de una ecuación

Una *solución* de una ecuación es un número real que, al sustituirlo en la variable, provoca una identidad numérica.

El conjunto que contiene todas las soluciones se denota S y se llama *conjunto solución*.

Para resolver las ecuaciones se puede hacer uso de las propiedades que se habían demostrado en el Capítulo 2.

Propiedades de las igualdades

1. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a = b$ entonces
   a) $a + c = b + c$
   b) $a - c = b - c$
   c) $a \cdot c = b \cdot c$
   d) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$, si $c \neq 0$
2. $a \cdot 0 = 0$
3. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$
4. $-(-a) = a$

5.1. Ecuación lineal

Definición 59.

Una *ecuación lineal* es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. Su única solución es $\dfrac{-b}{a}$ y su conjunto solución es $S = \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

Ejemplo 222.

Determine el conjunto solución de la ecuación $2x - 6 = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} 2x - 6 = 0 &\Rightarrow 2x = 6 \\ &\Rightarrow x = \frac{6}{2} \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{3\}$

Ejemplo 223.

Determine el conjunto solución de la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$

Solución:

$$\begin{aligned} 6x - 7 = 2x + 5 &\Rightarrow 6x - 2x = 5 + 7 \\ &\Rightarrow 4x = 12 \\ &\Rightarrow x = \frac{12}{4} \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{3\}$

Ejemplo 224.

Determine el conjunto solución de la ecuación $x(x-1) - 5 = (x-3)^2$

Solución:

$$\begin{aligned} x(x-1) - 5 = (x-3)^2 &\Rightarrow x^2 - x - 5 = x^2 - 6x + 9 \\ &\Rightarrow \cancel{x^2} - x - \cancel{x^2} + 6x = 9 + 5 \\ &\Rightarrow 5x = 14 \\ &\Rightarrow x = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \left\{\dfrac{14}{5}\right\}$

Ejemplo 225.

Determine el conjunto solución de la ecuación $3(2x+1) = 2(3x-4)$

Solución:

$$\begin{aligned} 3(2x+1) = 2(3x-4) &\Rightarrow 6x+3 = 6x-8 \\ &\Rightarrow 6x-6x = -8-3 \\ &\Rightarrow 0 = -11 \end{aligned}$$

Como se llegó a una igualdad que siempre es falsa, entonces se concluye que esta ecuación no tiene solución, en este caso $S = \{\}$, otra manera de expresar esto es $S = \phi$

Ejemplo 226.

Determine el conjunto solución de la ecuación $(x-1)^2 = (x+1)^2 - 4x$

Solución:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 = (x+1)^2 - 4x &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 - 4x \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - x^2 - 2x + 4x = 1 - 1 \\ &\Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

En este caso, contrario al anterior, se llegó a una igualdad que siempre es cierta, lo que quiere decir que la igualdad se cumple para cualquier valor de x, por lo tanto, $S = \mathbb{R}$

5.2. Ecuación cuadrática

Definición 60.

Una expresión que se puede representar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, recibe el nombre de *ecuación cuadrática.*

Para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática se utiliza la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ donde } \Delta = b^2 - 4ac$$

En donde se cumple que:

- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene dos soluciones repetidas.
- Si $\Delta > 0$ se tienen dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 227.

Determine el conjunto solución de la ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$

En este caso se tiene $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -2 = 49$

Por lo que $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \dfrac{-1 \pm 7}{12}$

Aquí se tiene $x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -\dfrac{2}{3}$

Por lo tanto, $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 228.

Determine el conjunto solución de la ecuación $2x^2 + 2x = 2$

En este caso la ecuación es $2x^2 + 2x - 2 = 0$

Aquí $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 20$

Por lo que $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{20}}{4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Por lo tanto, $S = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5.3. Ecuación de grado mayor que dos

Para resolver una ecuación de grado mayor que dos primero se factoriza completamente el polinomio y luego se utiliza la propiedad de igualdades

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Ejemplo 229.

Resuelva la ecuación $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

Al factorizar el polinomio con división sintética se obtiene

$$(x+2)(x+3)(x+1) = 0$$

De aquí, por la propiedad de igualdades se tiene

$x + 2 = 0$	$x + 3 = 0$	$x + 1 = 0$
$\Rightarrow x = -2$	$\Rightarrow x = -3$	$\Rightarrow x = -1$

Por lo tanto $S = \{-3, -2, -1\}$

Ejemplo 230.

Resuelva la ecuación $-x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

Al factorizar el polinomio con división sintética se obtiene

$$(x-1)(-x^2-1) = 0$$

De aquí, por la propiedad de igualdades se tiene

$x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$-x^2 - 1 = 0$

No aporta solución.

Por lo tanto $S = \{1\}$

5.4. Ecuaciones con radicales

Para resolver este tipo de ecuaciones, primero se debe encontrar la manera de eliminar las raíces, para ello se puede utilizar la propiedad $(\sqrt[n]{x})^n = x$ y luego se resuelve la ecuación.

En ocasiones es necesario elevar varias veces para poder eliminar varias raíces, en estos casos se recomienda ir despejando el término con raíz antes de elevar.

Se debe recalcar que si en la propiedad $(\sqrt[n]{x})^n = x$ el n es par entonces la propiedad es cierta sólo cuando $x \geqslant 0$; cuando se resuelve una ecuación con radicales este hecho no se toma en cuenta, por ello al final se debe realizar prueba.

Ejemplo 231.

Resuelva en el conjunto de los números reales la ecuación $x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$

$$\begin{aligned}
x - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0 &\Rightarrow x + 6 = 4\sqrt{x+3} \\
&\Rightarrow (x+6)^2 = \left(4\sqrt{x+3}\right)^2 \\
&\Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 16(x+3) \\
&\Rightarrow x^2 + 12x + 36 - 16x - 48 = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 6 \text{ ó } x_2 = -2
\end{aligned}$$

Prueba

- Si $x = 6$ se tiene

$$\begin{aligned}
6 - 4\sqrt{6+3} + 6 \stackrel{?}{=} 0 &\Rightarrow 6 - 4 \cdot 3 + 6 \stackrel{?}{=} 0 \\
&\Rightarrow 0 = 0
\end{aligned}$$

- Si $x = -2$ se tiene

$$\begin{aligned}
-2 - 4\sqrt{-2+3} + 6 \stackrel{?}{=} 0 &\Rightarrow -2 - 4 \cdot 1 + 6 \stackrel{?}{=} 0 \\
&\Rightarrow 0 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{-2, 6\}$

Ejemplo 232.

Resuelva en el conjunto de los números reales la ecuación $3\sqrt{x-1} + x = 5$

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{x-1}+x=5 &\Rightarrow 3\sqrt{x-1}=5-x\\
&\Rightarrow \left(3\sqrt{x-1}\right)^2=(5-x)^2\\
&\Rightarrow 9(x-1)=25-10x+x^2\\
&\Rightarrow x^2-19x+34=0\\
&\Rightarrow x_1=17 \text{ ó } x_2=2
\end{aligned}
$$

Prueba

- Si $x=17$ se tiene

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{17-1}+17\stackrel{?}{=}5 &\Rightarrow 3\cdot 4+17\stackrel{?}{=}5\\
&\Rightarrow 29\neq 5
\end{aligned}
$$

- Si $x=2$ se tiene

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{2-1}+2\stackrel{?}{=}5 &\Rightarrow 3\cdot 1+2\stackrel{?}{=}5\\
&\Rightarrow 5=5
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $S=\{2\}$

Ejemplo 233.

Resuelva en el conjunto de los números reales la ecuación $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-1}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x}-1=\sqrt{x-1} &\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2\\
&\Rightarrow \cancel{x}-2\sqrt{x}+1=\cancel{x}-1\\
&\Rightarrow 2=2\sqrt{x}\\
&\Rightarrow 2^2=(2\sqrt{x})^2\\
&\Rightarrow 4=4x\\
&\Rightarrow x=1
\end{aligned}
$$

Prueba

- Si $x=1$ se tiene

$$
\sqrt{1}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{1-1}\Rightarrow 0=0
$$

Por lo tanto $S=\{1\}$

Ejemplo 234.

Resuelva en el conjunto de los números reales la ecuación $\sqrt{x+2}-1=\sqrt{2x-3}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}-1=\sqrt{2x-3} &\Rightarrow \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2\\
&\Rightarrow x+2-2\sqrt{x+2}+1=2x-3\\
&\Rightarrow 6-x=2\sqrt{x+2}\\
&\Rightarrow (6-x)^2=(2\sqrt{x+2})^2\\
&\Rightarrow 36-12x+x^2=4x+8\\
&\Rightarrow x^2-16x+28=0\\
&\Rightarrow x_1=2 \text{ ó } x_2=14
\end{aligned}$$

Prueba

- Si $x=2$ se tiene

$$\sqrt{2+2}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\cdot 2-3}\Rightarrow 1=1$$

- Si $x=14$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{14+2}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\cdot 14-3} &\Rightarrow 4-1=\sqrt{25}\\
&\Rightarrow 3\neq 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S=\{2\}$

5.5. Ecuación con fracciones racionales

Para resolver una ecuación con fracciones racionales se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Determine los valores de x que hacen que los denominadores de las expresiones sean cero, estos valores no pueden ser solución de la ecuación ya que hacen que se indefina la expresión.
2. "Pase" todos los términos a un solo lado de la igualdad.
3. Realice las sumas o restas indicadas (se debe tener cuidado de tomar el mínimo común múltiplo de los denominadores para que quede la expresión más simple posible).
4. Elimine el denominador (se pasa a multiplicar al cero, esto es válido si se tienen en cuenta las restricciones del primer paso).
5. Resuelva la ecuación resultante. Las soluciones de la ecuación son las encontradas en este paso eliminando los valores que son restricciones.

Ejemplo 235.

Determine el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x-2}$

Las restricciones son: 0 y 2.

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{x-2}\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{3}{x-2}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1\cdot(x-2)-3\cdot(x)}{x(x-2)}=0\\
&\Rightarrow \frac{x-2-3x}{x(x-2)}=0\\
&\Rightarrow -2x-2=0\\
&\Rightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Como -1 no es restricción se tiene que $S=\{-1\}$

Ejemplo 236.

Determine el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{2}{x-2}$

Las restricciones son: -3 y 2.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x-4}-\frac{5}{x+3}=\frac{2}{x-2} &\Rightarrow \frac{3}{2x-4}-\frac{5}{x+3}-\frac{2}{x-2}=0\\
&\Rightarrow \frac{3}{2(x-2)}-\frac{5}{x+3}-\frac{2}{x-2}=0\\
&\Rightarrow \frac{3(x+3)-5(2(x-2))-2(2(x+3))}{2(x-2)(x+3)}=0\\
&\Rightarrow 3x+9-10x+20-4x-12=0\\
&\Rightarrow -11x+17=0\\
&\Rightarrow x=\frac{17}{11}
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{17}{11}$ no es restricción se tiene que $S=\left\{\dfrac{17}{11}\right\}$

Ejemplo 237.

Determine el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{x^2}{x+3}+\dfrac{3-x}{x-2}=\dfrac{5}{x^2+x-6}$

Las restricciones son: -3 y 2.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x+3}+\frac{3-x}{x-2}=\frac{5}{x^2+x-6} &\Rightarrow \frac{x^2}{x+3}+\frac{3-x}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}=0\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{x+3}+\frac{3-x}{x-2}-\frac{5}{(x+3)(x-2)}=0\\
&\Rightarrow \frac{x^2(x-2)+(3-x)(x+3)-5}{(x+3)(x-2)}=0\\
&\Rightarrow x^3-2x^2+9-x^2-5=0\\
&\Rightarrow x^3-3x^2+4=0\\
&\Rightarrow (x+1)(x-2)^2=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

Como 2 es una restricción entonces $S = \{-1\}$

5.6. Sistemas de ecuaciones

Definición 61.

Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que se deben resolver en forma simultánea, es decir, se debe encontrar una solución que satisfaga todas las ecuaciones al mismo tiempo.

5.6.1. Sistema de dos ecuaciones y dos variables

En este caso se tiene un sistema en donde hay dos ecuaciones y en el sistema se encuentran dos variables.

Ejemplo 238.

Los siguientes son ejemplos de sistemas de dos ecuaciones con dos variables

1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x = 21 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Para resolver un sistema de ecuaciones como estos se pueden utilizar los siguientes métodos.

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones, sustituir esta variable en la otra ecuación y resolverla.

Ejemplo 239.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ 3x - y = 8 & (2) \end{cases}$

De (1), $x = 5 - 2y$

Sustituyendo en (2), $3(5 - 2y) - y = 8 \Rightarrow 15 - 6y - y = 8 \Rightarrow y = 1$

Así, $x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 1 = 3$

Por lo tanto $S = \{(3, 1)\}$

Ejemplo 240.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 5y = -6 & (1) \\ 2x + y = 10 & (2) \end{cases}$

De (1), $x = -6 + 5y$

Sustituyendo en (2), $2(-6+5y)+y=10 \Rightarrow -12+10y+y=10 \Rightarrow y=2$

Así, $x=-6+5y=-6+5\cdot 2=4$

Por lo tanto $S=\{(4,2)\}$

Ejemplo 241.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+3y=2 & (1) \\ 2x-6y=5 & (2) \end{cases}$

De (1), $x=3y-2$

Sustituyendo en (2), $2(3y-2)-6y=5 \Rightarrow 6y-4-6y=5 \Rightarrow -4=5$

Lo cual es una incongruencia, por lo tanto $S=\phi$

Método de eliminación

Suponga que se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ dx+ey=f & (2) \end{cases}$$

En este método lo que se hace es multiplicar (1) por d y multiplicar (2) por $-a$; luego se suman las ecuaciones resultantes y se resuelve la ecuación, de esta manera se obtiene el valor de x. Por último, se sustituye el valor de la x en (1) ó (2) para obtener el valor de y.

Ejemplo 242.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-5y=-6 & (1) \\ 2x+y=10 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 2\cdot \\ -1\cdot \end{array} \begin{cases} x-5y=-6 \\ 2x+y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-10y=-12 \\ -2x-y=-10 \end{cases}$$

Si se suman estas dos ecuaciones se obtiene $-11y=-22 \Rightarrow y=2$.

Sustituyendo este valor en (1) se obtiene $x-5\cdot 2=-6 \Rightarrow x=4$.

Por lo tanto $S=\{(4,2)\}$

Ejemplo 243.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x-4y=10 & (1) \\ 2x+5y=-1 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 2\cdot \\ -3\cdot \end{array} \begin{cases} 3x-4y=10 & (1) \\ 2x+5y=-1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-8y=20 \\ -6x-15y=3 \end{cases}$$

Si se suman estas dos ecuaciones se obtiene $-23y=23 \Rightarrow y=-1$.

Sustituyendo este valor en (2) se obtiene $2x - 5 = -1 \Rightarrow x = 2$.

Por lo tanto $S = \{(2, -1)\}$

Ejemplo 244.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y = -6 & (1) \\ 2x + 5y = 24 & (2) \end{cases}$

$$\begin{matrix} 2\cdot \\ -1\cdot \end{matrix} \begin{cases} x - 2y = -6 & (1) \\ 2x + 5y = 24 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -12 \\ -2x - 5y = -24 \end{cases}$$

Si se suman estas dos ecuaciones se obtiene $-9y = -36 \Rightarrow y = 4$.

Sustituyendo este valor en (1) se obtiene $x - 2 \cdot 4 = -6 \Rightarrow x = 2$.

Por lo tanto $S = \{(2, 4)\}$

5.6.2. Sistema de tres ecuaciones y tres variables

En este caso se trabajarán los sistemas de ecuaciones en donde se presentan tres ecuaciones y el sistema tiene tres variables.

Ejemplo 245.

Los siguientes son sistemas de tres ecuaciones con tres variables

1. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 & (1) \\ 4x - y + z = 1 & (2) \\ -2x + 5y - z = 4 & (3) \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x + 3y + z = 1 & (1) \\ x - z = 2 & (2) \\ 2y + 3z = 1 & (3) \end{cases}$

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones se utilizará el método de sustitución:

1. Despeje de la ecuación (1) alguna de las variables y sustitúyala en (2) y (3).
2. Resuelva el sistema de dos ecuaciones y dos variables formado por las nuevas (2) y (3) utilizando algún método ya conocido.
3. Sustituya los valores encontrados en la ecuación (1) y encuentre el valor de la última variable.

Ejemplo 246.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & (1) \\ 2x + 3y + 4z = 1 & (2) \\ 3x + 4y + z = 2 & (3) \end{cases}$

De (1) se tiene $x = 4 - 2y - 3z$

Sustituyendo en (2) y (3) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2(4 - 2y - 3z) + 3y + 4z = 1 \\ 3(4 - 2y - 3z) + 4y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - 2z = -7 \\ -2y - 8z = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y + 4z = 14 \\ -2y - 8z = -10 \end{cases}$$

Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene $-4z = 4 \Rightarrow z = -1$

Al sustituir este valor se obtiene $-y - 2 \cdot -1 = -7 \Rightarrow y = 9$

Y, por último, se sustituyen estos valores en cualquiera de las ecuaciones originales, si se sustituye en (1) se tiene $x + 2 \cdot 9 + 3 \cdot -1 = 4 \Rightarrow x = -11$

Por lo tanto, $S = \{(-11, 9, -1)\}$

Ejemplo 247.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 & (1) \\ 4x - y + z = 1 & (2) \\ -2x + 5y - z = 4 & (3) \end{cases}$

De (1) se tiene $x = 3 - 2y + 2z$

Sustituyendo en (2) y (3) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 4(3 - 2y + 2z) - y + z = 1 \\ -2(3 - 2y + 2z) + 5y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9y + 9z = -11 \\ 9y - 5z = 10 \end{cases}$$

Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene $4z = -1 \Rightarrow z = \dfrac{-1}{4}$

Al sustituir este valor se obtiene $9y - 5 \cdot \dfrac{-1}{4} = 10 \Rightarrow y = \dfrac{35}{36}$

Y, por último, al sustituir en (1) se tiene $x + 2 \cdot \dfrac{35}{36} - 2 \cdot \dfrac{-1}{4} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{5}{9}$

Por lo tanto, $S = \left\{ \left(\dfrac{5}{9}, \dfrac{35}{36}, \dfrac{-1}{4} \right) \right\}$

Ejemplo 248.

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 5y + 2z = 1 & (1) \\ 3x + y - z = 2 & (2) \\ -x - 3y + z = 0 & (3) \end{cases}$

De (1) se tiene $x = 1 + 5y - 2z$

Sustituyendo en (2) y (3) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 3(1 + 5y - 2z) + y - z = 2 \\ -(1 + 5y - 2z) - 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y - 7z = -1 \\ -8y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16y - 7z = -1 \\ -16y + 6z = 2 \end{cases}$$

Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene $-z = 1 \Rightarrow z = -1$

Al sustituir este valor se obtiene $-8y + 3 \cdot -1 = 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$

Y, por último, se sustituyen estos valores en cualquiera de las ecuaciones originales, si se sustituye en (1) se tiene $x - 5 \cdot \frac{-1}{2} + 2 \cdot -1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1 \right) \right\}$

5.7. Ecuaciones por cambio de variable

Algunas veces una ecuación se puede transformar en otra ecuación más simple realizando un cambio de variable conveniente. Por lo general, la ecuación resultante es una ecuación cuadrática.

Ejemplo 249.

Resuelva la ecuación $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

Observe que la ecuación se puede expresar como $(x^2)^2 + 4(x^2) - 5 = 0$

En este caso se hace el cambio de variable $u = x^2$ y se obtiene la ecuación $u^2 + 4u - 5 = 0$

Esta ecuación tiene por solución $u = 1$ y $u = -5$.

Volviendo a la variable original $u = x^2$, entonces

$x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$x^2 = -5$

No aporta solución.

Por lo tanto $S = \{-1, 1\}$

Ejemplo 250.

Resuelva la ecuación $3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

$3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0 \Rightarrow 3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 4\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 4 = 0$

Sea $u = x^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 3u^2 - 4u - 4 = 0$

De aquí

$$
\begin{aligned}
u &= 2 \\
x^{\frac{1}{3}} &= 2 \\
x &= 2^3 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{-2}{3} \\
x^{\frac{1}{3}} &= \frac{-2}{3} \\
x &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \\
x &= \frac{-8}{27}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $S = \left\{ \dfrac{-8}{27}, 8 \right\}$

Ejemplo 251.

Resuelva la ecuación $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{10} = 7 - 5\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{5}$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^{10} = 7 - 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^{5} \Rightarrow 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^{5}\right)^{2} = 7 - 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^{5}$$

Sea $u = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{5}$

$\Rightarrow 2u^2 + 5u - 7 = 0$

De aquí

$u = 1$

$\Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{5} = 1$

$\Rightarrow x - \dfrac{1}{2} = 1^{\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow x = 1 + \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$u = \dfrac{-7}{2}$

$\Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{5} = \dfrac{-7}{2}$

$\Rightarrow x - \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{-7}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow x = \sqrt[5]{\dfrac{-7}{2}} + \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto $S = \left\{ \sqrt[5]{\dfrac{-7}{2}} + \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} \right\}$

5.8. Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver una ecuación con valor absoluto de la forma $|P(x)| = a$, con $a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0$ se puede utilizar la siguiente propiedad que se demostró en el Capítulo 2:

$$|P(x)| = a \Rightarrow P(x) = a \text{ ó } P(x) = -a$$

Nota: En el caso que $a < 0$ entonces la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 252.

Resuelva la ecuación $|x - 5| = 3$.

Se tienen las opciones:

$$x - 5 = 3 \Rightarrow x = 8$$

$$x - 5 = -3 \Rightarrow x = 2$$

$\therefore S = \{2, 8\}$. †

Ejemplo 253.

Resuelva la ecuación $|x^2+1| = 15$.

Se tienen las opciones:

$$x^2+1 = 15 \Rightarrow x^2 = 14$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{14}$$

$$x^2+1 = -15 \Rightarrow x^2 = -16$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$$

Como $\sqrt{-16}$ no es un número real entonces:

$\therefore S = \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$. †

Si hay más variables externas al valor absoluto o hay varios valores absolutos entonces es mejor utilizar las dos opciones: cuando $P(x) \geqslant 0$ y cuando $P(x) < 0$, al final se debe verificar que las soluciones obtenidas cumplan con el intervalo correspondiente.

Ejemplo 254.

Resuelva la ecuación $|3-x| - |2x+1| = 2$.

Note que $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad 3-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3 \\ -(3-x) & \text{si} \quad 3-x < 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases}$

Además $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad 2x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{-1}{2} \\ -(2x+1) & \text{si} \quad 2x+1 < 0 \Rightarrow x < \frac{-1}{2} \end{cases}$

$-\infty$ $\qquad \frac{-1}{2} \qquad 3 \qquad \infty$

$(3-x) - -(2x+1) = 2$	$(3-x) - (2x+1) = 2$	$-(3-x) - (2x+1) = 2$
$3 - x + 2x + 1 = 2$	$-3x = 0$	$-x = 6$
$x = -2$	$x = 0$	$x = -6$

Note que en la tercera columna el resultado (-6) no está en el intervalo en donde se está resolviendo $([3, \infty])$, por lo que no se toma en cuenta.

$\therefore S = \{-2, 0\}$. †

Ejemplo 255.

Resuelva la ecuación $x \cdot |1+x| = 2$.

Note que $|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad 1+x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1 \\ -(1+x) & \text{si} \quad 1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$

$-\infty$	-1 ∞
$x \cdot \lvert 1+x \rvert = 2$	$x \cdot \lvert 1+x \rvert = 2$
$x \cdot -(1+x) = 2$	$x(1+x) = 2$
$-x^2 - x - 2 = 0$	$x^2 + x - 2 = 0$
No tiene solución	$x = 1$ ó $x = -2$

Note que en la segunda columna la posible solución $x = -2$ no está en el intervalo en donde se está resolviendo ($[-1, \infty]$), por lo que no se toma en cuenta.

$\therefore S = \{1\}$. †

Ejemplo 256.

Resuelva la ecuación $|x-1| + |2-x| = 1$.

Note que $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$

Además $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad 2-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad 2-x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

$-\infty$	1	2 ∞
$-(x-1) + (2-x) = 1$	$x - 1 + (2-x) = 1$	$x - 1 - (2-x) = 1$
$-x + 1 + 2 - x = 1$	$x - 1 + 2 - x = 1$	$x - 1 - 2 + x = 1$
$-2x = -2$	$1 = 1$	$2x = 4$
$x = 1$	Todo el intervalo	$x = 2$

$\therefore S = [1, 2]$. †

5.9. Problemas

Para resolver problemas no existe una fórmula general, sin embargo, se dan varias sugerencias que se deben seguir:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Clasifique los datos que se dan y las cantidades desconocidas represéntelas con letras, escribiendo claramente lo que significa cada una.
3. Haga una lista con los datos conocidos y piense en la relación que hay entre ellos, un dibujo podría ayudar. Con esto, trate de plantear una ecuación.
4. Resuelva la ecuación y deseche las soluciones imposibles: distancias negativas, números no naturales de personas, etc. y de la solución.

Ejemplo 257.

Si un automóvil viaja a una velocidad de $80\frac{km}{h}$, ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer una distancia de $180km$? Nota: La relación entre distancia, velocidad y tiempo es $d = v \cdot t$.

En este caso $d = 180km$ y $v = 80\dfrac{km}{h}$, así:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{180}{80} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Durará 2,25 horas, es decir, dos horas y quince minutos.

Ejemplo 258.

Un estudiante de un curso de fundamentos de matemática obtiene notas de 65 y 58 en dos exámenes parciales, en tareas tiene un promedio de 95. Si la ponderación de las tareas es un 10 % y los tres parciales un 90 % y el curso se pasa con 70. ¿Qué nota debe sacar en el tercer parcial para aprobar el curso?

Sea x la nota que se debe obtener en el tercer parcial, así

$$\begin{aligned} 65 \cdot 30\,\% + 58 \cdot 30\,\% + x \cdot 30\,\% + 95 \cdot 10\,\% &= 70 \\ 19{,}5 + 17{,}4 + x \cdot 0{,}3 + 9{,}5 &= 70 \\ 0{,}3x + 46{,}4 &= 70 \\ 0{,}3x &= 23{,}6 \\ x &= 78{,}67 \end{aligned}$$

El estudiante debe obtener más de 78.67 para poder pasar el curso.

Ejemplo 259.

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba, desde una altura de $20m$ sobre el piso. Si su altura en metros (h), después de t segundos está dada por la ecuación

$$h = -4{,}9t^2 + 147t + 20$$

¿Cuánto tiempo debe pasar para que el proyectil esté a una altura de $1000m$?

Si se sustituye $h = 1000$ en la ecuación $h = -4{,}9t^2 + 147t + 20$ se tiene que

$$1000 = -4{,}9t^2 + 147t + 20 \Rightarrow -4{,}9t^2 + 147t - 980 = 0$$

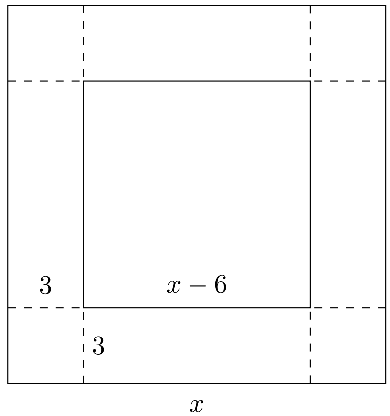
Por lo que $t = 10$ ó $t = 20$

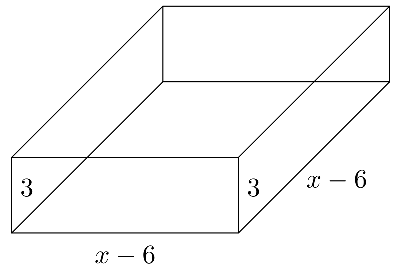
El proyectil se encuentra a $1000m$ a los $10s$ cuando el proyectil va subiendo y a los $20s$ cuando el proyectil va bajando.

Ejemplo 260.

Se quiere construir una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de una lámina cuadrada de cartón, cortando cuadrados en cada esquina de $3cm$ de lado, y doblando hacia arriba los lados. ¿Qué dimensiones debe tener la lámina para que la caja resultante tenga un volumen de $48cm^3$?

Sea x la longitud del lado de la lámina cuadrada original, a partir de la cual se construyó la caja.





El volumen de esta caja es de $V = 3(x-6)^2$.

Se quiere que $V = 48cm^3$, así

$48 = 3(x-6)^2 \Rightarrow (x-6)^2 = 16 \Rightarrow x-6 = 4 \Rightarrow x = 10$

Por lo que la lámina original mide $10cm$ de lado.

Ejemplo 261.

Un granjero tiene una colección de gallinas y conejos. Estos animales suman 50 cabezas y 140 patas, ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos tiene el granjero?

Sea x el número de gallinas y sea y el número de conejos.

$$\begin{cases} x + y = 50 & (1) \\ 2x + 4y = 140 & (2) \end{cases}$$

De (1), $x = 50 - y$.

En (2), $2(50-y) + 4y = 140 \Rightarrow 100 - 2y + 4y = 140 \Rightarrow 2y = 40 \Rightarrow y = 20$

Por lo que $x = 50 - 20 = 30$.

Así, el granjero tiene 30 gallinas y 20 conejos.

Ejemplo 262.

Si el numerador y el denominador de una fracción se incrementan en 1, la fracción es equivalente a $\dfrac{3}{5}$; pero si el numerador y el denominador disminuyen en 1, el resultado es $\dfrac{5}{9}$. Determine la fracción original.

Sea x el numerador y y el denominador de la fracción que se busca.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{5} & (1) \\ \frac{x-1}{y-1} = \frac{5}{9} & (2) \end{cases}$$

De (1), $5(x+1) = 3(y+1) \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 3 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{5}$

En (2),

$$\begin{aligned} 9(x-1)=5(y-1) \quad &\Rightarrow \quad 9\left(\frac{3y-2}{5}-1\right)=5y-5 \\ &\Rightarrow \quad 9\left(\frac{3y-7}{5}\right)=5y-5 \\ &\Rightarrow \quad 27y-63=25y-25 \\ &\Rightarrow \quad 2y=38 \\ &\Rightarrow \quad y=19 \end{aligned}$$

Así, $x=\frac{3\cdot 19-2}{5}=11$

Por lo tanto, la fracción original es $\dfrac{11}{19}$

Ejercicio 13.

Un estudiante de Fundamentos de Matemática obtiene notas de 75, 82, 71 y 84 en cuatro de los exámenes. ¿Qué calificación en su siguiente prueba elevará su promedio a 80?

88

Ejercicio 14.

Un trabajador percibe \$492 de salario después de restar deducciones, las cuales corresponden al 40 % del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?

\$820

Ejercicio 15.

El costo de instalar aislamiento térmico en una casa particular de dos recámaras es de \$1080. En la actualidad, el promedio mensual de los costos de calefacción es de \$60, pero se espera que el aislamiento los reduzca un 10 % ¿Cuántos meses se tardará en recuperar el costo del aislamiento?

180 meses (15 años)

Ejercicio 16.

Un estudiante de Fundamentos de Matemática ha ganado \$100000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una cuenta paga 8 % de interés simple, pero los depósitos se aseguran sólo a \$50000. La segunda cuenta paga 6,4 % de interés simple pero los depósitos se aseguran hasta por \$10000. Determine si es posible depositar el dinero de modo que esté asegurado totalmente y gane intereses anuales de \$7500.

\$68750 al 8 % y \$31250 al 6,4 %. (No se puede)

Ejercicio 17.

Seiscientas personas asisten a presenciar el estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan \$5 y los de niños \$2. Si la taquilla recibe un total de \$2400, ¿Cuántos niños asistieron al estreno?

200

Ejercicio 18.

En cierta prueba médica diseñada para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 onzas(oz) de una solución de glucosa al 30 %, cuando la prueba se aplica a un niño, la concentración de glucosa debe disminuirse al 20 % ¿Cuánta solución de glucosa al 30 % y cuánta agua se necesita al fin de preparar 7 oz de una solución de glucosa al 20 %?

$\dfrac{14}{3}$ oz de glucosa y $\dfrac{7}{3}$ oz de agua

Ejercicio 19.

La plata británica Sterling es una aleación que contiene 7,5 % de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos gramos de plata Sterling deben emplearse para preparar 200g de una aleación de cobre-plata con 10 % de cobre en peso?

194.59g de Sterling y 5.4g de cobre.

Ejercicio 20.

Dos niños, que se encuentran a 224m entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro al mismo instante y a velocidades de $1,5\frac{m}{s}$ y $2\frac{m}{s}$, respectivamente

1. ¿Cuándo se encontrarán?
2. ¿Cuánto habrá caminado cada uno?

$64s$ y $96m$ y $128m$ respectivamente.

Ejercicio 21.

A las 6:00 a.m. un barrenieves, que avanza a una velocidad constante, empieza a despejar una carretera que conduce a las afueras de la ciudad. A las 8:00 a.m. un automóvil toma esa carretera a una velocidad de 30 mph y la alcanza 30 minutos después. Encuentre la velocidad de la máquina.

6 mph

Ejercicio 22.

Un muchacho puede remar a una velocidad de $5mph$ en aguas tranquilas. Si rema a contracorriente durante 15 minutos y luego corriente abajo y regresa al punto de partida en 12 minutos, determine:

1. La velocidad de la corriente.
2. La distancia total que recorrió.

Corriente: $\dfrac{5}{9}mph$, distancia: $2\frac{2}{9}$ millas.

Ejercicio 23.

Un fabricante de latas desea construir una lata cilíndrica circular recta de $20cm$ de altura y un volumen de $3000cm^3$. Encuentre el radio interior r de la lata.

$\sqrt{\dfrac{150}{\pi}}cm$

Ejercicio 24.

Una bola de beisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $64\frac{ft}{s}$. El número de pies s sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$

1. ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de $48ft$ sobre el suelo?
2. ¿Cuándo regresará al piso?

$1\ s$ y $3\ s$, regresará en $4\ s$

Ejercicio 25.

La temperatura T (en grados centígrados C) a la que hierve el agua está relacionada con la elevación h (en metros m) sobre el nivel del mar por la fórmula $h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$ para $95 \leqslant T \leqslant 100$

1. ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de $98C$?
2. La altitud del Monte Everest es de alrededor de $8840m$. Calcule la temperatura a la que hierve el agua en la cima de esta montaña (Sugerencia: use la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$)

$4320m$ y $96{,}86C$

Ejercicio 26.

Un terreno rectangular de 26 por 30 ft está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. Si el área de ka banqueta es de $240ft^2$, ¿Cuál es su ancho?

$2\ ft$

Ejercicio 27.

Hay que cercar una huerta cuadrada con un alambrado. Si la cerca cuesta \$1 por metro y el costo de preparar el terreno es de \$0,50 por metro cuadrado, determine el tamaño de la huerta que puede cercarse a un costo de \$120.

12 metros de lado

Ejercicio 28.

Los límites de una ciudad están formados por un círculo de 5 kilómetros de diámetro. Una carretera recta atraviesa el centro de la ciudad de A a B. El departamento de carreteras piensa construir una autopista de 6 kilómetros de largo de A al punto P en las afueras y luego a B. Encuentre la distancia de A a P. (Sugerencia: el triángulo APB es un triángulo rectángulo).

4.9 kilómetros o 1.1 kilómetros

Ejercicio 29.

Un aeroplano vuela al norte a $200\frac{km}{h}$ y pasa sobre cierto lugar a las 2:00 $p.m.$ Otra aeronave, que vuela hacia el este a la misma altitud y a $400\frac{km}{h}$ pasa sobre el mismo lugar a las 2:30 $p.m.$

1. Si t denota el tiempo en horas después de las 2:30 $p.m.$, exprese la distancia d entre los aviones en términos de t.
2. ¿A qué hora, después de las 2:30 $p.m.$, están los aviones a 500 kilómetros uno del otro?

$d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$, 3:30 $p.m.$

Ejercicio 30.

La velocidad de la corriente de un arroyo es de $5\frac{km}{h}$. Un canoero tarda 30 minutos más en remar 1,2 kilómetros río arriba que remar la misma distancia en favor de la corriente. ¿Cuál es la velocidad del remero en aguas tranquilas?

$7\frac{km}{h}$

Ejercicio 31.

Debe construirse un barril cerrado de petróleo, cilíndrico y de 4 m de altura, de modo que su superficie total sea de $10\pi m^2$. Encuentre el diámetro del barril.

$2m$

Capítulo 6

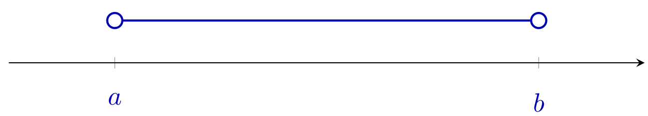
Inecuaciones Algebraicas

6.1. Intervalos

Definición 62. Intervalo abierto

Una *intervalo abierto* $]a,b[$ con $a < b$ es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, es decir, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$.

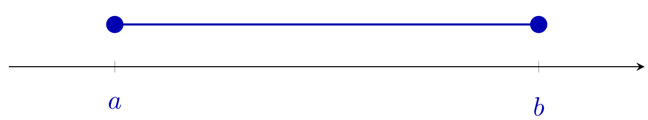
Geométricamente:



Definición 63. Intervalo cerrado

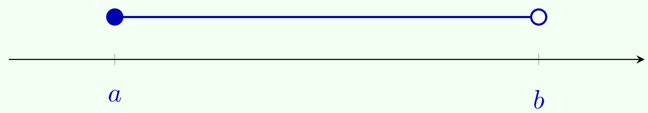
Una *intervalo cerrado* $]a,b[$ con $a < b$ es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluyéndolos, es decir, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x \leqslant b\}$.

Geométricamente:

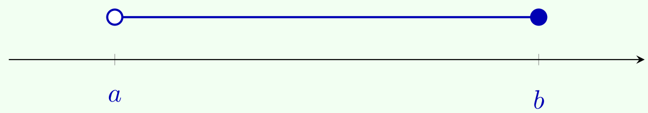


Definición 64. Intervalos semiabiertos

El *intervalo semiabierto* $[a, b[$ corresponde al conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluyendo al a, es decir, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x < b\}$.

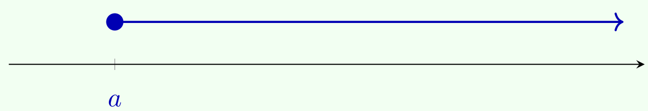


El *intervalo semiabierto* $]a, b]$ corresponde al conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b incluyendo al b, es decir, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x \leqslant b\}$.

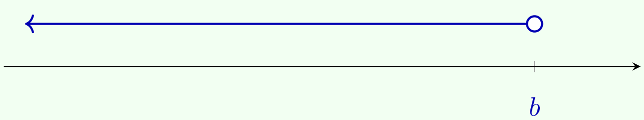


Definición 65. Intervalos infinitos

El símbolo *infinito* no representa un número real sino a la idea de un número infinitamente grande, se utiliza para representar *intervalos infinitos* como, por ejemplo, $[a, \infty[$ que representa el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a, es decir, $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant a\}$.



El intervalo $]-\infty, b[$ representa el conjunto de todos los números reales que son menores que b, es decir, $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}/x < b\}$.



6.1.1. Operaciones con intervalos

En esta sección se trabajará con intervalos numéricos que representan subconjuntos de los números reales.

Definición 66. Unión de intervalos

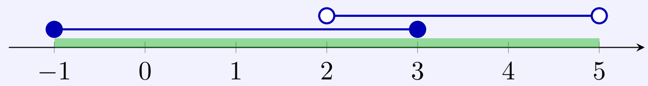
La *unión* de dos intervalos A y B se denota $A \cup B$ y está formado por todos los números que pertenecen al conjunto A ó al conjunto B, es decir, los números que pertenezcan a alguno de los dos intervalos originales, así

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

De manera geométrica se tomarían todos los números que están por debajo de alguna línea.

Ejemplo 263.

$$[-1,3] \cup]2,5[= [-1,5[$$



Definición 67. Intersección de intervalos

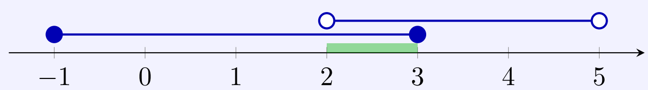
La *intersección* de dos intervalos A y B se denota $A \cap B$ y está formado por los números que pertenecen al conjunto A y al conjunto B, es decir, los números que pertenezcan a ambos intervalos originales, así

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

De manera geométrica se tomarían todos los números que están por debajo de ambas líneas.

Ejemplo 264.

$$[-1,3] \cap]2,5[=]2,3]$$



Definición 68. Diferencia de intervalos

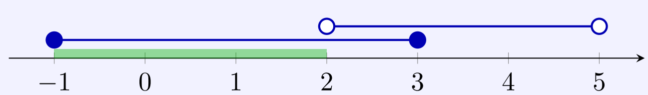
La *diferencia* de dos intervalos A y B se denota $A - B$ y está formado por los números que pertenecen al conjunto A y que no pertenecen al conjunto B, es decir, a los números del conjunto A se le quitan los números del conjunto B, así

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

De manera geométrica se tomarían todos los números que están por debajo de A eliminando los números que estén por debajo de B.

Ejemplo 265.

$$[-1,3] -]2,5[= [-1,2]$$



6.2. Propiedades de las desigualdades

Las siguientes son las propiedades de las desigualdades que ya se habían demostrado en el Capítulo 2, acá se vuelven a escribir como repaso.

- $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \Rightarrow a + c < b + c]$
- $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \Rightarrow a - c < b - c]$

- $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\left[a < b \wedge c > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}\right]$
- $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\left[a < b \wedge c < 0 \Rightarrow \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}\right]$
- $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c]$

Notas:

- Las propiedades anteriores serán ciertas si se cambian por la desigualdad contraria o si se agregan las igualdades.
- Es muy importante enfatizar que si se pasa a multiplicar o dividir un número negativo en una desigualdad, entonces la desigualdad se invierte.

6.3. Demostración de desigualdades

Se pueden utilizar las propiedades de las desigualdades vistas en el Capítulo 2 para demostrar algunas desigualdades.

Ejemplo 266.

Demuestre que $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac]$

Se cumple que

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geqslant 0 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0\\ &\Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab\end{aligned}$$

De la misma manera

$$\begin{aligned}(b-c)^2 \geqslant 0 &\Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geqslant 0\\ &\Rightarrow b^2 + c^2 \geqslant 2bc\end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned}(a-c)^2 \geqslant 0 &\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 \geqslant 0\\ &\Rightarrow a^2 + c^2 \geqslant 2ac\end{aligned}$$

Sumando las tres desigualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ac &\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ac\\ &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac\end{aligned}$$

$\therefore (\forall a, b, c \in \mathbb{R})[a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac]$ †

Ejemplo 267.

Demuestre que $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+)\left[(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc\right]$

Se cumple que

$$\begin{aligned}(a-1)^2 \geqslant 0 &\Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geqslant 0\\ &\Rightarrow a^2 + a + 1 \geqslant 3a\end{aligned}$$

De la misma forma se tiene que $b^2 + b + 1 \geqslant 3b$ y $c^2 + c + 1 \geqslant 3c$.

Como ambos lados de las desigualdades son positivas, entonces se cumple que

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 3a \cdot 3b \cdot 3c$$

$\therefore (\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+)[(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc]$ †

Ejemplo 268.

Demuestre que $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})[(ab + cd)^2 \leqslant (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)]$

$$\begin{aligned}(ab + cd)^2 \leqslant (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) &\Leftarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leqslant a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2\\ &\Leftarrow 2abcd \leqslant a^2d^2 + c^2b^2\\ &\Leftarrow 0 \leqslant a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2\\ &\Leftarrow 0 \leqslant (ad - cb)^2\end{aligned}$$

Lo cual es cierto y es válido en la dirección "$\Leftarrow$", de hecho, es cierto con "$\Leftrightarrow$".

$\therefore (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})[(ab + cd)^2 \leqslant (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)]$ †

6.4. Inecuaciones algebraicas

Definición 69. Inecuación algebraica

Una inecuación algebraica es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Puede ser que una cantidad o expresión sea menor que ($<$), menor o igual que ($\leqslant$), mayor que ($>$) ó mayor o igual que ($\geqslant$) otra cantidad o expresión.

Ejemplo 269.

Las siguientes son inecuaciones algebraicas:

1. $2x + 1 > 0$
2. $\dfrac{3x+1}{2x-3} < 0$
3. $x^2 - 3x + 4 \geqslant x + 1$
4. $|x + 3| \leqslant 5$

Definición 70. Solución de una inecuación

Una solución de una inecuación es un número a que al ser sustituido por x en la expresión se obtiene un valor numérico que hace verdadera la desigualdad.

Ejemplo 270.

Considere la inecuación $2x + 1 > 0$, se cumple que $x = 3$ es una solución de dicha inecuación pues $2 \cdot 3 + 1 > 0$. Además, $x = -1$ no es solución, pues no es cierto que $2 \cdot -1 + 1 > 0$.

Definición 71. Conjunto solución

El conjunto solución de una inecuación se denota S y es el conjunto que contiene a todas las soluciones reales de la inecuación.

Nota: Resolver una inecuación quiere decir encontrar su conjunto solución.

6.5. Inecuaciones lineales

Definición 72. Inecuación lineal

Una inecuación que se pueda escribir de la forma $ax+b < c$, $ax+b > c$, $ax+b \leqslant c$, $ax+b \geqslant c$ se dice que es una inecuación lineal.

El proceso para resolver las inecuaciones lineales es similar al de las ecuaciones, esto es, despejando la variable con las propiedades vistas, con el cuidado de que si se pasa a multiplicar o dividir un número negativo entonces la desigualdad se invierte.

Ejemplo 271.

Resuelva la inecuación $3x - 2 < 7$

$$\begin{aligned} 3x - 2 < 7 &\Rightarrow 3x < 7 + 2 \\ &\Rightarrow 3x < 9 \\ &\Rightarrow x < \frac{9}{3} \\ &\Rightarrow x < 3 \end{aligned}$$

Es decir, cualquier número menor que 3 es solución de la desigualdad, así:

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R}/x < 3\} =]-\infty, 3[$ †

Ejemplo 272.

Resuelva la inecuación $-3x + 4 \leqslant 11$

$$\begin{aligned} -3x + 4 \leqslant 11 &\Rightarrow -3x \leqslant 11 - 4 \\ &\Rightarrow -3x \leqslant 7 \\ &\Rightarrow x \geqslant \frac{7}{-3} \\ &\Rightarrow x \geqslant \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

$\therefore S = \left]\dfrac{-7}{3}, \infty\right[$ †

Ejemplo 273.

Resuelva la inecuación $4x - 3 < 2x + 5$

$$\begin{aligned} 4x - 3 < 2x + 5 &\Rightarrow 4x - 2x < 5 + 3 \\ &\Rightarrow 2x < 8 \\ &\Rightarrow x < 4 \end{aligned}$$

$\therefore S =]-\infty, 4[$ †

Ejemplo 274.

Resuelva la inecuación $-5 \leqslant \dfrac{4-3x}{2} < 1$

$$\begin{aligned} -5 \leqslant \frac{4-3x}{2} < 1 &\Rightarrow -5 \cdot 2 \leqslant 4 - 3x < 1 \cdot 2 \\ &\Rightarrow -10 \leqslant 4 - 3x < 2 \\ &\Rightarrow -10 - 4 \leqslant -3x < 2 - 4 \\ &\Rightarrow -14 \leqslant -3x < -2 \\ &\Rightarrow \frac{-14}{-3} \geqslant x > \frac{-2}{-3} \\ &\Rightarrow \frac{14}{3} \geqslant x > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore S = \left]\dfrac{2}{3} \geqslant x > \dfrac{14}{3}\right]$ †

Ejemplo 275.

Resuelva la inecuación $x^2 + 2x + 1 < x(x+2)$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 < x(x+2) &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2x \\ &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x < 0 \\ &\Rightarrow 1 < 0 \end{aligned}$$

Que evidentemente es falso, lo cual quiere decir que, sin importar cuál valor tome la variable x, el resultado siempre será falso, es decir, que no hay solución para la desigualdad.

$\therefore S = \emptyset$ †

Ejemplo 276.

Resuelva la inecuación $2x^2 - x < x(2x-1) + 2$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x < x(2x-1) + 2 &\Rightarrow 2x^2 - x < 2x^2 - x + 2 \\ &\Rightarrow 2x^2 - x - 2x^2 + x - 2 < 0 \\ &\Rightarrow -2 < 0 \end{aligned}$$

Que es verdadero, lo cual quiere decir que, sin importar cuál valor tome la variable x, el resultado siempre será verdadero.

$\therefore S = \mathbb{R}$ †

6.6. Inecuaciones cuadráticas, de grado mayor que dos o que involucran fracciones racionales

Definición 73. Inecuación polinomial

Una inecuación polinomial es una inecuación que se puede escribir de la forma $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \geqslant 0$ o $P(x) \leqslant 0$, con $P(x)$ un polinomio.

En particular, una inecuación cuadrática es una inecuación que se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ o $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, con $a \neq 0$. Una inecuación cúbica se puede escribir de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d > 0$, $ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$, $ax^3 + bx^2 + cx + d \geqslant 0$ o $ax^3 + bx^2 + cx + d \leqslant 0$, con $a \neq 0$.

Definición 74. Inecuación racional

Una inecuación racional es una inecuación que se puede escribir de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ o $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Para resolver este tipo de inecuaciones se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se debe transformar la inecuación en otra equivalente pero con el cero a un lado de la desigualdad.
2. Se factoriza completamente la expresión resultante.
3. Se realiza una tabla de signos para encontrar el o los intervalos en que factor es positivo o negativo y así determinar los intervalos donde la desigualdad se cumple, si algún valor es restricción entonces se acostumbra colocar una línea doble para dicho valor.

Para el último paso, se necesita conocer el signo de una expresión lineal y el de una expresión cuadrática irreducible.

- Una expresión lineal de la forma $mx + b$ depende del signo de la m, así:

- Si $m > 0$ entonces es negativa para $x < \dfrac{-b}{a}$ y positiva para $x > \dfrac{-b}{m}$.

	$-\infty$	$\frac{-b}{m}$	∞
$mx+b$	$-$	$\circ$	$+$

- Si $m < 0$ entonces es positiva para $x < \dfrac{-b}{a}$ y negativa para $x > \dfrac{-b}{m}$.

	$-\infty$	$\frac{-b}{m}$	∞
$mx+b$	$+$	$\circ$	$-$

- Una expresión cuadrática irreducible de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $\Delta < 0$ (pues es irreducible) nunca cambia de signo y depende del signo de la a, así:
  - Si $a > 0$ entonces es positiva siempre.
  - Si $a < 0$ entonces es negativa siempre.

Ejemplo 277.

Resuelva la desigualdad $2x^2 - x < 3$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x < 3 &\Rightarrow 2x^2 - x - 3 < 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(2x-3) < 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	∞
$x+1$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
Exp	$+$		$-$		$+$

$\therefore S = \left]-1, \dfrac{3}{2}\right[$ †

Ejemplo 278.

Resuelva la desigualdad $x^3 + x^2 - x - 1 \geqslant 0$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x - 1 \geqslant 0 &\Rightarrow x^2(x+1) - (x+1) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x^2-1) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x+1)(x-1) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow (x+1)^2(x-1) \geqslant 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-1	1	∞
$(x+1)^2$	$+$	$+$		$+$
$x-1$	$-$	$-$		$+$
Exp	$-$	$-$		$+$

$\therefore S = [1,+\infty[\cup \{-1\}$ †

Ejemplo 279.

Resuelva la desigualdad $\dfrac{3}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{x+5}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2-x} \leqslant \frac{1}{x+5} &\Rightarrow \frac{3}{2-x} - \frac{1}{x+5} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{3}{2-x} - \frac{1}{x+5} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{3(x+5)-(2-x)}{(x+5)(2-x)} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{3x+15-2+x}{(x+5)(2-x)} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \frac{4x+13}{(x+5)(2-x)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

	$-\infty$	-5	$\frac{-13}{4}$	2	∞
$4x+13$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$	
Exp	$+$	$-$	$+$	$-$	

$\therefore S = \left]-5, \dfrac{-13}{4}\right] \cup]2,+\infty[$ †

Ejemplo 280.

Resuelva la desigualdad $25x^2 - 9 < 0$

$$25x^2 - 9 < 0 \Rightarrow (5x-3)(5x+3) < 0$$

	$-\infty$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{3}{5}$	∞
$5x-3$	$-$	$-$	○ $+$	
$5x+3$	$-$	○ $+$	$+$	
Exp	$+$	$-$	$+$	

$\therefore S = \left]\frac{-3}{5}, \frac{3}{5}\right[$ †

Ejemplo 281.

Resuelva la desigualdad $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leqslant 0 &\Rightarrow x^2(2x-3) - (2x-3) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow (2x-3)(x^2-1) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow (2x-3)(x+1)(x-1) \leqslant 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-1	1	$\frac{3}{2}$	∞
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	○ $+$	
$x+1$	$-$	○ $+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	○ $+$	$+$	
Exp	$-$	$+$	$-$	$+$	

$\therefore S =]-\infty, -1] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$ †

Ejemplo 282.

Resuelva la desigualdad $x^4 + 15x^2 - 16 \leqslant 0$

$$\begin{aligned} x^4 + 15x^2 - 16 \leqslant 0 &\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) < 0 \\ &\Rightarrow (x^2+16)(x+1)(x-1) < 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-1	1	∞
x^2+16	$+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	○ $+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	○ $+$	
Exp	$+$	$-$	$+$	

$\therefore S = [-1, 1]$ †

Ejemplo 283.

Resuelva la desigualdad $\dfrac{2}{2x+3} \leqslant \dfrac{2}{x-5}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2x+3} \leqslant \frac{2}{x-5} &\Rightarrow \frac{2}{2x+3} - \frac{2}{x-5} \leqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{2(x-5)-2(2x+3)}{(2x+3)(x-5)} \leqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{2x-10-4x-6}{(2x+3)(x-5)} \leqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{-2x-16}{(2x+3)(x-5)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

	$-\infty$	-8	$\frac{-3}{2}$	5	∞
$-2x-16$	$+$	$-$	$-$	$-$	
$2x+3$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$	
Exp	$+$	$-$	$+$	$-$	

$\therefore S = \left[-8, \dfrac{-3}{2}\right[\cup]5, +\infty[$ †

Ejemplo 284.

Resuelva la desigualdad $\dfrac{x}{2x-1} \geqslant \dfrac{3}{x+2}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2x-1} \geqslant \frac{3}{x+2} &\Rightarrow \frac{x}{2x-1} - \frac{3}{x+2} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{x(x+2)-3(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{(2x-1)(x+2)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

	$-\infty$ -2	$\frac{1}{2}$	1	3	∞
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$\circ$ $+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\circ$ $+$
$2x-1$	$-$	$-$	$\circ$ $+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$\circ$ $+$	$+$	$+$	$+$
Exp	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore S =]-\infty,-2[\cup\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[3,+\infty[$ †

Ejemplo 285.

Resuelva la desigualdad $abx + x^3 < ax^2 + bx^2$ si se sabe que $a < 0 < b$.

$$\begin{aligned}
abx + x^3 < ax^2 + bx^2 &\Rightarrow abx + x^3 - ax^2 - bx^2 < 0\\
&\Rightarrow x(x^2 - ax - bx + ab) < 0\\
&\Rightarrow x(x-a)(x-b) < 0
\end{aligned}$$

	$-\infty$ a	0	b	∞
x	$-$	$-$	$\circ$ $+$	$+$
$x-a$	$-$	$\circ$ $+$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$-$	$\circ$ $+$
Exp	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore S =]-\infty,a[\cup]0,b[$ †

Ejemplo 286.

Resuelva la desigualdad $\dfrac{2x^2 - ax - 2bx + ab}{x^2 + ax - 2bx - 2ab} \geqslant 0$ si se sabe que $0 < a < b$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - ax - 2bx + ab}{x^2 + ax - 2bx - 2ab} \geqslant 0 &\Rightarrow \frac{x(2x-a) - b(2x-a)}{x(x+a) - 2b(x+a)} \geqslant 0\\
&\Rightarrow \frac{(2x-a)(x-b)}{(x+a)(x-2b)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

$$-\infty \qquad -a \qquad \frac{a}{2} \qquad b \qquad 2b \qquad \infty$$

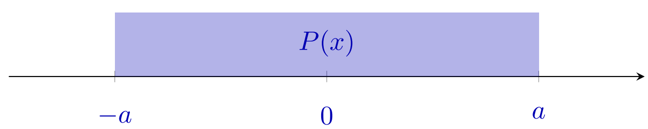
$2x-a$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+a$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2b$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
Exp	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore S =]-\infty, -a[\cup \left[\dfrac{a}{2}, b\right] \cup]2b, \infty[$ †

6.7. Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver una inecuación de la forma $|P(x)| < a$, con $a \in \mathbb{R}^+$ se puede utilizar la siguiente propiedad, que se demostró en el Capítulo 2.

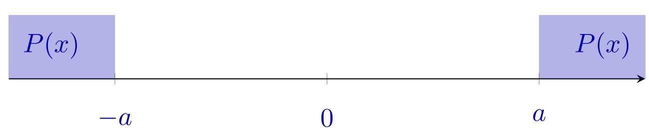
$$|P(x)| < a \Rightarrow -a < P(x) < a$$



Nota: En el caso en que $a \in \mathbb{R}^-$ entonces no hay solución.

Para resolver una inecuación de la forma $|P(x)| > a$, con $a \in \mathbb{R}^+$ se puede utilizar la siguiente propiedad que también se demostró en el Capítulo 2.

$$|P(x)| > a \Rightarrow P(x) < -a \vee P(x) > a$$



Nota: En el caso en que $a < 0$ entonces el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 287.

Resuelva la inecuación $|2x-3| < 5$.

$$\begin{aligned} |2x-3| < 5 &\Rightarrow -5 < 2x-3 < 5 \\ &\Rightarrow -2 < 2x < 8 \\ &\Rightarrow -1 < x < 4 \end{aligned}$$

$\therefore S =]-1, 4[.$ †

Ejemplo 288.

Resuelva la inecuación $|2-x| \leqslant 4$.

$$\begin{aligned} |2-x| \leqslant 4 &\Rightarrow -4 \leqslant 2-x \leqslant 4 \\ &\Rightarrow -6 \leqslant -x \leqslant 2 \\ &\Rightarrow 6 \geqslant x \geqslant -4 \end{aligned}$$

$\therefore S = [-4, 6]$. †

Ejemplo 289.

Resuelva la inecuación $|4-3x| \geqslant 7$.

Se tienen las opciones

$$\begin{aligned} 4-3x \geqslant 7 &\Rightarrow -3x \geqslant 3 \\ &\Rightarrow x \leqslant -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4-3x \leqslant -7 &\Rightarrow -3x \leqslant -11 \\ &\Rightarrow x \geqslant \frac{11}{3} \end{aligned}$$

$\therefore S =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{11}{3}, +\infty\right[$. †

Ejemplo 290.

Resuelva la inecuación $|2x-1| > 3$.

Se tienen las opciones

$$\begin{aligned} 2x-1 > 3 &\Rightarrow 2x > 4 \\ &\Rightarrow x > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-1 < -3 &\Rightarrow 2x < -2 \\ &\Rightarrow x < -1 \end{aligned}$$

$\therefore S =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. †

Ejemplo 291.

Resuelva la inecuación $-5-2|3+x| \geqslant 4$.

$$\begin{aligned} -5-2|3+x| \geqslant 4 &\Rightarrow -2|3+x| \geqslant 9 \\ &\Rightarrow |3+x| \leqslant \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

$\therefore S = \varnothing$. †

Ejemplo 292.

Resuelva la inecuación $3|2-x| > -9$.

$$3|2-x| > -9 \Rightarrow |2-x| > -3$$

$\therefore S = \mathbb{R}$. †

De forma general, una inecuación con varios valores absolutos o que tenga variables afuera de ellos se debe hacer de una manera similar a la vista en las ecuaciones.

Ejemplo 293.

Resuelva la inecuación $|1-x| + |x+3| > 5$.

Note que $|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 1-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1 \\ -(1-x) & \text{si} \quad 1-x < 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$

Además $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3 \\ -(x+3) & \text{si} \quad x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$

$-\infty$ $\quad \frac{-7}{2} \quad$ -3 $\quad\quad$ 1 $\quad \frac{3}{2} \quad$ ∞

$1-x-(x+3) > 5$	$1-x+x+3 > 5$	$-(1-x)+x+3 > 5$
$-2x-2 > 5$	$4 < 5$	$-1+x+x+3 > 5$
$-2x > 7$		$2x > 3$
$x < \frac{-7}{2}$	No se cumple	$x > \frac{3}{2}$

$\therefore S = \left]-\infty, \dfrac{-7}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. †

Ejemplo 294.

Resuelva la inecuación $|2x| - |x-3| < 0$.

Note que $|2x| = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0 \\ -(2x) & \text{si} \quad 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$

Además $|x+3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$

$-\infty$ $\quad -3 \quad$ 0 $\quad 1 \quad$ 3 $\quad\quad$ ∞

$-(2x) - -(x-3) < 0$	$2x - -(x-3) < 0$	$2x-(x-3) < 0$
$-2x+x-3 < 0$	$2x+x-3 < 0$	$2x-x+3 < 0$
$-x < 3$	$3x < 3$	$x < -3$
$x > -3$	$x < 1$	

$\therefore S =]-3, 1[$. †

Ejemplo 295.

Resuelva la inecuación $|2-x|<x$.

Note que $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad 2-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad 2-x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

$-\infty$ — 1 — 2	2 — ∞
$2-x<x$	$-(2-x)<x$
$-2x<-2$	$-2+x<x$
$x>1$	$-2<0$
	Se cumple siempre

$\therefore S =]1,+\infty[$. †

6.8. Problemas que utilizan inecuaciones

Ejemplo 296.

El libro Guinness de Récords Mundiales reporta que los perros pastor alemán pueden saltar verticalmente más de $10ft$ al trepar por paredes. Si la distancia s (en ft) que saltan del suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s=-16t^2+24t+1$. ¿Durante cuántos segundos el animal se mantiene a más de $9ft$ del suelo?

Se necesita que $s>9$, así

$$\begin{aligned} s>9 &\Rightarrow -16t^2+24t+1>9 \\ &\Rightarrow -16t^2+24t-8>0 \\ &\Rightarrow -8(t-1)(2t-1)>0 \end{aligned}$$

	$-\infty$ — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — 1	1 — ∞
-8	$-$	$-$	$-$
$t-1$	$-$	$-$	$+$
$2t-1$	$-$	$+$	$+$
Exp	$-$	$+$	$-$

Como el conjunto solución es $S = \left]\frac{1}{2},1\right[$ entonces el perro se mantiene a más de $9ft$ durante medio segundo.

Ejemplo 297.

La distancia de frenado d (en ft) de un auto que se desplaza a v millas por hora está dada por $d = v + \dfrac{v^2}{20}$. Encuentre las velocidades que den distancia de frenado de menos de $75ft$.

Se necesita que $d < 75$, así

$$\begin{aligned} d < 75 &\Rightarrow v + \frac{v^2}{20} < 75 \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{20} + v - 75 < 0 \\ &\Rightarrow v^2 + 20v - 1500 < 0 \\ &\Rightarrow (v-30)(v+50) < 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	-50	30 \quad ∞
$v-30$	$-$	$-$ $\circ$	$+$
$v+50$	$-$ $\circ$	$+$	$+$
Exp	$+$	$-$	$+$

Como la solución es $]-50, 30[$ entonces la velocidad del auto debe ser de menos de 30 millas por hora.

Bibliografía

[1] Britton, J., Kriegh, B., Rutland, L. (1968). Matemáticas Universitarias. Tomo 1. México. CECSA.

[2] Britton, J. (1986). Álgebra y Trigonometría Contemporánea. México Edit. Harla.

[3] Kalnin. (1978). Álgebra y Funciones Elementales. Moscú. Editorial MIR.

[4] Leithold, L. (1989). Matemáticas Previas al Cálculo. México. Editorial Harla.

[5] Leithold, L. (1985). Álgebra Superior. México. Editorial CECSA.

[6] Swokowski, E. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

[7] Swokowski, E. (1969). Álgebra Universitaria. México. Editorial CECSA.

Apéndice A

Enfoque más formal del conjunto de los Números Reales

En este capítulo se retomará lo visto en el capítulo 2 sobre el conjunto de los Números Reales y sus subconjuntos, sobre todo el conjunto de los números naturales, sólo que en este caso se realizará un enfoque más formal y constructivo.

Existen al menos tres enfoques para estudiar el conjunto de los números naturales:

1. Asumir que existe un conjunto de elementos que cumplen los axiomas que se enunciaron en el Capítulo 2, algo similar a lo que se hizo en dicho capítulo, sólo que con las demostraciones formales de varios de los resultados dados (y que se demostrarán en este capítulo).

2. Tratar de determinar una serie de axiomas que defina el comportamiento básico del conjunto de los números naturales, esto lo realizó Giusseppe Peano (1858 - 1932) en el siglo XIX y es el enfoque principal de este capítulo.

3. Relacionar los números naturales con conjuntos, un enfoque muy interesante, el cual se abarca una introducción muy breve en el Anexo.

En el capítulo 2 se siguió el primero, acá se comentará, sin profundizar mucho los otros dos.

A.1. El conjunto de los números naturales (Axiomas de Peano)

Considere un conjunto que se denotará $\mathbb{N}$ y se le llamará el conjunto de los números naturales, como el conjunto que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 17. Axiomas de Peano

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N}$, a $S(n)$ se le conoce como el sucesor de n.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N}, S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$
5. $(P(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(S(k)))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

En palabras más simples:

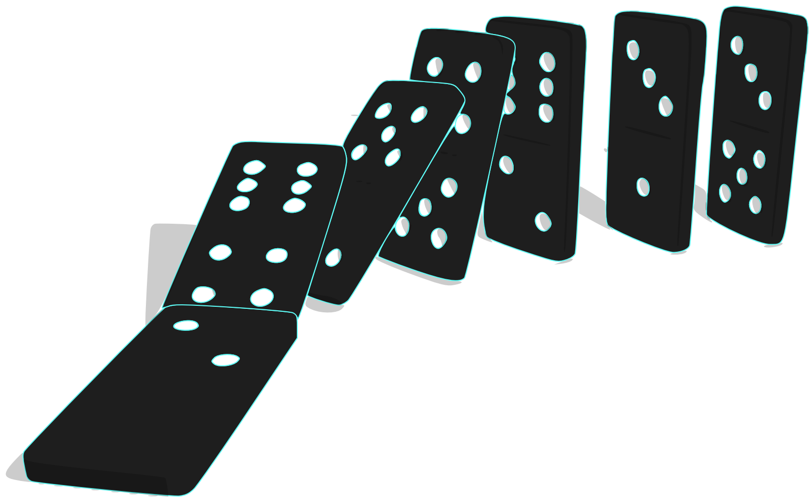
1. El 1 es un número natural.
2. Todo número natural n tiene un sucesor $S(n)$ que también está en el conjunto de los números naturales. (Este axioma es usado para definir posteriormente la suma).
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural. Es decir, no existen dos números naturales que posean el mismo sucesor.
5. Si una función se cumple para el 1 y si se verifica que si se cumple para n entonces también se cumplirá para el sucesor de n, para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede concluir que la fórmula será válida para todos los números naturales.

El primer axioma y el tercero, indicarían que los números naturales poseen un primer elemento, que se denotará 1.

El quinto axioma de Peano se conoce como el principio de inducción matemática, para comprenderlo mejor se puede hacer la comparación con el juego de colocar fichas de dominó, una delante de la otra, para empujar la primera y que se caigan todas, dicho juego se puede resumir en las siguientes reglas:

1. La primer ficha se caerá (la fórmula funciona para el 1).
2. Si la ficha anterior se cae, entonces la siguiente se caerá (si la fórmula funciona para k entonces se demuestra que funciona para $k + 1$).

La conclusión de estas reglas es que todas las fichas se caerán (la fórmula se cumple para todos los números naturales).



Ejemplo 298.

Demuestre que la fórmula $P(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$, siempre da como resultado un número par.

Para esto se verificará que se cumple el quinto axioma de Peano.

I Paso: Se demuestra que si $n = 1$ entonces se obtiene un número par.

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Que es un número par.

II Paso: Se asume que es cierto para $n = k$ y se demuestra que se cumple para el siguiente impar, es decir, para $k + 1$.

De esta manera, se toma como hipótesis que $P(k) = 2k$ es un número par y se debe demostrar que $P(k + 1) = 2(k + 1)$ también es un número par.

$$\begin{aligned} k + 2 &= 2p - 1 + 2 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 2p + 2 - 1 && \text{Conmutatividad se la suma} \\ &= 2(p + 1) - 1 && \text{Distributividad} \\ &= 2q - 1 && q = p + 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por lo que, todos los números impares se pueden escribir de la forma $2p - 1, p \in \mathbb{N}$. †

Axioma 18. Axiomas de la adición

Para la adición de números naturales, se definen los siguiente dos axiomas:

1. $n + 1 = S(n)$
2. $n + S(m) = S(n + m)$

Axioma 19. Axiomas de la multiplicación

Para la multiplicación de números naturales, también se definen los siguiente dos axiomas:

1. $n \cdot 1 = n$
2. $n \cdot S(m) = (n + m) + n$

De esta forma, se le pueden asignar símbolos a los distintos sucesores, así, en nuestra numeración se acostumbra utilizar:

$$1$$

$$S(1) = 2$$

$$S(2) = 3$$

$$S(3) = 4$$

Etc.

Y así se obtienen las primeras fórmulas de la adición:

$$1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

Etc.

Con los axiomas de Peano, los de la adición y los de la multiplicación, en vez de asumir las propiedades de la adición y de la multiplicación, como se hizo en el capítulo 2, dichas propiedades se pueden demostrar.

Teorema 125.

A partir de los Axiomas de la adición (Axioma 18), demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + n = n + 1$.

Demostración:

Se demostrará por inducción sobre n.

I Paso: Se demuestra que es cierto para $n = 1$, esto es, que $1 + 1 = 1 + 1$.

Esta demostración es directa por el axioma de identidad (Axioma 1).

II Paso: Se asume que es cierto para $n = k$ y se demuestra para $n = k + 1$, como hipótesis se asume que $1 + k = k + 1$ y se debe demostrar que $1 + (k + 1) = (k + 1) + 1$.

$$\begin{aligned}
1 + (k + 1) &= 1 + S(k) && \text{Axioma 18.1} \\
&= S(1 + k) && \text{Axioma 18.2} \\
&= S(k + 1) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k + 1) + 1 && \text{Axioma 18.1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + n = n + 1$. †

Teorema 126.

Demuestre que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, S(m+n) = S(m) + n$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, se demostrará por inducción sobre n, tomando a m como un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$.

I Paso: Se demuestra que es cierto para $n = 1$, esto es, que $S(m+1) = S(m) + 1$.

$$\begin{aligned} S(m+1) &= (m+1)+1 && \text{Axioma 18.1} \\ &= S(m)+1 && \text{Axioma 18.1} \end{aligned}$$

II Paso: Se asume que es cierto para $n = k$ y se demuestra para $n = k + 1$, como hipótesis se asume que $S(m+k) = S(m) + k$ y se debe demostrar que $S(m + (k+1)) = S(m) + (k+1)$.

$$\begin{aligned} S(m+(k+1)) &= S(m+S(k)) && \text{Axioma 18.1} \\ &= S(S(m+k)) && \text{Axioma 18.2} \\ &= S(S(m)+k) && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= S(m)+S(k) && \text{Axioma 18.2} \\ &= S(m)+(k+1) && \text{Axioma 18.1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, S(m+n) = S(m) + n$. †

Teorema 127.

A partir de los Axiomas de la adición (Axioma 18), demuestre que dicha operación es conmutativa, es decir, que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m + n = n + m$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, se demostrará por inducción sobre n, tomando a m como un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$.

I Paso: Se demuestra que es cierto para $n = 1$, esto es, que $m + 1 = 1 + m$.

Demostrado en el Teorema 125.

II Paso: Se asume que es cierto para $n = k$ y se demuestra para $n = k + 1$, es decir, se asume que $m + k = k + m$ y se debe demostrar que $m + (k+1) = (k+1) + m$.

$$\begin{aligned} m+(k+1) &= m+S(k) && \text{Axioma 18.1} \\ &= S(m+k) && \text{Axioma 18.2} \\ &= S(k+m) && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= S(k)+m && \text{Teorema 126} \\ &= (k+1)+m && \text{Axioma 18.1} \end{aligned}$$

Por lo que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m + n = n + m$. †

Teorema 128.

A partir de los Axiomas de la adición (Axioma 18), demuestre que dicha operación es asociativa, es decir, que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (m + n) + p = m + (n + p)$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, se demostrará por inducción sobre p, tomando a m y n como elementos cualquiera de $\mathbb{N}$.

I Paso: Se demuestra que la propiedad es cierta para $p = 1$, es decir, que $(m+n)+1 = m+(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(m + n) + 1 &= S(m + n) && \text{Axioma 18.1} \\
&= m + S(n) && \text{Axioma 18.2} \\
&= m + (n + 1) && \text{Axioma 18.1}
\end{aligned}$$

II Paso: Se asume la fórmula es verdadera para $p = k \in \mathbb{N}$, esta es la hipótesis de inducción, y se demuestra que es válida también para el sucesor de k, es decir, para $p = k + 1$.

Así, la hipótesis es que $(m+n)+k = m+(n+k)$ y se debe demostrar que $(m+n)+(k+1) = m + (n + (k + 1))$.

$$\begin{aligned}
(m + n) + (k + 1) &= m + n + S(k) && \text{Axioma 18.1} \\
&= S((m + n) + k) && \text{Axioma 18.2} \\
&= S(m + (n + k)) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= m + S(n + k) && \text{Axioma 18.2} \\
&= m + (n + S(k)) && \text{Axioma 18.2} \\
&= m + (n + (k + 1)) && \text{Axioma 18.1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (m + n) + p = m + (n + p)$. †

Ejercicio 32.

Demuestre, utilizando los axiomas correspondientes, que la multiplicación es conmutativa y asociativa.

Ejemplo 299.

Demuestre que la fórmula $P(n) = n(n + 1), n \in \mathbb{N}$ siempre devuelve un número par, es decir, que es divisible por 2.

Se demostrará que la fórmula $P(n)$, verifica el quinto axioma de Peano.

I Paso: Verificar que se cumple para $n = 1$.

$P(1) = 1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2$, que claramente es divisible por 2.

II Paso: Se asume que es cierta la hipótesis, es decir, que la fórmula es verdadera para $k \in \mathbb{N}$, y se demuestra que es válida también para el sucesor de k, es decir, para $k+1$.

La hipótesis es que $P(k)$ es divisible por 2, esto es, que $P(k) = 2t, t \in \mathbb{N}$, por lo que la hipótesis indicaría que $k(k+1) = 2t$.

Se debe demostrar ahora que la fórmula se cumpliría para $k+1$, esto es, que $P(k+1)$ es divisible por 2, o sea, que $P(k+1) = 2r$, $r \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= (k+1)(k+1+1) & \\
&= (k+1)(k+2) & \\
&= (k+1)\cdot k + (k+1)\cdot 2 & \text{Distributividad} \\
&= k(k+1) + 2\cdot(k+1) & \text{Conmutatividad} \\
&= 2t + 2\cdot(k+1) & \text{Por hipótesis } k(k+1) = 2t \\
&= 2(t+k+1) & \text{Distributividad (factor común)} \\
&= 2r & r = t+k+1, r \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n) = n(n+1), n \in \mathbb{N}$ siempre devuelve un número par. †

Ejercicio 33.

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n(n+1)(n+2)$ es divisible por 6.

Sugerencia: El procedimiento es muy similar al realizado en el Ejemplo 299, además se utiliza dicho teorema en uno de los pasos.

Teorema 129.

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq n$, esto es, que el sucesor de un número natural no puede ser él mismo.

Demostración:

Se verificará que la afirmación cumple con el quinto axioma de Peano.

I Paso: se demuestra que se cumple para $n = 1$.

Por el tercer axioma de Peano $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq 1$, por lo que cumple para $n = 1$.

II Paso: Se asume que se cumple para $k \in \mathbb{N}$, es decir, que $S(k) \neq k$, esta será la hipótesis.

Se demostrará que se cumple para $k+1$, es decir, que $S(k+1) \neq k+1$. Note que $k+1$ es el sucesor de k, o sea, $k+1 = S(k)$, por tanto, se debe demostrar que $S(S(k)) \neq S(k)$, se realizará por contradicción, se asumirá entonces que $S(S(k)) = S(k)$.

$$S(S(k)) = S(k) \Rightarrow S(k) = k \qquad \text{Cuarto axioma de Peano}$$

Que contradice la hipótesis, por lo tanto $S(S(k)) \neq S(k)$.

Se concluye que $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq n$. †

A.2. El conjunto de los números naturales (Enfoque conjuntista)

Este enfoque posee un sentido especial, pues al contar, lo que la persona hace es relacionar un conjunto de objetos con un número, es decir, el número 3, por ejemplo, representa a un conjunto con tres elementos, ya sean esos elementos confites, piedras, naranjas, etc., todos ellos están relacionados al número 3.

Así, en la construcción de los números naturales por medio de un enfoque conjuntista, se le asocia a cada número natural un conjunto que posea la cantidad de elementos que indique el número, existen varias maneras en que se pueden construir dichos conjuntos, la que se utilizará es:

$$\begin{aligned}
&0 : \varnothing \\
&1 : \{\varnothing\} \\
&2 : \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&3 : \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definición 75. Sucesor

Si A es un conjunto entonces el sucesor de A se define como $s(A) = A \cup \{A\}$.

Definición 76.

Se dice que un conjunto P es inductivo si cumple que:

1. $\varnothing \in P$.
2. Si $A \in P$ entonces $s(A) \in P$.

Se puede notar la relación directa que tiene esta definición con los dos primeros axiomas de Peano.

FALTA

Apéndice B

Inducción matemática

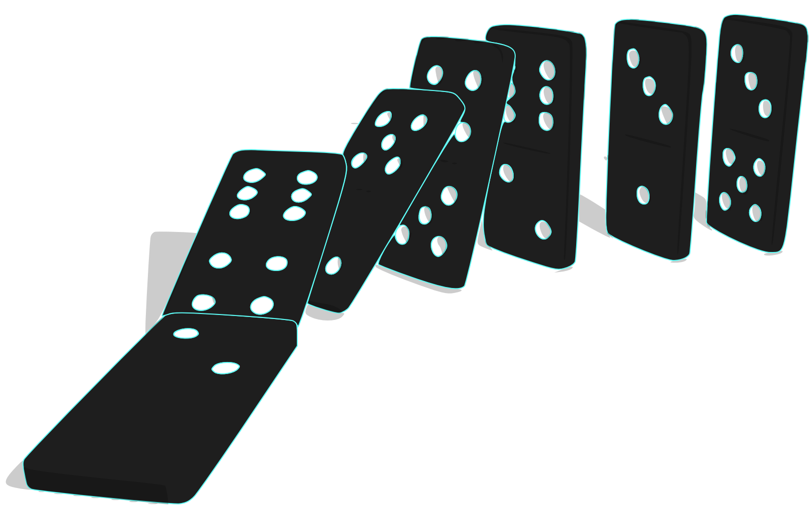
Como se indicó en el anexo A, el método de inducción responde al quinto axioma de Peano para los números naturales, este es:

> Si una proposición se cumple para el 1 y si se verifica que si se cumple para n entonces también se cumplirá para el sucesor de n, para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede concluir que la fórmula será válida para todos los números naturales.

Para comprender esta idea mejor, se puede hacer la comparación con el juego de colocar fichas de dominó, una delante de la otra, para empujar la primera y que se caigan todas, dicho juego se puede resumir en las siguientes reglas:

1. La primer ficha se caerá (la proposición es verdadera para el 1).
2. Si la ficha anterior se cae, entonces la siguiente se caerá (si la proposición es verdadera para k entonces se demuestra que funciona para $k + 1$).

La conclusión de estas reglas es que todas las fichas se caerán (la proposición es verdadera para todos los números naturales).



Apéndice C

Inducción fuerte

Existe un método de demostración similar a la inducción matemática, se conoce como la inducción fuerte, en este, además de suponer que se cumple para n, también se supone que se cumple para todos los antecesores de n.

> Si una proposición se cumple para el 1 y si se verifica que si se cumple para n y todos sus antecesores, entonces también se cumplirá para el sucesor de n, para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede concluir que la fórmula será válida para todos los números naturales.

Para comprender esta idea mejor, y haciendo la misma comparación que se hizo en el anexo B con el juego de colocar fichas de dominó, una delante de la otra, para empujar la primera y que se caigan todas, ahora el juego se puede resumir en las siguientes reglas:

1. La primer ficha se caerá (la proposición es verdadera para el 1).
2. Si todas las fichas anteriores se han caído entonces la siguiente se caerá (si la proposición es verdadera para k y todos los anteriores, entonces se demuestra que funciona para $k + 1$).

La conclusión de estas reglas es que todas las fichas se caerán (la proposición es verdadera para todos los números naturales).

Apéndice D

Demostraciones de las potencias mediante inducción

Teorema 130. Multiplicación de potencias de igual base

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}_0)\left[a^m \cdot a^n = a^{m+n}\right]$

Demostración (por inducción sobre n, para un m arbitrario):

- Se demuestra que se cumple para $n = 0$, es decir, que $a^m \cdot a^0 = a^m$.

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^0 &= a^m \cdot 1 \\ &= a^m \end{aligned}$$

- Se asume que es válido para $n = k$ (y todos los anteriores, ver inducción fuerte en el anexo C), es decir, que $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$, y se demuestra para $n = k + 1$, hay que demostrar que $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$.

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot a^k \cdot a^1 && \text{Inducción fuerte, se cumple para 1.} \\ &= a^{m+k} \cdot a^1 && \text{Hipótesis de inducción.} \\ &= a^{m+k+1} && \text{Inducción fuerte, se cumple para 1.} \end{aligned}$$

†

Teorema 131. División de potencias de igual base

$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall m, n \in \mathbb{N}_0)\left[\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}\right]$

Demostración (ejercicio).

Teorema 132. Potencia de una potencia

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N}_0)\left[(a^m)^n = a^{m \cdot n}\right]$

Demostración (por inducción sobre n, para un m arbitrario):

- Se demuestra que se cumple para $n = 0$, es decir, que $(a^m)^0 = a^{m\cdot 0}$.

$$\begin{aligned}(a^m)^0 &= 1\\ &= a^0\\ &= a^{m\cdot 0}\end{aligned}$$

- Se asume que es válido para $n = k$, es decir, que $(a^m)^k = a^{m\cdot k}$, y se demuestra para $n = k+1$, hay que demostrar que $(a^m)^{k+1} = a^{m\cdot(k+1)}$.

$$\begin{aligned}(a^m)^{k+1} &= (a^m)^k \cdot a^m && \text{Teorema 130.}\\ &= a^{m\cdot k}\cdot a^m && \text{Hipótesis de inducción.}\\ &= a^{m\cdot k+m} && \text{Teorema 130.}\\ &= a^{m\cdot(k+1)} && \text{Axioma 13.}\end{aligned}$$

†

Teorema 133. Potencia de una multiplicación

$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n\right]$

Demostración (por inducción sobre n, para un m arbitrario):

- Se demuestra que se cumple para $n = 0$, es decir, que $(a\cdot b)^0 = a^0\cdot b^0$.

$$\begin{aligned}(a\cdot b)^0 &= 1\\ &= 1\cdot 1\\ &= a^0\cdot b^0\end{aligned}$$

- Se asume que es válido para $n = k$, es decir, que $(a\cdot b)^k = a^k\cdot b^k$, y se demuestra para $n = k+1$, hay que demostrar que $(a\cdot b)^{k+1} = a^{k+1}\cdot b^{k+1}$.

$$\begin{aligned}(a\cdot b)^{k+1} &= (a\cdot b)^k\cdot(a\cdot b) && \text{Teorema 130.}\\ &= (a^k\cdot b^k)\cdot(a\cdot b) && \text{Hipótesis de inducción.}\\ &= (a^k\cdot a)\cdot(b^k\cdot b) && \text{Axiomas 10 y 9.}\\ &= a^{k+1}\cdot b^{k+1} && \text{Teorema 130.}\end{aligned}$$

†

Teorema 134. Potencia con exponente negativo

$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\right]$

Demostración (ejercicio).

Teorema 135. Potencia de una fracción

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\right]$$

Demostración (ejercicio).

Para la potencia de una fracción, se eleva el numerador y el denominador al exponente.

Teorema 136. Potencia con exponente negativo de una fracción

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}\right]$$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^n && \text{Definición 24.} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^n && \text{Teorema 32.} \\ &= \frac{b^n}{a^n} && \text{Teorema 135.} \end{aligned}$$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}.$ †

Apéndice E

Demostraciones adicionales de teoría de números

Teorema 137.
$(\forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0)(\exists q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r < n)[m = n \cdot q + r]$, con q y r únicos.

Para demostrar este teorema se necesita demostrar que q y r realmente existen y además que son únicos.

- Demostración de la existencia.

  Considere el conjunto
  $$A = \{m - kn \in \mathbb{Z} / m - kn \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}\}$$
  Se demostrará primero que $A \neq \varnothing$, considere $k = -|m| \in \mathbb{Z}$, con $|m| \geqslant 0$ (Teorema 61).

  Como $n \in \mathbb{Z}, n > 0$, entonces
  $$\begin{aligned} n \geqslant 1 &\Rightarrow |m| \cdot n \geqslant |m| && |m| \geqslant 0, \text{Teorema } 44. \\ &\Rightarrow m + |m| \cdot n \geqslant m + |m| && \text{Teorema } 42. \end{aligned}$$
  Si $m \geqslant 0 \Rightarrow m + |m| \cdot n \geqslant m + m \geqslant 0$.

  Si $m < 0 \Rightarrow m + |m| \cdot n \geqslant m - m = 0$.

  En ambos casos $m + |m| \cdot n \geqslant 0$.

  Como $A \subseteq \mathbb{Z}$ y $A \neq \varnothing$, entonces A es bien ordenado y posee un elemento mínimo, suponga que dicho elemento es $m - q \cdot n = r$.

  Sólo faltaría demostrar que $r < n$, pues ya es claro que $r \geqslant 0$ al pertenecer al conjunto A. Suponga, por contradicción, que $r \geqslant n$, así
  $$\begin{aligned} r = m - q \cdot n \geqslant n &\Rightarrow m - q \cdot n - n \geqslant 0 && \text{Teorema } 43. \\ &\Rightarrow m - (q+1) \cdot n \geqslant 0 && \text{Axioma } 13. \end{aligned}$$
  Es decir, $m - (q+1) \cdot n \in A$ y además
  $$1 > 0 \Rightarrow q + 1 > q \qquad \text{Teorema } 43.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (q+1)\cdot n > q\cdot n && n>0, \text{Teorema } 44.\\
&\Rightarrow -(q+1)\cdot n < -q\cdot n && \text{Teorema } 45.\\
&\Rightarrow m-(q+1)\cdot n < m-q\cdot n && \text{Teorema } 42.
\end{aligned}$$

Lo que contradice que $m - q\cdot n$ era el mínimo del conjunto A.

Por lo tanto $0 \leqslant r < n$ y sí existe q y r.

- Demostración de la unicidad (por contradicción).

  Suponga que m puede escribirse de dos maneras distintas, es decir, que

$$(\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}), q_1 \neq q_2 \wedge r_1 \neq r_2$$

  tales que

$$m = n\cdot q_1 + r_1$$

$$m = n\cdot q_2 + r_2$$

  con $0 \leqslant r_1 < n$ y $0 \leqslant r_2 < n$.

$$\begin{aligned}
m = m &\Rightarrow n\cdot q_1 + r_1 = n\cdot q_2 + r_2 && \text{Axiomas } 1 \text{ y } 2.\\
&\Rightarrow n\cdot q_1 - n\cdot q_2 = r_2 - r_1 && \text{Teorema } 22.\\
&\Rightarrow n\cdot (q_1 - q_2) = r_2 - r_1 && \text{Axioma } 13.\\
&\Rightarrow |n\cdot (q_1 - q_2)| = |r_2 - r_1| && \text{Pues son el mismo número.}\\
&\Rightarrow |n|\cdot |q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| && \text{Teorema } 65.\\
&\Rightarrow n\cdot |q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| && \text{Por hipótesis } n>0.\\
&\Rightarrow n\cdot |q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < n && \text{Teorema } 70.\\
&\Rightarrow n\cdot |q_1 - q_2| < n && \\
&\Rightarrow |q_1 - q_2| < 1 && \text{Teorema } 44.\\
&\Rightarrow 0 \leqslant |q_1 - q_2| < 1 && \text{Teorema } 61.
\end{aligned}$$

  Como $q_1 \in \mathbb{Z}$ y $q_2 \in \mathbb{Z}$, entonces $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, y el único número entero que cumple la desigualdad anterior es 0, así

$$\begin{aligned}
|q_1 - q_2| = 0 &\Rightarrow q_1 - q_2 = 0 && \text{Teorema } 62.\\
&\Rightarrow q_1 = q_2 && \text{Teorema } 22.
\end{aligned}$$

  Y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
n\cdot |q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| &\Rightarrow n\cdot 0 = |r_2 - r_1| && \text{Axioma } 2.\\
&\Rightarrow 0 = |r_2 - r_1| && \text{Teorema } 6.\\
&\Rightarrow r_2 - r_1 = 0 && \text{Teorema } 62.\\
&\Rightarrow r_2 = r_1 && \text{Teorema } 22.
\end{aligned}$$

  Que contradice el supuesto de que $q_1 \neq q_2 \wedge r_1 \neq r_2$, por lo tanto, q y r son únicos.

†

Teorema 138.

$(\forall n \in \mathbb{N})[9|(10^n - 1)]$

Demostración (por inducción):

- Se demuestra que es válido para $n = 0$, es decir, se debe demostrar que $9|0$.

  Esto se cumple por el Teorema 95.

- Se asume que se cumple para $n = k$, es decir, que $9|(10^k - 1)$, esto es $(\exists q \in \mathbb{Z})[10^k - 1 = 9 \cdot q]$.

- Se demuestra que es cierto para $n = k + 1$, es decir, que $9|(10^{k+1} - 1)$, esto es,

$$(\exists p \in \mathbb{Z})[10^{k+1} - 1 = 9p]$$

$$\begin{aligned}
10^{k+1} - 1 &= 10^k \cdot 10 - 1 && \text{Teorema 71.}\\
&= (10^k - 1 + 1) \cdot 10 - 1 && \text{Axioma 6.}\\
&= (10^k - 1) \cdot 10 + 10 - 1 && \text{Axioma 13.}\\
&= 9 \cdot q \cdot 10 + 9 && \text{Hipótesis de inducción.}\\
&= 9(q \cdot 10 + 1) && \text{Axioma 13.}\\
&= 9 \cdot p
\end{aligned}$$

  Con $p = q \cdot 10 + 1$, $p \in \mathbb{Z}$ por la cerradura de la multiplicación y la adición en $\mathbb{Z}$.

  Por lo que $9|10^{k+1} - 1$.

†

Con el siguiente teorema se demuestre que si un número natural divide a otro, entonces dicho número debe ser menor.

Teorema 139.

$(\forall a, b \in \mathbb{N})[a|b \Rightarrow a \leqslant b]$

Demostración.

Hipótesis: $a|b$, es decir, $(\exists p \in \mathbb{Z})[b = a \cdot p]$

Hay que demostrar que $a \leqslant b$.

Como $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $a \geqslant 1$ y $b \geqslant 1$ y, por el teorema 52, $p > 0$, como $p \in \mathbb{Z}$, entonces $p \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
p \geqslant 1 &\Rightarrow a \cdot p \geqslant a\\
&\Rightarrow b \geqslant a
\end{aligned}$$

†

Lema 2. Identidad de Bézout

$(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\exists x, y \in \mathbb{Z})[a \cdot x + b \cdot y = MCD(a, b)]$

Demostración (directa).

Para los números enteros a y b, considere el conjunto $A = \{ax + by/x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Se cumple que $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ y $b \in A$ (tomando $x = 1$ y $y = 0$ para a y $x = 0$ y $y = 1$ para b); además $A \subseteq \mathbb{Z}$ por la cerradura de las operaciones. También se cumple que A posee al menos un elemento positivo, pues $a \in A \vee -a \in A$ (tomando $x = 1$ y $y = 0$ para a $x = -1$ y $y = 0$ para $-a$; considerando sólo los números positivos de A, por el principio del buen orden, A posee un primer elemento entero positivo que es el mínimo positivo del conjunto, sea d dicho elemento, suponga que $d = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$.

Por el algoritmo de la división, $(\exists q, r \in \mathbb{Z})[a = q \cdot d + r]$, con $0 \leqslant r < d$.

De la igualdad anterior

$$\begin{aligned} r &= a - q \cdot d \\ &= a - q(a \cdot x_0 + b \cdot y_0) \\ &= a(1 - q \cdot x_0) + b \cdot (-q \cdot y_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto $r \in A$, pero $0 \leqslant r < d$ y d es el menor positivo que se encuentra en A, por lo que $r = 0$; esto es, $a = q \cdot d$ y se concluye que d divide a a.

De manera similar se puede probar que d también divide a b.

Sea d' cualquier otro divisor común de a y b, d' divide a todos los elementos de A y, en particular, divide a d, por tanto $d' \leqslant d$ y d es el menor positivo del conjunto, por tanto $d' = d = MCD(a, b)$. †

Lema 3. Lema de Euclides

$(\forall a, b, n \in \mathbb{Z})[n|(a \cdot b) \wedge MCD(n, a) = 1 \Rightarrow n|b]$

Demostración (directa).

Por hipótesis $n|(a \cdot b)$, es decir $(\exists p \in \mathbb{Z})[a \cdot b = n \cdot p]$

Se debe demostrar que $n|b$, es decir $(\exists q \in \mathbb{Z})[b = n \cdot q]$

Por la identidad de Bézout, $(\exists x, y \in \mathbb{Z})[ax + ny = 1]$, así

$$\begin{aligned} ax + ny = 1 &\Rightarrow b(ax + ny) = b \cdot 1 && \\ &\Rightarrow bax + bny = b && b \cdot a = a \cdot b = n \cdot p \\ &\Rightarrow npx + bny = b && \\ &\Rightarrow n(px + by) = b && q = px + by \\ &\Rightarrow n \cdot q = b && \end{aligned}$$

Donde $q = px + by$ es entero por la cerradura de las operaciones en $\mathbb{Z}$, por lo tanto $n|b$. †

Una forma alternativa de enunciar el Lema de Euclides es $(\forall a, b, n \in \mathbb{Z})[n|(a \cdot b) \Rightarrow n|a \vee n|b]$

Teorema 140. Teorema fundamental de la aritmética

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geqslant 2)[n = (-1)^{e_0} \cdot p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}]$$

Donde

- $e_0 \in \{0, 1\}$.
- $p_1, p_2, ..., p_k$ números primos naturales distintos.
- $(\forall i \in \{1, 2, ..., k\})[e_i \in \mathbb{N}]$.

Demostración

El factor $(-1)^{e_0}$ sólo define el signo del número entero, si se obvia este signo, el teorema es equivalente a demostrar que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)[n = p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}]$.

Se debe demostrar tanto que todo número natural se puede representar como producto de primos y además la unicidad.

- Se demostrará primero por contradicción que todo número natural mayor o igual a dos, se puede escribir como producto de primos.

  Suponga que existe algún número natural n que no es posible expresarlo como producto de primos.

  Sea A el conjunto formado por todos los números naturales que no pueden ser representados como producto de primos, $A \neq \varnothing$ pues $n \in A$ y $A \subseteq \mathbb{N}$, por lo tanto, debe tener un primer elemento, sea n_0 dicho elemento.

  n_0 no sería primo, pues sino $n_0 = n_0^1$, que cumple el teorema.

  Por tanto n_0 debe ser compuesto, así $n_0 = a \cdot b$, donde $a < n_0$ y $b < n_0$, como son menores que el elemento mínimo que está en A entonces $a \notin A$ y $b \notin A$, esto es, se pueden escribir como producto de primos y, por lo tanto n_0 también se escribiría como producto de primos pues $n_0 = a \cdot b = p_{a_1}^{e_{a1}} \cdot ... \cdot p_{a_k}^{e_{ak}} \cdot p_{b_1}^{e_{b1}} \cdot ... \cdot p_{b_k}^{e_{bk}}$, que es una clara contradicción.

- Ahora se demostrará, por contradicción, que sólo existe una única manera de escribir el número natural como multiplicación de números primos.

  Suponga que existe al menos un número natural n que se puede escribir de dos formas distintas, es decir

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$$
$$n = q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdot ... \cdot q_t^{a_t}$$

  Donde $(\forall i \in \{1, 2, ..., t\})[p_1 \neq q_i]$ (el primo p_1 es distinto a todos los primos q_i) o, al menos, si p_1 es igual a q_1, difiere en el exponente $(\forall i \in \{2, ..., t\})[p_1 \neq q_i \wedge p_1 = q_1 \wedge e_1 > a_1]$.

  Por el lema de Euclides p_1 es primo y coprimo con $q_2, q_3, ..., q_k$, por lo tanto $p_1^{e_1} | q_1^{a_1}$, la única manera que esto suceda es que $p_1 = q_1$ (pues son primos) y que $e_1 \leqslant a_1$, para que el divisor sea menor que el dividendo (teorema 139), lo que contradice que $p_1 \neq q_1$ o que, si son iguales, entonces $e_1 > a_1$.

†