Memorias del XIII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Modalidad:

En la edición 2023, el CIEMAC se desarrolló bajo el siguiente esquema:

- **Actividades preliminares:** Durante el mes de noviembre de 2023, se impartieron cursos cortos y talleres en formato virtual.

- **Actividad previa:** El viernes 8 de diciembre de 2023, se llevaron a cabo cursos cortos, talleres y paneles de discusión de manera presencial en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago.

- **Plenario del evento:** Se celebró el sábado 9 de diciembre de 2023 de forma presencial en las instalaciones del Consejo Nacional de Rectores (CONARE).

Organizado por:

- Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

- Con la colaboración de la Universidad de la Rioja y la Universitat de les Illes Balears.

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (XIII: 2023 noviembre 01-30 y diciembre 08-09: Costa Rica) - Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2025.

79 páginas

ISBN 978-9930-617-77-9

Dra. Geisel Alpízar Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

M.Sc. Christian Páez Páez, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Editores

Comité Organizador

Mario Marín Sánchez (coordinador), Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Geisel Alpízar Brenes, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Carlos Carbonell Urtubia, Universidad de La Rioja, España.

Christian Páez Páez, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Juan Miguel Ribera Puchades, Universitat de les Illes Balears, España.

Angie Solís Palma, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Arturo Vega Vásquez, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Comité Científico

Geisel Alpízar Brenes (co-coordinadora), Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Christian Páez Páez (co-coordinador), Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Marianela Alpízar Vargas, Universidad Nacional, Costa Rica.

Alexander Borbón Alpízar, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Carlos Carbonell Urtubia, Universidad de La Rioja, España.

Patricia Maroto Vargas, Universidad de Costa Rica.

Luis Gerardo Meza Cascante, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Rafael Ramírez-Uclés, Universidad de Granada, España

Lilliana Sancho Chavarría, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Camilo J. Sua, Universitat de València, España.

Zuleyka Suarez Valdés-Ayala, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

María Fernanda Vargas González, Universidad de Costa Rica.

Presentación

Nos complace presentar las memorias del XIII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC), un evento que reunió a destacados expertos y profesionales del ámbito educativo para reflexionar sobre temas cruciales para el desarrollo de la educación matemática en Costa Rica.

Durante este congreso, nuestro principal objetivo fue crear un espacio de encuentro docente de alto valor académico, en el cual se integrará el compromiso tanto de la universidad como de los diversos actores del entorno educativo. Nos propusimos crear un espacio de reflexión y formación donde se explorarán distintas metodologías educativas y se conocieran nuevas tendencias en educación, especialmente en la filosofía STEM.

Las memorias del XIII CIEMAC ofrecen una síntesis de los puntos clave abordados durante las actividades preliminares y la actividad previa. Estas actividades se enriquecieron con talleres que profundizaron en los ejes temáticos establecidos, proporcionando prácticas actuales en educación matemática.

Constituyen un recurso invaluable para la comunidad educativa, ofreciendo una mirada integradora de las discusiones y conclusiones surgidas durante el congreso. Estas reflexiones no solo enriquecen nuestro entendimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, sino que también contribuyen significativamente al avance de la educación matemática a nivel nacional e internacional.

Agradecemos sinceramente a todos los participantes por su valiosa contribución a este evento y les invitamos a aprovechar al máximo los conocimientos compartidos en estas memorias para enriquecer sus prácticas educativas y promover el desarrollo continuo de la enseñanza de las matemáticas.

Geisel Alpízar Brenes

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Agradecimientos

La organización del XIII CIEMAC expresa su sincero agradecimiento a todos los miembros del comité científico por su valiosa contribución en la revisión de los manuscritos y la evaluación de las propuestas de talleres presentadas en el evento.

Extendemos nuestro agradecimiento a los profesores y estudiantes, así como a los académicos de diversas universidades, cuyas propuestas y participación enriquecieron enormemente esta actividad académica.

Nos gustaría expresar nuestro agradecimiento a los conferencistas, quienes, generosamente y sin otro interés que el de contribuir al desarrollo de la educación, ofrecieron su tiempo y conocimientos en este CIEMAC. Su valiosa participación fue fundamental para el éxito del evento.

Extendemos nuestro más profundo agradecimiento a la Asociación Nacional de Educadores (ANDE) por su valioso apoyo, a la FUNDATEC por su constante respaldo en aspectos administrativos, y al Colegio de Licenciados y Profesores (COLYPRO).

Finalmente, deseamos reconocer el apoyo recibido de las autoridades del Instituto Tecnológico de Costa Rica, la Universidad de la Rioja y la Universitat de les Illes Balears.

Tabla de contenidos

Talleres

Inteligencia Artificial como herramienta para docentes

Sebastián Ortiz González
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
sebasortizg09@estudiantec.cr

Resumen: El taller teórico-práctico propuesto es llevado a cabo en un entorno virtual, busca enriquecer las capacidades de los docentes en el uso de la Inteligencia Artificial (IA) y tecnologías educativas en la enseñanza de las matemáticas. Con un enfoque en la implementación práctica, cada sesión de dos horas combinará presentaciones de diapositivas, demostraciones en pantalla compartida y guías de trabajo, proporcionando a los participantes herramientas concretas para su desarrollo profesional. El taller se centra en la aplicación de la IA en la planificación de lecciones, labores administrativas y la optimización del uso de LaTeX. Además, se busca explorar el uso de herramientas como ChatGPT y otros softwares de Inteligencia Artificial para personalizar la experiencia del aprendizaje de los asistentes. La propuesta también aborda las consideraciones éticas en el uso de la IA en el ámbito educativo, presentando un panorama completo de su potencial y sus implicaciones. Parte de los beneficios para los asistentes equivale a una introducción exhaustiva a ChatGPT y cómo su uso puede generar material didáctico innovador y eficiente. Además, se destaca el papel de la IA en la revisión de documentos, asegurando la calidad y coherencia del contenido. A través de la aplicación de ChatGPT en LaTeX, los asistentes pueden aprender a generar código para mejorar su eficiencia en la creación de recursos educativos.

En la última parte del taller intenta centralizarse en la implementación de herramientas como Khan Academy para personalizar la educación de los estudiantes y evaluar su progreso. Se amerita la participación activa de los asistentes, promoviendo la consulta y el intercambio de ideas para adaptar estas herramientas a diversas dimensiones educativas. Al finalizar el taller, los asistentes pueden elaborar, mediante los conocimientos abordados a lo largo del taller, una guía de trabajo de clase que aproveche las herramientas ofrecidas por la IA y que les funcione de apoyo a posteridad en el progreso de los estudiantes en diferentes contextos del aprendizaje de las matemáticas

Palabras clave: Inteligencia Artificial, tecnologías educativas, matemáticas, enseñanza, evaluación del progreso, personalización del aprendizaje, ChatGPT, LaTeX, Khan Academy, Perplexity.ai.

Abstract: The proposed theoretical-practical workshop takes place in a virtual environment and aims to enhance the abilities of educators in using Artificial Intelligence (AI) and educational technologies in the teaching of mathematics. With a focus on practical implementation, each two-hour session will combine slide presentations, screen-sharing demonstrations, and work guides, providing participants with concrete tools for their professional development. The workshop focuses on the application of AI in lesson planning, administrative tasks, and optimizing the use of LaTeX. Furthermore, it seeks to explore the use of tools like ChatGPT and other AI software to personalize the learning experience for attendees. The proposal also addresses ethical considerations in the use of AI in the educational context, presenting a comprehensive overview of its potential and implications. Some of the benefits for participants include a thorough introduction to ChatGPT and how its use can generate innovative and efficient teaching materials. Additionally, it highlights the role of AI in document review, ensuring content quality and consistency. By using ChatGPT in LaTeX, participants can learn to generate code to enhance their efficiency in creating educational resources.

In the final part of the workshop, the focus shifts to the implementation of tools like Khan Academy to personalize student education and assess their progress. Active participation of attendees is encouraged, promoting consultation and the exchange of ideas to adapt these tools to various educational dimensions. At the end of the workshop, participants can develop a classroom work guide, using the knowledge covered throughout the workshop, that leverages the AI tools offered and serves as ongoing support for student progress in different learning contexts within mathematics education.

Keywords: Artificial Intelligence, educational technologies, mathematics, teaching, progress assessment, personalized learning, ChatGPT, LaTeX, Khan Academy, Perplexity.ai.

1. Introducción

En este taller virtual de enriquecimiento para docentes se explorarán diversas facetas del uso ético y responsable de la Inteligencia Artificial (IA). Se abordará la importancia de emplear la IA de manera responsable y ética en el ámbito educativo, considerando su impacto y sus implicaciones éticas. Se destacarán las pautas para un uso informado y consciente de la IA en la labor docente, promoviendo así una relación ética con esta tecnología.

Se profundizará en el uso de ChatGPT como una herramienta versátil para la generación de ideas innovadoras y el apoyo en la creación de planeamiento didáctico. Se explorarán las generalidades de ChatGPT, aconsejando a los asistentes dentro del taller para el uso adecuado y responsable del Chat, y se presentará su aplicación para la creación de material didáctico y la generación de propuestas pedagógicas innovadoras. Además, se introducirá a los participantes en la creación de material didáctico mediante ChatGPT, enfocándose en la habilidad de crear recursos específicos para distintas habilidades dentro de los diferentes programas de estudio. El taller también ofrecerá un acercamiento a la herramienta LaTeX, utilizando ChatGPT como una herramienta primaria para generar código de LaTeX. Los participantes aprenderán a crear documentos en LaTeX de manera rudimentaria con el apoyo del chat. Adicionalmente, se explorará el uso de Khan Academy como plataforma educativa. Se analizarán sus características y se mostrará cómo diseñar y asignar recursos dentro de la plataforma, así como el aprovechamiento de las estadísticas brindadas por Khan Academy para la planificación de clases. Finalmente, se enfocará en la creación de guías de trabajo para el aula o el hogar, incorporando todos los contenidos y materiales abordados en el taller. Estas guías serán un producto tangible y aplicable que los docentes podrán implementar en su enseñanza cotidiana. En resumen, este taller brindará a los educadores una panorámica completa y aplicable de las posibilidades de la IA y tecnologías afines en su práctica docente, promoviendo un enfoque ético, innovador y efectivo en la educación superior.

2. Aspectos teóricos

La Inteligencia Artificial (IA) ha adquirido una mayor prominencia en los últimos años debido a su creciente uso, lo que ha proporcionado valiosas herramientas al cuerpo docente, pero también ha suscitado inquietudes sobre sus alcances. Según Varela (2022), la IA puede ser abordada desde cuatro enfoques distintos, que incluyen el conocimiento empírico humano, el razonamiento sistematizado y el actuar autónomo racional. Estas perspectivas se manifiestan claramente en la aplicación personalizada de la IA en la enseñanza de las matemáticas. Este enfoque se remonta a la década de 1980 con los Sistemas de Tutoría Inteligente, diseñados para guiar los procesos de aprendizaje, y posteriormente con la creación de los Sistemas de Instrucción Asistida por Computadora, que combinaban técnicas de IA y psicología cognitiva para dirigir estos procesos.

Dentro del contexto de la implementación de la Inteligencia Artificial, es esencial destacar la relevancia de las redes neuronales, que, como indica Rivera (2020), constituyen modelos matemáticos compuestos por una serie de neuronas que imitan el proceso de aprendizaje humano y son fundamentales en el aprendizaje profundo. Gracias a estas redes neuronales, el aprendizaje automático y el análisis de datos brindan modelos de clasificación y predicción basados en los datos proporcionados por el usuario. Estos datos alimentan un algoritmo que considera tanto la información proporcionada como las respuestas generadas por la red neuronal.

Desde sus inicios, la Inteligencia Artificial ha generado tanto temor como aprovechamiento, dependiendo de su relevancia y aplicación. Esta percepción a menudo se basa en información errónea, la falta de referencias en el tema o en interpretaciones personales del concepto. Según García y Solano (2023), si bien las IA han estado presentes en numerosos productos tecnológicos desde hace décadas, su crecimiento está intrínsecamente ligado a la necesidad humana de optimizar el tiempo y la vida cotidiana. En el ámbito educativo, ha surgido el temor respecto a su uso, ya que algunos educadores perciben estas tecnologías como disruptivas para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, Area y Adell (2021) argumentan que, a pesar de avances tecnológicos disruptivos, la tecnología que se integra en la educación generalmente es adaptada y controlada para mitigar su potencial negativo.

A lo largo de los años, se ha buscado integrar la tecnología en la educación, especialmente en la enseñanza de las matemáticas. La calidad educativa está estrechamente ligada a la eficacia del contenido impartido por los docentes y a una formación continua, aspectos fundamentales para el desarrollo de la sociedad. A medida que la tecnología avanza, su influencia en los procesos de enseñanza-aprendizaje se vuelve cada vez más importante y es prácticamente esencial para una educación actualizada y significativa para los estudiantes. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son adaptables a cualquier proceso de aprendizaje, lo que las convierte en herramientas versátiles y atractivas para los estudiantes (García y Solano, 2021).

En particular, en la enseñanza de las matemáticas, la IA ofrece beneficios significativos que transforman la interacción y comprensión de los estudiantes. Entre sus contribuciones más notables se encuentran la personalización del aprendizaje, la detección temprana de dificultades en habilidades matemáticas, la adaptación del contenido al nivel y ritmo de cada estudiante, y la retroalimentación inmediata basada en el trabajo del estudiante. Según Rivera (2020), esta evolución educativa se basa en la capacidad de la IA para analizar patrones de aprendizaje individuales y grupales, lo que da lugar a experiencias altamente personalizadas. La detección temprana de dificultades permite a los educadores intervenir de manera más eficiente y brindar apoyo personalizado. Además, la retroalimentación instantánea proporcionada por los sistemas de IA permite a los estudiantes corregir errores y mejorar su comprensión en tiempo real. No obstante, es importante abordar implicaciones éticas como la privacidad de los datos de los estudiantes, posibles sesgos en los algoritmos y la pérdida de interacción humana. Por tanto, la supervisión docente es esencial para garantizar un uso adecuado de estas poderosas herramientas.

Para los docentes, la IA representa una herramienta que, si se utiliza de manera responsable, puede optimizar su tiempo y ofrecer sugerencias valiosas en términos de planificación e innovación (Sabzalieva y Valentini, 2023).

3. Metodología de trabajo

El taller se configura como un evento teórico-práctico, que se llevará a cabo de manera virtual, durante cuatro días, tal que cada taller tenga una duración de dos horas por día. El logro de una experiencia exitosa en este taller reside en la progresión constante de los asistentes en sus aspectos prácticos, de manera que cada participante pueda avanzar en su labor a medida que se exponen los contenidos pertinentes. La metodología para estos talleres incluirá presentaciones visuales mediante diapositivas, la interacción directa del expositor con las herramientas, compartiendo su pantalla con los asistentes, y se proporcionará una guía de trabajo específica para cada sesión, las cuales tendrán una duración de dos horas.

Todo el material escrito y recursos se destinarán exclusivamente para los docentes participantes. La elección de la plataforma para compartir estos materiales se hará considerando su relevancia y adecuación. El propósito central de este taller radica en dotar a los educadores con una perspectiva más amplia sobre la aplicación de la Inteligencia Artificial y en cómo aprovechar los recursos proporcionados para la planificación de lecciones, tareas administrativas y la optimización del uso de LaTeX.

Aunque se tomarán como referencia las habilidades propuestas en el Programa de estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, es fundamental comprender que la metodología de trabajo no se limita a un enfoque universal, sino que busca adaptarse a las diversas dimensiones de los docentes y sus contextos particulares.

A lo largo del taller, se destinará un espacio para abordar las implicaciones éticas del empleo de la Inteligencia Artificial. Se presentará una visión panorámica que resalte el potencial de esta herramienta en el ámbito docente. Se introducirá a los participantes en el uso y las generalidades de ChatGPT en el contexto de la enseñanza de las matemáticas. El enfoque estará centrado en la creación de material didáctico novedoso, la generación de ideas innovadoras y la revisión de enfoques pedagógicos para optimizar el tiempo de trabajo. También, se desea proporcionar sugerencias a partir de las consultas e intervenciones por parte de los asistentes respecto al uso y manejo de los diferentes software de Inteligencia Artificial.

La utilización de LaTeX se abordará como un aspecto primordial del taller. Se emplea ChatGPT como herramienta para la generación de código compilable, en función de las características discutidas durante la interacción con el chat. Esta dimensión se abordará desde la primera sesión, permitiendo una progresiva participación y consulta activa por parte de los asistentes.

Por otro lado, se llevará a cabo un ejercicio similar utilizando la plataforma gratuita Khan Academy. Se examinarán sus fortalezas y se explorará cómo esta herramienta se convierte en un recurso analítico para el seguimiento del proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Se hará hincapié en la creación de actividades personalizadas y atractivas para cada estudiante, con el propósito de diseñar una guía de trabajo en clase (o material para el aprendizaje en casa) que incorpore la IA y permita ajustar diferentes parámetros para adaptarse a contextos educativos diversos.

Los requerimientos para las personas asistentes son:

a. Computadora con conexión a internet
b. Dispositivo móvil (opcional)
c. Acceso a plataforma Classroom

   Código de ingreso: 2qwecyo

Plataformas de IA a utilizar:

1. ChatGPT
2. Khan Academy
3. Perplexity.ai
4. Apps para profes
5. Gama.app / Tome / Beautiful.ia

4. Guías de trabajo y/o actividades (opcional)

Sesión	Temas por abordar
Primera sesión	• Implicaciones éticas de la IA. • Uso responsable de la IA para la labor docente. • Revisión de generalidades y uso de ChatGPT: Tips y limitaciones de su uso. • Uso de ChatGPT para la sugerencia de ideas innovadoras para el proceso de enseñanza-aprendizaje, apoyo en la creación de planeamiento didáctico. • Introducción a la creación de material didáctico con ChatGPT.
Segunda sesión	• Revisión de generalidades y uso de Perplexity.ai • Creación de documentos en LaTeX primitiva usando ChatGPT • Revisión del sitio web: Apps para profes.
Tercera sesión	• Creación de material didáctico de habilidades específicas usando Perplexity.ai y su implementación en LaTeX mediante ChatGPT. • Implementación de recursos creados dentro de guías en LaTeX. • Creación de presentaciones mediante IA: Gama.app / Tome / Beautiful.ia
Cuarta sesión	• Revisión de generalidades y uso de Khan Academy para la enseñanza. • Creación y asignación de recursos en Khan Academy. • Uso de las estadísticas brindadas en Khan Academy, mediante ChatGTP, para la planificación de clases. • Creación de guías de trabajo para el hogar que involucren todos los contenidos y materiales realizados en el taller.

5. Referencias bibliográficas

Area, M., y Adell, J. (2021). Tecnologías Digitales y Cambio Educativo. Una Aproximación Crítica. REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia Y Cambio En Educación, 19(4). Recuperado de https://doi.org/10.15366/reice2021.19.4.005

Alfaro, A. L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez, M., y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8(Especial Noviembre), 131-179. Universidad Nacional, Costa Rica. Recuperado de

https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12225/11496

García-González, L. A., y Solano-Suarez, A. (2020). Enseñanza de la Matemática mediada por la tecnología. EduSol, 20(70), Guantánamo, ene.-mar. 2020, Epub 17-Feb-2020. Recuperado de

http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1729-80912020000100084&script=sci_arttext&tlng=en

Rivera, J. E. (2020). Modelo para la gestión de lecciones aprendidas basado en el procesamiento del lenguaje natural y aprendizaje automático. Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín. Recuperado de

https://repository.upb.edu.co/handle/20.500.11912/7585

Sabzalieva, E., y Valentini, A. (Autores). (2023). ChatGPT e inteligencia artificial en la educación superior: Guía de inicio rápido. UNESCO. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000385146_spa

Varela Uribe, A. (2021). Enseñanza individualizada de matemáticas mediante herramientas de inteligencia artificial en entornos escolares tradicionales. Universidad de Cantabria. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/22323

Uso de GeoGebra en la Topología: Una introducción a la construcción de vecindades en el plano con la métrica euclídea para la prueba de abiertos

M.Sc. Reiman Yitsak Acuña Chacón
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
reiacuna@itcr.ac.cr

M.Sc. Emanuelle Jesús Soto Cascante
Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
esoto@itcr.ac.cr

Resumen: Este taller se enfoca en el diseño de discos o vecindades con el propósito de demostrar, en ciertas figuras planas o regiones, su carácter abierto desde una perspectiva topológica. Para lograr este objetivo, se emplea la métrica euclidiana para construir vecindades con un radio relevante, utilizando GeoGebra como herramienta. En este contexto, se brinda a los participantes una forma de integrar la teoría con la práctica, basada en el concepto de "bola", lo que implica la verificación de abiertos para regiones definidas por puntos, desigualdades y condiciones. Esto contribuye a una mayor comprensión de los conceptos de frontera, interior y exterior en cada caso y a la generación de estrategias para resolver un problema. En cada ejercicio, se fomenta una discusión sobre la metodología de cada construcción, y en grupos, se promueve el diálogo acerca de las ventajas y limitaciones del uso del programa.

Palabras clave: GeoGebra, topología, conjuntos abiertos, plano, métrica, euclídea, discos, radios, estrategias, problemas, resolución, discusión

Abstract: This workshop focuses on designing discs or neighborhoods with the purpose of demonstrating, in certain flat shapes or regions, their topological openness. To achieve this goal, the Euclidean metric is employed to construct neighborhoods with a relevant radius, using GeoGebra as a tool. In this context, participants are provided with a way to integrate theory with practice, based on the concept of a "ball," which involves verifying openness for regions defined by points, inequalities, and conditions. This contributes to a deeper understanding of the concepts of boundary, interior, and exterior in each case, as well as the development of strategies for problem-solving. In each exercise, discussion on the methodology of each construction is encouraged, and in groups, dialogue is promoted regarding the advantages and limitations of using the *software*.

Keywords: GeoGebra, topology, open sets, plane, Euclidean metric, disks, radius, Strategies, problems, resolution, discussion.

1. Introducción

Dentro del ámbito de la Educación Matemática, se destaca ampliamente el software GeoGebra como una herramienta computacional de gran utilidad. Desde su lanzamiento, este programa ha experimentado un crecimiento significativo en cuanto a su uso educacional y se ha convertido en un recurso didáctico muy valorado debido a su capacidad para combinar elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística (Blaz et al., 2021).

Como bien indican Galán et al. (2019), la visualización que incorpora GeoGebra brinda a los educadores y estudiantes la posibilidad de experimentar y explorar diferentes conceptos matemáticos. Esto fomenta la comprensión profunda y facilita la conexión entre distintas áreas de las matemáticas, como lo es, por ejemplo, la topología.

Por otro lado, la enseñanza de la topología en niveles iniciales suele ser difícil. Un autor que señala esto es Espinoza (2017) en su tesis de doctorado. En ella describe la dificultad que enfrentan los estudiantes al abordar esta rama de las matemáticas, caracterizada por ser abstracta y requerir un cambio significativo en la forma en que se piensa sobre el espacio y las formas geométricas. La transición hacia el pensamiento topológico puede llevar tiempo y esfuerzo, lo que puede desalentar a algunos estudiantes y dificultar su aprendizaje. En particular, la definición de conjuntos abiertos y cerrados suele generar un conflicto cognitivo en su aprendizaje inicial.

Es indudable que el concepto de conjunto abierto en topología es fundamental para la comprensión de esta área de la matemática, por lo que un posible escenario exitoso para la asimilación de este contenido es el aprendizaje a partir de la manipulación visual que puede ofrecer GeoGebra. Parte de este insumo se destaca en las conclusiones de Costa (2019) donde se indica que GeoGebra puede ser utilizado para enseñar una amplia gama de temas en topología y puede ayudar a los estudiantes a entender de una mejor forma esta área de las matemáticas.

Con todo esto, el presente taller tiene como iniciativa la prueba de conjuntos abiertos. Para ello se utilizará la métrica euclídea y el diseño de discos (bolas o vecindades) pues estos elementos permitirán dar paso a las pruebas asociadas en cada ejercicio que se presentará.

2. Aspectos teóricos

La topología euclidiana en el plano es un campo matemático que se enfoca en las propiedades de conjuntos abiertos y cerrados, utilizando la métrica euclidiana y el teorema de Pitágoras para calcular distancias entre puntos. Según Ferreirós (2023), la noción de vecindad es clara en esta topología cuando la distancia entre puntos permite la construcción de "círculos", facilitando una comprensión inicial del concepto de vecindad.

Para comprender de forma detallada los conceptos que se desarrollarán en este taller es necesario conocer algunas definiciones teóricas, pertenecientes al campo de la topología.

2.1. Interior, Frontera y Exterior

De acuerdo con Munkres (2002), para hablar de topología es necesario conocer las posibles posiciones de un punto P con respecto a un conjunto A. Las siguientes definiciones utilizan la definición de "interior de un disco" para definir el "interior de un conjunto A". Por ello, se considera necesario que también se aporte el concepto de interior de disco para poder aportar una definición autocontenida en el documento presentado.

Definición 1: Un punto P está en el interior de A si se puede hallar un disco con centro P, tal que su interior esté totalmente contenido en A. Se denota al interior como $int(A)$.

Definición 2: El punto P está en la frontera de A si el interior de todo disco con centro en P, interseca tanto a A como al complemento de A. Se denota a la frontera como $Fr(A)$.

Definición 3: El punto P está en el exterior de A si existe algún disco con centro en P cuyo interior no interseca a A.

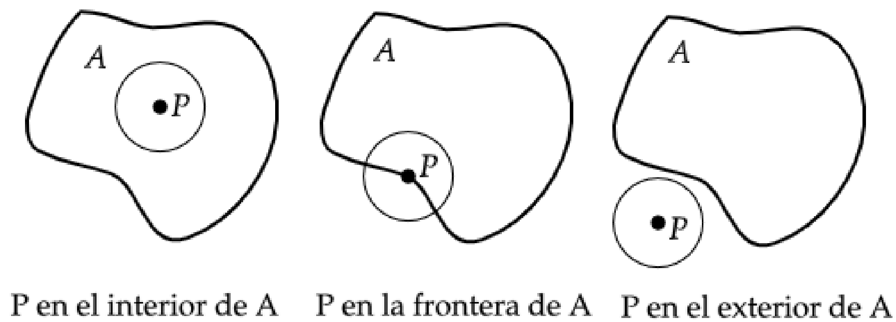


Figura 1. Posiciones posibles de un punto P con respecto a un conjunto A

Fuente: Elaboración propia

2.2. Topología, Abiertos y cerrados

Basado en lo anterior, se debe aclarar lo que es una topología. Según Munkres (2002) se tiene la siguiente definición:

Definición 4: Sea X un conjunto no vacío. Una colección T de subconjuntos de X se dice que es una topología sobre X si

- X y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a T.
- La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjunto en T pertenece a T, y
- La intersección de dos conjuntos cualesquiera de T pertenece a T.

El par (X, T) se llama espacio topológico. Para efectos de este taller, el par $(\mathbb{R}, T_1)$ y $(\mathbb{R}^2, T_2)$ serán los espacios topológicos por implementar, donde T_1 hace referencia a la colección de todos los intervalos abiertos, su interior; y T_2 describe al interior de todos los discos con un radio dado.

2.3. Métrica Euclídea

Las definiciones anteriores están sujetas a la métrica definida para un determinado espacio topológico, que puede ser el euclídeo, por ejemplo, topología en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$. Para efectos de este taller será importante entender que la distancia entre dos puntos o valores que se encuentran "en la recta real" corresponde al valor absoluto de la diferencia entre dichos números, o bien, la distancia entre dos puntos del plano que se determina con la fórmula de distancia entre puntos, consecuencia directa de aplicar el Teorema de Pitágoras.

Definición 5: La métrica euclidiana o usual en $\mathbb{R}$ esta definida por

$$d(x,y) = |x-y|, \text{ para } x,y \in \mathbb{R}$$

extendiendo esta definición en $\mathbb{R}^2$, se define la distancia d entre dos puntos $P_1\ (x_1,y_1)$ y $P_2\ (x_2,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ como:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

De esta forma, los discos en las definiciones 1, 2 y 3 serán intervalos centrados en P (un número real) para el caso de la recta real y una bola (disco o vecindad) centrada en P (un par ordenado) para el caso del plano. En ambas situaciones, se habla del concepto de radio (r) para indicar un espaciamiento constante entre el centro P y aquellos valores o puntos X que cumplan que $d(P,X)=r$.

Definición 6: Los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ son los intervalos $]a,b[$, donde a y b son números reales y $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Los conjuntos cerrados son aquellos cuyo complemento es un conjunto abierto.

Definición 7: Los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$ son los discos centrados en un punto (x,y) con radio r, que se denotan como $B((x,y),r)$ y están formados por todos los puntos (a,b) en el plano que satisfacen la condición:

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} < r$$

Además, los conjuntos cerrados son aquellos cuyos complementos son conjuntos abiertos en el plano euclidiano.

3. Metodología de trabajo

Para el abordaje de este taller es necesario que el participante tenga los siguientes conocimientos previos:

- Nociones de cálculo diferencial en una variable y resolución de problemas de optimización.
- Nociones de análisis real en una variable, concepto de vecindad y límite.

El taller tiene como objetivo general generar conocimiento didáctico en el área de la topología mediante la discusión y la argumentación, tanto para docentes como para estudiantes mediante el uso de GeoGebra.

Por tanto, la naturaleza de este taller es pedagógico. De acuerdo con Acuña et al. (2019), el taller pedagógico tiene tres momentos:

- La explicación de la teoría y las herramientas asociadas
- La discusión y argumentación mediante alguna dinámica y guía
- La exposición de resultados y el registro de evidencia

De esta forma, el primero momento consiste en una explicación de la teoría aquí expuesta, y un repaso de las herramientas que se implementarán en los ejercicios con GeoGebra. Se destacan:

- Vista Gráfica: Zona donde se realizarán las construcciones
- Vista Algebraica: Zona donde se definen los objetos y se puede escribir comandos para ejecutarlos.
- Mueve: Seleccionado este elemento, se pueden manipular todos los elementos que se van construyendo en la Vista Gráfica.
- Punto: Seleccionado este elemento, se puede definir un punto en la Vista Gráfica.
- Punto en Objeto: Definida una región como el interior de un círculo, un polígono o “lugar” entre dos funciones, se puede colocar un punto asociado a la región.
- Recta: Definidos dos puntos, se puede construir una recta entre ambos.

- Segmento: Definidos dos puntos, se pueden construir un segmento entre ambos.
- Polígono: Definidos al menos tres puntos, se pueden construir un triángulo o un polígono con un número mayor de lados.
- Circunferencia: Definido un centro y un punto se construye la misma. O bien, definido un centro y un radio se posibilita su construcción. Estos elementos serán las vecindades en el plano.

Además, las regiones que se pretenden construir son interiores de círculos, polígonos y "lugares" entre dos o más funciones. Los "lugares" corresponden a instrucciones como $0 < y < x^3$ donde GeoGebra, en la Vista Gráfica, construye una zona definida por los puntos que se encuentran por encima del eje x y por debajo de la función x^3, como se muestra en la Figura 2.

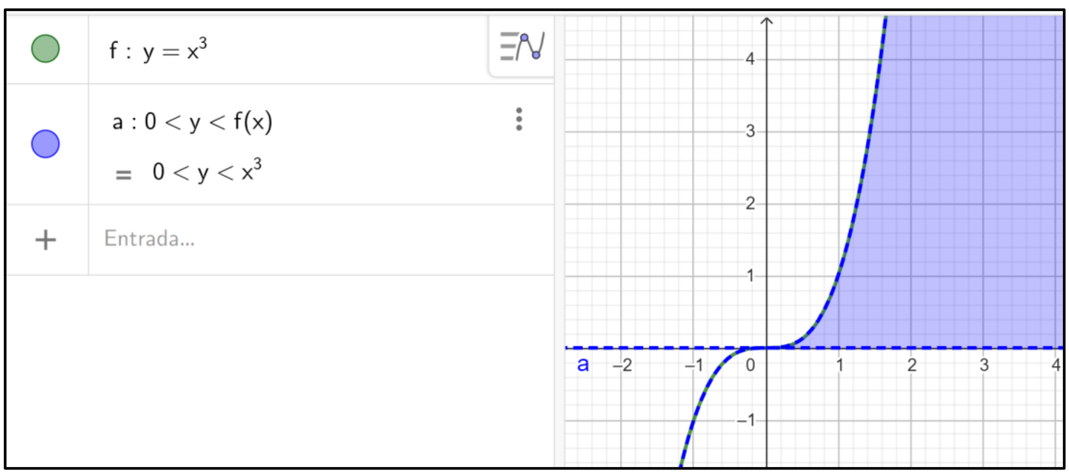
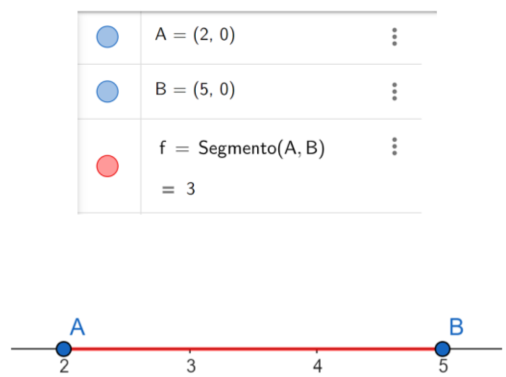


Figura 2. Región que simula la región entre la función x^3 y el eje x.

Fuente: Elaboración propia.

El segundo momento de este taller consiste en el uso de una guía con ejercicios, es decir, se presenta un enunciado y a continuación una tabla con dos columnas. En la columna izquierda se presentan los pasos para desarrollar el ejercicio con GeoGebra y en la columna derecha se coloca la imagen asociada a dicho paso. La dinámica involucra el trabajo en parejas o en grupos más grandes, con la orientación de los facilitadores, durante la cual se discuten tanto las limitaciones como las ventajas del programa, además de explorar conceptos matemáticos relacionados con la topología. La Figura 3 muestra los primeros pasos para visualizar que el intervalo]2,5[es abierto.

<table>
<tr>
<td>Paso #1:

Definir los puntos $A = (2,0)$ y $B = (5,0)$ en la vista algebraica de GeoGebra. Luego defina un segmento entre A y B.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso #2:

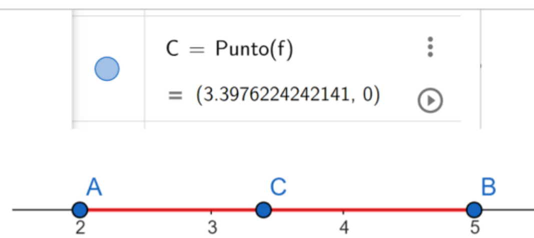
Coloque un punto C en el segmento que une A y B</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Figura 3. Segundo momento del taller

Fuente: Elaboración propia.

En tal caso, habrá tantas imágenes como pasos necesarios para lograr la resolución del ejercicio y los participantes harán registro de los detalles que discutieron en este proceso. La idea en cada ejercicio es movilizar el centro del disco para visualizar el cambio de la bola en el interior de las regiones y se tenga una visualización de lo que es un abierto. La Figura 4 muestra la idea final para probar que el interior de un triángulo es abierto.

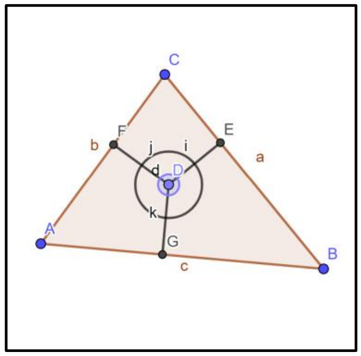


Figura 4. Prueba de que una región es abierta con disco en la métrica euclídea

Fuente: Elaboración propia.

Es importante destacar que los grupos conformados deberán discutir:

- ¿La frontera en GeoGebra irrumpe con el sentido de frontera en la topología presentada por los facilitadores?
- ¿Cómo se haría la prueba para el caso de un cerrado?
- Posibilidades y/o delimitaciones didácticas como conceptuales.

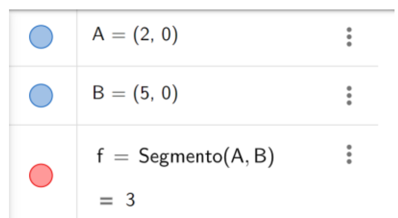
Para el tercer momento de este taller los participantes, en los grupos conformados, presentarán a los facilitadores las observaciones o discusiones alcanzadas en cada ejercicio y mediante un cuestionario, brindado por los autores del taller en su momento (Anexo 1), se registrará evidencia de esto. Como bien apunta Galán et al. (2019), “para comprender una teoría de una manera más sencilla, se puede partir de la visualización de los conceptos matemáticos incorporando herramientas tecnológicas” (p. 6). Con esto, se da término a la actividad en el tiempo dispuesto para dicha sesión.

4. Guías de trabajo y/o actividades

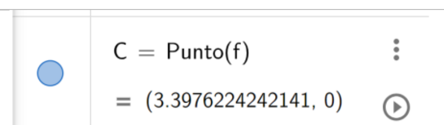
Instrucciones: A continuación, se presentan una serie de ejemplos o ejercicios para trabajar en el taller. En la columna del lado izquierdo se ofrecen los pasos de la construcción, mientras que al lado derecho se presentan las imágenes asociadas a dicha secuencia. Si la imagen no aparece significa que debe aportarla durante el proceso bajo la indicación del facilitador.

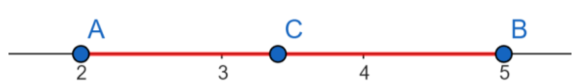
Ejemplo 1: Construir un disco que permita visualizar que el intervalo de]2,5[es un abierto.

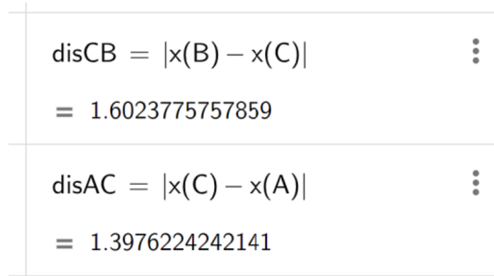
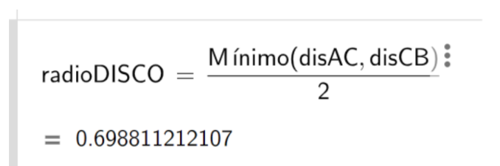
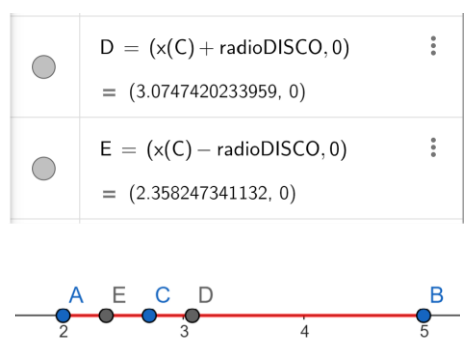
<table>
<tr>
<td>Paso #1:

Definir los puntos $A = (2{,}0)$ y $B = (5{,}0)$ en la vista algebraica de GeoGebra. Luego defina un segmento entre A y B.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso #2:

Coloque un punto C en el segmento que une A y B</td>
<td>

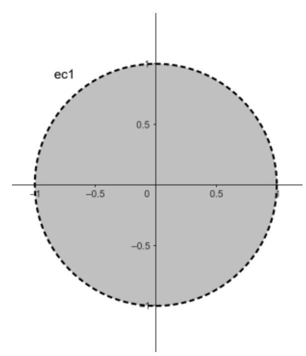

</td>
</tr>
</table>

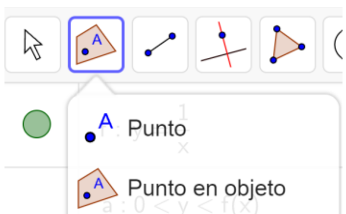
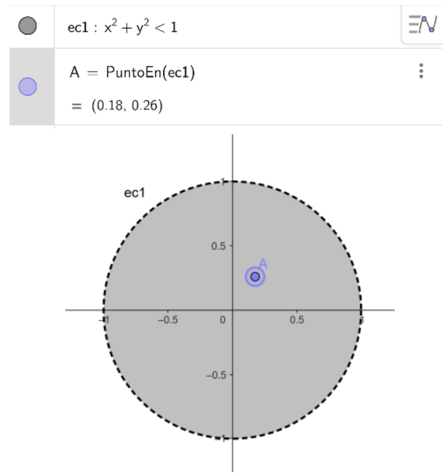
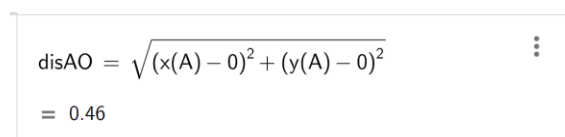
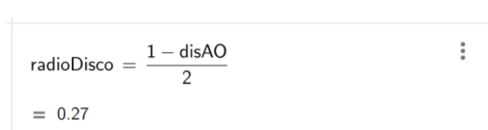
Paso #3: Determinar la distancia entre el punto A y C, así como la distancia entre el punto C y B. Esto es $disCB = \|x(B) - x(C)\|$ $disAC = \|x(C) - x(A)\|$	
Paso #4: Determinar el radio del disco deseado en función de las coordenadas del punto C. En GeoGebra $radioDISCO = \frac{Mínimo(disCB,disAC)}{2}$ Nota: En este y futuros ejercicios se divide entre dos para evitar que los puntos o vecindades construidas coincidan con la frontera	
Paso #5: Construir el disco con el radio anterior. Para ello defina los siguientes puntos $D = (x(C) + radioDISCO, 0)$ $E = (x(C) - radioDISCO, 0)$	

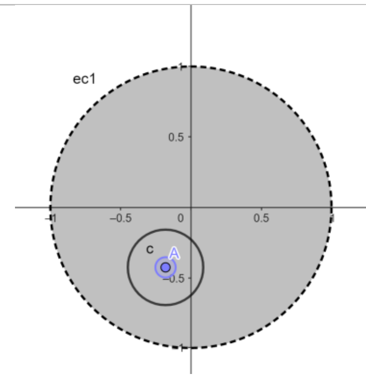
Con la construcción anterior se puede manipular el punto C siempre en el segmento AB, simulando el interior del intervalo dado. Al mover dicho punto se puede observar que el disco con extremos D y E se ajusta con respecto a los puntos A y B. Es decir, para cada punto en el intervalo $]2,5[$ existe una bola abierta centrada en ese punto que está completamente contenida en el intervalo, lo cual es una prueba visual de que este objeto matemático es un abierto.

Discusión: ¿Con GeoGebra se puede hacer coincidir el punto C con el punto A o el punto B? ¿Qué significa esto? ¿Es esto una limitante para la teoría expuesta?

Ejemplo 2: Construir un disco que permita visualizar que el círculo $x^2 + y^2 < 1$ es un abierto.

Paso #1: Dibujar el círculo en la vista gráfica de GeoGebra	$\mathrm{ec1} : x^2 + y^2 < 1$ 

Paso #2: Se coloca un punto A en el interior del círculo. Herramienta para utilizar: Punto en Objeto 	
Paso#3: Determinar la distancia del centro del círculo al punto. En GeoGebra es $disA0 = sqrt((x(A) - 0)^2 + (y(A) - 0)^2)$ En este caso se calcula la distancia del origen $(0,0)$ al punto A representado con el nombre disAO	
Paso#4: Determinar el radio del disco deseado en función de las coordenadas del punto A. En GeoGebra	

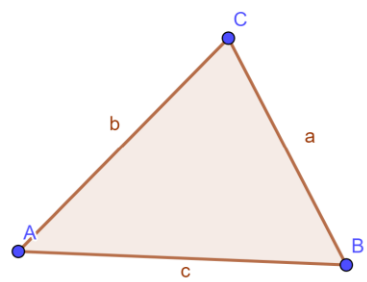
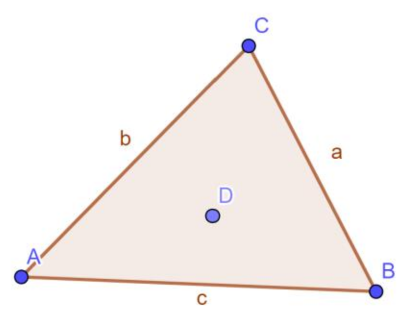
$radioDisco = \frac{1-disAO}{2}$	
Paso#5: Construir el disco con el radio anterior.	

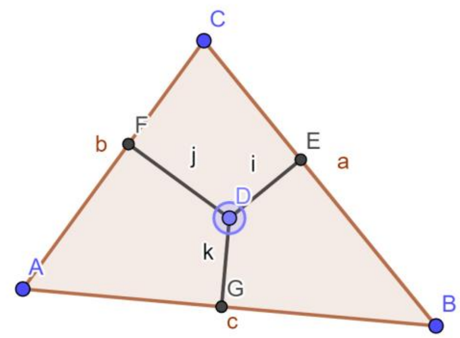
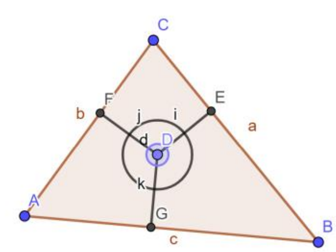
Con la construcción anterior se puede manipular el punto A siempre en el interior del círculo dado. Al mover dicho punto en cualquier posición se puede observar que el disco alrededor nunca sobresale de la frontera, lo cual es una prueba visual de que este objeto matemático es un abierto en el plano.

Discusión: ¿Qué sucedería en el paso #4 si no se divide entre dos? ¿Qué significa esto? ¿Es esto una limitante para la teoría expuesta? ¿Es posible visualizar que el círculo es cerrado con la misma construcción? ¿Es esto una contradicción?

Ejercicio 1: Construir un disco que permita demostrar que el interior del triángulo acutángulo con vértices A, B y C es un abierto.

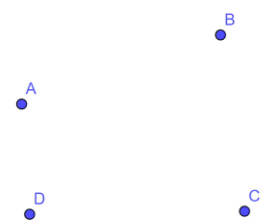
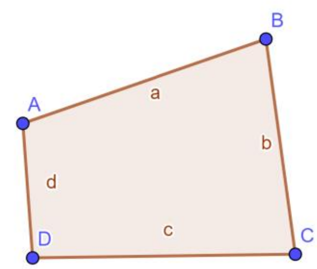
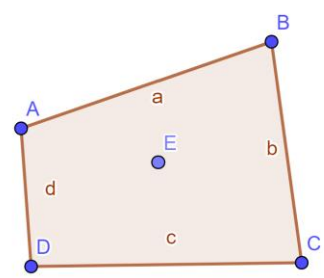
Paso #1 Defina en GeoGebra los puntos A,B y C	

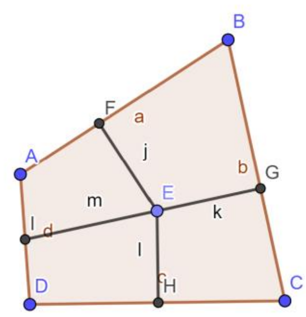
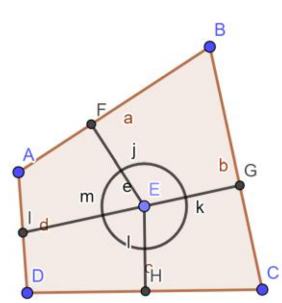
	
Paso #2: Con la herramienta Polígono, construya uno que tenga por vértices los tres puntos anteriores	
Paso#3: Se coloca un punto D en el interior del triángulo	
Paso#4: Construya una perpendicular sobre cada uno de los tres lados del triángulo. Determine los puntos que	

representan los tres pies de cada perpendicular. Oculte las rectas perpendiculares y construya luego tres segmentos: i, j y k como se muestra en la figura adjunta	
Paso#5: Determinar el radio del disco deseado en función de los tres segmentos anteriores. En GeoGebra $radioT = \frac{mínimo(\{i,j,k\})}{2}$	$\mathrm{radioT} = \frac{\mathrm{Mínimo}(\{i, j, k\})}{2}$ $= 0.6$
Paso #6: Construir el disco con el radio anterior.	
Con la construcción anterior se puede manipular el punto D en el interior del triángulo. Al mover dicho punto en cualquier posición se debe observar que el disco asociado nunca sobresale de la frontera, lo cual es una prueba visual de que este objeto matemático representa un conjunto abierto en el plano.	

Discusión: Para algunos casos, si no consigue tener el valor de i, j o k, la función mínima devolverá un "?". ¿Cuáles son estos casos? ¿Qué pasa en la frontera?

Ejercicio 2: Construir un disco que permita demostrar que el interior del cuadrilátero con vértices A, B, C y D es un abierto.

Paso #1: Coloque tres puntos A, B, C y D sobre la vista gráfica en GeoGebra.	
Paso #2: Con la herramienta Polígono, construya uno que tenga por vértices los cuatro puntos anteriores.	
Paso #3: Se coloca un punto E en el interior del cuadrilátero.	

Paso #4: Construya una perpendicular sobre cada uno de los cuatro lados del cuadrilátero. Determine los puntos que representan los cuatro pies de cada perpendicular. Oculte las rectas perpendiculares y construya luego cuatro segmentos: j, k, l y m como se muestra en la figura adjunta.	
Paso #5: Determinar el radio del disco deseado en función de los tres segmentos anteriores en GeoGebra. $radioC = \frac{mínimo(\{\mathrm{j,k,l,m}\})}{2}$	$\mathrm{radioC} = \frac{\mathrm{Mínimo}(\{\mathrm{j,k,l,m}\})}{2}$ $= 0.77$
Paso #6: Construir el disco con el radio anterior.	

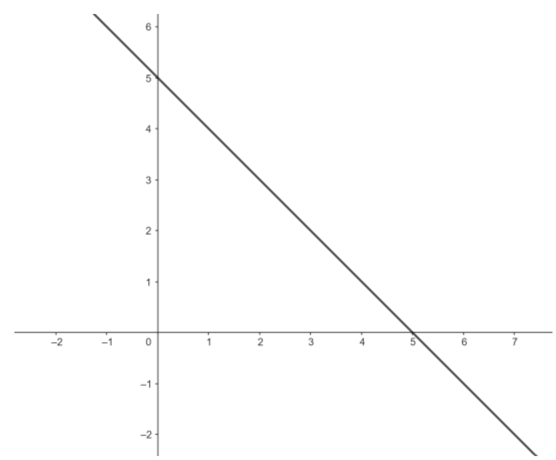
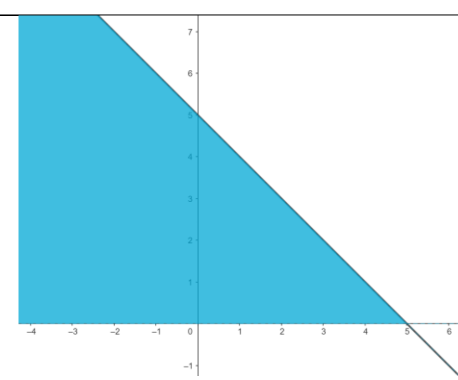
Con la construcción anterior se puede manipular el punto E siempre en el interior del triángulo dado. Al mover dicho punto en cualquier posición se puede observar que el disco alrededor nunca sobresale de la frontera, lo cual es una prueba visual de que este objeto matemático es un abierto en el plano.

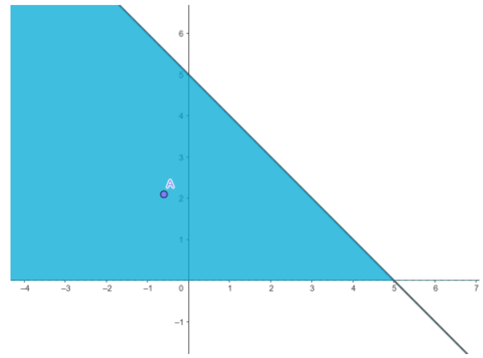
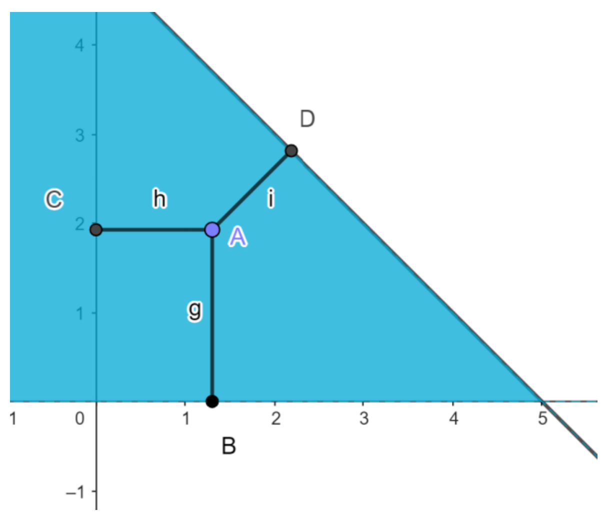
Discusión:

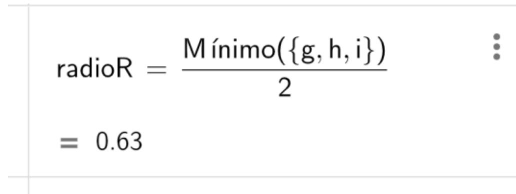
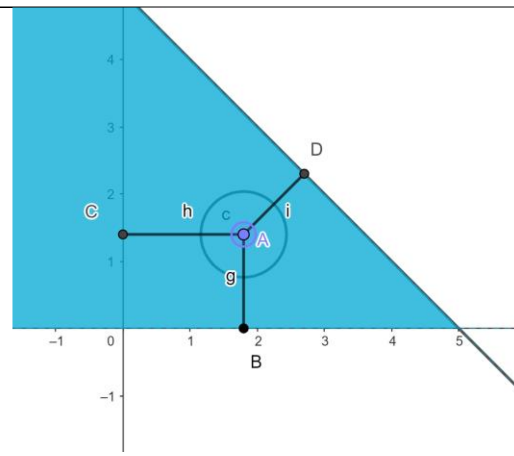
1. ¿Es importante la colocación de los puntos iniciales?

2. Para algunos casos, si no consigue tener el valor de j, k, l o m, la función mínima devolverá un "?". ¿Cuáles son estos casos?

Ejercicio 3: Construir un disco que permita demostrar que la región delimitada entre el eje x y la recta $y = -x + 5$ es un abierto.

Paso #1: Defina en GeoGebra la función $f(x) = -x + 5$ en la vista algebraica.	
Paso #2: Defina en GeoGebra la desigualdad $0 < y < f(x)$ en la vista algebraica.	

Paso #3: Se coloca un punto A en el interior de la región.	
Paso#4: Para el cálculo de la distancia con el eje x construya el punto $B = (x(A),0)$. Luego, puede usar el comando $g = Segmento(A, B)$ Para el cálculo de la distancia con el eje Y construya el punto $C = (0, y(A))$ Luego, puede usar el comando $h = Segmento(A, C)$ Para el cálculo de la distancia con la recta construya el punto D como resultado de la intersección de la perpendicular a la recta $y = -x + 5$ que pasa por A. Ocultando la recta perpendicular, puede escribir la instrucción $i = Segmento(A, D)$	

Paso#5: Determinar el radio del disco deseado en función de los tres segmentos anteriores en GeoGebra. $radioR = \dfrac{mínimo(\{g,h,i\})}{2}$	
Paso #6: Construir el disco con el radio anterior.	

Con la construcción anterior se puede manipular el punto A siempre en el interior de la región dada. Al mover dicho punto en cualquier posición se puede observar que el disco alrededor nunca sobresale de la frontera, lo cual es una prueba visual de que este objeto matemático es un abierto en el plano.

Discusión:

1. ¿Cuál es la distancia entre un punto y una curva? Por ejemplo, si la región fuera entre el eje x y la curva $y = (x-5)^2$ con $x < 5$ no se puede trazar la perpendicular directamente para encontrar el punto D descrito en el paso #4. Debe pensar en un proceso de optimización como alternativa.

5. Observaciones finales

El taller invita a los participantes a reflexionar sobre el uso de GeoGebra en actividades relacionados con la prueba de abiertos en la topología plana y con la métrica euclídea. En tal caso, el programa puede ayudar a los estudiantes a visualizar conceptos matemáticos, pero no es sinónimo de hacer una demostración o plantear un objeto ideal para de la teoría.

En la línea pedagógica, las actividades que se destacan pueden ayudar a los estudiantes a aprender por medio de la exploración y la discusión, a plantearse la idea de vecindad y hacer un tratamiento sobre el significado de las fronteras o los cerrados en algunas regiones con el fin de hacer un tratamiento conceptual sobre su significado.

6. Referencias bibliográficas

Acuña, R., y Ramirez, B. (2019). Construcción y deducción de la fórmula del plano tangente a una superficie apoyado en GeoGebra 3D. XV CIAEM, 1-6. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/125/173

Alzate, P. P. C., Sánchez, F. T., y Muñoz, C. A. A. (2023). Topology of metric spaces: a look through GeoGebra. Journal of Southwest Jiaotong University, 58(3). https://jsju.org/index.php/journal/article/view/1649

Blaz, F. E., Castro, W. E., Cenas F.Y. y Gamboa, L. R. (2021). Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5(18), 382-390. https://revistahorizontes.org/index.php/revistahorizontes/article/view/181/514

Costa, J. S. A. (2019). Uma proposta de introdução à topologia por meio de atividades com o uso do GeoGebra (Tesis de maestría). Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Roraima.

http://repositorio.ufrr.br:8080/jspui/handle/prefix/400

Galán, A. L. y Patiño, M. A. (2019). Visualización de diferentes objetos que están en la topología algebraica con ayuda de software de geometría dinámica. http://hdl.handle.net/20.500.12209/10521

Munkres, J. R. (2002). Topología. (2da ed.). Madrid: Prentice Hall. Pearson Educación S.A. https://webs.um.es/aferr/miwiki/lib/exe/fetch.php?media=james_munkres_-_topologia-prentice_hall_2002_.pdf

Espinoza, H. J. (2017). Una secuencia didáctica sobre conceptos de topología métrica para la formación de docentes de matemática en la UNE "Enrique Guzmán y Valle". Tesis de doctorado. Pontificia Universidad Católica del Perú.

https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/8025

Ferreirós, J. (2023): De la geometría a la topología. La «matematización de la naturaleza» y sus implicaciones filosóficas. Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla (Colección Ciencia al Alcance, n.º 6).

Santos, J. C. (2017). Introdução à Topología. Portugal: Universidade do Porto. https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/Topologia.pdf

Anexo 1: Cuestionario

Indicaciones generales: Estimado participante, a continuación, se le brinda una serie de preguntas del tipo abiertas (su opinión) y cerradas (selección, marcando con una x). El cuestionario es anónimo, contestarlo lleva poco tiempo, por lo que se le agradece su disposición a expresarse con toda sinceridad y espontaneidad. La información obtenida se tratará con total confidencialidad, respeto y seriedad del caso.

A partir de su participación en el taller responda cada una de las interrogantes que se le plantean a continuación.

1. Después de la realización de este taller, ¿qué opinión general tiene al respecto?
2. Después de la realización de este taller, ¿qué sugerencias tiene al respecto?
3. ¿Considera importante la inserción de GeoGebra para este tipo de tema? ¿Por qué?
4. ¿Cómo cataloga este taller para capacitar a docentes universitarios? (Marque con una X)

Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente

5. ¿Cómo cataloga este taller para capacitar a estudiantes universitarios? (Marque con una X)

Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente

MUCHAS GRACIAS

Implementación de geogebra en el diseño de situaciones de aprendizaje basadas en la gamificación

Lic. Rolando Navarro Rodríguez
Casio Académico CR / MEP, Costa Rica
rolnava@gmail.com

M.Sc. Danny Ramírez Lobo
Universidad Nacional, Costa Rica
danny.ramirez.lobo@una.cr

Resumen: El uso de herramientas lúdicas para el aprendizaje de las matemáticas ha tenido un papel fundamental para que los estudiantes logren, además de ser autodidactas, desarrollar habilidades de competitividad y trabajo en equipo. Este taller permite al docente crear desde cero una actividad sobre el tema de la ecuación de la circunferencia y sus variantes contextualizado en un juego popular entre los estudiantes, para que pueda ser utilizada en sus lecciones. La gamificación ha demostrado ser una herramienta efectiva en la enseñanza de la matemática y el GeoGebra se ha ganado un lugar privilegiado para la creación de este tipo de situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Gamificación, GeoGebra, Circunferencia, Traslación de una circunferencia.

Abstract: The use of playful tools for learning mathematics has had a fundamental role for students to achieve, in addition to being self-taught, develop competitiveness and teamwork skills. This workshop allows the teacher to create from scratch an activity on the topic of the circumference equation and its variants contextualized in a popular game among students, so that it can be used in their lessons. Gamification has proven to be an effective tool in the teaching of mathematics and GeoGebra has earned a privileged place for the creation of this type of learning situations.

Keywords: Gamification, GeoGebra, Circumference, Translation of a circle.

1. Introducción

El estudio de las circunferencias, su ecuación y sus transformaciones puede contextualizarse con múltiples escenarios, incluyendo los videojuegos que tanto llaman la atención de los estudiantes. Las estrategias gamificadas suelen ser eficientes para capturar el interés y despertar sus habilidades analíticas en búsqueda de las reglas del juego; esto podría aprovecharse para que los estudiantes se den a la tarea de observar, analizar, conjeturar y comprobar las relaciones de causa y efecto presentes tanto en el juego como en el trasfondo matemático del mismo.

2. Aspectos teóricos

La Gamificación consiste en una estrategia pedagógica que intenta aprovechar el potencial educativo y emocional de las actividades lúdicas para favorecer y mejorar el aprendizaje por parte de los estudiantes bajo la premisa de "aprender jugando" (Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez, 2018, p. 62). El principio fundamental es plantear actividades que demanden a los participantes desarrollar procesos de pensamiento y articular conocimientos previos con el fin de avanzar o ganar un juego.

En investigaciones previas los estudiantes comentan sobre la gamificación "que este tipo de aprendizaje es muy enriquecedor, pues ellos fueron capaces de descubrir los conocimientos por sí mismos de manera autodidacta y utilizarlos de manera práctica" (Mora et al., 2016, p. 78) lo anterior deja entrever que la gamificación tiene un papel fundamental para que los estudiantes disfruten del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para Valda y Arteaga (2015) es necesario que "el docente active su imaginación y creatividad para diseñar escenarios de aprendizaje atractivos, adoptando las mecánicas propias de los juegos para dinamizar el proceso de aprendizaje" por lo que este taller es una oportunidad única para que puedan aprender y desarrollar su potencial y mejorar profesionalmente.

Mencionan además Villalustre y del Moral (2015) que la gamificación es más que un juego, se requiere también la asignación de puntos, presentación de desafíos y niveles o premios para que el interés vaya en aumento y se entienda como un reto la obtención de puntos y el avance.

Este taller representa una propuesta para la enseñanza de la geometría analítica, específicamente el tema de círculos y circunferencias. Los docentes participantes en el taller crearán un juego en el que su objetivo es que los estudiantes manipulen la herramienta de manera lúdica, pero al mismo tiempo logren conocer y aplicar la ecuación de la circunferencia para avanzar en los niveles del juego.

Según Marrón y Vivaracho (2018) "el entorno lúdico a la hora de realizar actividades aumenta de forma considerable la motivación de los alumnos, su rendimiento, su nivel de implicación y, por ende, el nivel de aprendizaje" (p. 8) que es sin duda un objetivo de cualquier docente de matemáticas al impartir sus lecciones, de ahí la necesidad de crear espacios propicios para este fin en la clase de matemáticas. De igual manera, el programa de estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública (2012) respalda el uso de la tecnología como herramienta didáctica para el aprovechamiento de recursos alternativos que favorezcan la interacción estudiante-conocimiento e incentiven a los estudiantes a involucrarse más activamente en el proceso de gestión de su propio aprendizaje. (p. 37)

3. Metodología de trabajo

El taller propuesto contempla básicamente tres etapas: un sondeo introductorio para determinar las experiencias de los participantes con el uso de GeoGebra, sus conocimientos sobre Gamificación y sus estrategias didácticas habituales para el abordaje de los temas relacionados con la ecuación de la circunferencia y sus transformaciones. Luego, una presentación de la situación de aprendizaje gamificada y de las herramientas de GeoGebra a utilizar en la construcción del applet lúdico; y finalmente, la guía de trabajo que permitirá a los participantes recrear el juego y familiarizarse con el diseño de estos applets interactivos.

Para la realización del taller, se facilitará a los participantes una lista de indicaciones paso a paso, aunque siempre es la creatividad del usuario a la que se debe dar prioridad.

ISBN 978-9930-617-77-9

Los participantes harán uso de herramientas como deslizadores, botones de acción y cajas de verificación que permitirán emular los controles de un juego.

Cualquier modificación que se quiera hacer al entorno debe ser entendida como gusto o preferencia del usuario o programador, pero se debe tomar en cuenta que dicho cambio no genere una limitación o impedimento para el logro de los objetivos de la situación de aprendizaje.

A continuación, se indican las construcciones que se deben realizar:

En una primera etapa, se buscan las imágenes de fondo para el juego a criterio del usuario al menos 3, se observan en la Figura 1, que simulen diferentes niveles del juego. Se colocan las imágenes en el GeoGebra.

Se crean casillas de verificación relacionadas con las imágenes seleccionadas de forma que el usuario elija el nivel del juego.

Figura 1. Casillas de verificación para imágenes de fondo.

Crear 3 deslizadores para r, h y k con las que se construirá una circunferencia, cuyas variantes dependen de tres deslizadores.

Crear un punto A(h,k).

Crear circunferencia con centro A(h,k) y radio r.

Mostrar los resultados mediante un texto, como en la Figura 2.

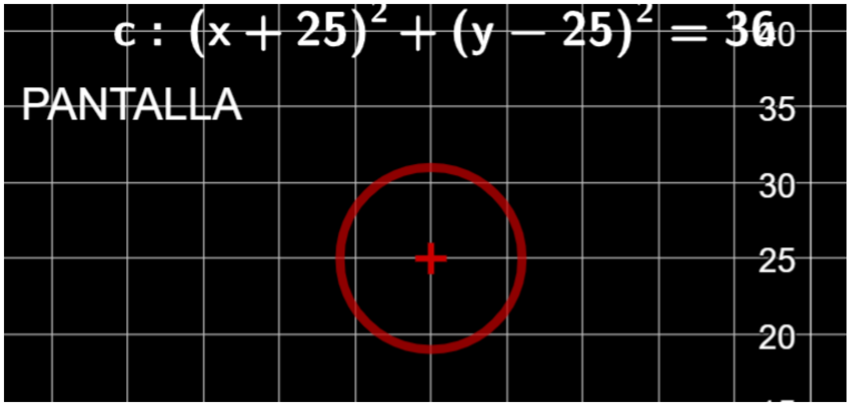


Figura 2. Circunferencia con centro A(h,k) y radio r.

Se construyen los botones de acción para relacionarlos con los deslizadores que modelan la circunferencia, puede ser similar a la Figura 3.

Se da formato a lo construido, ver Figura 4, para que se vea un entorno más lúdico y se crean las preguntan que guíen al estudiante en el descubrimiento de la ecuación mediante el juego.

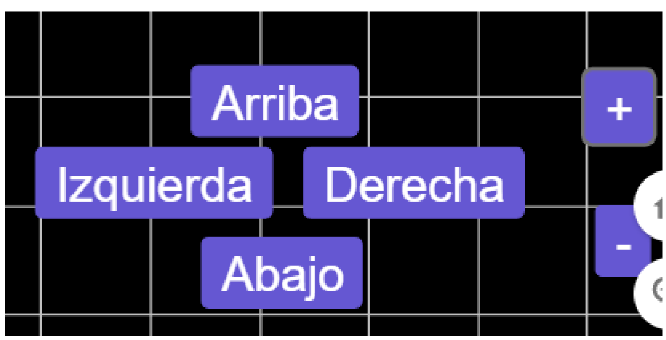


Figura 3. Botones de acción para el juego.

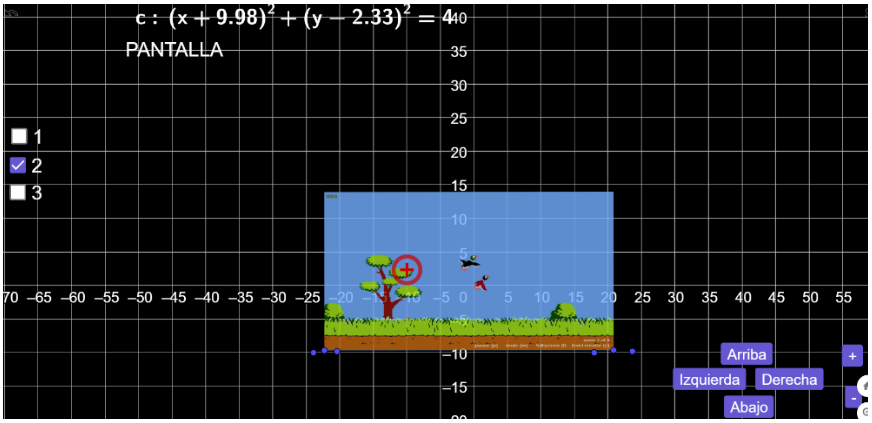


Figura 4. Vista final del entorno de juego.

Población meta

Este taller está principalmente orientado a docentes de secundaria. Sin embargo, podría resultar de interés y utilidad para docentes de cualquier nivel (primaria, secundaria, universitario, general) ya que la gamificación puede ser empleada en todos ellos.

4. Referencias bibliográficas

Marrón, A. M. P. y Vivaracho, C. E. (2018). Gamificación en el aula: Gincana de programación. ReVisión, 11(1), 8.

Mora, F., Pizarro, E. y Ramírez, D. (2016). Experiencia docente en la Enseñanza de la Probabilidad por habilidades matemáticas en décimo año. Memoria del X Festival Internacional de Matemática. Costa Rica. ISBN 978-9968-641-45-6.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programas de estudio de Matemáticas. Autor.

Torres-Toukoumidis, A., y Romero-Rodríguez, L. M. (2018). Aprender jugando. La gamificación en el aula. Educar para los nuevos medios, 61-72.

Valda, F. y Arteaga, C. (2015). Diseño e implementación de una estrategia de gamificación en una plataforma virtual de educación. Fides et Ratio - Revista de Difusión cultural y científica de la Universidad La Salle en Bolivia, 9(9), 65-80. Recuperado en 29 de mayo de 2023, de

http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2071-081X2015000100006&lng=es&tlng=es

Villalustre, L. y Moral Pérez, E. del. (2015). Gamificación: Estrategia para optimizar el proceso de aprendizaje y la adquisición de competencias en contextos universitarios. Digital Education Review, 27, 13-31.

Tinkercad: Una puerta abierta al aprendizaje interactivo de las matemáticas

Hailander Eduardo Valverde Valverde
ITCR, Costa Rica
hailandervalverde@estudiantec.cr

Jose Manuel Sandoval Salazar
ITCR, Costa Rica
jmsandoval2801@estudiantec.cr

Palabras clave: Educación matemática, Tinkercad, Modelado 3D, Simulación 3D

1. Introducción

En el mundo actual, donde la tecnología y la innovación son fundamentales para el desarrollo de habilidades y competencias, es imperativo que la educación se adapte a este entorno cambiante. En este sentido, el objetivo principal del siguiente taller de Tinkercad es brindar a los participantes una oportunidad única para explorar la relación entre la educación matemática y el diseño 3D interactivo. Tinkercad es una herramienta en línea intuitiva y accesible, la cual permite a los estudiantes dar rienda suelta a su creatividad mientras aplican conceptos matemáticos de manera práctica y tangible. Este taller tiene como propósito fomentar la comprensión y el aprendizaje de las matematicas, fortaleciendo la resolución de problemas, la visualización espacial y el razonamiento lógico, al mismo tiempo que potencia las habilidades tecnológicas. Al brindar a los estudiantes una experiencia, conocimiento o habilidad que se obtiene a través de la creación y manipulación de objetos en un entorno virtual en lugar de solo leer sobre ello o ver cómo se hace, este taller se convierte en una herramienta pedagógica innovadora que promueve el pensamiento crítico, la creatividad y el gusto por el aprendizaje de las matemáticas.

2. Aspectos teóricos

Este taller se fundamenta en la teoría del constructivismo, que sostiene que el aprendizaje se produce a través de la construcción activa del conocimiento por parte del estudiante. Al utilizar Tinkercad como herramienta de enseñanza, los profesores pueden fomentar el aprendizaje basado en la experiencia, donde los estudiantes se involucran en la creación, manipulación y resolución de problemas utilizando objetos y conceptos matemáticos en un entorno virtual.

Existe la necesidad de desarrollar en los profesores habilidades pedagógicas innovadoras que integren las nuevas tecnologías en la educación matemática. Tinkercad ofrece a los participantes una herramienta versátil y accesible para promover el aprendizaje activo y significativo de las matemáticas, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos abstractos de manera concreta y visualmente atractiva. Además, diversos estudios e investigaciones respaldan la efectividad del uso de Tinkercad para mejorar la comprensión y el rendimiento en matemáticas, así como para fomentar el pensamiento lógico, la resolución de problemas y la creatividad en los estudiantes, como lo demuestra Carrera (2023).

El taller se basa en investigaciones que destacan el impacto positivo del uso de la tecnología en la educación matemática.

Estudios han demostrado que la manipulación virtual de objetos 3D, como la ofrecida por Tinkercad, facilita la comprensión de conceptos geométricos, algebraicos y de visualización espacial. Además, se ha evidenciado que la integración de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas promueve el interés y la motivación de los estudiantes, mejorando su rendimiento académico, como lo señala Nolla et al. (2021). Estos fundamentos disciplinares respaldan la pertinencia y el potencial impacto del taller de Tinkercad para los profesores de matemáticas.

3. Metodología de trabajo

El taller estará dividido en 2 sesiones de 2 horas en donde cada docente tendrá acceso a una computadora para que la participación de los profesores sea activa en cada una de las actividades, a continuación, se comentan los contenidos generales de cada sesión:

Sesión 1: Introducción y modelado básico

Se inicia recibiendo a los participantes, explicando a grandes rasgos el contenido del curso y la funcionalidad de Tinkercad. Se muestra un breve modelado de objetos, ejemplos de proyectos realizados con Tinkercad, resultados de impresión 3D y algunos proyectos relacionados con temas académicos para evidenciar su utilidad en el aula.

Seguidamente, se comparte una guía interactiva para la creación de una cuenta y el ingreso a una clase en la plataforma Tinkercad.

Una vez que todos los profesores estén incluidos en la clase virtual, se iniciará con las actividades básicas para familiarizarse con los entornos tridimensionales. Entre ellas:

- Arrastrar objetos al plano de trabajo
- Mover la vista del objeto en tres dimensiones
- Utilizar el ViewCube (Cubo de visualización) para mover la vista rápidamente
- Trasladar, rotar, redimensionar, agrupar, copiar, esconder y alinear objetos en el plano de trabajo
- Crear agujeros en objetos utilizando agrupación y la propiedad de objeto Hueco
- Controles avanzados de cámara (visión ortogonal y perspectiva)

Estas actividades utilizan los tutoriales del Learning Center de la plataforma, que, sin embargo, no están traducidos del inglés. Por lo tanto, además de proporcionar un ejemplo en tiempo real durante la sesión de Zoom, se creará una guía interactiva y otra guía en formato PDF con la herramienta Tango.

Posteriormente a la familiarización a la plataforma se desarrollarán las siguientes actividades:

- Modelar un peón de ajedrez.
- Modelar unos lentes de sol para posteriormente utilizar la función "bloques" para transformarlos en una versión pixelada.
- En caso de que sobre tiempo se tienen los modelados de una estructura repetitiva, un dado personalizado y/o un anillo con superficies curvas.
- Espacio para cierre y dudas.

Sesión 2: Modelado intermedio y conclusiones

Se repasarán algunos conceptos importantes de la sesión pasada y se continuará con las siguientes actividades:

- Explorar las simulaciones de física de la herramienta creando un tobogán para esferas de diferentes materiales.
- Crear un planeta con cráteres y anillos utilizando la función plano de trabajo dinámico.
- Juguete sobre suma, resta y multiplicación para primaria.
- Herramienta demostrativa del teorema de Pitágoras.

En esta última clase se expondrá la posibilidad de llevar las creaciones de tinkercad a la vida real con la tecnología de impresión 3D, se comentarán algunos aspectos sobre el proceso de impresión y se mostrarán y comentarán algunas de las creaciones píublicas relacionadas con la matemática disponibles en la plataforma y otras similares como thingiverse, finalmente se concluirá con un conversatorio sobre las posibles áreas en donde materiales concretos de este tipo puedan resultar íutiles en la enseñanza de la matemática.

4. Guías de trabajo y/o actividades

4.1. Primera sesión

Para comenzar nuestro taller, Hailander compartirá su propia experiencia con Tinkercad. Inicialmente, utilizó esta herramienta para abordar problemas tridimensionales de la vida cotidiana (ver figura 1). Desde obtener el presupuesto para una estructura metálica hasta garantizar una instalación precisa de un extractor de cocina en donde descubrió que esta versatilidad se extiende más allá de las aplicaciones prácticas en el mundo real; también puede ser útil la enseñanza de las matemáticas de una manera nunca abordada. Ahora, se compartirá esta perspectiva y exploraremos cómo utilizar Tinkercad para inspirar y enriquecer la educación matemática.

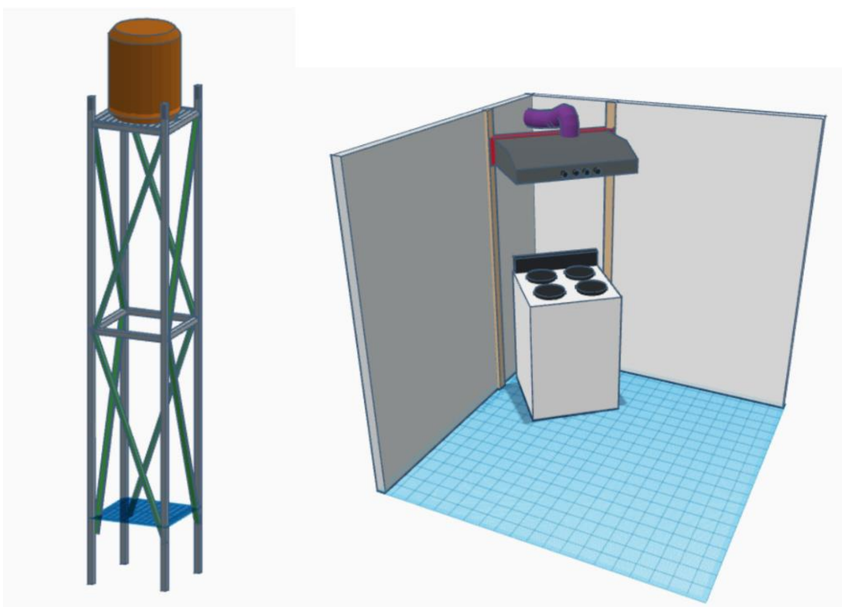


Figura 1: Problemas tridimensionales de la vida cotidiana

Después de realizar la introducción a la herramienta, se iniciará con el proceso necesario para crear una cuenta en la plataforma.

Cuando todos los participantes hayan creado su cuenta, se les brindará el código de ingreso a la clase del taller para monitorear la participación y compartir resultados sobresalientes, cuanto todos los participantes hayan ingresado se procederá con la siguiente sección.

Para introducir los aspectos básicos del modelado en tinkercad se utilizará la estructura de los tutoriales interactivos propios de la plataforma (ver figura 2), ya que brindan un ritmo intuitivo; sin embargo, estos solo están disponibles en inglés, por lo que guiaremos a los participantes en cada paso.

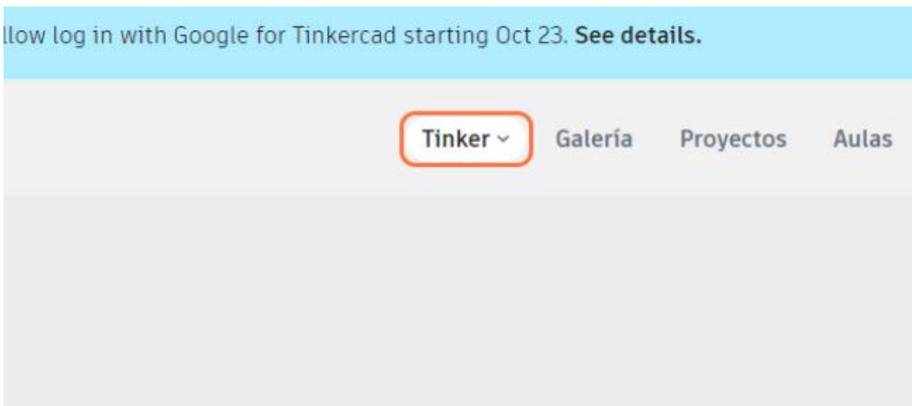


Figura 2: Tutoriales interactivos

Seguidamente, se da clic sobre la opción Diseño 3D como se muestra en la figura 3.

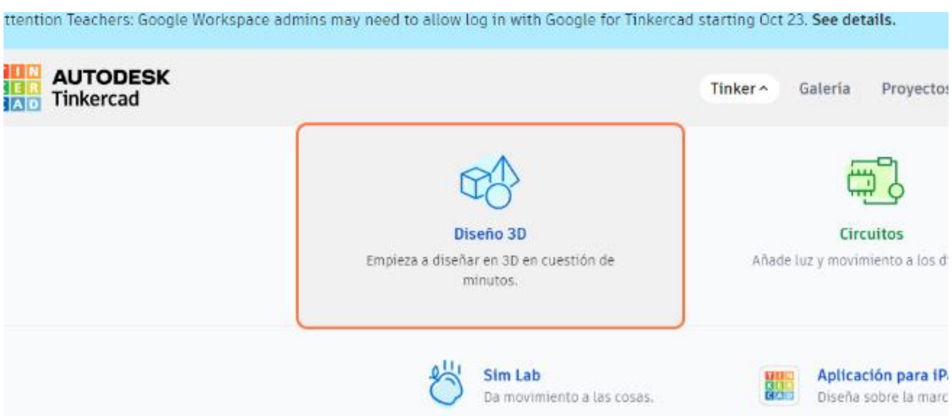


Figura 3: Opción Diseño 3D

Luego, debe bajar hasta la opción Aprender los movimientos como se muestra en la figura 4.

Figura 4: Aprender los movimientos

Salen 10 aprendizajes básicos de Tinkercad, damos clic al botón inicio (ver figura 5).

Figura 5: Aprendizajes básicos

En la columna de la derecha aparecen varias figuras, seleccionamos el cubo rojo y lo arrastramos al área de trabajo sobre las líneas de guía que aparecen (ver figura 6).

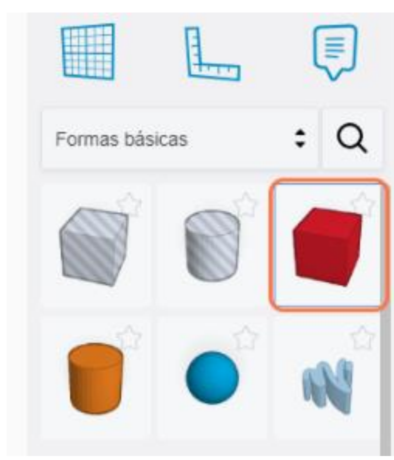


Figura 6: Diseños básicos

Ya con esto tendremos un objeto 3D sobre nuestra zona de trabajo como se muestra en la figura 7.

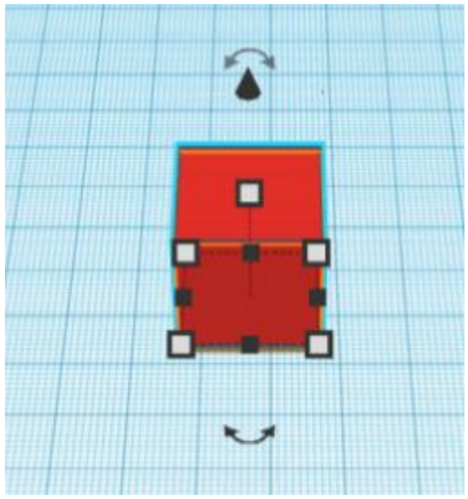


Figura 7: Objeto 3D en zona de trabajo

Cada vez que se complete una lección se le da clic al botón continuar para ir a la siguiente, como se muestra en la figura 8.

Figura 8: Opción continuar

Ahora se aprenderá a cómo rotar la vista del objeto, para esto solo se mantiene el clic derecho presionado y se arrastra por la pantalla para cambiar la perspectiva (ver figura 9).

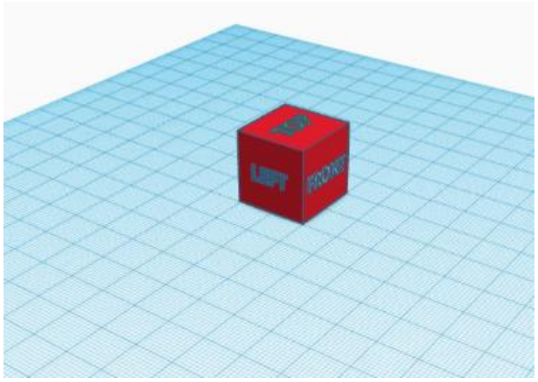


Figura 9: Rotación de las vistas del objeto

Para hacer zoom, usar el botón + o − o también el scroll del mouse (ver figura 10).

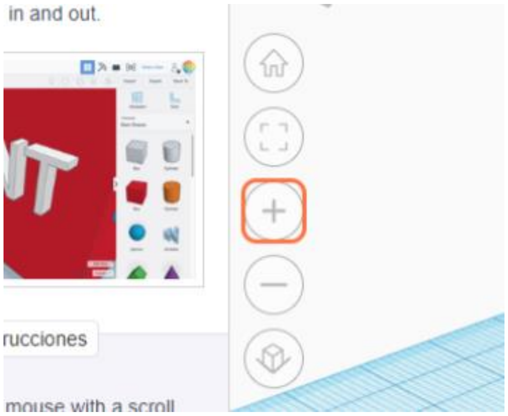


Figura 10: Acercar o alejar la vista

Para mover un objeto sobre el plano (ver figuta 11), basta arrastrarlo.

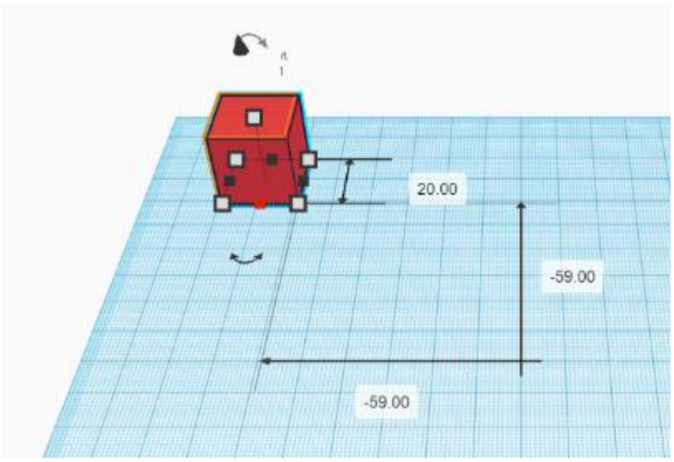


Figura 11: Mover objetos

Para mover un objeto en el eje z, se da clic sobre él y luego se arrastra la flecha que se indica en la figura 12.

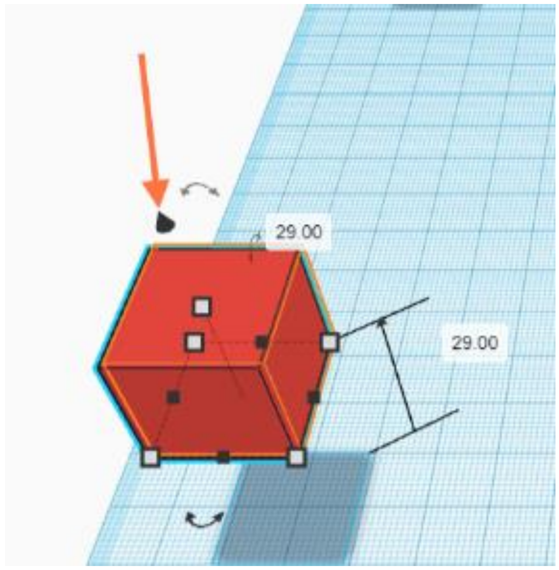


Figura 12: Movimiento en el eje z

Para rotar un objeto se da clic sobre él y después se arrastran las flechas que se muestran en la figura 13.

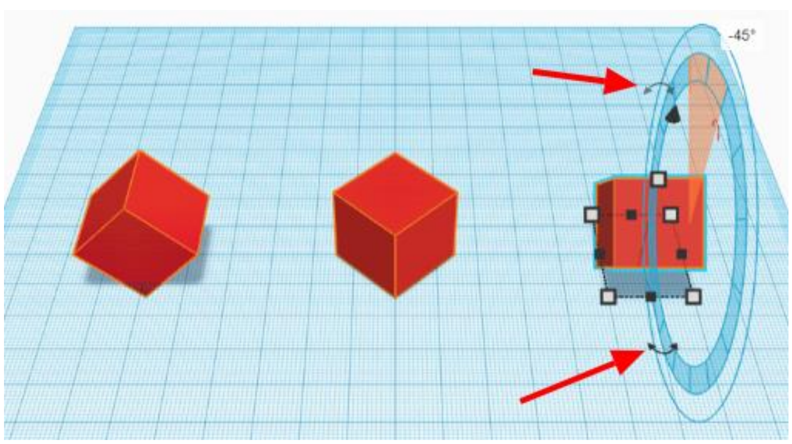


Figura 13: Rotación de objetos

Para cambiar las dimensiones de cualquier figura, se selecciona y se arrastran los cuadrados que se encuentran en los extremos de esta (ver figura 14).

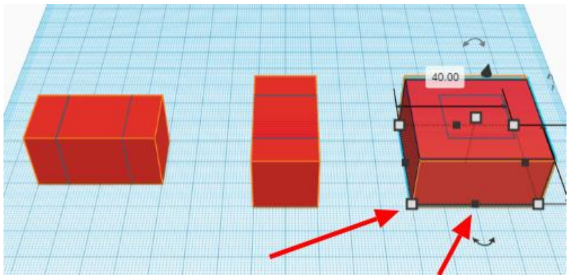


Figura 14: Cambiar dimensiones de objetos

Si se tienen 2 figuras juntas y se quieren agrupar, primero se da clic sobre una y, manteniendo el shift oprimido, se da clic sobre la otra (ver figura 15).

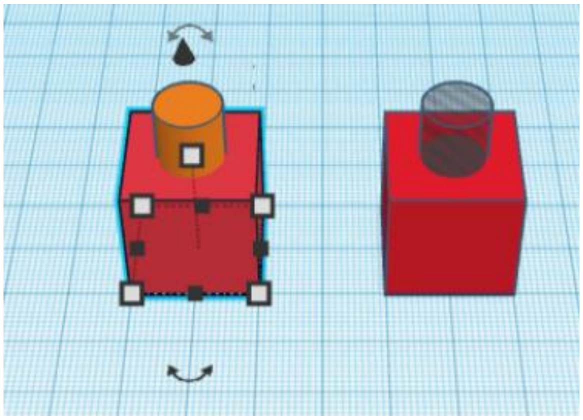


Figura 15: Seleccionar objetos

Con ambas figuras seleccionadas, se da clic al ícono de agrupar (ver figura 16) o se oprime el comando ctrl + g, si una de las figuras es transparente, al agruparlas se creará un hueco.

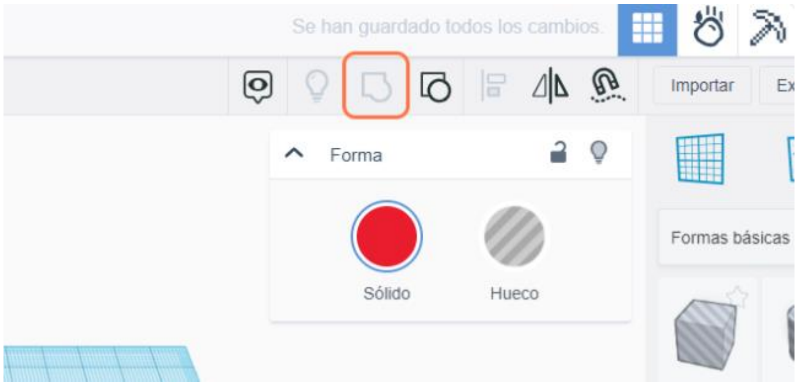


Figura 16: Agrupar objetos

Además, se puede copiar un objeto dando clic sobre el ícono señalado en la figura 17.

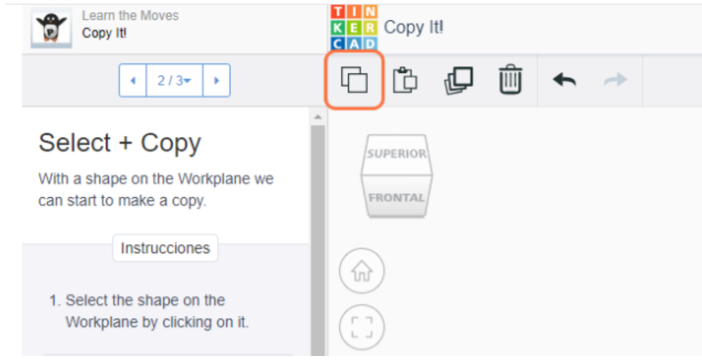


Figura 17: Opción para copiar objetos

Para copiarlo basta con darle clic sobre el ícono de pegar señalado en la figura 18.

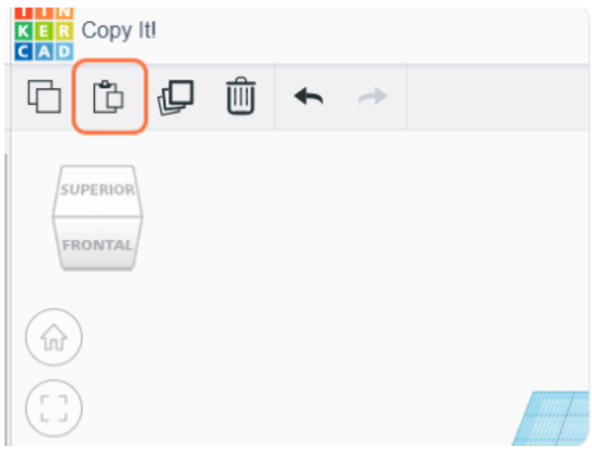


Figura 18: Copiar objetos

Esto también se puede simplificar usando los atajos Ctrl+c y luego Ctrl+v con los objetos seleccionados.

Actividad introductoria: Peón de ajedrez

Para iniciar con la modelación de objetos, se iniciará con un simple peón de ajedrez (ver figura 18) para el cual los participantes deberán arrastrar varias formas, ajustar dimensiones, posicionar verticalmente y utilizar la herramienta hueco.

La guía en tango está disponible en este link.

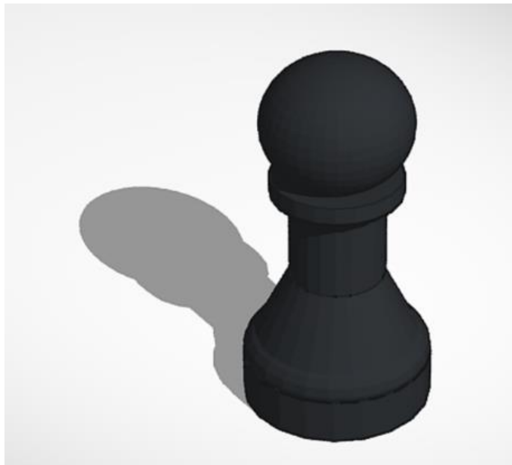


Figura 18: Pieza de ajedrez

Actividad: Lentes pixelados

En esta actividad los participantes utilizarán las habilidades prácticadas anteriormente para generar unos lentes (ver figura 19), luego utilizaremos los entornos alternativos para cambiar la apariencia y constitución de estos.

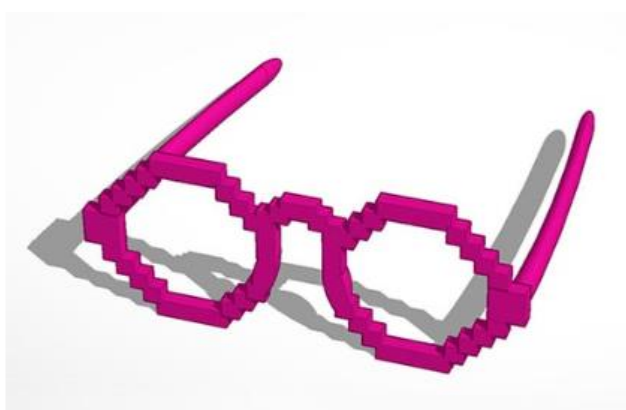


Figura 19: Lentes pixelados

Actividad extra: Anillo

En este modelo ve la herramienta del cubo de vista para cambiar rápidamente la posición relativa de la cámara, además ajustarán propiedades particulares de la forma toroide para ajustar su tamaño y también utilizarán las herramientas de duplicar y rotar (ver figuta 20).

La guía en tango está disponible en este link.

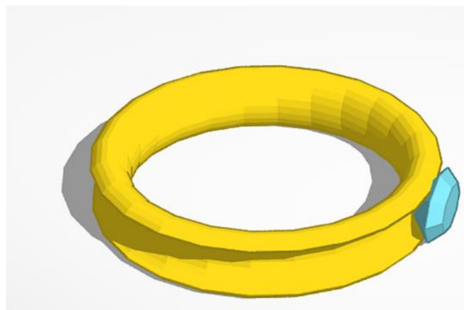


Figura 20: Anillo

Actividad extra: Dado personalizado

En esta actividad se puede hacer más énfasis con la mecánica de plano de trabajo relativo al posicionar objetos directamente sobre las caras de un dado, como en la figura 21.

La guía en tango está disponible en este link.

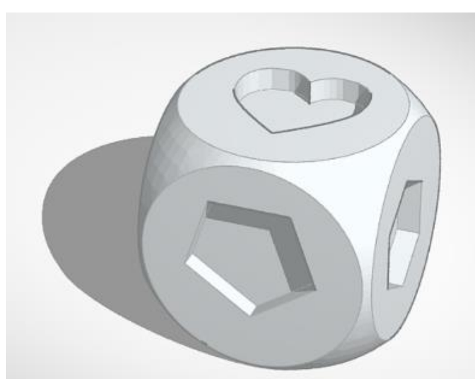


Figura 21: Dado personalizado

Actividad extra: Pagoda

En esta actividad los participantes utilizarán la función de copiar y pegar para generar estructuras complejas que se repiten en un diseño (ver figura 22), se les impulsará a crear distintos diseños para compararlos al finalizar el tiempo de actividad.

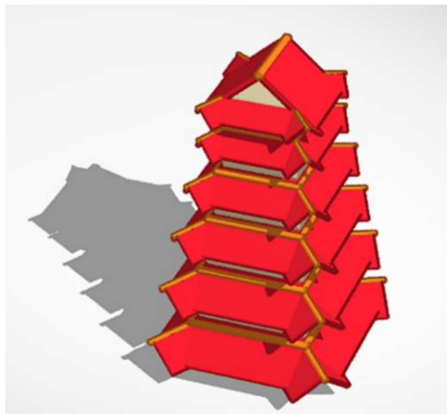


Figura 22: Pagoda

***4.2.* Segunda sesión**

Actividad: exploración del simlab

Después de trabajar con la vista de lego y estilo minecraft, se les indicará a los participantes generar una construcción simple como la de la imagen de la figura 23, para que posteriormente la lleven al laboratorio de simulación de física para observar su comportamiento, también se les impulsará a cambiar materiales y crear algún experimento de su interés.

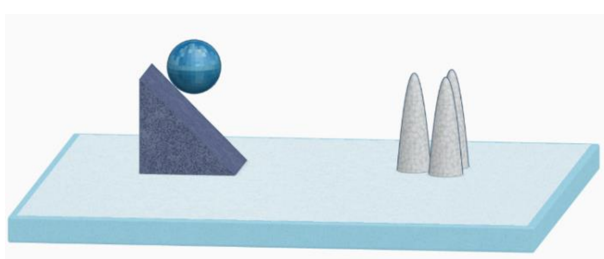


Figura 23: Construcción simple

Actividad: Planeta con cráteres y anillos

Para este ejercicio los participantes deberán crear dos tipos de cráteres a su propio gusto para posteriormente posicionarlos en la superficie de una esfera en distintas posiciones y tamaños utilizando varios planos de trabajo; finalmente, deberán ajustar las dimensiones de dos toroides y posicionarlos en un ángulo a estilo de anillos planetarios como se muestra en la figura 24.

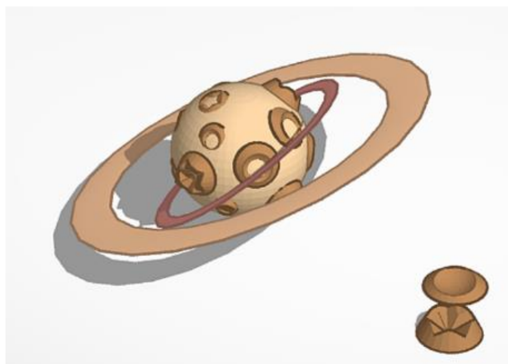


Figura 24: Planeta con cráteres y anillos

Actividad: exposición sobre el proceso y experiencias de impresión 3D

Como menciona Beltran Pellicer y Rodríguez Jaso (2017) la implementación de construcciones 3D puede generar una mayor compresión de conocimiento matemático y que permita a los alumnos desarrollar competencias para el desarrollo de su educación. Es por esto que, en esta última sesión, exploramos cómo llevar nuestros modelos matemáticos al mundo real mediante la impresión 3D (ver figura 25). Es importante destacar que, a pesar de ser una tecnología ampliamente utilizada en campos como la ingeniería, ha sido poco utilizada en el entorno educativo. Se comentará nuestra experiencia al realizar la impresión de las siguientes secciones cónicas con el servicio de impresión 3D en Los Laboratorios Institucionales de Microcomputadoras (conocidos como LAIMIs) del TEC sede Cartago.

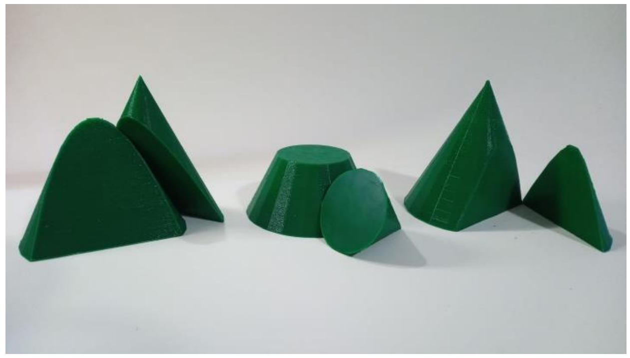


Figura 25: Modelo para impresión 3D

Además, mostramos ejemplos de diseños públicos disponibles en la plataforma y otras plataformas anexas que pueden servir como inspiración para crear proyectos y aplicaciones educativas innovadoras. Estos recursos, como la ”Prueba física del teorema de Pitágoras” o el ”Manipulable sobre el método de discos para aproximar el volumen de media esfera”, demuestran el potencial de la impresión 3D en la enseñanza de las matemáticas. Para poner en práctica algunas de las posibilidades se realizarán estos tres modelos:

Actividad: Teorema de Pitágoras

Se les brindará a los participantes una imagen de referencia (ver figura 26) para la creación de un material didáctico sobre el teorema de Pitágoras con cubos.

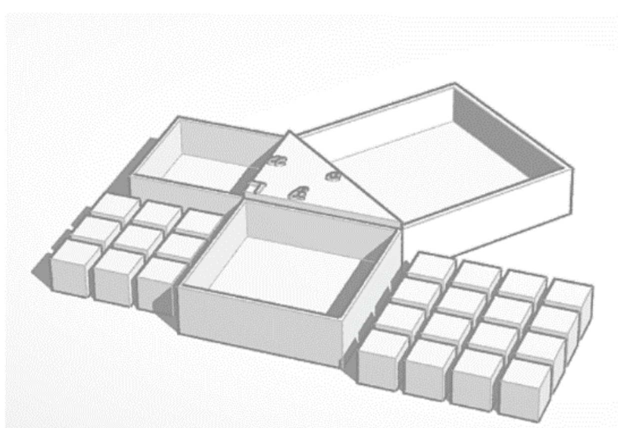


Figura 26: Teorema de Pitágoras

Actividad: Juguete para primaria

Se les guiará a los participantes en el proceso de crear un juguete ensamblable para generar ejercicios de suma, resta y multiplicación a nivel de primaria (ver figura 27).

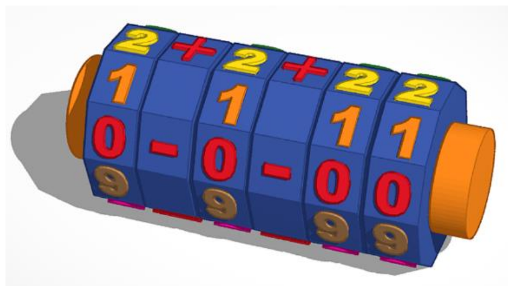


Figura 27: Juguete para primaria

En un conversatorio recordaremos los aprendizajes adquiridos y reflexionaremos sobre las posibilidades que se abren gracias a la tecnología emergente de la impresión 3D la cual solo enriquece la enseñanza de las matemáticas, sino que también fomenta la creatividad, la resolución de problemas y el pensamiento lógico en nuestros estudiantes.

5. Implemetación en el aula

Tinkercad cuenta con una sección de aulas las cuales tienen un conjunto de herramientas diseñadas para facilitarle a los profesores la enseñanza en su entorno educativo. Estas aulas permiten que los profesores administren clases y trabajen con sus estudiantes en proyectos relacionados con el diseño 3D o la electrónica de una manera organizada y efectiva. Los profesores pueden asignar proyectos específicos a los estudiantes dentro de la misma página de Tinkercad,

pueden proporcionar instrucciones detalladas y recursos que sirvan como guía a los estudiantes a la hora de realizar las tareas requeridas.

También las aulas permiten a los profesores realizar un seguimiento del progreso de sus estudiantes en tiempo real, pueden ver el trabajo de cada estudiante, realizar un seguimiento de las revisiones y evaluar los proyectos además de dar retroalimentación directa a los estudiantes sobre sus proyectos ya que se puede integrar con Google Classroom Tinkercad por su cuenta ya proporciona una gran variedad de recursos educativos creados con posterioridad, como lecciones y tutoriales, que los profesores pueden utilizar en sus clases para enseñar conceptos matemáticos, de tecnología, entre otros. Además de su gran característica de la compatibilidad con impresión 3D la cual permite a los profesores y estudiantes diseñar objetos que se pueden imprimir en una impresora 3D lo cual podría aumentar el interés de parte de los estudiantes.

Para acceder a los recursos matemáticos partiendo de la página principal de tinkercad se da clic a la opción Aulas, como se muestra en la figura 28.

Figura 28: Acceder a los recursos

Seguidamente se baja un poco en la página hasta llegar a la opción Examina unidades didácticas, como se muestra en la figura 29.

Figura 29: Unidades didácticas disponibles

Finalmente, se da clic a la opción de Math, como se muestra en la figura 30.

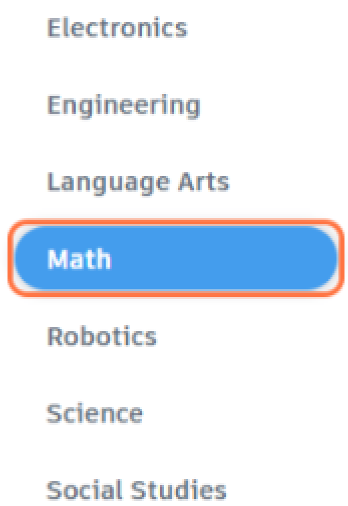


Figura 30: Opción Math en unidades didácticas

Para acceder a la guía en Tango da clic sobre el siguiente link.

6. Referencias bibliográficas

Beltran Pellicer, P. y Rodríguez Jaso, C. (2017). Modelado e impresión en 3D en la enseñanza de las matemáticas: un estudio exploratorio. Technical report.

Carrera, I. A. (2023). Estrategias didácticas para el aprendizaje basado en tareas en el cálculo de volúmenes por integrales, mediante el uso de la herramienta digital tinkercad. Master's thesis.

Nolla, Á., Benito, A., Madonna, C., Suk Park, S. y Busatto, M. (2021). Impresión 3D como un recurso para desarrollar el potencial matemático. Contextos educativos: revista de educación.

Enseñando Matemáticas STEAM con PhET

Jesús Alexander Matamoros Meraz

Colegio Santa Teresa, PhET Fellow Costa Rica

jamalexm628@gmail.com, jeme8534@colorado.edu

Resumen: Los estudiantes necesitan ser incluidos en su ruta de trabajo y mediante la corriente constructivista de la cual se origina el aprendizaje activo y la incorporación de la ludificación en el aula los estudiantes obtienen una horizontalidad en su formación, se vuelven parte de su propia ruta de trabajo, pero ahora con mayor protagonismo.

PhET vienen a ser ese aliado que permite realizar lo antes mencionado ya que sus más de 160 simulaciones gratuitas permiten representar diversos conceptos, fenómenos y leyes de manera muy sencilla en la cual se modifican diferentes variables en un lienzo abierto que conlleva a ir avanzando en un andamiaje seguro y eficaz.

Por ello en el taller se dará un esbozo por el entorno PhET, el enfoque y metodología STEAM mediante clases activas y aprendizaje basado en proyectos, y se mostrará cómo usar el aprendizaje activo junto con las simulaciones y sus elementos de juego en el aula para el desarrollo de los contenidos de Matemáticas, Física, Química, Biología, Ciencias de la Tierra y el Espacio con ejemplos de preguntas de indagación y de metacognición.

Palabras clave: PhET, STEAM, STEM, aprendizaje activo, indagación.

Abstract: The students need to be included in their work path and through the constructivist current from which active learning and the incorporation of gamification in the classroom originate, students obtain horizontality in their training, they become part of their own work path, but now with greater prominence.

PhET becomes that ally that allows you to carry out the aforementioned since its more than 160 free simulations allow you to represent various concepts, phenomena and laws in a very simple way in which different variables are modified in an open canvas that leads to progress in a safe and effective scaffolding.

Therefore, the workshop will provide an outline of the PhET environment, the STEAM approach and methodology through active classes and project-based learning and will show how to use active learning together with simulations and their game elements in the classroom for the development of the contents of Mathematics, Physics, Chemistry, Biology, Earth and Space Sciences with examples of inquiry and metacognition questions.

Keywords: PhET, STEAM, STEM, active learning, inquiry.

1. Objetivo General

Potenciar el uso de estrategias de aprendizaje activo en docentes en formación y activos, para la enseñanza de las matemáticas y ciencias, con el uso de las metodologías PhET, sus simulaciones y el enfoque STEAM, mediante un taller virtual desarrollado en noviembre del 2023.

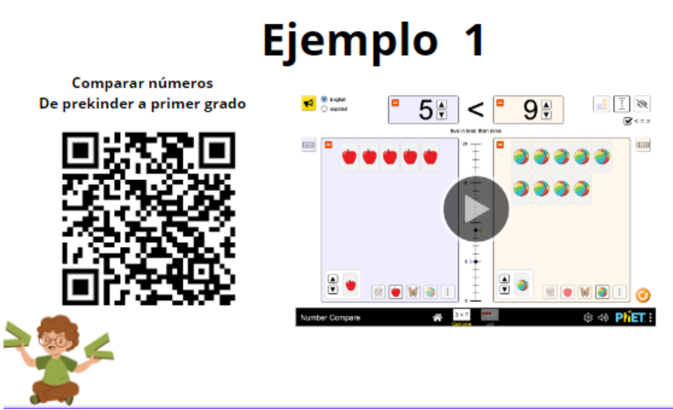
2. Descripción breve de la metodología de trabajo

En las cuatro sesiones de trabajo virtual se iniciará con un proceso de activación y bienvenida y posteriormente con un conjunto de herramientas y documentos se desarrollarán diversas actividades para mostrar las simulaciones PhET y su metodología de indagación, el enfoque de aprendizaje activo, la metodología STEM STEAM y el aprendizaje basado en proyectos STEAM.

En cada encuentro se contarán con plantillas que se ejecutarán para poner en práctica lo expuestos, así como análisis de casos y espacios de producción individual y colectiva.

Ejemplos

Ejemplo de pregunta de indagación para la clase entera: Tema tricotomía matemática en primera infancia o prescolar hasta primer grado.



Caso para analizar el aprendizaje activo.

2.1. Población meta

Docentes de secundaria en el área de Matemáticas y profesores universitarios que laboren en el área de la enseñanza de las Matemáticas

2.2. Requerimientos

Dispositivo electrónico: Celular, Tablets, pc o computadora de escritorio.

De 20 a 60 personas en el taller.

2.3. Cronograma de actividades

Encuentros virtuales los viernes de noviembre de 5:00 p.m. a 7:00 p.m.

Temas por encuentro:

- Entrono PhET y el aprendizaje activo: se dará a conocer el entorno PhET y cómo aplicarlo mediante el aprendizaje activo.
- Metodología STEAM STEM: Características y ejemplos de la metodología aplicada en la enseñanza de las Matemáticas con los temas de Función cuadrática y logaritmos.
- Aprendizaje basado en proyectos STEAM: Se mostrará dos proyectos uno sobre las fracciones usando PhET y el otro sobre el cubo soma usando tinkercad.
- Preguntas de indagación y metacognición con PhET: en este espacio se ejemplificarán los temas de la ley de la tricotomía matemática para nivel de preescolar, el tema de razones en primaria y sistemas de ecuaciones en secundaria, así como un espacio abierto para la producción individual de este tipo de preguntas en temas libres.

Nota: eje temático STEM

Talleres primaria

Descubriendo Fórmulas de Áreas Geométricas: Un Enfoque Práctico

M.Sc. Natalia Rodríguez Granados
ITCR, Costa Rica
nrodriguez@itcr.ac.cr

M.Sc. Jeffry Chavarría Molina
ITCR, Costa Rica
jchavarria@itcr.ac.cr

Resumen: Este taller explora cómo deducir fórmulas de áreas de figuras geométricas usando materiales simples como regla, lápiz, papel y tijeras. A través de la experimentación práctica, transformamos conceptos abstractos en comprensión tangible. Exploraremos ejemplos desde triángulos hasta polígonos regulares, viendo cómo las piezas de papel cortadas y ensambladas revelan relaciones geométricas y fórmulas familiares.

Palabras clave: áreas, polígonos, resolución de problemas, geometría.

Abstract: This workshop explores how to deduce formulas for the areas of geometric figures using simple materials like a ruler, pencil, paper, and scissors. Through hands-on experimentation, we transform abstract concepts into tangible understanding. We will delve into examples ranging from triangles to regular polygons, observing how cut and assembled paper pieces reveal geometric relationships and familiar formulas.

Keywords: areas, polygons, geometry

1. Objetivo General

Fomentar un enfoque de enseñanza de la matemática, particularmente en el área de la Geometría, basado en la resolución de problemas y el aprendizaje práctico.

2. Descripción breve de la metodología de trabajo

En este taller de 4 horas, los participantes se embarcarán en un entorno de aprendizaje dinámico. A través de una introducción inicial, se enfatizará la importancia de enseñar matemáticas utilizando material concreto para lograr una comprensión más profunda y práctica de los conceptos. Durante la fase de exploración de materiales, los asistentes rotarán por estaciones que ofrecen una variedad de recursos tangibles, relacionados con el concepto de área de figuras geométricas planas.

En la siguiente etapa del taller, nos adentraremos en la resolución de problemas vinculados al concepto de áreas de figuras geométricas planas. Esta etapa se desarrollará a partir de los fundamentos establecidos en la primera parte del taller y se materializará en una amplia gama de desafíos matemáticos centrados en este tema específico.

3. Población meta

Docentes de primaria

4. Requerimientos

Material de trabajo suministrado.

Regla, tijeras, lápiz, papel de construcción y borrador.

5. Cronograma de actividades

Este taller se desarrollará en dos sesiones de 2 horas el viernes 8 y el sábado 9 de diciembre.

Enseñanza de la magnitud superficie y su medida en Educación Primaria

M.Sc. Marianela Alpízar Vargas
Universidad Nacional, Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Resumen: Este taller se enmarca en la línea de caracterizar y desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como una componente de la práctica profesional del docente que imparte esta asignatura basados en las tres destrezas sugeridas por Jacobs et al. (2010) y como contenido matemático se utilizará el área de Medidas.

Se espera que, al concluir el taller, los docentes participantes: conozcan e identifiquen los elementos matemáticos relacionados con la magnitud superficie y su media, y que conozcan la progresión (niveles de desarrollo) de la comprensión de la magnitud superficie y su medida.

Palabras clave: magnitud, medida, mirar profesionalmente, competencia docente, educación primaria.

Introducción

La competencia del profesor en matemáticas y las metodologías de enseñanza de esta materia desempeñan un papel crucial en el resultado exitoso o no del proceso educativo. El bagaje de conocimientos del docente resulta esencial para comprender y tomar decisiones acerca de las circunstancias de enseñanza en el ámbito de las matemáticas (Llinares y Fernández, 2021).

La competencia docente mirar profesionalmente se relaciona con la capacidad de usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para llevar a cabo tareas de enseñanza de las matemáticas como por ejemplo interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández et al., 2018). Jacobs et al. (2010) conceptualizan la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes por medio de tres destrezas que se relacionan entre sí: (i) Identificar los elementos matemáticos presentes en las estrategias usadas por los estudiantes. (ii) Interpretar la comprensión de los estudiantes. (iii) Decidir cómo continuar el proceso de enseñanza.

El área de Medidas, en ocasiones es considerado de fácil manejo para los estudiantes de educación primaria; sin embargo, el sentido de la medida no se desarrolla con procedimientos mecanizados que se trasfieren en el aula sin relación con la cotidianidad, ni con conversión memorísticas, sino que lo aprendido en el aula debe ser de utilidad para las actividades cotidianas de los estudiantes (Alpízar, 2014).

Las actividades expuestas en este trabajo son parte de un programa de doctorado que cursa la autora de este taller.

Sesión 1

Guión

1. Importancia del conocimiento docente y contexto curricular.
2. Tarea #1.
3. Estudio de los elementos matemáticos relacionados con la magnitud longitud y su medida.
4. Tarea #2.
5. Tarea #3.
6. Actividad de cierre: ¿Qué me llevo?

Motivación

El conocimiento de un docente que imparte matemáticas acerca del contenido a enseñar y su didáctica es un pilar fundamental en el éxito del proceso de enseñanza.

Competencia docente

La relación entre el conocimiento del docente y el uso de ese conocimiento en un contexto específico deriva en la noción de la competencia docente "mirar profesionalmente" el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La cual se define como la capacidad de usar el conocimiento de manera adecuada para llevar a cabo tareas de enseñanza de las matemáticas (tareas profesionales) (Llinares, 2013 y Llinares, 2019).

Tareas profesionales

El rasgo que caracteriza el conocimiento profesional del profesorado no está solo en lo que conoce (dominios) sino en su uso. Desde esta perspectiva se subraya la importancia del uso del conocimiento en la resolución de las situaciones problemáticas generadas en su actividad profesional de enseñar matemáticas. Llinares (2013) identifica tres sistemas de actividades (ver figura 1) que articulan la práctica del profesorado de matemáticas tanto de Educación Infantil y Primaria como de Educación Secundaria: (i) analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas del alumnado; (ii) seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas y (iii) gestionar la comunicación matemática en el aula.

Figura 1: Sistema de actividad en la práctica profesional del profesor de Matemáticas

En este contexto, la competencia docente mirar profesionalmente es vista como una componente de la práctica profesional del profesorado de matemáticas, y, por tanto, ha sido identificada como una competencia docente importante a desarrollar.

Contexto curricular

- Según el MEP (2012) la enseñanza de los conocimientos relacionados con "Medidas" debe evolucionar según las características de los niños y las habilidades adquiridas. En el primer ciclo deben abordarse en asociación, en mayor parte, con el área de Números, debido a la importancia de las estimaciones, comparaciones y uso de instrumentos no convencionales. En el segundo ciclo debe relacionarse con Geometría, Estadística y Probabilidades. En este nivel se le debe dar énfasis al Sistema Métrico Decimal y al análisis de las diversas medidas en contextos reales, donde es indispensable que las tareas que se propongan abarquen distintos tipos de medidas.

- Las "Medidas" que deben abordarse en educación primaria son: longitud, masa-peso, tiempo, superficie-área, capacidad-volumen, moneda y ángulos.

Tarea #1

- Ingrese a menti.com
- Coloque el código **7317 0679**
- Conteste el siguiente cuestionamiento: cuando pienso en superficie ¿qué contenidos o elementos matemáticos se vienen a la mente?

Habilidades por desarrollar

Las habilidades generales, de acuerdo con MEP (2012), que deben promoverse durante el II ciclo son:

1. **Realizar mediciones** (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, **superficie**, volumen, temperatura).
2. **Estimar medidas** (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, **superficie**, volumen, temperatura).
3. Aplicar el **sistema métrico decimal (derivados)**.
4. Aplicar la **medición en diversos contextos**.
5. **Estimar áreas** utilizando el metro cuadrado, sus múltiplos y submúltiplos.
6. **Realizar conversiones** entre este tipo de medidas.

Tarea #2

Considere la figura 2 que se muestra a continuación y dibuje a la derecha de la cuadrícula una imagen con distinta forma de la presentada, pero con la misma superficie.

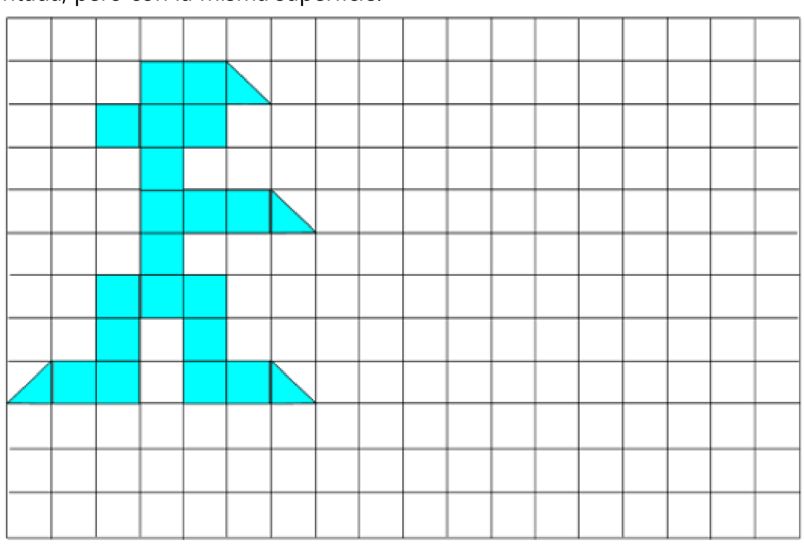


Figura 2: Conservar la superficie

1. ¿Qué elemento matemático está trabajando la actividad propuesta?
2. ¿Cuál objetivo de aprendizaje se quiere abordar?

Tarea #3
Considere la figura 3 que se muestra a continuación y determine la medida de la superficie utilizando como unidad de medida las piezas de color azul.

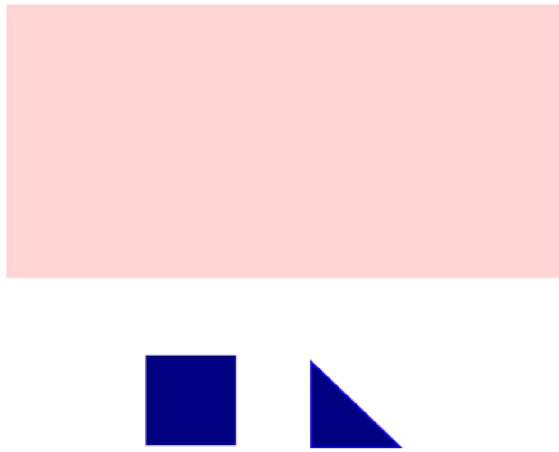


Figura 3: Uso de unidades de medida

1. ¿Qué elemento matemático está trabajando la actividad propuesta?
2. ¿Cuál objetivo de aprendizaje se quiere abordar?

Sesión 2

Guión
1. Repaso de los elementos matemáticos que intervienen en el estudio de la magnitud superficie y su medida.
2. Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.
3. Tarea #1.
4. Actividad ¿qué me llevo?

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje
Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se usa para organizar la información sobre cómo los alumnos pueden desarrollar la comprensión de la magnitud y su medida y qué tipo de tareas hay que proponerles para apoyarles.

Componentes de una trayectoria
Según Clements y Samara (2009a), una trayectoria de aprendizaje se compone de tres elementos:
a. El objetivo de aprendizaje.
b. Un camino por seguir con los diferentes niveles por los que deben pasar la comprensión del niño para lograr el objetivo planteado.
c. Conjunto de tareas o actividades, por nivel, que permitan el avance del niño.

Desglose de nuestra trayectoria para la temática de la magnitud superficie y su medida
1. Objetivos de aprendizaje
   El *objetivo de aprendizaje* para la magnitud y su medida, procedente del currículo de la educación primaria de Costa Rica, según el MEP (2012), es "*Comprender el concepto de medida y que los niños puedan calcular, estimar, comparar y aplicarlas en diferentes contextos*".

   Son objetivos específicos relacionados con uno de los elementos matemáticos a desarrollar.

Por ejemplo:
Elemento matemático: Conservación.
Objetivo de aprendizaje: Reconocer la conservación de la magnitud.

2. Elementos matemáticos
   Estos se definen como los conceptos básicos involucrados en el estudio de la magnitud longitud y su medida (ver figura 4).

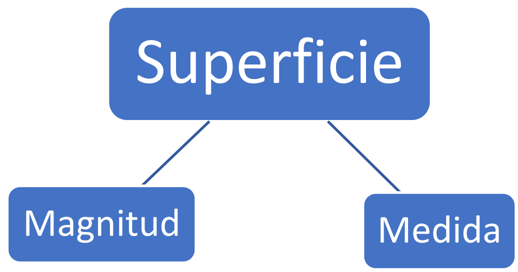


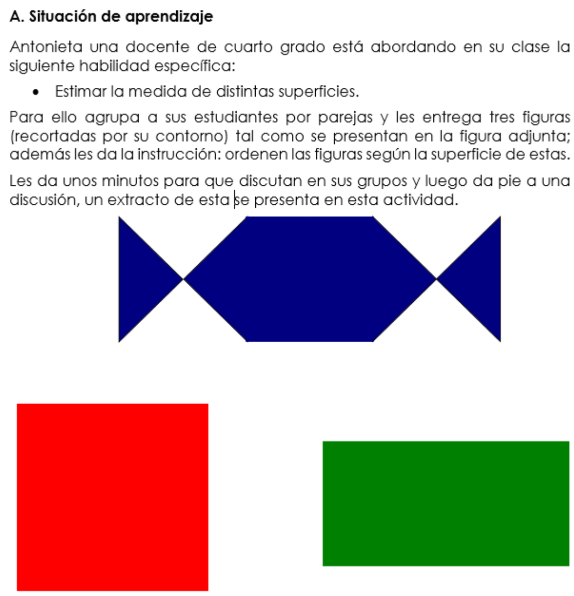
Figura 4: Elementos matemáticos

Elementos matemáticos de la magnitud de la superficie
Superficie: es la extensión plana de un cuerpo u objeto.
Conservación: la superficie de un objeto no cambia bajo ciertas transformaciones.
Transitividad: si la superficie de un objeto X es igual a la de un objeto Y, y la del objeto Y es igual a la de un objeto Z, entonces son iguales las superficies de los objetos X y Z.

Elementos relacionados con la medida de la superficie (área)
Unidad de la medida: cantidad de la magnitud que se toma para comparar con las demás (unicidad de la unidad de la medida, iterar la unidad de la medida, estructuración del espacio y establecer el número de iteraciones-acumulación).
Relación entre el número y la unidad de la medida: a mayor superficie de la unidad medida, menor número de itraciones de esta.
Unidad de la medida universal: debe ser una cantidad estandarizada de superficie, definida y adoptada por convención o por ley.
Derivados del Sistema Métrico Decimal: es un sistema de unidades que, que corresponde con el metro cudrado en este caso.

3. Progresión del aprendizaje
   En el desarrollo de la comprensión de la magnitud superficie y su medida podemos identificar seis niveles basados en los estadios para el desarrollo de la comprensión de cualquier magnitud y su medida propuestos por Piaget. Estos niveles tienen un carácter **acumulativo** (en el nivel 2 se dan las características del nivel 1, en el nivel 3, las del 1 y el 2, y así sucesivamente). Las **transiciones de un nivel** a otro se convierten en los **objetivos de aprendizaje** para favorecer el paso de un nivel al siguiente.

Tarea #1
Determine los elementos matemáticos que se movilizan con la actividad que se muestra en la figura 5.


A. Situación de aprendizaje

Antonieta una docente de cuarto grado está abordando en su clase la siguiente habilidad específica:

- Estimar la medida de distintas superficies.

Para ello agrupa a sus estudiantes por parejas y les entrega tres figuras (recortadas por su contorno) tal como se presentan en la figura adjunta; además les da la instrucción: ordenen las figuras según la superficie de estas.

Les da unos minutos para que discutan en sus grupos y luego da pie a una discusión, un extracto de esta se presenta en esta actividad.

Figura 5: Actividad sobre estmimación

Referencias bibliográficas

Alpízar, M. (2014). Área de Medidas en el I Ciclo de la Educación General Básica, algunas consideraciones para su abordaje en el aula. Ponencia presentada en II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa (II ECAME). Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Clements, C. y Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202.

Llinares, S. (2013). Professional noticing. A component of the mathematics teacher's professional practice. Sisyphus-Journal of Education, 1(3), 76-93. https://doi.org/10.25749/sis.3707

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019, 18, 30-43. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/39889

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, *24*(1), 185–205.

MEP (2012). Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.