

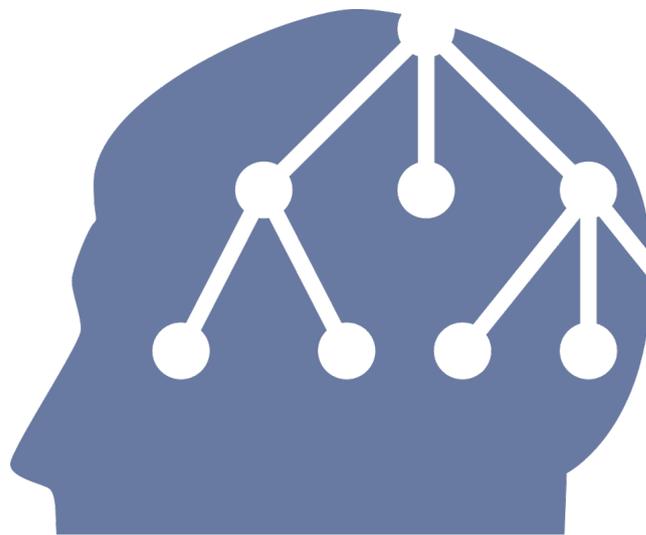
---

Informe de proyecto

## Visualización del Conocimiento en la Enseñanza de la Matemática ( 2010-2011)

Escuela de Matemática

MS.c. Jorge Monge Fallas, profesor-investigador



Visualizando el conocimiento

## 1. Tabla de contenido:

2. Autores y direcciones .....	3
3. Resumen .....	3
4. Palabras clave .....	3
5. Introducción.....	3
5.1 Definición del problema.....	3
5.2 Objetivo General .....	4
5.3 Objetivos Específicos .....	4
6. Fundamentación teórica.....	4
6.1 Visión y Visualización de la información.....	4
6.2 Visualización del conocimiento.....	9
6.2.1 Marco de visualización del conocimiento .....	12
6.2.1.1 Perspectiva de tipo funcional .....	13
6.2.1.2 Perspectiva de tipo conocimiento .....	14
6.2.1.3 Perspectiva de tipo receptor.....	14
6.2.1.4 Perspectiva de tipo de visualización.....	14
6.2.2 Modelo de Visualización del Conocimiento.....	20
6.3 El papel de la visualización en la enseñanza de la matemática .....	21
7. Metodología.....	29
7.1 I Semestre del 2011 .....	30
8. Análisis de resultados .....	52
9. Discusión y conclusiones .....	76
9.1 Conclusiones.....	76
9.1.1 Impacto de la visualización del conocimiento.....	76
9.2 Limitaciones: .....	79
10. Recomendaciones:.....	80
11. Agradecimientos .....	81
12. Referencias .....	81

## 2. Autores y direcciones

M.Sc Jorge Monge Fallas ([jomonge@itcr.ac.cr](mailto:jomonge@itcr.ac.cr)), Escuela de Matemática

## 3. Resumen

**Objetivos:** El objetivo principal era analizar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica en la enseñanza-aprendizaje del tema de derivada de funciones reales de variable real en un curso de Cálculo Diferencial.

**Los métodos:** Como se pretendía trabajar sobre una temática particular, se partió con un enfoque teórico respaldado por profesionales con experticia en el tema de cálculo diferencial y de un material diseñado bajo los estándares de la visualización del conocimiento y visualización de la información. La intervención se realizó por un periodo de tres semestres consecutivos con dos profesores cada uno a cargo de dos grupos, uno control y el otro experimental. Ambos profesores colaboraron durante todo el periodo que duró la investigación. Se diseñaron tres instrumentos de evaluación los cuales fueron validados en términos de la fiabilidad estadística.

El análisis estadístico que se realizó consistió principalmente de análisis descriptivos, pruebas normalidad y homogeneidad, contraste de hipótesis, ANOVA de un factor y pruebas post hoc.

**Resultados:** Los resultados confirmaron la eficacia de la visualización del conocimiento en la transferencia de conocimiento, su impacto positivo en la percepción de los estudiantes respecto al uso de tecnología en el aula, su impacto positivo en el conocimiento conceptual y confirma que el marco general de visualización del conocimiento es un marco teórico capaz de conceptualizar el uso de la tecnología en los procesos de transferencia de conocimiento.

Otro resultado de interés nos enfoca en considerar la actitud del profesional que quiere transferir conocimiento a través de la tecnología, para que esta transferencia sea efectiva.

**Conclusión:** La visualización del conocimiento se posiciona como un marco referencial a la hora de utilizar tecnología para la transferencia de conocimiento..

## 4. Palabras clave

Visualización del conocimiento, visualización de información, tecnologías de información, enseñanza de la derivada y multimedios en la enseñanza.

## 5. Introducción

La visualización del conocimiento es un nuevo campo de investigación y está jugando un papel importante en la transferencia del conocimiento. Este campo toma como punto de partida la habilidad innata que tiene el ser humano de procesar en forma precisa representaciones visuales, para la transferencia del conocimiento.

Desde el 2008 hemos realizado investigaciones con el objetivo de adecuar y adaptar el marco general de visualización del conocimiento planteado por Burkhar(2002) para apoyar la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial, enfocado principalmente en el tema de la derivada.

Presentamos como la visualización del conocimiento nos puede ayudar a establecer nuevas estrategias metodológicas y didácticas en la enseñanza de la matemática.

### 5.1 Definición del problema

Algunos aspectos salen a flote cuando este nuevo campo de investigación se confronta con la enseñanza de la matemática.

- ¿Podrá aplicarse la teoría de la visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática?
- ¿Cómo hacer esta adaptación para que su efecto en el enseñanza-aprendizaje sea significativo?
- ¿Se alcanzan los mismo beneficios en el contexto de la enseñanza que los beneficios definidos originalmente en otros campos?
- ¿Podrá tomarse el marco de visualización del conocimiento como punto de partida para el diseño de estrategias de enseñanza-aprendizaje que incorporen los recursos multimediales?
- ¿Podrá establecerse un protocolo de enseñanza cuando se utilice Visualización del Conocimiento como estrategia didáctica ?

El problema que se plantea en función de las preguntas anteriores se puede definir en los siguientes términos:

*Que efectos tiene en la enseñanza de la matemática la intervención de la Visualización del Conocimiento como metodología didáctica.*

Es decir, la idea es intervenir la enseñanza de la matemática a través de la visualización del conocimiento y ver que efectos tiene.

## 5.2 Objetivo General

Analizar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica en la enseñanza-aprendizaje del tema de derivada de funciones reales de variable real en un curso de Cálculo Diferencial.

## 5.3 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos que se definen para lograr el objetivo general son los siguientes:

- Indagar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento en el ambiente de aprendizaje en el aula en un curso de Cálculo Diferencial.
- Investigar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica en la comprensión de conceptos del tema de derivadas de funciones reales en variable real.
- Determinar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica en el rendimiento académico de los estudiantes en el tema de derivadas de funciones reales en variable real

# 6. Fundamentación teórica

## 6.1 Visión y Visualización de la información

Como se mencionó en la introducción, el uso de información en formato visual es tan vieja como la especie y esto se evidencia desde las cuevas de Altamira y al pasar por la geometría egipcia o griega hasta la cartografía, de allí se pasa al dibujo mecánico, los diagramas eléctricos y finalmente tendríamos los gráficos estadísticos y los sistemas de señalética moderna; todos ejemplos de nuestra capacidad y necesidad de traducir la información en visualizaciones más fáciles de entender. Además un aspecto importante del comportamiento humano es su habilidad para reconocer objetos, factor importante para su supervivencia.

En relación a nuestra dependencia de lo visual, y la forma en que percibimos los objetos, Friasse y Piaget (1973) manifiestan “Por lo tanto no debe sorprenderos si el espacio representativo de un sujeto y, en consecuencia, su marco de referencia es, en particular, visual y ello en todas las circunstancias”. (p. 133)

En el caso de la inteligencia visual Hoffman (1998) señala que la visión es tan rápida y segura que aparentemente no requiere esfuerzo alguno, pero que detrás del rápido funcionamiento de nuestro sentido de la vista se extiende una inteligencia tan basta que ocupa casi la mitad de la corteza cerebral.

Por ejemplo el córtex visual está dividido en áreas o zonas llamadas V1, V2, V3, V4, V5 y V6. Las neuronas que se ubican en estas zonas específicas se especializan en identificar ciertas características, por ejemplo V1 se encarga de un escaneo general de la imagen, V2 hace una visión estéreo, V3 se encarga de determinar la profundidad y la distancia, V4 del color, V5 del movimiento y V6 determina la posición del objeto (Carter, 1998).

Bruce, Green y Georgeson (2003) señalan que el estudio psicológico de la percepción visual superó la filosofía de la mente, tradicionalmente un medio de ganar consciencia y conocimiento del mundo. Es decir, la visión le permite a los seres humanos percibir y entender el mundo que los rodea.

El ser humano tiene la habilidad innata para procesar representaciones visuales, estas contribuyen de acuerdo a Burkhard y Meier (2005) a: orientar emociones, ilustrar relaciones, descubrir tendencias y patrones, mantener y llamar la atención del receptor, ayudar a la memoria y a recordar, presentar ambos generalidad y detalle, motivar a la gente a establecer una historia común y a energizar a la gente a tomar acciones, presentar opciones y actuar.

Estos elementos mencionados por Burkhard y Meier son factores importante a considerar en la enseñanza de la matemática, en un momento donde la importancia de la matemática en la sociedad está marcada, sin embargo el interés por aprenderla no es un sentimiento muy arraigado en la población, en particular en los distintos niveles educativos. La motivación es componente importante para alcanzar el éxito en la enseñanza y aprendizaje, pero cómo llevarla a cabo es lo que preocupa y ocupa a los educadores.

Según Rudolf Arnheim, conocido investigador de la psicología de la percepción, en la base del pensamiento y de la formación de conceptos se halla siempre un acto de percepción visual que desencadena una multiplicidad de procesos mentales e influye en toda organización del pensamiento.

Con el afán de enfatizar sobre las potenciales de las representaciones visuales y su rol en tareas cognitivas Arnheim(1993) indica “Se ha dejado adormecer nuestra capacidad innata de entender con los ojos, hay que volver a despertarla”(pp. 13-14).

Entre algunas investigaciones que dan soporte a la visualización y su rol en procesos de transferencia del conocimiento están:

- Miller indica que la capacidad del canal de entrada del ser humano es mayor cuando estamos usando la habilidad visual.
- Koffka (1928) indican que nuestro cerebro tiene una fuerte habilidad para identificar patrones.
- Arnheim (1993) puntualiza que la percepción visual influye en toda organización del pensamiento.
- Para Eppler (2003) las imágenes son efectivas para la transferencia del conocimiento.
- Kosslyn (1980) sugiere que el recuerdo visual es mejor que el recuerdo verbal.
- Burkhard (2005) señala que la actividad cerebral mayoritariamente trata con procesamiento y análisis de imágenes visuales.
- Larkin y Simon (1987) indican que la representación visual es superior a la representación en secuencia verbal en varias tareas cognitivas.

- Hoffman (1998) sugiere que la visión no es una cuestión de percepción pasiva, sino un proceso inteligente de construcción activa.

Dentro de las ventajas de la representación visual, Burkhard (2002) destaca que la mayoría de las actividades de nuestro cerebro tratan con procesamiento y análisis de imágenes visuales. Por lo que las imágenes visuales son pre-atendidas y procesadas antes que el texto. Además en comparación con el texto las imágenes visuales necesitan menos energía para ser consumidas.

Burkhard (2002) señala algunos estudios empíricos que muestran que las representaciones visuales son mejores a la representación por secuencia verbal en tareas como; ilustrar relaciones, identificar patrones, para presentar tanto información global y detallada a la vez, y para comunicar diferentes tipos de conocimiento.

Por otro lado para Eppler (2003) la metáfora visual es efectiva para la transferencia de conocimiento y éste señala seis ventajas de la metáfora visual, contribuye a presentar nuevas perspectivas, ayuda a procesar el aprendizaje, a focalizar la atención del espectador, y a estructurar y coordinar la comunicación.

Nuestro enfoque en cuanto a la visualización del conocimiento va en la línea de utilizarlo de tal forma que nos permita la transferencia de conocimiento, que nos permite apoyar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en la identificación de patrones, en la búsqueda de relaciones, en captar la atención de los estudiantes, y a presentar tanto globalidad como detalle de los contenidos, entre otras.

La capacidad del canal de entrada del ser humano se incrementa cuando la habilidad visual está siendo usada según Miller. El cerebro tiene una fuerte habilidad para reconocer patrones, estos temas han sido estudiados por la psicología Gestalt. Los recuerdos visuales parecen ser mejores que los recuerdos verbales.

Las bondades de nuestra capacidad cerebral para el procesamiento de representaciones visuales ya ha sido evidenciada, pero además el utilizarlas podría incrementar la capacidad del receptor para la adquisición de otros conocimientos, es decir, se incrementa la capacidad de aprender.

De hecho la imagen, por sus características intrínsecas, comunica de manera más inmediata, mas primitiva que la palabra, suscitando cosas más emotivas que el lenguaje verbal (Lazotti, 1983). Además Lazotti señala que en la base de toda experiencia visual se halla siempre una actividad perceptiva. Estas actividad perceptiva en su desarrollo más complejo cuando comporta ciertos procesos de análisis y de exploración, está relacionada con el aprendizaje, por tanto está sometida a un desarrollo progresivo.

Lazotti (1983) señala que si nos basamos en los momentos perceptivos, es posible desarrollar en los alumnos las capacidades de atención y de análisis. Por lo que centrando la atención visual sobre los datos perceptivos, el alumno pasa de una percepción esquemática y global a un proceso de análisis.

Al final a largo plazo pretendemos que el trabajo centrado en las representaciones visuales nos permitan llegar a procesos de análisis, fundamental para un aprendizaje significativo.

Por último Carter (1998) señala que para construir mundos virtuales atractivos debemos comprender primero la inteligencia visual y el modo en que ésta elabora las realidades visuales.

No sólo cuando se quiera crear mundos virtuales, si pretendemos utilizar recursos multimedia en los procesos de enseñanza debemos saber sobre comunicación visual y las potencialidades de la inteligencia visual para poder sacar provecho de las estrategias de aprendizaje diseñadas.

Tomando en cuenta la importancia sobre nuestra capacidad innata de procesar representaciones visuales y la necesidad actual de manejar y así eliminar una sobrecarga de

información, es menester utilizar métodos visuales para tratar la información visualmente. El manejo de información en formato visual ha generado investigación desde ya hace algunos años en el campo de la visualización de la información.

Entendemos por Visualización de la Información el proceso de como los estímulos de afuera pueden usarse para desencadenar las capacidades cognitivas al interior de la mente según Ware (2004), o bien, el proceso de generar modelos mentales a partir de datos ganando más información de esos datos (Spencer, 2001).

Rao y Sprague (1998) definen visualización de la información como la utilización de gráficas interactivas para presentar información y apoyar la interacción. Los humanos como especie han evolucionado para poseer habilidades visuales y espaciales, en nuestro quehacer diario estamos constantemente recuperando recuerdos debido a lo visual y a lo espacial.

La visualización de la información viene a constituir una de las áreas con una contribución determinante al campo de la visualización del conocimiento.

Saad y Zaghoul (2002) señalan que el objetivo de una herramienta de visualización del conocimiento está en hacer visible un panorama intelectual. Este panorama puede ser representado como un mapa de conocimiento que sirve como una estructura común o contexto para el propósito de compartir conocimiento, la toma de decisiones y resolución de problemas.

Las tecnologías en la computadora ha mejorado a tal punto que podemos fácilmente externalizar estas imágenes vagas y subjetivas que nosotros “vemos” en la cabeza, reemplazarlas por visualizaciones precisas y objetivas. (Palais, 1999).

Como mencionamos anteriormente si queremos utilizar medios de representación de información sus diseños deben influenciar nuestras habilidades naturales, como la visión, el lenguaje y la memoria.

Cualquier estudio en la actualidad que involucre visualización envuelve ambos: el lado de la máquina y el lado de la mente. Se puede resumir que un diseño de información exitoso depende de cuatro factores decisivos (Hernández y Monge, 2007):

- La adecuada caracterización de la tarea o de los datos a visualizar
- El sistema de percepción humano
- La tecnología de visualización y
- La dinámica de interacción entre estos tres componentes.

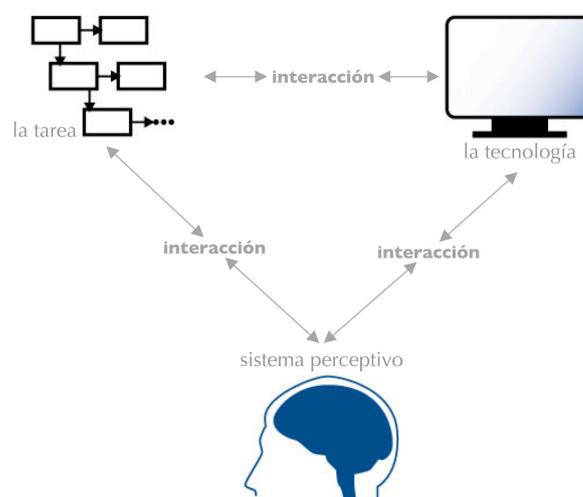


figura 1 Componentes importantes en el proceso de Visualización de Información

Estos son elementos como se muestra en la figura (1) que se deben considerar para definir las posibles estrategias que se pueden usar para que la visualización sea amigable y así despierte el interés en la audiencia.

De acuerdo a los objetivos de la visualización que se han planteado es importante tomar en cuenta algunas consideraciones desde la perspectiva de la audiencia en cuanto a la visualización de la información. Algunos de estas situaciones se pueden resumir como sigue:

- Interpretación de la información: la visualización debe proveer los medios amigables para acceder a la información sin distorsión.
- Contextualización: la fortaleza de una representación visual está en comunicar la información correcta, la visualización deberá permitir esta tarea en forma rápida y clara, tarea especialmente difícil en casos donde se quiere transmitir conocimiento que se considera de carácter complejo.

Obviamente estos retos deben ser superados tomando en cuenta las limitaciones fijas existentes. Entre las limitaciones clásicas tenemos la mala interpretación de la información en un momento específico.

Sin embargo, las características y limitaciones más importantes en las decisiones de la representaciones visuales son aquellas que se refieren a la diversidad de la audiencia. No solo es necesario limitar la cantidad de información que contemporáneamente es presentada a la audiencia, sino que se debe caracterizar según las ventajas o desventajas del sistema de percepción humano.

De este modo, hay tareas que ya son parte intrínseca del sistema perceptual humano y que por lo tanto no añaden carga cognitiva a la tarea de reconocimiento. Esta facilidad para percibir más fácilmente una figura aparentemente más compleja (figura (1) ) se debe a la prioridad del juicio tridimensional y la ley de la forma cerrada ya estudiadas por la psicología de la percepción o psicología Gestalt desde principios de siglo XIX (Rock , 1987).

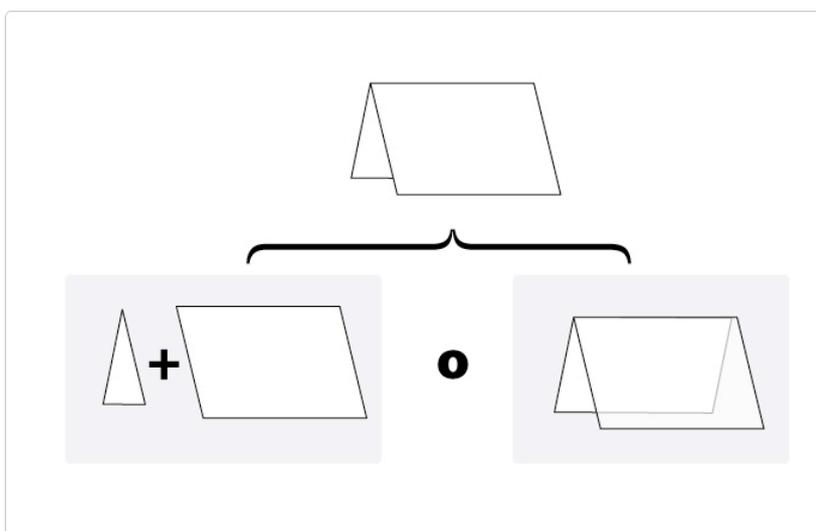


figura 1 Ejemplo de la prioridad del juicio tridimensional

Este es un ejemplo de cómo una representación mucho más compleja es mucho más fácil de entender. A esto nos referimos cuando decimos que es deseable trasladar la carga cognitiva a funciones ya automatizadas del aparato perceptual humano.

Vale la pena anotar las ayudas sonoras en este apartado. En algunos sistemas como el SemNet, sonidos adecuados al movimiento recuerdan al usuario lo que sucedió. (Fairchild, Poltrock y Furnas, 1988)

Según Peterson (2002) una herramienta de visualización tendrá un impacto significativo en educación por las siguientes razones:

- La visualización basada en la computadora puede ser interactiva, es decir, la GUI (del inglés Graphics User Interfaces) permiten a los estudiantes controlar parámetros en la visualización.
- La visualización personalizada reúne las necesidades de estudiantes particulares a los objetivos de un clase.
- Un lenguaje de visualización expresivo agrega un elemento de creatividad para el material de la clase. Los estudiantes que experimentan con nuevos estilos de visualización son recompensados por los aspectos artísticos de las imágenes que ellos podrían crear. Este estilo de aprendizaje complementa el método tradicional de resolución de problemas que predominan en la matemática.

Al final lo que se busca son elementos que permitan apoyar la transferencia de conocimiento haciendo uso de los canales disponibles en el ser humano como lo son los sentidos, enfatizando en las bondades de algunos de ellos para la transferencia culturales a lo largo de la historia.

## 6.2 Visualización del conocimiento

La visualización del conocimiento es un nuevo campo de investigación que estudia el potencial innato del ser humano para procesar en forma efectiva representaciones visuales en tareas de intenso conocimiento (Burkhard & Meier, 2005).

Las representaciones visuales pueden ser usadas para procesos de Administración del Conocimiento como por ejemplo; la identificación, transferencia, creación y aplicación de conocimiento.

La visualización del conocimiento como campo de investigación integra varias áreas, a saber:

- Visualización de la información
- Arte cognitivo
- Administración del conocimiento
- Arquitectura de la información
- Ciencias de la comunicación

La visualización del conocimiento pretende mejorar la transferencia y la creación de conocimiento entre al menos dos personas.

Se puede entender como visualización del conocimiento, la designación de todos los medios gráficos que pueden ser usados para la construcción y transmisión de ideas complejas.

Más allá de transportar hechos, la visualización del conocimiento tiene como meta la transferencia de ideas, experiencias, actitudes, valores, expectativas, perspectivas, opiniones y predicciones, y de esta forma sean utilizadas para recordar, reconstruir y aplicar estas ideas correctamente.

Eppler y Burkhard (2005) señalan que en la visualización del conocimiento se distinguen varios formatos o tipos de visualización: los bocetos, mapas de conocimiento, diagramas conceptuales, imagen (metáfora visual), objeto, visualización interactiva e historia mutua.

Además la visualización del conocimiento combina métodos de visualización de la información, técnicas didácticas, cognición visual e investigación en comunicación visual.

Por ejemplo en el caso de la comunicación visual se incluyen campos como el arte cognitivo, diseño de hipermedia, arquitectura de la información, diseño gráfico, interacción del diseño y la interacción computadora-hombre. El papel de la computadora parece ser un aspecto que no puede ser obviado en muchas de las actividades que desarrolla el ser humano.

Por otro lado en el campo de la administración del conocimiento, la transferencia del conocimiento se considera un proceso central, el cual puede ser mejorado al utilizar nuestra habilidad para procesar representaciones visuales. (Burkhard, 2002).

La visualización del conocimiento también examina métodos que permiten reducir la sobrecarga de información, la mala interpretación y el mal uso de la información, dándole por tanto un valor agregado.

Mucho de la base de la visualización del conocimiento se le debe a los arquitectos, quienes como “generalistas” según Burkhard son expertos en la transferencia de conocimiento entre especialistas de distintas áreas. Los arquitectos combinan distintos tipos de visualización que se complementan uno con otro con el objetivo de comunicar diferentes niveles de detalle.

Combinando visualización tradicional con nuevas o novedosas visualizaciones de información se incrementan la efectividad, la motivación y la atención del receptor, permitiendo la reducción en la sobrecarga de información y como consecuencia una mejora en la toma de decisiones.

Es importante tener en cuenta que en cuanto a la definición de conocimiento al igual que en muchos campos no hay consenso, de igual forma en el campo de la visualización no hay una clara distinción entre información y conocimiento. Sin embargo podemos considerar las siguientes dos definiciones:

- Información: Es un conjunto de datos (lo cual supone una cierta interpretación) que se puede mostrar, emitir o transmitir.
- Conocimiento: Asimilación e integración personal de la información. Implica una interrelación entre la información disponible y una estructuración coherente.

Por ejemplo Card (1999) define visualización de la información como “el uso de soporte computacional, interactivo, representación visual de datos abstractos para amplificar la cognición”. Esta definición es compartida por investigadores comprometidos con áreas relacionadas con la exploración de la información.

La diferencia entre visualización del conocimiento y visualización de información según Burkhard (2002) radica en la forma en que se usan estas habilidades innatas del ser humano. Ambas exploran la habilidad para procesar efectivamente representaciones visuales, sin embargo el objetivo de la visualización de información es explorar datos abstractos y crear nuevas comprensiones, mientras que la visualización del conocimiento su objetivo es mejorar la transferencia de conocimiento entre al menos dos personas o grupo de personas.

Mientras la visualización de la información se caracteriza por contribuir a mejorar la recuperación de información, acceso y presentación de grandes conjuntos de datos y

particularmente a través de la interacción computadora-hombre. La visualización del conocimiento principalmente su objetivo es la argumentación de la comunicación intensiva del conocimiento entre individuos, por ejemplo al relacionar nuevas ideas con conceptos ya entendidos, como es el caso de la metáfora visual.

Como uno de los grandes desafíos en la transferencia de conocimiento está las necesidades variadas y el conocimiento previo de la audiencia. En general algunos individuos sólo pueden comprender ciertas cosas si estas están conectadas con algo que ellos ya conocen.

Una visión holística y un sistema de mediación sobre el uso de visualización para explorar información y transferir conocimiento es necesario. Burkhard (2002) presenta una estructura de visualización del conocimiento que trata de integrar resultados de investigaciones en áreas de la visualización de la información, arte cognitivo, ciencias de la comunicación, arquitectura de la información y administración del conocimiento. Esta estructura de visualización del conocimiento permite sistematizar los métodos de visualización, identificar áreas de investigación faltantes y mediar entre diferentes áreas de investigación.

## 6.2.1 Marco de visualización del conocimiento

Al igual que en el campo de la educación, en el campo de la visualización se carecía de métodos y estrategias que permitieran incorporar los recursos tecnológicos en forma adecuada. Además existía una carencia sobre el uso de métodos de visualización tanto para explorar información como para tareas de comunicación.

Dado que el objetivo principal de la visualización del conocimiento es la transferencia de conocimiento, es importante considerar algunas dificultades que según (Burkhard, 2002) requieren ser resueltas:

- Profundidad de la información: Establecer el umbral entre una visión general y el detalle de lo que necesita ser comunicado.
- Tiempo límite: En función de la atención y capacidad del receptor
- Escenarios diferentes: Conocimiento previo, base cognitiva distinta y dificultad en la toma de decisiones para entender las nuevas herramientas de visualización de información.
- Relevancia: Proveer la información relevante para los distintos interesados.

La estructura de visualización del conocimiento se consideró necesaria por que permitirá que los investigadores de la visualización integren en el contexto, las ciencias de la comunicación.

Burkhard y Meier (2005) consideran que el papel de receptor en la visualización no es lo suficientemente estudiado y que en la transferencia de conocimiento el receptor juega un papel importante y necesita por lo tanto mayor atención. El éxito de la visualización necesita ser adecuada al conocimiento base del receptor para que este pueda reconstruir su propio conocimiento como fue pensado por el emisor. Esta es quizá una de la tareas más difíciles, lograr la transferencia del conocimiento de una forma correcta.

La estructura que establece Burkhard (2002) debe de considerarse cuando se quiere crear representaciones visuales cuyo objetivo es transferir y crear conocimiento.

Esta estructura está compuesta por cuatro perspectivas relevantes para garantizar el éxito en la transferencia del conocimiento por medio de representaciones visuales. Estas perspectivas responden a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el conocimiento debe ser visualizado?: define el objetivo
- ¿Qué tipo de conocimiento necesita ser visualizado?: define el contenido
- ¿A quién está siendo dirigido?: define para quien
- ¿Cuál es el mejor método para visualizar este conocimiento?: define el medio

Estas cuatro perspectivas reciben los nombres de; perspectiva de tipo funcional, perspectiva de tipo de conocimiento, perspectiva de tipo de receptor y la perspectiva de tipo de visualización.

La interacción de estas cuatro perspectivas definen el esqueleto conceptual (figura 3), el cual permite estructurar el pensamiento según Burkhard (2005).

Tipo de función	Tipo de conocimiento	Tipo de receptor	Tipo de visualización
Coordinación	Qué saber: Declarativo	Individual	Boceto
Atención	Cómo sabe: Procedimental	Grupal	Diagrama
Recuerdo	Por qué saber: Experimental	Organizacional	Imagen
Motivación	Dónde saber: Orientacional	Red	Mapa
Elaboración	Quién sabe: Individual		Objeto
Nuevas ideas			Visualización interactiva
			Historia

figura 3 Marco general de Visualización del Conocimiento

La adaptación del marco de visualización del conocimiento para aplicarlo a cualquier campo, requiere de experticia para establecer dentro de la perspectiva funcional cual tipo es el más adecuado, dentro de la perspectiva del conocimiento para definir que tipo de conocimiento queremos transmitir y en la perspectiva de visualización cuál medio de representación visual elegimos y que sea el más adecuado.

Si este marco de visualización se utiliza en educación, la perspectiva de tipo de receptor queda definida en caso que se trabaje con grupos. Es decir, nuestra audiencia siempre sería el grupo de estudiantes.

Seguidamente se hace una descripción de las distintas perspectivas que constituyen el marco general de visualización del conocimiento.

### 6.2.1.1 Perspectiva de tipo funcional

Esta perspectiva está compuesta por seis funciones de las representaciones visuales que pueden ser exploradas y aplicadas en la transferencia del conocimiento. Se considera que tienen varios beneficios, en el ámbito social, emocional y cognitivo. Burkhard (2005) las resume con el acrónimo de CARMEN y caracteriza cada una de ellos.

**Coordinación:** Las representaciones visuales se considera que ayudan a coordinar a los individuos en los procesos de comunicación, se recomienda usar visualizaciones del tipo de; mapas de conocimiento, herramientas visuales para trabajo colaborativo. Por lo que en este caso se considera que las representaciones visuales tienen un beneficio social.

**Atención:** Las representaciones visuales permiten llamar la atención y con ello conducir emociones. Permiten la identificación de patrones y tendencias. Por lo que se considera que su beneficio es de tipo cognitivo.

**Recuerdo:** Las representaciones visuales mejoran el recuerdo y la memoria, de esta forma se fortalece la aplicación de nuevo conocimiento. Se recomienda la utilización de la metáfora visual y los diagramas interactivos. Su aporte en este caso se considera de carácter cognitivo.

**Motivación:** Las representaciones visuales inspiran, motivan, energizan y activan a la audiencia. Esto permite que la audiencia se involucre en la interpretación y la exploración gráfica. Se recomiendan los mapas de conocimiento, historias mutuas y diagramas interactivos. Su beneficio es de carácter emocional.

**Elaboración:** Las representaciones visuales fortalecen la elaboración del conocimiento en equipos. El proceso de visualización del conocimiento conduce a promover la comprensión y apreciación de conceptos e ideas. Su beneficio es cognitivo.

**Nuevas Ideas(New Insight):** Las representaciones visuales contribuyen a la creación de nuevas ideas, dado que en estas se involucra detalle del contexto e ilustran relaciones entre objetos. Permite revelar conexiones previas que se encuentran ocultas y conducir a súbitas iniciativas a partir de la experiencia. La visualización de información puede colaborar en estos aspectos.

### 6.2.1.2 Perspectiva de tipo conocimiento

En esta perspectiva el objetivo es identificar el tipo de conocimiento que necesita ser transferido. En la estructura de visualización del conocimiento se distinguen cinco tipos de conocimiento, tales tipos de conocimiento son investigados en el campo de la Administración del Conocimiento. Los cinco tipos de conocimiento que se distinguen son; conocimiento declarativo, conocimiento procedimental, conocimiento experimental, conocimiento orientacional y el conocimiento individual. Hasta ahora según Eppler y Burkhard (2004) no existe una clasificación que vincule los formatos de visualización y los tipos de conocimiento.

Se considera que el conocimiento declarativo responde a ¿qué saber? y se refiere a hechos, el conocimiento procedimental responde a ¿cómo saber? y hace referencia a procesos, el conocimiento experimental que responde a ¿porqué saber? se refiere a las causas, el conocimiento orientacional que responde a ¿dónde saber? que hace referencia a fuentes de conocimiento y por último el conocimiento individual que responde a ¿quién sabe?, es decir, se refiere a los expertos.

### 6.2.1.3 Perspectiva de tipo receptor

Respecto al receptor es necesario conocer su contexto o bagaje cognitivo, para poder elegir el método correcto de visualización para la transferencia del conocimiento. Además se requiere saber si es individual, grupal, una red o una organización.

### 6.2.1.4 Perspectiva de tipo de visualización

La cuarta perspectiva establece una taxonomía simple que está disponible para visualizar el método de visualización existente, en este caso se distinguen seis: los bocetos, diagramas, imagen, objeto, visualización interactiva y la historia mutua. En esta perspectiva se caracteriza los principales medios de representaciones visuales.

**Bocetos:** Se considera que representa la idea principal, son atmosféricos y contribuyen rápidamente a visualizar una idea. Son utilizados para asistir los grupos de reflexión, los procesos de comunicación al tomar el conocimiento explícito y debatible. Se mencionan cinco fortalezas de los bocetos:

- Representan la idea principal y características claves de un estudio preliminar y contribuye al razonamiento y la argumentación.
- Son atmosférico, versátiles y de acceso universal.
- Son rápidos de crear y ayudan a visualizar una idea rápidamente.
- Mantienen la atención.
- Concede el espacio para la propia interpretación y fortalece la creatividad en grupos.

En general los bocetos contribuyen al trabajo en equipo, a mejorar procesos de reflexión y también contribuye a la discusión individual.

El siguiente es un ejemplo de un boceto desarrollado para la implementación de un scroll 3D en un sistema de visualización jerarquizada en un ambiente tridimensional llamado Biovisualizador (figura 4) (Hernández & Monge, 2007).

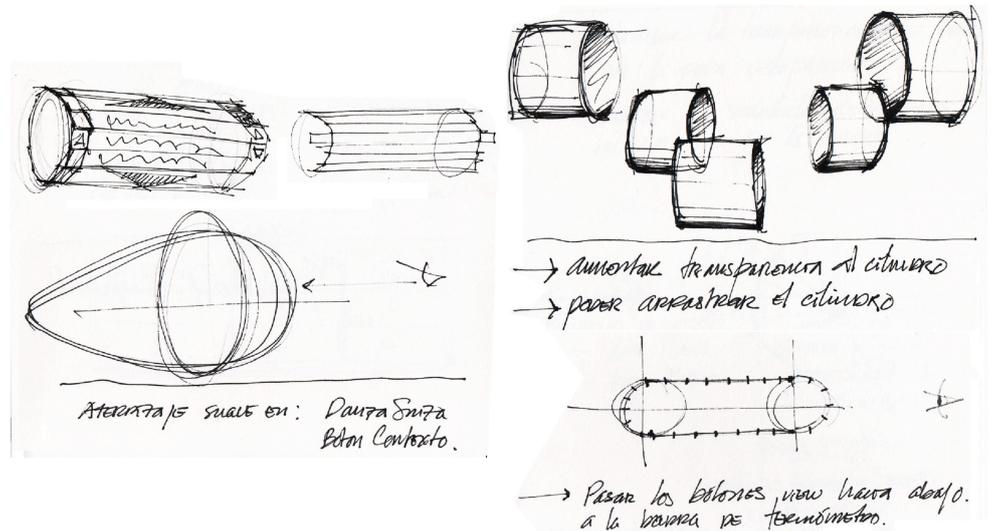


figura 4 Bocetos de la fase de desarrollo del scroll 3D

**Diagramas:** Los diagramas son descripciones esquemáticas de ideas abstractas con la ayuda de formas estandarizadas usadas para estructurar información e ilustrar relaciones.

Los diagramas a diferencia de los bocetos se consideran abstractos, son representaciones esquemáticas usadas para explorar relaciones estructurales entre partes. La utilización de diagramas propicia un conocimiento analítico por ser estructurados y sistemáticos. En la transferencia y creación del conocimiento los diagramas contribuyen a hacer accesible conceptos abstractos, ayudan a reducir la complejidad para amplificar la cognición, sirven para explicar relaciones causales, para estructurar la información, y para la discusión de relaciones. La figura (5) muestra un ejemplo de un diagrama que refleja los casos de usos en el desarrollo de un software para visualizar información jerarquizada en ambientes tridimensionales.

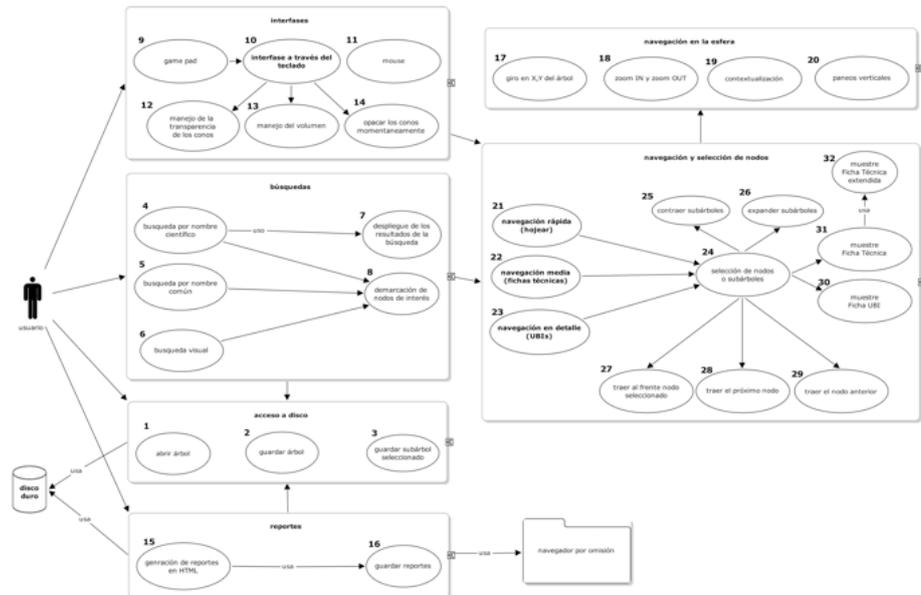


figura 5 Diagrama de casos de uso

**Mapas de conocimiento:** Los mapas siguen convenciones cartográficas para referenciar el conocimiento. Se caracteriza por presentar tanto la generalidad como el detalle y las interrelaciones entre los elementos de detalle. Para la transferencia y creación del conocimiento los mapas contribuyen a presentar vista global y a la vez detalle, permite la estructuración de la información, contribuye a motivar y activar a la audiencia, contribuye a establecer una historia común y a facilitar el acceso a la información. Como ejemplo, la figura (6) presenta un ejemplo de un mapa conceptual, desarrollado por estudiantes de matemática como herramienta para administrar ambientes multimediales.

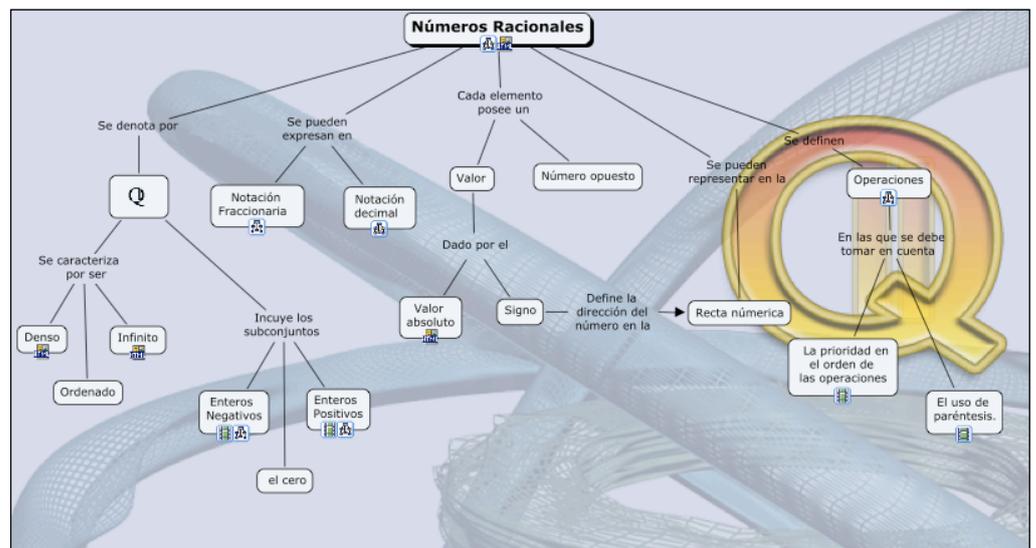


figura 6 Mapa conceptual como herramienta para administrar multimedia

**Imagen:** Las imágenes se consideran expresivas. Estas conducen emociones, son inspiradoras, atrayentes, motivantes y energizantes. Por estas características es que son ampliamente utilizadas en publicidad. Las imágenes pueden ser comprendidas y recordadas en

menos de un minuto y en algunas ocasiones ser recordadas por décadas. Este efecto puede ser utilizado para la transferencia del conocimiento al utilizar metáfora visual.

La metáfora visual contribuye a recordar, a conducir efectos, ayuda al razonamiento y a la comunicación.

Las imágenes son instantáneas, rápidas y altamente instructivas, y facilitan el aprendizaje. Para la transferencia de conocimiento contribuyen a llamar la atención de la audiencia, la inspiran, le conducen emociones, mejora el recuerdo y contribuyen a iniciar discusiones. La figura (7) es un ejemplo donde una imagen dice más que mil palabras.



figura 7 Ejemplo de una imagen sugestiva típica

**Objeto:** La exploración en el espacio tridimensional permite la experimentación con materiales. Permite puntualizar sobre la información de interés. Por ejemplo ferias de conocimiento a través de exhibiciones que contribuye a complementar la visualización física y digital, y para mostrar el contenido desde distintos puntos de vista.

Para la transferencia y creación del conocimiento, los objetos contribuyen a atrapar a la audiencia, ayudan al aprendizaje por medio de la presencia constante y permite la integración de interfaces digitales. La figura (8) muestra una comparación por épocas de algunos objetos que las caracterizan.



figura 8 Ilustración de objetos en distintas épocas

**Visualización interactiva:** Permite el acceso, la exploración y hacer juicios de distintos tipos de información.

La visualización interactiva principalmente es apoyada por la computadora, permitiéndole al usuario controlar, interactuar y manipular distintos tipos de información en una manera que fortalece la creación y la transferencia del conocimiento.

Para la transferencia del conocimiento la visualización interactiva contribuye a fascinar a la audiencia, habilita la colaboración interactiva a través del tiempo y el espacio, permite la representación y exploración de datos complejos y la creación de nuevas ideas. La figura (9) muestra un sistema de visualización interactiva, para la visualización de información jerarquizada, en el caso particular de los Anfibios de Costa Rica. (Hernández & Monge, 2007)



figura 9 Árbol de conos para las especies de anfibios de Costa Rica

**Historia Mutua:** Son visualizaciones imaginarias que son eficientes en la transferencia y disseminación del conocimiento a través del tiempo y el espacio.

Para la transferencia del conocimiento la visualización imaginaria complementa los otros seis formatos visuales y son importantes para establecer una visión común, una historia mutua, para motivar y activar a cada uno de los sujetos de la audiencia.

Dado que hay evidencia de que las visualizaciones pueden tener sus desventajas de acuerdo al contexto específico de aplicación. Es importante tomar en cuenta que no se debe obviar el riesgo inherente al usar tales formatos de visualización, entre ellas Eppler y Burkhard (2004) mencionan las dificultades que se presentan por el mantenimiento de los diagramas y mapas, restricciones en el tiempo de vistas inválidas y la manipulación de los usuarios o la distorsión de la realidad por la mala interpretación.

Uno de los problemas que se presentan en la transferencia del conocimiento no es el cómo el receptor adquiere y asimila el conocimiento sino también el uso de este conocimiento. Por lo que el conocimiento para ser recreado en la mente del receptor depende de la capacidad cognitiva del receptor en el proceso en que llega el estímulo. De esta forma la persona responsable de la transferencia de conocimiento no sólo necesita transmitir el conocimiento relevante en el momento justo y a la persona correcta, si no que necesita transmitirlo en el contexto correcto y la forma en que este pueda ser usado.

## 6.2.2 Modelo de Visualización del Conocimiento

El marco de visualización del conocimiento es importante porque estructura y define componentes relevantes que se deben considerar en la transferencia del conocimiento cuando se utilizan representaciones visuales, sin embargo se debe recalcar que la elección del formato visual correcto que responde a las perspectiva funcional y de conocimiento demanda mucha habilidad y experiencia. Para tal efecto Burkhard y Meier (2005) establecen un modelo general de visualización que apoya a las personas principiantes en esta línea y además a mediar entre investigadores de distintos campos. Tal modelo identifica y relaciona las características que contribuyen a un comportamiento exitoso cuando las representaciones visuales son usadas para la transferencia y creación del conocimiento.

Este modelo según Burkhard y Meier (2005) es necesario por las siguientes tres razones:

- Los modelos en las ciencias de la comunicación de Shannon y Weaver son muy generales al considerar el uso de representaciones visuales.
- Los científicos de la visualización no ofrecen un modelo holístico para la transferencia y creación del conocimiento a partir del uso de representaciones visuales.
- El modelo complementa la estructura de visualización del conocimiento y juntos pueden alcanzar las metas que se definen en la visualización del conocimiento.

El modelo presentado por Burkhard y Meier (2005) es el siguiente:

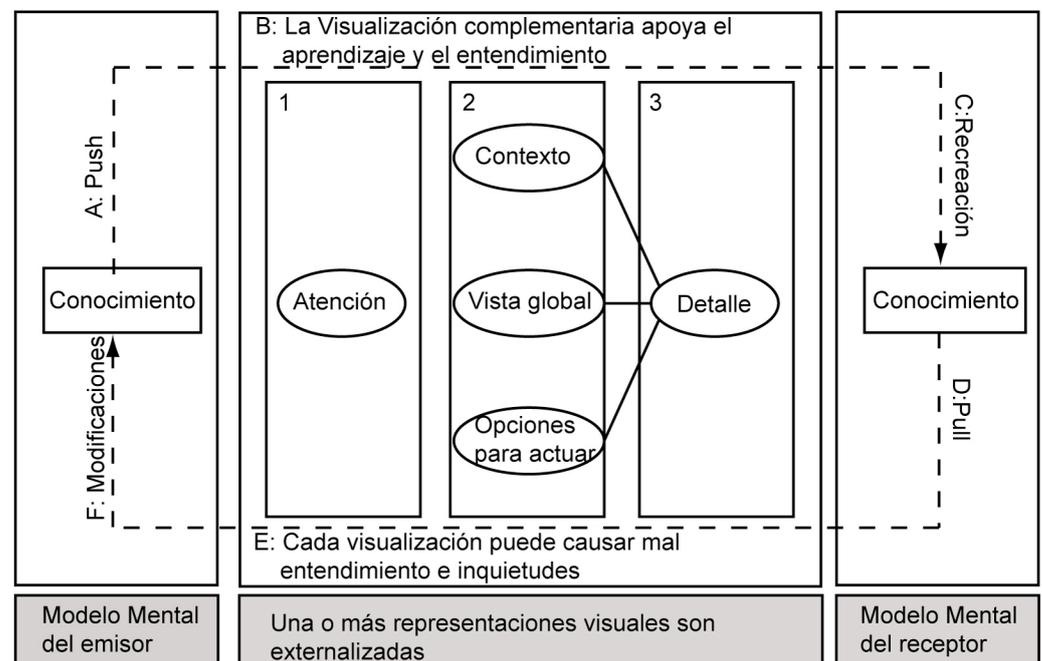


figura 10 Modelo de Visualización del Conocimiento

El modelo está compuesto por tres partes o fases, el emisor, un medio y el receptor. El proceso inicia cuando el emisor a partir de su modelo mental, quiere transmitir a alguien algo de su conocimiento, este modelo mental se externaliza por medio de varias representaciones visuales explícitas, es decir entramos a la fase dos del modelo.

En esta segunda etapa el primer objetivo es llamar la atención del receptor, esto se puede alcanzar según Burkhard utilizando una imagen sugestiva o provocativa. Segundo el emisor requiere ilustrar el contexto, por medio de una vista global y presentar opciones para actuar. Es en este momento que el emisor puntualiza en los detalles, esto debe ocurrir en un diálogo dinámico con el receptor, dado que este es quien construye un conocimiento similar a partir de su propio modelo mental.

Por último debido a las distintas suposiciones, creencias o conocimiento previo, puede ocurrir la mala interpretación del mensaje y por tanto una falla en la reconstrucción del conocimiento, por lo que el modelo plantea una revisión y adecuación del medio de visualización utilizado hasta que el conocimiento sea transferido adecuadamente.

Este modelo introduce las características relevantes que necesitan ser consideradas cuando complementariamente las representaciones visuales son usadas para la transferencia y creación del conocimiento.

Es modelo así definido parece difícil de aplicar en la enseñanza, por cuanto a veces es difícil conocer el conocimiento previo del grupo de estudiantes en el momento oportuno y en algunos casos modificar las representaciones visuales por la retroalimentación recibida con los estudiantes respecto al conocimiento reconstruido.

Burkhard y Meier (2005) establece algunas consideraciones que son necesarias al implementar el marco de visualización del conocimiento y su modelo de visualización:

- Se necesita asegurar la calidad de la información y realizar un chequeo que garantice que la información está completa, que es fiable y relevante para el receptor. Sólo entonces se debe concentrar en lo social, lo cultural y el conocimiento educativo del receptor y saber o conocer sus necesidad personal y funcional.
- El diseñador debe direccionar el contexto y presentar ambos vista global y detalle sobre la información e idealmente ofrecer opciones para actuar, y opciones de cómo el conocimiento puede ser aplicado.
- La visualización debe ser comprimida a la idea principal del mensaje o al contenido y ser consistente. Consistente al considerar la lógica, la forma de interactuar con el y el uso de los elementos visuales.
- Elementos como el color, forma, tamaño, símbolos o tipos de letras deben ser similares para tipos similares de datos en todas las visualizaciones. Esto es importante para prevenir la mala interpretación, el mal uso y el mal entendimiento. Se considera que en situaciones ambiguas el uso de texto podría ayudar a clarificar el mensaje.

En tareas de motivación, las representaciones visuales deben ser diseñadas de tal forma que permitan causar pensamiento e involucrar al receptor a elaborar su propio conocimiento.

## **6.3 El papel de la visualización en la enseñanza de la matemática**

Todo lenguaje, verbal o no verbal, obliga a quienes lo emplean a una actividad representativa, que podemos llamar actividad de simbolización, es decir, la capacidad de expresarse por medio de “símbolo”(que pueden ser palabras, sonido, números o imágenes).

La visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo. Existe una tendencia a dar por sentado que la lectura de conceptos y dentro de una teoría de representación no es así (Hitt, 2003).

Siguiendo con la importancia de poseer varias representaciones visuales para un mismo concepto, de acuerdo con las consideraciones teóricas de Duval para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también la tarea de conversión de una representación a otra. Son estas las que propician la construcción de los conceptos matemáticos.

Cualquier representación visual implica un proceso de percepción, Hitt (2003) define percepción como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos.

Todo proceso inductivo se basa en la experiencia, y es precisamente partiendo de los datos recibidos a través de la experiencia perceptiva que la inducción puede captar las relaciones conexas (Lazotti, 1981).

En el sentido de Hershkowitz (citado por Arcavi, 2002), trata la visualización matemática como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual.

Duval(1999) declara que no hay entendimiento sin visualización, esta declaración es un argumento conveniente para la distinción entre visión o percepción y visualización en la cognición matemática y aprendizaje, y el poder de coordinar distintos registros de representación. Duval puntualiza la existencia de varios registros para representaciones discursivas y varios sistemas de visualización. Esto implica una interacción cognitiva compleja base en cualquier actividad matemática. En este contexto un registro de representación equivale a un medio específico de representación y procesamiento del conocimiento matemático.

En visualización se definen dos clases de registros; los registros con una estructura triádica de trascendencia(lenguaje natural, formas de representación 2D y 3D) y diádica de trascendencia(notación simbólica, lenguaje formal). El pensamiento matemático según Duval requiere de la activación en paralelo de dos o tres registros de representación.

La necesidad de varios registros de representación de acuerdo con Duval(1999) sugieren varias preguntas que son importantes para entender las condiciones reales del aprendizaje de la matemática. La primera está relacionada con la forma específica de trabajo en cada registro, que operaciones son favorecidas o son solo posibles dentro de cada registro. Otra se refieren al cambio de un registro a otro, son estos cambios muy frecuentes o necesarios. Hay un registro más conveniente o adecuado en el pensamiento matemático que otros.

Para Duval(1999) en general un matemático no ve porque surgen estas preguntas, pero desde un punto de vista didáctico estas son preguntas que dificultan la formulación del aprendizaje.

El aprendizaje de la matemática no puede progresar si no entendemos como trabajan los registros(Duval, 1999), en uno de los problemas que se presentan en el contexto del aprendizaje de la matemática.

Duval(1999) distingue dos clases de operaciones cognitivas en el pensamiento matemático procesamiento y conversión. Los procesos matemáticos están compuestos de dos clases de transformación de representaciones. Hay transformaciones que están hechas dentro de un mismo registro de representación como la aritmética o el cálculo algebraico.

Con la estructura diádica la posibilidad semiótica de generar nuevas representaciones de una representación dada depende tanto del sistema semiótico como de las reglas matemáticas. Por tanto hay una transformación de “proceso” y una transformación de “conversión” , un ejemplo de esta última es transformación de ecuaciones en gráficos cartesianos. Por lo general no se pone atención a la brecha entre estas dos operaciones cognitivas que son el fundamento

de los procesos matemáticos. Sin embargo si la mayoría de los estudiantes aprenden algunos procesos, muy pocos de ellos pueden realmente convertir representaciones.

Otro de los problemas cruciales que plantea Duval(1999) es la conversión de representaciones. Por ejemplo las actividades matemáticas en situaciones de resolución de problemas, requieren la habilidad de cambiar registros ya sea por otra representación del dato que se ajusta mejor al modelo conocido o porque dos registros pueden ser mejor juntos en la interacción como es el caso de la notación simbólica en geometría.

Desde un punto de vista didáctico, son únicamente los estudiantes los que pueden ejecutar el cambio de registros y con confundir el objeto matemático con su representación.

La mayoría de profesores, matemáticos y psicólogos ponen poca atención a la diferencia de naturaleza entre proceso y conversión. Estas dos clases de operaciones cognitivas son agrupadas en una sola unidad de procesos matemáticos en la solución de problemas(Duval 1999).

Y por último es importante considerar el aprendizaje de la matemática y la progresiva coordinación entre registros. Para Duval los variados y continuas observaciones a un requerimiento básico que es, especificar para cualquier progreso en el aprendizaje de la matemática; la coordinación entre registro de representación. Las clases de operaciones cognitivas que se espera hacer con el aprendizaje no es entre la matemática empírica y deductiva, entre pruebas y construcción, entre estructura matemática y simbólica sino entre los diferentes registros de representación semiótica.

Estas conexiones entre registros hacen la arquitectura por la cual los estudiantes puedan reconocer el mismo objeto a través de distintas representaciones y poder hacer conexiones objetivas entre matemática deductiva y empírica. El aprendizaje de la matemática implica la construcción de esta arquitectura acognitiva(Duval,1999).

Un aporte importante es la diferenciación que establece Duval entre visión y visualización. Para Duval(1999) desde un punto de vista de la psicología "visión" se refiere a percepción visual y por extensión a imágenes visuales. Como percepción la visión involucra dos clases de funciones cognitivas, función epistemológica y función sinóptica. A diferencia de visión la cual provee un acceso directo al objeto, la visualización está basada en la producción de un representación semiótica.

Una representación semiótica no muestra las cosas como ellas pueden ser en el ambiente 3D o como ellas pueden ser físicamente proyectadas sobre un pequeño apoyo material en 2D, esto es materia de la percepción visual. Un representación semiótica muestra relaciones o mejor aún la organización de relaciones entre unidades representacionales. Para Duval la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión.

La percepción visual necesita explorar a través de los movimientos físicos porque nunca da un comprensión completa del objeto, por el contrario la visualización puede obtener una comprensión completa de cualquier organización de relaciones.

Esta diferenciación entre percepción visual o visión y visualización establece dos consecuencias para el aprendizaje de las matemáticas.

La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica y que no es mental ni física. Algunos experimentos sobre rotación mental de objetos tridimensionales están en la línea de esta concepción de imagen mental como una extensión de percepción visual. La forma de ver no es la misma en visión que en visualización, sin embargo es confundido en dos situaciones, la primera es cuando ellas son producidas gráficamente, las representaciones semióticas están sujetas a la aprehensión visual perceptiva, en este sentido la visualización es siempre desplazada dentro de percepción visual o dentro de su existencia mental. Lo segundo es que algunas representaciones semióticas como los dibujos, su objetivo

es ser representaciones icónicas, es decir, hay una relación aparente entre el contenido de la representación y el objeto representado. En este caso según Duval(1999) la representación icónica se refiere a una percepción previa del objeto representado.

La investigación sobre visualización en educación matemática aparece alrededor de los años 80s con autores como Bishop, Clements y Presmeg , aunque para ese momento se restringe la noción de visualización y no es visto como un área o campo de investigación propiamente en educación matemática (Presmeg, 2005).

En esa misma década el surgimiento del constructivismo, además de la influencia del conductismo y la investigación en metodologías cualitativas marcan el inicio de una aceptación, es decir, se da un carácter valioso a la reflexión sobre preguntas complejas en educación matemática. Este periodo marca un renovado interés sobre el papel del pensamiento visual en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y la investigación cualitativa se convierte en un vehículo apropiado para el desarrollo de esta área.

La Conferencia Anual del Grupo Internacional para Psicología de la Educación Matemática(PME) fue uno de los lugares que dio origen a las primeras presentaciones sobre investigaciones realizadas, que involucran la visualización en la enseñanza de la matemática.

Presmeg (2005) señala que en la PME-13 llevada a cabo en 1998 en París, se presentó un artículo específicamente en imágenes visuales y un año después se presenta un reporte de investigación realizado por Dreyfus y Eisenberg que sugiere que los estudiantes de colegio son reacios a usar procesamiento visual en matemática.

En 1998, por iniciativa de Fernando Hitt, profesor investigador del CINVESTAC de México en ese momento, se crea un grupo de trabajo sobre Representación y Visualización Matemática que realizó investigaciones sobre el tema por un periodo de cinco años.

Según Presmeg (2005) ya en 1991 en la PME-15 la visualización matemática como campo de estudio viene a dar sus frutos, en esta conferencia los temas de imágenes y visualización fueron presentadas como categoría separadas en la lista de temas. Diez reportes de investigación relacionados al tema de visualización en la enseñanza de la matemática fueron presentados por autores como Antonietti, Angelini, Bakar, Tall, Friedlander, Dreyfus y Presmeg entre otros.

Por ejemplo el reporte de investigación presentado por Presmeg el cual llevaba por nombre “Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics”. Este estudio se llevó a cabo durante tres años y su objetivo principal era entender mas acerca de las circunstancias que afectan la forma en que opera la visual de los alumnos y como los profesores facilitan o por el contrario obstruyen su desarrollo.

En 1992 se continua un grupo de trabajo organizado por M.A. Mariotti y A. Pesci sobre visualización en la solución de problemas y el aprendizaje. Es importante hacer notar que hasta este momento la mayoría de las investigaciones eran enfocados desde la perspectiva de la psicología.

En 1995 y 1996 aparecen dos artículos relacionados con el planteamiento de Dreyfus sobre la renuencia de los estudiantes a la visualización matemática, el primero de ellos desarrollado por Presmeg y Bergsten en la PME-19, y el segundo por Healy y Hoyles en la PME-20. Ellos plantean que generalmente los estudiante de matemática a diferencia de los matemáticos raramente exploran el potencial considerable de los métodos visuales como apoyo al aprendizaje significativo.

Por ejemplo, la investigación realizada por Presmeg y Bergsten sugiere que la declaración de que los estudiantes son reacios a visualizar es compleja y que esta no debe entenderse de una forma simplista para mediar que los estudiantes no usen este modo de pensamiento matemático. Que por el contrario indican que en la medida de la preferencia por la

visualización matemática, los valores obtenidos en el estudio siguen una distribución normal en la mayoría de la población.

En 1997 en la Conferencia Anual PME-21, la discusión sobre la renuencia alcanza un punto alto, cuando se habla sobre dos tendencias propuestas para iluminar la naturaleza dual de la matemática. Presmeg señala que ya en 1997 Breen describe dos tipos de pensamiento matemático, indicando que uno de ellos tiene una tendencia hacia la abstracción y el otro tiene la tendencia hacia el entendimiento intuitivo el cual da importancia a los procesos de visualización y a las imágenes .

Ya en el 2001, Stylianou sugiere que en el aprendizaje de la matemática a nivel de colegio la imagen de la renuencia a visualizar ha ido cambiando desde el planteamiento de Dreyfus. Stylianou llama la atención a los educadores de matemática a ser más concedores acerca de las debilidades y fortalezas asociadas con el procesamiento visual.

Estas fortalezas y debilidades relacionadas al procesamiento visual fueron claramente presentadas en la visualización del conocimiento, por lo que su utilización en la enseñanza estaría enfocada en la transferencia del conocimiento por medio de representaciones visuales. Como soporte teórico para el desarrollo de temas propiamente en el área de la matemática merece algunas reflexiones. Además es importante evolucionar con la teoría, es decir, poder explorar con mayor profundidad la capacidad visual que permitan alcanzar procesos de análisis específicamente en la enseñanza de la matemática.

Según Schneider y Stern (2005) algunas teorías de aprendizaje y cognición postulan que nuestra conducta es compartida por al menos dos clases distintas de conocimiento; uno que provee un entendimiento abstracto de los principios y relaciones entre las piezas del conocimiento en un cierto dominio y otro que nos permite rápida y eficientemente resolver problemas. El primero llamado conocimiento conceptual y el segundo conocimiento procedimental.

El conocimiento conceptual es visto como el conocimiento de los conceptos y principio básicos y su interrelación en cierto dominio. En consecuencia se asumen que será guardado en alguna forma de representación relacional, como esquema, redes semánticas o jerarquías. Por su naturaleza abstracta y por el hecho de que puede ser accedido conscientemente y puede ser en gran medida verbalizado y transformado flexiblemente a través de procesos de inferencia y reflexión, por tanto no está vinculado con problemas específicos sino que puede en principio ser generalizado por una variedad de tipos de problemas en un dominio.

En contraste al conocimiento conceptual, el conocimiento procedimental se ve como el conocimiento de operaciones y de condiciones sobre las cuales esos pueden ser usadas para alcanzar ciertas metas.

El conocimiento conceptual permite a las personas resolver problemas rápida y eficientemente por su grado de automatización. Esta automatización se logra a través de la práctica y permite una activación y ejecución rápida del conocimiento procedimental. Este tipo de conocimiento involucra una mínima atención conciente y pocos recursos cognitivos.

Los modelos cognitivos de las relaciones entre ambos conocimientos puede facilitar la comprensión de la mente humana y puede también contribuir a diseñar contextos en el cual el conocimiento puede ser transmitido.

En educación matemática el aprendizaje funcional y permanente sólo es posible al balancear el conocimiento conceptual y el procedimental.

El papel de la visualización en la matemática puede ser visto desde dos puntos de vista; el primero que considera que la visualización es un apoyo en la representación y construcción de conceptos, y la segunda considera la visualización como herramienta de carácter axiomático

que permitiría su uso en la validación de teoremas. Seguidamente se presentarían algunas ideas importantes relacionadas con estos dos enfoques.

Por un lado los proponentes de la visualización matemática apoyados por la computadora argumentan que la visualización puede ayudar a construir la intuición necesaria tanto para crear pruebas de teoremas como para entenderlas (Muznner, 1996).

Bajo esta perspectiva, en el panel dirigido por Muznner (1996) algunos cuestionamientos se hacen al respecto:

- ¿Cuál es el papel de la visualización en la matemática pura, vale la pena esforzarse por diseñar herramientas de visualización para la exploración matemática?. ¿Cómo la visualización matemática difiere o se ajusta dentro de la corriente principal de la visualización científica?
- ¿Puede la visualización matemática constantemente conducir a nuevos resultados de investigación o es principalmente adecuado para comunicar trabajos previamente descubiertos por otros investigadores o estudiantes?
- ¿Que otras áreas de la matemática distintas a la geometría son posibles de visualizar y si esta contribuye a simplificar el cuerpo del conocimiento matemático o puede cambiar la naturaleza del conocimiento matemático?

Ante estas preguntas y de acuerdo con lo mencionado en el apartado de la visualización del conocimiento, el aporte de la visualización en la enseñanza de la matemática es real. Se considera que si vale la pena diseñar herramientas de visualización que permitan la exploración y el reconocimiento de patrones.

En este panel dirigido por Muznner participaron personalidades como David Benks, George Francis y Andrew J. Hanson. Por ejemplo, David Benks declara que los gráficos por computadora son útiles para enseñar tópicos simples en matemática. Por otro lado George Francis puntualiza que más que cambiar la naturaleza de la matemática la computadora cambiará el contenido de la matemática.

Por último Andrew J. Hanson plantea que la visualización en general incluye una transformación entre un cuerpo de conocimiento y una imagen o quizá una animación interactiva, capaz de representar características del dato a un espectador. En general podría ayudarle a estimular asociaciones en la mente que le liderarán futuras intuiciones, sugerencia de nuevas hipótesis para probar y así contribuir al progreso de la ciencia más rápidamente que sin esta metodología. La visualización matemática tendrá principalmente un valor pedagógico.

En principio efectivamente lo que se quiere es contribuir con las representaciones que un estudiante puede tener sobre un concepto, estimular las interrelaciones entre conceptos asociados a un tema, reconocimiento de patrones, propiciar nuevas hipótesis y algunos aspectos generales relacionados con la motivación, la memoria, el reconocimiento, la cooperación, la atención entre otros.

Desde el otro punto de vista, donde la visualización se considera como un apoyo en la representación y construcción de conceptos para Fernando Hitt (1998), los temas de representación y visualización matemática han aparecido en la literatura reciente como aspecto fundamental para entender la construcción de conceptos matemáticos y la resolución de problemas por parte del estudiante.

En el marco del panel sobre representación y visualización matemática dirigido por Fernando Hitt (1998) se hacen algunas reflexiones relacionadas a esta temática:

- La relevancia de hacer investigación empírica ligada a la representación y a la visualización matemática.
- La importancia de la teoría en seguir investigación en representación y visualización

matemática.

- La aplicación de los resultados de investigación que vinculan el aprendizaje matemático del estudiante y el uso de múltiples representaciones dentro de un marco teórico.
- La influencia de múltiples bases tecnológicas vinculadas a las representaciones en la construcción de conceptos matemáticos del estudiante.

Ante estas cuestiones se considera que tradicionalmente la enseñanza se ha centralizado en el uso de representaciones algebraicas con la intención de eliminar la confusión entre objetos matemáticos y sus representaciones. Normalmente no se toma en cuenta las representaciones geométrica e intuitivas, además se piensa que el sistema algebraico de representación es formal en contraposición con cualquier otro.

Se plantea que quizá la dificultad de algunos estudiantes en la construcción de conceptos está vinculado a las restricciones de representación que se tienen cuando se enseñan, sin embargo es sabido que por investigaciones empíricas, que la construcción de un objeto matemático por parte del estudiante está basado en el uso de varias representaciones semióticas.

El manejo de distintas representaciones matemáticas por parte de los estudiantes permitirá medios de construcción de imágenes mentales de un concepto matemático, el concepto de imagen según Vinner and Tall. Esta es la línea que queremos seguir en la educación matemática con apoyo de la visualización del conocimiento liderada por Burkhard, Eppler y Meier entre otros.

Las siguientes ideas podrían ser utilizadas o consideradas para un marco metodológico para dar soporte al aprendizaje de la matemática por medio de la visualización según Hitt (1998):

- Aspectos teóricos del aprendizaje de la matemática los cuales toman en cuenta el papel de las representaciones semióticas en la construcción de conceptos matemáticos.
- Aspectos teóricos relacionados a las representaciones semióticas que tratan con una epistemología social del conocimiento matemático con aplicaciones didácticas en la clase.
- Un análisis de las ideas matemáticas relacionadas a un concepto mediante la historia de la matemática para describir los obstáculos epistemológicos.
- Al tomar en cuenta distintos sistemas de representación, nosotros podemos identificar variables relacionadas a contenidos cognitivos y de esta forma organizar la propuesta didáctica para apoyar que el estudiante articule en distintas representaciones.

Estas ideas no son tan triviales por cuanto van más allá, tanto en la visualización misma como en el uso de representaciones semióticas. La construcción de conceptos matemáticos, los obstáculos epistemológicos y todo con el objetivo de plantear una propuesta didáctica que involucre la representación y visualización matemática.

Konyalioglu et al. (2000) señalan que las investigaciones en educación matemática han cambiado durante las últimas cuatro décadas y que el conocimiento matemático está entre los temas más importantes en los procesos de cambio. Sin embargo la tarea sigue siendo una tarea difícil, reflexiones sobre situaciones complejas del aprendizaje y la enseñanza de la matemática están siempre en la palestra y cada vez hay más variables involucradas.

Los gráficos, los diagramas, las imágenes y formas geométricas o modelos son herramientas para la visualización del concepto abstracto en matemática. Por medio de estos

los sentidos humanos ponen una elevada relación entre el mundo físico o externo y los conceptos abstractos (Konyalioglu et al. ,2000).

Al utilizar métodos de visualización muchos de los conceptos matemáticos pueden considerarse concretos y clarificar para el estudiante su comprensión, este es el objetivo que se persigue.

La visualización puede ser un método alternativo y un recurso poderoso para los estudiantes que hacen matemática, un recurso que puede orientar el camino de distintos medios de pensamiento acerca de la matemática más que la lingüística y el pensamiento lógico proposicional tradicional y la manipulación simbólica tradicional del álgebra.

En su reporte de investigación, Konyalioglu et al. (2000) presenta como conclusión que la visualización en el proceso de enseñanza incrementa el aprendizaje conceptual del estudiante.

Abu, Hassan y Sahid (2001) señalan que las actividades de aprendizaje deberán tomar ventaja de las capacidades de la tecnología y que además deberían involucrar múltiples representaciones de temas matemáticos y múltiples métodos de representación y solución de problemas.

Los gráficos e imágenes son usadas para representar las ideas abstractas de la matemática de una forma visual, además la visualización como se ha mencionado es parte esencial en el proceso de aprendizaje.

Wiebe, Clark, Petlick y Ferzli (2004) señalan que con una herramienta de visualización simple o compleja el estudiante puede ser conducido a investigar, a analizar fenómenos, a resolver problemas y mejorar la comprensión entre temas.

En cuanto a las metodologías de investigación para analizar la construcción de conceptos matemáticos cada vez son mas finas y por lo general este problema debe de tratarse desde dos puntos de vista (Hitt, 2003). El primero que es un punto de vista más holístico relacionado con la adquisición de conocimientos y consideraciones teóricas sobre la construcción de conceptos matemáticos y el segundo que tiene que ver con la complejidad intrínseca del concepto matemático y ambos deben tratarse desde una misma base teórica.

Algunas interrogantes planteadas por Hitt (2003) son las siguiente:

- ¿Por qué debemos desarrollar habilidades en nuestros estudiantes sobre la visualización matemática?
- ¿Es posible desarrollar en nuestros estudiantes habilidades sobre la visualización matemática?
- ¿Por qué las representaciones y la visualización matemática juega un papel importante en el aprendizaje de la matemática?
- ¿Qué tipo de marcos teóricos son usados para dar soporte a la importancia del aprendizaje del estudiante?
- ¿Qué relevancia tiene hacer investigación empírica vinculada a la representación y visualización matemática?

A las primeras dos preguntas podemos tratarlas desde la teoría de la visualización del conocimiento, el cual enfatiza sobre el potencial del cerebro humano para procesar efectivamente representaciones en formato visual y las potencialidades de la inteligencia visual, es decir la materia prima existe y puede ser explotada en cualquier campo, en particular en la enseñanza de la matemática. Aportes relacionados con los restantes cuestionamientos han sido mencionados anteriormente, entre los aportes mas destacados ha sido el trabajo realizado por el Grupo de Representación y Visualización Matemática dirigido por Fernando Hitt.

Según Hitt (2003) las investigaciones empíricas han mostrado que la construcción por parte de los estudiantes de un objeto matemático está basado en el uso de varias representaciones semióticas.

La posibilidad de que los estudiantes manejen varias representaciones matemáticas permitirá formas de construcción de imágenes mentales de un concepto matemático. Ante la interrogante; ¿Por qué es importante promover la articulación de diferentes representaciones de un concepto?, algunos investigadores afirman que la comprensión de un concepto está relacionado con el uso de diferentes representaciones de un concepto matemático, es decir la construcción de un concepto se produce cuando los estudiantes usan y manipulan distintas representaciones de este concepto.

Otras interrogantes planteadas por Hitt (2003) son las siguientes:

- ¿Por qué la visualización del pensamiento es fundamental en la solución de problemas?
- ¿Está la comprensión de conceptos matemáticos relacionado al uso de distintas representaciones del concepto en cuestión?

En términos generales el uso de visualizaciones complementarias se considera una estrategia adecuada debido a que el sistema visual humano tiene distintos niveles de procesamiento y áreas especializadas que pueden ser explotadas separadamente.

Algunas condiciones sobre las cuales lo visual ayuda a tener un efecto sobre el aprendizaje son:

- Cuando las ilustraciones son exploratorias y tienen una cadena causa efecto.
- Cuando las ilustraciones exploratorias consisten en una serie de cuadros descriptivos del estado del sistema integrado con etiquetas verbales que escriben los cambios de estado mas que un cuadro de una imagen estática.
- Cuando los estudiantes pierden dominio del conocimiento.

Por último Marshall McLuhan señala “El medio es el mensaje” por lo que podemos argumentar que diferentes formatos visuales transportan diferentes mensajes o perspectivas. Al combinar diferentes representaciones visuales un mensaje puede ser transferido desde distintas perspectivas y por lo tanto una idea más holística.

## 7. Metodología

Haciendo una revisión de los cursos de matemática que imparte en Instituto Tecnológico de Costa Rica se decidió realizar la intervención en el curso: Cálculo Diferencial e Integral, este es un curso típico de cálculo en una variable, se imparten cinco lecciones por semana durante 16 semanas. Dentro de la temática que se desarrolla en el curso se decidió elegir el tema de derivada. Mas explícitamente la definición de derivada, reglas de derivación, derivación implícita y la parte de aplicaciones de la derivada.

La elección de esta temática se basa en la riqueza que esta presenta para usar representaciones visuales, por el uso frecuente de gráficas y por la gran cantidad de aplicaciones que se pueden considerar. El desarrollo de este tema se prolonga por cuatro semanas, lo que significa que la intervención tendrá precisamente esta duración.

Para analizar la influencia de la visualización del conocimiento se decidió para la intervención utilizar un grupo control y otro experimental. Además para darle mayor robustez se coordinó con dos profesores para que llevaran a cabo la intervención, es decir, cada uno impartiría dos cursos de cálculo, uno experimental y otro grupo control. Ambos profesores llevarán a cabo la intervención durante tres semestres consecutivos; I semestre del 2010, II semestre del 2010 y I semestre del 2011 por un periodo de cuatro semanas. En el grupo control se trabaja normalmente mientras que en el grupo experimental se incorpora la variable visualización del conocimiento.

## 7.1 I Semestre del 2011

En esta tercer etapa como era de esperar fue ejecutada en forma sistematizada, la experiencia en las etapas previas permitió la corrección de errores en el material impreso, la adecuación de los tiempos de ejecución del protocolo, el refinamiento de los recursos visuales utilizados y la logística general del curso. Por se hará una breve descripción de los elementos nuevos y algunos eventos que fueron destacados en esta tercer etapa.

### 7.1.1 Sujetos y fuentes de información

Los actores principales en la intervención podríamos decir que son claramente tres; el profesor, los estudiantes y el contenido a enseñar o desarrollar. En el caso de los profesores, el proyecto es ejecutado por dos profesores que participan en cada una de las etapas que conforman la intervención.

Los estudiantes, que en este caso son estudiantes del Instituto Tecnológico de Costa Rica que llevan el curso Cálculo Diferencial e Integral. Este curso está en el programa de la mayoría de las ingenierías que imparte el instituto.

Por último el contenido a desarrollar, en este caso es el tema de derivada y de acuerdo con el programa del curso se desarrolla durante cuatro semanas, para un total de 20 lecciones de 50 min cada una. Este contenido es plasmado en un material de apoyo, desarrollado con un enfoque previamente definido desde la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial y basado en los principios fundamentales de los campos de la visualización de la información y la visualización del conocimiento.

Seguimos utilizaron cuatro grupos con los mismos profesores y para este semestre respectivo la tabla 1 muestra la población total junto con los grupos que forman parte de la investigación.

**Tabla 1:** *Distribución de la población total por grupos*

Grupo	#Estudiantes	Característica
G:01	32	
G:02	40	
G:03	32	Profesor_1_Control
G:04	40	
G:05	32	
G:06	40	Profesor_2_Experimental
G:07	32	
G:08	40	Profesor_1_Experimental
G:09	33	
G:10	32	Profesor_2_Control
G:12	41	
<b>Total</b>	<b>394</b>	<b>Total muestra: 144</b>

Utilizamos grupos como unidades muestrales naturales dentro del campo de la educación y que en este caso representaban el 36.36% de la población total.

De igual forma los grupos fueron conformados en el proceso de la matrícula ordinaria y extraordinaria establecidos por la institución y no hay por tanto control sobre quienes lo conforman. Los cuatro grupos que participaron en la intervención fueron impartidos por los mismos profesores que seguimos llamando Profesor\_1 y Profesor\_2 respectivamente, cada uno con un grupo control y el otro grupo como grupo experimental.

### 7.1.2 Características de los sujetos en ambos grupos

Por la característica de conformación de los grupos existió una diversidad en cuanto a la carrera de origen de los estudiantes. Los grupos del profesor\_1 se les asignó un horario en la tarde y el otro en la mañana. En el caso de los grupos del profesor\_2 la asignación fue similar. Se decidió aleatoriamente la asignación de grupo control y grupo experimental, que al final el resultado se muestra en la tabla 2.

**Tabla 2:** Distribución y horarios de los grupos participantes

Profesor	Grupos	Horario	Aulas	
Profesor_1	G:05 Experimental	M: 7:30am 9:20am	A4:04 Ciencias Sociales Únicamente para las cuatro semanas de ejecución del proyecto	
		V: 7:30am 10:20am		
	G:08 Control	M: 13:00pm 15:50am		F4:05
		V: 13:00pm 14:50pm		
Profesor_2	G:10 Control	K: 13:00pm 15:50am	F4:04	
		J: 13:00pm 14:50pm		
	G:02 Experimental	K: 10:30am 12:20pm	A4:04	
		J: 9:30am 12:20pm		

### 7.1.3 Acceso al campo

En esta tercera etapa ya se manejaban los aspectos más delicados dentro de la institución por lo que los aspectos logísticos se manejaron adecuadamente. Para mantener la formalidad se envió un memorando a la Comisión de Carga de la Escuela de Matemática encargada de asignar tanto los grupos como los profesores, para que se reservaran cuatro grupos de cálculo diferencial e integral para el proyecto y que además se asignaran dos grupos a cada uno de los dos profesores que colaboraron con la investigación.

Para las aulas se coordinó nuevamente con la Escuela de Ciencias Sociales y con la colaboración de su Directora de turno se logró reservar un aula con espacios adecuados para llevar a cabo la intervención y utilizarla por lo menos por el periodo de las cuatro semanas que duraría la intervención.

Esta intervención se realizó a partir de la quinta semana de haber iniciado el semestre y se llevó a cabo por un periodo de cuatro semanas.

### 7.1.4 Materiales

En este apartado no hubo modificaciones por lo que se utilizaron los recurso en forma completa. Seguidamente describimos el marco general de visualización definitivo asociado a cada uno de los temas desarrollados, cada uno de ellos describe los objetivos, el tipo de conocimiento que quiere ser transferido, la definición de la audiencia y el tipo recurso utilizado.

La tabla 3 muestra el marco general relacionado con el tema de razón de cambio constante, en total se desarrollaron seis recursos, al final todos ellos persiguen enfocar los problemas desde distintos contextos. Puntualizamos el hecho de que un objetivo común que se persigue en la mayoría de estos recursos es la motivación, esto por cuanto según una de las condiciones necesarias para que se alcance el aprendizaje significativo es que el estudiantes tenga una actitud favorable y esta se logra si el estudiante está motivado.

**Tabla 3:** Marco de Visualización: Razón de cambio promedio constante

Perspectiva	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso_1	Coordinación	Declarativo	Grupal	Animación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_2	Coordinación	Declarativo	Grupal	Animación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_3	Atención	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Recuerdo	Procedimental		
Recurso_4	Coordinación	Procedimental	Grupal	Animación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_5	Atención	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Recuerdo	Experimental		
	Motivación			
	Nuevas ideas	Conceptual		
Recurso_6	Atención	Conceptual Experimental	Grupal	Simulación
	Motivación			
	Nuevas ideas			

En el caso del tema de razón de cambio no constante, en total se trabajaron cuatro recursos principalmente presentaciones animadas con el objetivo claro de comunicar la mayor cantidad de información con la menor carga cognitiva posible. Además destacamos dentro de los objetivos el llamar la atención, esto nos permite tener la atención del estudiante y así puntualizar en aspectos relevantes dentro de la temático.

**Tabla 4:** Marco de Visualización: Razón de cambio promedio no constante

Perspectiva	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso_1	Coordinación	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Atención			
	Motivación			
Recurso_2	Coordinación	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Atención			
	Motivación			
Recurso_3	Atención	Conceptual Experimental	Grupal	Simulación
	Recuerdo			
Recurso_4	Atención	Declarativo	Grupal	Imagen Metáfora Visual
	Recuerdo			
	Motivación	Experimental		
	Nuevas ideas	Conceptual		

El tema de derivadas se trabajó con ocho recursos, la mayoría fueron simulaciones y principalmente pretendían que el estudiante estableciera la relación entre la gráfica de una función cualquiera y la gráfica de la función derivada. De igual forma seguimos utilizando las imágenes tanto como metáfora visual y como mecanismo para resaltar resultados de interés.

**Tabla 5:** Marco de Visualización: Estimación de la derivada

Perspectiva	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso_1	Coordinación	Declarativo	Grupal	Simulación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_2	Coordinación	Declarativo	Grupal	Simulación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_3	Atención	Declarativo	Grupal	Simulación
	Recuerdo	Procedimental		
Recurso_4	Coordinación	Procedimental	Grupal	Simulación
	Atención			
	Motivación			
Recurso_5	Atención	Declarativo	Grupal	Simulación
	Recuerdo	Experimental		
	Motivación			
	Nuevas ideas	Conceptual		
Recurso_6	Atención	Declarativo	Grupal	Imagen
	Recuerdo	Experimental		
	Motivación			
	Nuevas ideas	Conceptual		
Recurso_7	Atención	Declarativo	Grupal	Imagen
	Recuerdo	Experimental		
	Motivación			
	Nuevas ideas	Conceptual		
Recurso_8	Coordinación	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Atención			
	Motivación			

Por último tenemos el tema de la diferencial, esta es una temática que se trabaja en pocas horas, por lo que únicamente se desarrollaron dos recursos, presentaciones animadas las cuales tratan cuidadosamente el concepto de la diferencial y la forma analítica de la diferencial.

**Tabla 6:** Marco de Visualización: La diferencial

Perspectiva	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
	Coordinación			
Recurso_1	Atención	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Motivación			
	Coordinación			
Recurso_2	Atención	Declarativo	Grupal	Presentación animada
	Motivación			

La generación, administración y visualización del conocimiento por parte de educadores y estudiantes conforman la columna vertebral de los procesos de aprendizaje colaborativo<sup>1</sup>. Para el éxito de una actividad educativa, se requiere de la existencia de conocimientos previos, así como de herramientas que permitan su administración y visualización para facilitar el descubrimiento, enriquecimiento y apropiación de este conocimiento por parte del estudiante.

Los nuevos avances en las tecnologías de información y comunicación como los multimedia y computadoras de bajo precio que admiten el tratamiento eficiente de gráficos han permitido la experimentación con nuevas interfaces, lúdicas y a la vez eficientes, para visualizar grandes volúmenes de información y conocimiento.

Seguidamente se hace una descripción general de cada uno de los recursos diseñados, en términos generales en cada uno de los marcos de visualización asociados a cada tema. Resumiendo se utilizaron los siguientes tipos de visualización; animación, presentación animada, simulación e imágenes, claro cada uno de estos responde a los objetivos planteados en la perspectiva de tipo funcional y al tipo de conocimiento que se desea transferir.

En el diseño y desarrollo de cada uno de los elementos presentes en la animación se buscó que cada uno de estos elementos comuniquen información de una forma ágil y cómoda con el fin de alcanzar los objetivos propuesto.

Cada una de las animaciones apunta a mejorar en alguna medida la intuición, la comprensibilidad y aprendibilidad por parte del estudiante en función de la situación planteada. La idea fundamental es sacar provecho de esta capacidad innata de procesar representaciones visuales y trasladar buena parte de la carga cognitiva necesaria para entender una situación problemática planteada a la parte intuitiva de la percepción, mejorando así la intuición en la modelación.

Cada uno de los recursos utilizados extiende su funcionalidad para explotar avances recientes en las tecnologías de multimedia, permiten el uso de unidades de interacción con posibilidades para rotar, acercar y manipular gráficos tanto bidimensionales como tridimensionales de alta calidad y dar retroalimentación sonora y gráfica en forma inmediata.

Una característica muy importante de estas representaciones visuales utilizadas, en particular, es que son una excelente alternativa, para representar, al mismo tiempo, información detallada y contextual, lo cual permite que el acceso al conocimiento y su comprensión se de en un contexto de descubrimiento, no solo del detalle sino de las múltiples relaciones entre las partes, fundamental en la búsqueda de un aprendizaje significativo. Esta visualización del todo y las partes al mismo tiempo, y su potencial educativo, es lo que convierte a la visualización del conocimiento en una gran oportunidad por guíe el uso de las tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática.

### 7.1.5 Animaciones

Las principales animaciones fueron desarrolladas como se mencionó anteriormente en Adobe Director, en estas se incorporados elementos de diseño, elementos sonoros y cada uno de los movimientos programados fueron cuidadosamente definidos de tal forma que comunicarán información pertinente al problema desarrollado. El objetivo principal que se

<sup>1</sup> En este contexto, entendemos por *administración* del conocimiento, los procesos de su almacenamiento, adaptación y actualización.

buscó con las animaciones fue modelar gráficamente una situación problemática planteada y a partir de esto contribuir a la generación del modelo matemático asociado.

En la figura (11) se muestra la interface en una de las animaciones utilizadas en un problema relacionado al movimiento rectilíneo uniforme.

En esta animación se modela el siguiente problema: *Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 50 metros/segundo. Vamos a suponer que en el momento que se empieza a medir el tiempo ( $t = 0$ ), el automóvil se encuentra a 20 metros de un punto de referencia como muestra la figura 1*

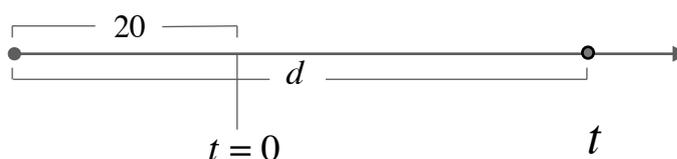


figura 11: Esquema sobre la situación planteada

En este caso  $t$  representa el tiempo transcurrido y  $d$  la posición del vehículo correspondiente al tiempo  $t$ .

En la animación, el vehículo ha sido representado por una motocicleta, su punto de partida es a  $20\text{ m}$  de un punto de referencia que en este caso corresponde al tiempo  $t = 0$ .

En el reloj, un ciclo completo representa una unidad de tiempo que en este caso corresponde a un segundo, el cual se indicará por medio de un sonido.

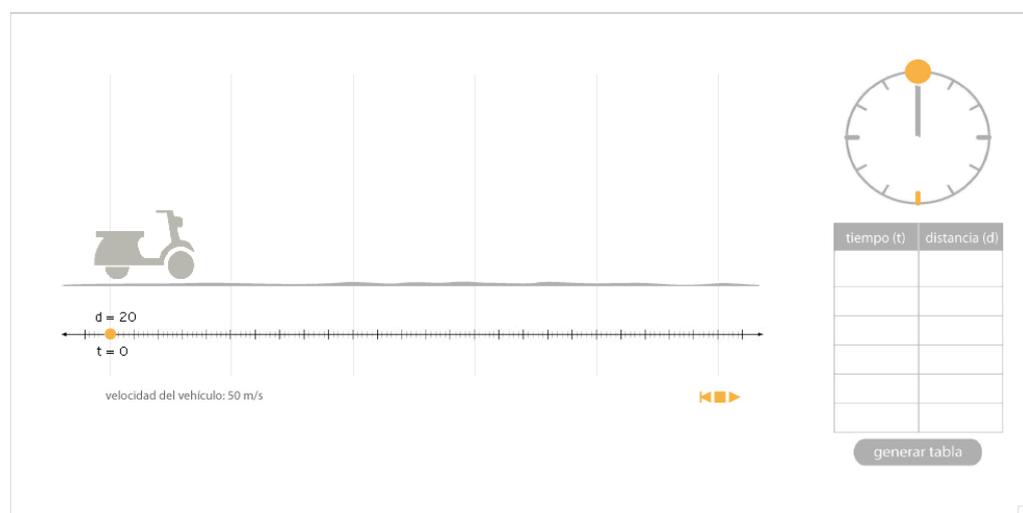


figura 12: Estado inicial de animación

Al final en la animación se establece una correspondencia entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida, generando una tabla de valores como se ve a continuación (figura 13)

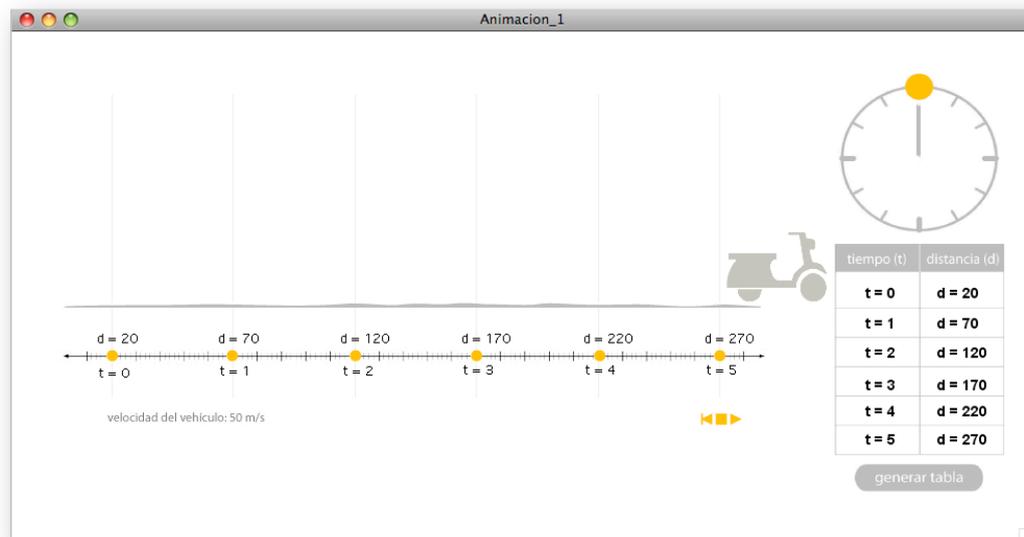


figura 13: Estado final de animación

Con esta animación se pretende conceptualizar el problema, estableciendo la relación entre las dos magnitudes; distancia y tiempo.

En esta segunda animación el incremento en el tiempo es de medio segundo lo cual permite establecer nuevas relaciones y puntualizar en el incremento constante de la distancia a pesar de las diferencias en el tiempo.

De igual forma tanto para el ciclo de un segundo como el de medio segundo serán indicados por medio de un sonido.

Al finalizar el recorrido la animación\_2 mostrará lo siguiente (figura 14)

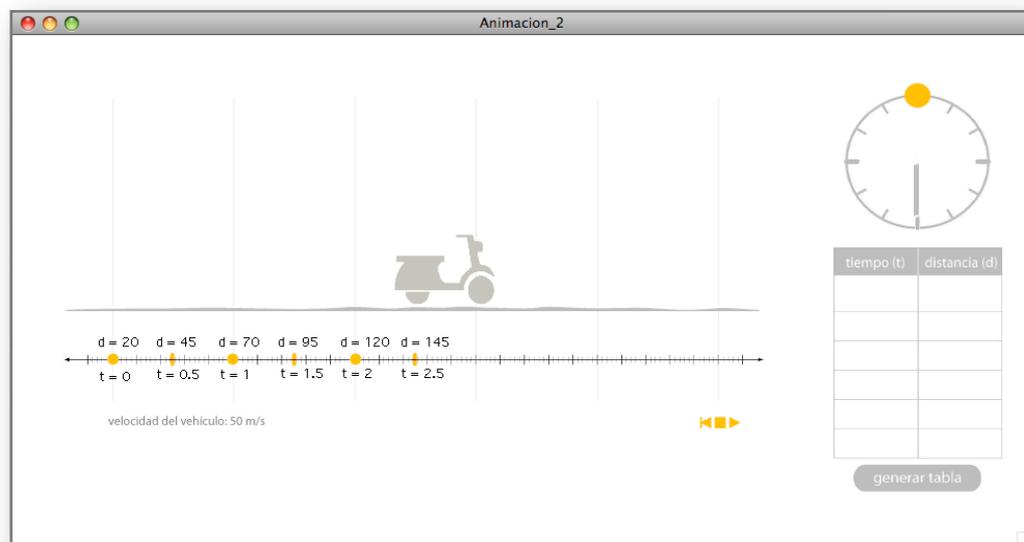


figura 14: Estado intermedio de animación 2

La idea es puntualizar sobre relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida como en la animación\_1, además de puntualizar en el incremento en la variable tiempo. De igual forma para conceptualizar el problema a través de los distintos contextos como las tablas, el gráfico y el algebraico se recurre a la animación\_3 como muestra la figura (15)

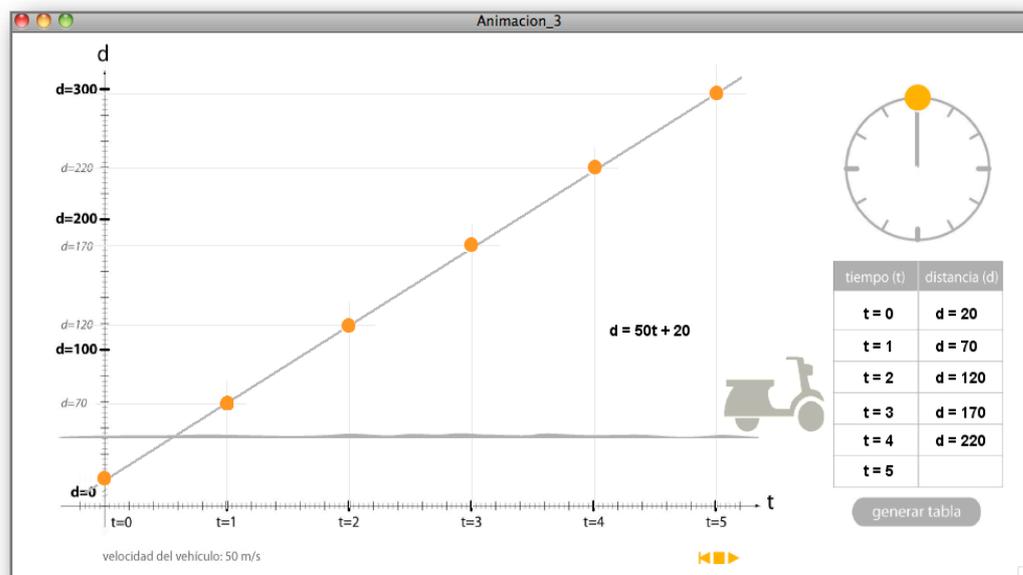


figura 15: Estado final de animación 3

Los elementos en cada una de las animaciones como se dijo anteriormente buscan siempre comunicar información al estudiantes y eliminar la carga cognitiva para que efectivamente el estudiante se inmerse en el contexto del problema.

Al final cada una de las animaciones tiene objetivos claros definidos en el marco general de visualización y todas convergen a un único punto el problema planteado.

### 7.1.6 Presentación animada

Las presentaciones animadas fueron desarrolladas en Keynote, estas incorporan varios elementos; sencillez, elegancia, claridad, disposición adecuada de la información y sentido lógico del contenido. En estas presentaciones fueron incorporadas una serie de animaciones desarrolladas cuidadosamente y que cumplen todas las características descritas en el apartado de animaciones. Además de algunos vídeos realizados para problemas específicos y otros disponibles en la internet.

La figura(16) muestran algunas de las diapositivas en una de las presentaciones asociadas al tema de razones de cambio promedio no constante:

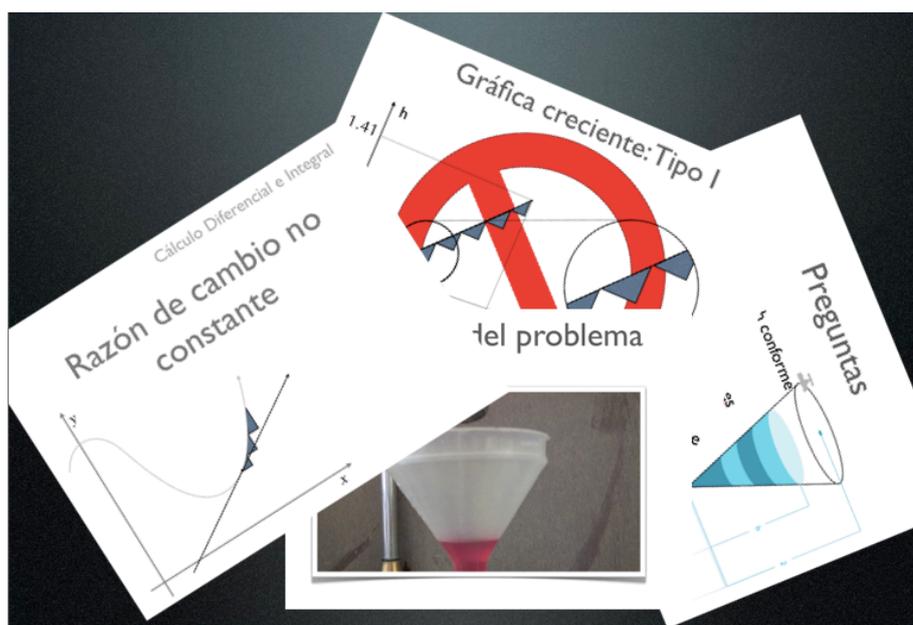


figura 16: Estado final de animación 3

En estas diapositivas se presentan una serie de animaciones que permite analizar el comportamiento de una variable que crece conforme el tiempo transcurra, como este crecimiento no es constante se puntualiza en la forma de como está creciendo, esto se refiere a si su crecimiento es acelerado o desacelerado y para ello se hace un análisis local.

En la figura (17) muestran algunas de las diapositivas en una de las presentaciones asociada al tema de razones de cambio promedio no constante:

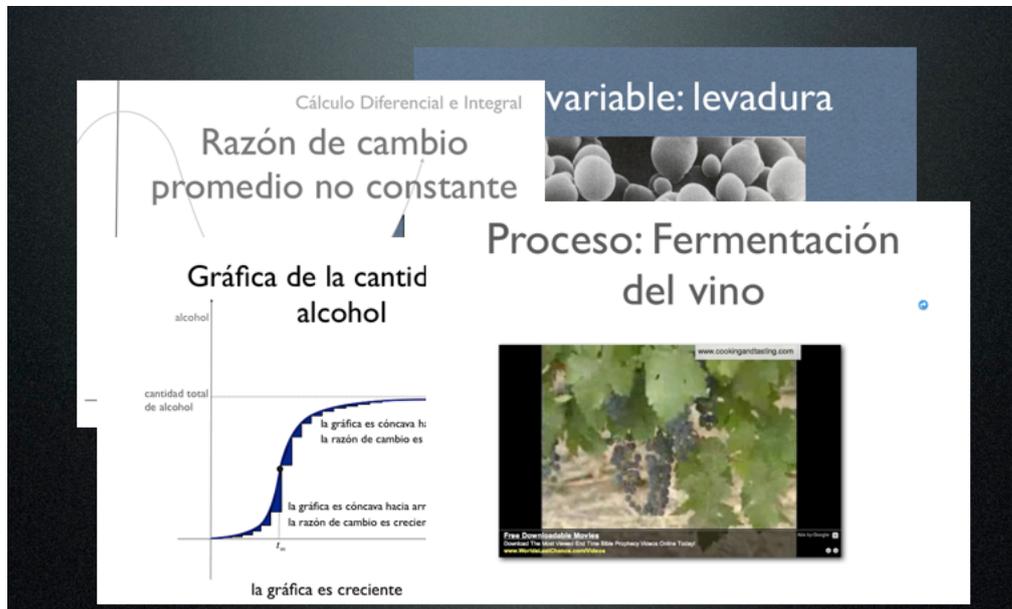


figura 17: Estado final de animación 3

En estas diapositivas se presentan una serie de animaciones que permite analizar los distintos comportamientos de una variable de interés respecto a otra variable de referencia. En este caso las variables de interés que se analizaron fueron: el alcohol, el azúcar y la levadura, variables que intervienen en el proceso de fermentación del vino y que todas ellas dependen de la variable referencia: el tiempo .

Allí mismo se muestra un vídeo en el cual se clarifica el problema de la fermentación del vino. El objetivo del vídeo es clarificar el proceso de fermentación y algunas de las variables que entran en juego como mencionamos; el azúcar, la levadura y el alcohol. Estas tres variables tiene características importante en términos de su comportamiento conforme transcurra el tiempo en el proceso de fermentación.

En la figura (18) muestran algunas de las diapositivas en otras de las presentaciones asociada al tema de la diferencial:



figura 18: Estado final de animación 3

En estas diapositivas se presentan una serie de animaciones que permite introducir el concepto de la diferencial como la relación entre dos cambios, la idea es plantear que el comportamiento de  $y$  respecto a  $x$  en el intervalo  $\Delta x$  no es lineal y en consecuencia  $k$  varía respecto a  $x$ , es decir,  $\Delta y \approx k(x)\Delta x$ .

Por eso se presenta una animación que muestra esta dependencia de  $k$  respecto a  $x$ , y además como a partir de estos cambios locales se puede obtener una estimación del comportamiento global de la relación entre  $y$  y  $x$  -claro que estos cambios sugeridos tienen cierta intención respecto a la relación entre  $y$  y  $x$ -, además sugiere implícitamente el concepto de integral y además quién debería ser  $k(x)$ .

### 7.1.7 Simulación

Para las simulaciones o actividades interactivas como mencionamos anteriormente se utilizó el software Geogebra. Las simulaciones vienen hacer pequeñas rutinas de programación con un objetivo muy preciso, por lo que no constituyen un software como tal. Estas simulaciones viene a ser una herramienta de apoyo con las potencialidades del uso de la computadora, como lo son animación, manipulación y generalización entre otras. Además estas simulaciones cumplen los objetivos que se plantean en el marco general de visualización del conocimiento.

Las simulaciones fueron utilizadas exclusivamente por el profesor o profesores que llevaron a cabo la intervención, dada la dificultad de utilizar laboratorio. Por lo que se utilizó una computadora y un proyecto en cada una de las secciones donde fueron utilizadas.

Las simulaciones al igual que el resto de representaciones visuales se diseñaron con el objetivo de fortalecer algunas de las ideas de relevancia tanto en el concepto de derivada como en el caso de la noción de la diferencial. Además de servir de complemento para las otras representaciones visuales. Se realizaron varias simulaciones, una de las cuales se describen a continuación (figura 19):

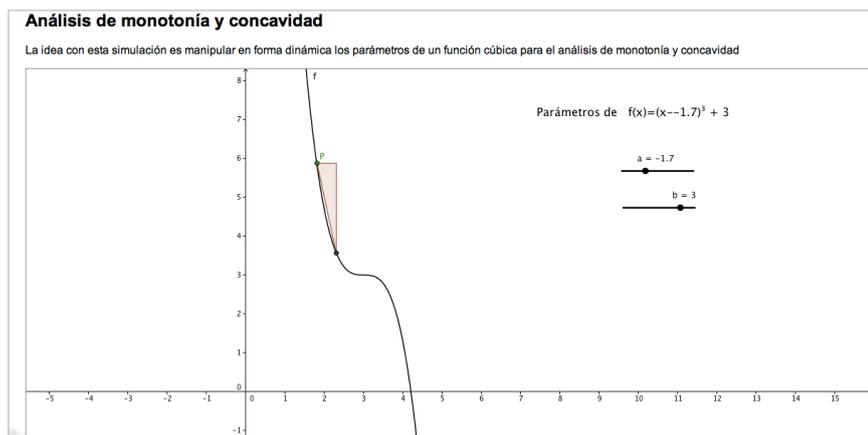


figura 19 Unidad de visualización interactiva para el concepto de límite

Esta simulación se diseñó para que el profesor puntualice en el comportamiento de la razón de la razón de cambio promedio en función de la monotonía de la función y la concavidad.

Además le permite el manejo de los distintos parámetros produciendo una gama importante de funciones, permitiendo contrastar visualmente los distintos comportamientos de las funciones localmente.

La figura 20, muestra otra de las simulaciones con características similares a la anterior, el objetivo principal de esta simulación es la comparación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea. Además permite aproximar la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea por medio de la variación del  $\Delta x$ .

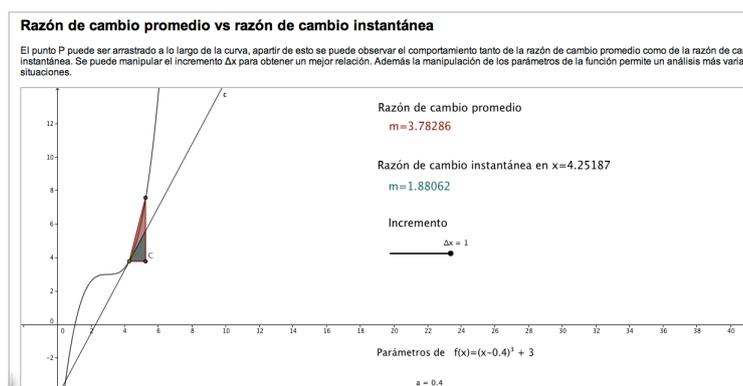


figura 20 Unidad de visualización interactiva para el concepto de límite

### 7.1.8 Imágenes

En el caso de las imágenes estas no fueron utilizadas en esta etapa por la logística de impresión, sin embargo fueron diseñadas para resumir la información relevante en el tema de derivadas y además se utilizó la imagen como metáfora visual. La metáfora visual según Eppler (2003), es efectiva para comunicar conocimiento y tiene como ventajas que se puede aplicar para motivar a la gente, para presentar nuevas perspectivas, incrementar los recuerdos, para apoyar procesos de aprendizaje, para centralizar la atención y ayudar a que el espectador se concentre, y para estructurar y coordinar la comunicación. Es importante puntualizar que todas las imágenes utilizadas en el material de apoyo y en los recursos en general fueron cuidadosamente diseñadas con los mismos estándares.

### 7.1.9 Evaluación

Ya en esta última etapa se tenían claramente definidos los instrumentos de evaluación para la recolección de los datos; el instrumento de caritas, el instrumento general y el diferencial semántico. Ya los análisis de concordancia y fiabilidad de los instrumentos se habían realizado

en la etapa previa por lo que únicamente puntualizamos los momentos en que se llevaron a cabo las evaluaciones.

**Tabla 7:** Descripción general para el proceso de evaluación

VARIABLES / ITEMS		FUENTES DE INFORMACION	INSTRUMENTOS				MOMENTO DE LA EVALUACION			
VARIABLE DEPENDIENTE (VD)	ITEMS RELACIONADOS	ALUMNOS	DIFERENCIAL SEMÁNTICO	VALORACIÓN DE ACTIVIDADES EN CLASE	PRUEBA EXPERIMENTAL	EXÁMEN	Semana			
							I	II	III	IV
Compresión del concepto de derivada	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,22	X			X					X
<b>COD</b> Manejo de la perspectiva analítica de la derivada	12,13,14,15,16,17,25	X			X					X
Compresión del concepto de diferencial	23,24	X			X					X
<b>CDif</b> Manejo de la perspectiva analítica de la derivada	18,19,20,21	X			X					X
<b>PADif</b> Ambiente de clase en el aula		X	X	X			X	X	X	X
<b>ACA</b> Rendimiento académico		X			X	X				X

Para la recolección de los datos se realizó mediante la aplicación de varios instrumentos, para esta etapa se incorporó un instrumento más, el diferencial semántico.

### 7.1.9.1 Diferencial semántico

Además del instrumento básico para que el estudiante valorara las actividades que se realizaban en clase se utilizó este diferencial semántico.

La idea con en este instrumento fue obtener una valoración del estudiante sobre como percibe las actividades que se realizaban en clase.

El Diferencial Semántico valora cada una de las parejas de adjetivos bipolares de acuerdo con el valor de la media aritmética de los datos correspondientes.

El diferencial semántico utilizado contaba con siete opciones, distribuidas desde el valor 1 hasta el valor 7. De acuerdo con esta distribución, el valor 1 implica una actitud negativa extrema (muy negativa) y 7 una actitud positiva extrema (muy positiva). El valor 4 se asocia con una posición de indiferencia.

Para facilitar el análisis y la interpretación de los datos, especialmente de las medias diferentes de los valores extremos, se procedió a definir las siguientes categorías, de acuerdo con el valor *d* de la media de cada pareja de adjetivos bipolares:

$1 < d < 2$  : actitud muy negativa

$2 < d < 3$  : actitud negativa moderada

$3 < d < 4$  : actitud negativa baja

$4 < d < 5$  : actitud positiva baja

$5 < d < 6$  : actitud positiva moderada

$6 < d < 7$  : actitud muy positiva

### **Análisis de la validez del diferencial semántico**

La validez del instrumento, entendida como el grado en el cual el instrumento mide lo que realmente debe medir, se estableció mediante el juicio de expertos. Para ello se sometió la primera versión del instrumento al juicio de 11 expertos. Este grupo de expertos estuvo integrado por profesionales en el campo de la enseñanza de la matemática con amplia experiencia en el curso MA-1102 y por profesionales de otros campos del conocimiento con experiencia en el diseño de instrumentos de medición.

A cada uno de los jueces se les entregó, además de una copia de la primera versión del diferencial semántico, un conjunto de instrucciones sobre lo que se espera de ellos, información de la investigación en desarrollo y una hoja de registro para que evaluaran el instrumento.

A cada juez se le pidió que calificara a cada una de las parejas de objetivos bipolares con 1, 2 o 3, según las siguientes especificaciones:

1	significa que el par de adjetivos debe ser eliminado del instrumento
2	significa que el par puede ser mantenido en el instrumento pero se le debe mejorar
3	significa que el par puede ser mantenido sin necesidad de modificación

Adicionalmente, a cada juez se le solicitó que hiciera recomendaciones sobre parejas de adjetivos bipolares que pudieran incluirse en el instrumento o para mejorar aquellas parejas que calificaron con 2. También se les pidió que emitieran opinión sobre la claridad de las instrucciones generales del instrumento.

Como criterios para evaluar las recomendaciones de los jueces, se utilizaron los siguientes:

- Las parejas que obtuvieron más del 70% de valores 3, se mantuvieron en el instrumento sin modificaciones.
- Aquellas parejas que obtuvieron más del 70% de valores 1 fueron eliminadas del instrumento sin más consideraciones.
- En cualquier otro caso se hizo una revisión de la pareja de adjetivos bipolares para evaluar la posibilidad de mejorarla, tomando en cuenta las recomendaciones de los jueces. En aquellos casos en que se consideró que no era posible mejorarla, se decidió eliminarla del instrumento.

Finalizado este proceso de validación, se eliminaron 2 parejas de adjetivos bipolares, quedando la versión definitiva del instrumento integrada por 13 parejas.

### **Análisis de la confiabilidad del instrumento**

La confiabilidad del instrumento, de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo sujeto u objeto produce resultados iguales. En una versión más realista en el caso de la aplicación de instrumentos de medición a

personas, tenemos que la confiabilidad de un instrumento se refiere al grado en que la aplicación a personas de características similares produce resultados parecidos.

Existen varios métodos para determinar la confiabilidad de un instrumento de medición. En esta investigación se utilizó la técnica denominada Coeficiente Alfa de Cronbach, desarrollada por J.L. Cronbach. El Alfa de Cronbach es un estadístico de amplio uso en investigaciones educativas, que produce un valor entre 0 y 1. Un valor de uno implica una confiabilidad perfecta y cero una confiabilidad nula.

De acuerdo con Carmines et al (1988), citados por Hernández et al (2003: 567), el Coeficiente Alfa de Cronbach puede ser calculado sobre la base de la varianza de los ítemes. En nuestro caso para simplificar el cálculo se utilizó el programa computacionales SPSS.

Una cuestión fundamental es establecer qué tan elevado debe ser el valor del coeficiente de confiabilidad para aceptar que el instrumento es fiable. La respuesta a esta pregunta, tal como indica Barraza (2008), no es sencilla y como afirma Hogan (2004), citado por Barraza (2008), la única respuesta concluyente es “todo depende”.

Para este último autor la definición del valor del coeficiente de confiabilidad tiene que ver con la importancia de la decisión. En efecto, con fundamento en Nunnally y Bernstein, citados en Hogan (2004), plantea que para una prueba con la que se pretenda tomar decisiones sobre una persona (diagnóstico psicológico, selección de personal, licencia para ejercer una profesión, etc.) se requiere una prueba de alta confiabilidad (0.90 como mínimo aceptable y 0.95 como la norma deseable); en tanto que si el uso de la prueba es para la investigación se requiere una confiabilidad moderada (0.80 se considera adecuada).

Por su parte Rosenthal, citado por Barraza (2008) con base en García (2005), propone una confiabilidad mínima de 0.90 para tomar decisiones sobre la vida de las personas y una confiabilidad mínima de 0.50 para propósitos de investigación.

Aplicando la técnica del Alfa de Cronbach, utilizando el programa SPSS versión 16, se obtuvo un valor de 0,882 para el diferencial semántico utilizado en la investigación, razón por la cual podemos afirmar que el instrumento es confiable.

**Tabla 8:** Estadísticos de fiabilidad diferencial semántico

Parámetro	Valor
Alfa de Cronbach	0,882
N de elementos	13

Por otro lado se diseñó una prueba experimental que permitiera evaluar el tema de derivada y puntualizar en el manejo conceptual y analítico de la derivada.

### 7.1.9.2 Instrumento General

Esta prueba fue diseñada debido a que en el contexto no existen pruebas estandarizadas que permitan evaluar estos conceptos. Para la elaboración de la prueba se tomó como punto de partida la consulta hecha a expertos sobre el enfoque adecuado al tema de derivada.

Como se mencionó al inicio del apartado de metodología a través de una consulta también a expertos en el tema o con mucha experiencia en el mismo se definió el enfoque del tema de derivada, además en esta misma consulta se les pidió la opinión sobre el tipo de ejercicio que se debían realizar de tal forma que permitieran evaluar si el estudiante contendía el tema de derivada, este fue el punto de partida para realizar una prueba preliminar de 25 ítems de selección única.

Esta prueba preliminar se le pasó a juicio de expertos para que hicieran una valoración sobre los ejercicios, observaciones y además calificaran cada ítem de acuerdo a la claridad y pertinencia. Ya en esta etapa si se realizaron los análisis respectivos. Se realizó prueba de concordancia y una de fiabilidad.

## Análisis de la confiabilidad del instrumento

De igual forma aplicamos la prueba de fiabilidad a través del Alfa de Cronbach y utilizando el programa SPSS versión 16, se obtuvo un valor de 0,68 para el instrumento general .

**Tabla 9:** Estadísticos de fiabilidad instrumento general

Parámetro	Valor
Alfa de Cronbach	0,65
N de elementos	20

Este valor del Alfa de 0.65 es un valor relativamente bajo, sin embargo, Rosenthal, citado por Barraza (2008) con base en García (2005), propone una confiabilidad mínima de 0.90 para tomar decisiones sobre la vida de las personas y una confiabilidad mínima de 0.50 para propósitos de investigación. En este caso estamos tomando este valor, el cual es superior al 0.50 planteado como mínimo para efectos de investigación. Hubiésemos deseado tener una prueba con un nivel de confianza mayor, sin embargo nuestro objetivo en la investigación no iba orientado al desarrollo de una prueba si no a analizar el efecto de la intervención de la visualización en la enseñanza de la matemática.

### 7.1.10 Aplicación

En esta primer etapa se tomaron algunas decisiones importantes en la ejecución de la intervención. La más importante es que este semestre fuese utilizado como plan piloto, esto por cuanto; los instrumentos de evaluación no estaban validados, algunos de los elementos de la visualización del conocimiento no estaban listas (las imágenes), el tiempo asignado a las actividades en clase no había sido verificado, el protocolo de clase no había sido implementado por lo que las lecciones programadas podría no coincidir con las lecciones reales. Además por la gran cantidad de material la posibilidad de encontrar errores era muy alta.

Así esta primer etapa fue considerada como plan piloto y un periodo de ejecución que permitió hacer una retroalimentación en todos los campos de la ejecución y en consecuencia en la redefinición y ajuste de varios de los elementos utilizados.

En esta etapa se tenían cuatro grupos, dos grupos experimentales y dos grupos control. Los cuatro grupos recibieron el material con el enfoque teórico definido previamente, la diferencia se estableció que en los grupos experimentales se utilizaron todos los elementos establecidos en el marco general de visualización del conocimiento. Inclusive en todos los grupos se desarrollaron las actividades para realizar tanto en la clase como fuera de ella.

Todos los grupos de los dos profesores iniciaban el curso normalmente hasta la quinta semana que es cuando inicia el tema de derivada. A partir de allí todos los grupos de la investigación desarrollan el tema bajo el enfoque definido y en los grupos experimentales se usan los elementos de la visualización del conocimiento. Como se mencionó previamente por razones de tiempo las imágenes que habían sido diseñadas para la ejecución no estuvieron lista para esta primer etapa, por lo que se prescindió de ellas. Además los profesores disponían de todos los elementos necesarios en la ejecución, como: carpeta con los documentos impresos relacionados a la teoría que se desarrollaría en las cuatro semanas, carpeta con los trabajos para realizar tanto en la clase como fuera de ella y carpeta con los ejercicios de apoyo adicionales.

En el caso particular de los grupos experimentales además se le dio una carpeta con el protocolo de clase, y una carpeta con los archivos digitales de que incluían las presentaciones, animaciones y las simulaciones.

De todos estos materiales el de mayor relevancia es el protocolo de clase, esto por cuanto este protocolo es el que le indica que hacer en todo momento de la clase relacionado a la intervención.

En la figura 21 se presenta parte del protocolo correspondiente a la primer semana:

# Protocolo de clase

## Indicaciones

Este protocolo está diseñado para una clase de 2 horas 30 min, el tema que se desarrolla corresponde al tema de razón de cambio promedio constante. Para ello se trabajaran varios problemas cuyo objetivo está en puntualizar sobre los conceptos de: incremento, razón de cambio, movimiento rectilíneo uniforme.

En cada actividad se le indicará el tiempo acumulado en la columna de la derecha y además se agrega una casilla de verificación para que le haga un  al finalizar la actividad.

## Uso del pizarrón

Escriba en el pizarrón el siguiente problema en forma clara:

Problema de introducción: Un automóvil transita por una carretera recta. El automóvil viaja con una velocidad constante de 50 metros/segundo. Vamos a suponer que en el momento que se empieza a medir el tiempo ( $t = 0$ ), el automóvil se encuentra a 20 metros de un punto de referencia como muestra la figura 1

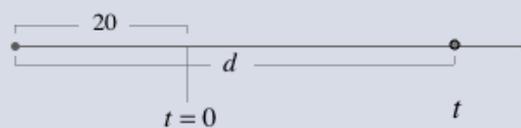


figura 1: Esquema sobre la situación planteada

En este caso  $t$  representa el tiempo transcurrido y  $d$  la posición del vehículo correspondiente al tiempo  $t$ .

Una vez que haya escrito en la pizarra, lea el problema a los estudiantes y puntualice en dos aspectos importantes: la velocidad del vehículo y la distancia en el momento de partida ( $t = 0$ ).

## Uso de animación\_1

Seguidamente utilice el archivo Animación\_1, este se verá como en la figura 2. Brinde la siguiente explicación relacionada con la animación:



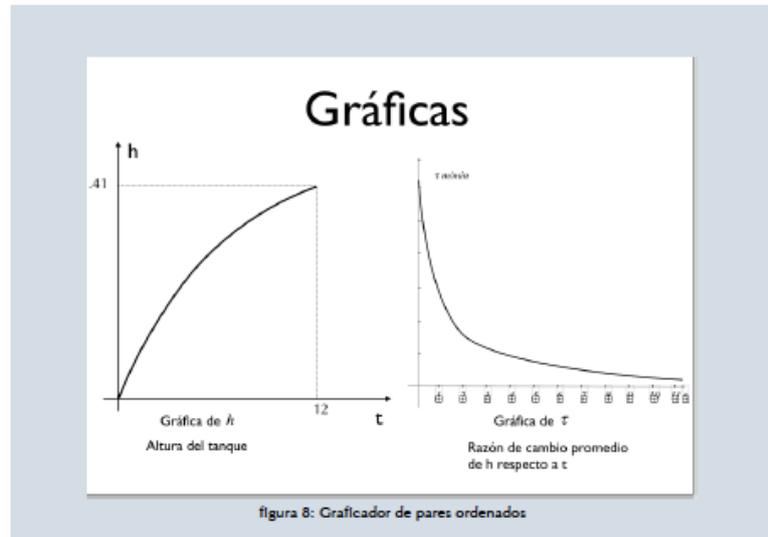
figura 21: Imagen relacionada al análisis de monotonía y concavidad

Con este protocolo de clase se pretende tener un mejor control sobre las actividades que debe realizar el profesor, en especial cuando debe usar cada uno de los recursos disponibles y como debe usarlos para sacarles el mayor provecho. En el ejemplo de la figura (1) se puede apreciar en principio las observaciones generales al profesor, lo que debe escribir en la pizarra y en que momento. Además se le señala en que aspectos del problema se debe puntualizar.

De igual forma se le indica en que momento debe utilizar los recursos y cuanto es el tiempo estimado para su ejecución.

La figura 22 muestra un momento en el protocolo relacionado al tema de razón de cambio promedio no constante. En este se hace referencia a las diapositivas de una presentación animada y se le hace referencia al profesor sobre el objetivo de cada una de estas, como se puede observar adicionalmente se le indica en que momento debe realizar los trabajos intra-clase y cuanto es el tiempo estimado para su realización y para finalizar en esta muestra del protocolo se le hace la observación al profesor sobre las conclusiones más importantes que se deben hacer posterior a la finalización del trabajo intra-clase.

Las diapositivas 14 y 15 que corresponden a las conclusiones de este primer problema y la diapositiva 16(figura 8) muestra la gráfica que modelan el problema planteado y la gráfica que modela el comportamiento de la razón de cambio promedio.



### Trabajo en intra-clase

Seguidamente utilice la hoja de trabajo intra-clase, este es para que los estudiantes lo trabajen en clase (25min)en grupos de no más de tres personas.

La hoja de trabajo intra-clase tiene una ideología similar a lo desarrollado en clase hasta ahora, por lo que es importante guiarlos para que el trabajo sea lo más provechoso posible.

En este trabajo intra-clase es importante cuando están en la parte de elección de la gráfica que se ajuste al modelo, que los estudiantes tracen los triángulos o semi-triángulos para que les ayude a determinar como se comportan los incrementos o bien o cómo está creciendo el nivel del agua h al pasar el tiempo.

Posterior al trabajo intra-clase es importante realizar algunas preguntas(10min) que nos permitan tener conclusiones respecto a:

- crecimiento de la la altura respecto al tiempo
- el tipo de razón de cambio de la variable de interés(variable o constante)

figura 12: Imagen relacionada al análisis de monotonía y concavidad

### Utilización de las imágenes

En la manipulación de la variable independiente (Visualización del conocimiento) para ver su efecto y relación con las variables dependientes.

En este caso es en el grupo experimental donde se varía el proceso, dentro de todos los recurso utilizados, las imágenes son uno de ellos.

En el caso del uso de las imágenes, estas fueron colocadas en el aula, en lugares que se consideraron adecuados. Las imágenes se colocaban al inicio de cada clase, así se mantuvieron durante el periodo que tardó la intervención. La figura 23 muestra la disposición de dos de las imágenes en la parte izquierda de la fotografía en una de las aulas utilizadas.



*figura 13: Disposición de las imágenes en la clase*

Esta aula tenía ciertas características que la hacían más adecuada respecto a las otras, como el estilo de las paredes, las mesas y la iluminación. Además de mejores posibilidades para la ubicación de las imágenes y la posibilidad de tenerlas en forma permanente.

Ya en esta etapa se tenían todas las imágenes lista, por lo que utilizaron todas a lo largo del periodo que tardó la intervención. La figura 24 muestra el desarrollo normal de la clase en los grupos experimentales.



*figura 24: Disposición de las imágenes en la clase*

La imágenes le permitían al profesor hacer referencia a ellas en cualquier momento y así retomar aspectos importantes del desarrollo de las temáticas. La figura 25



*figura 25 Disposición de las imágenes en la clase*

dos imágenes que en ese momento representan parte de las conclusiones importantes en la temática de la derivada y la clase que se desarrollaba en ese momento contribuía a obtener dichas conclusiones.

## 8. Análisis de resultados

Como se mencionó previamente se utilizaron tres instrumentos de evaluación, dos de ellos para lograr medir el nivel de influencia del primer objetivo y uno que nos permitió medir el nivel de de los otros dos objetivos formulados.

La propuesta de investigación fue planteada en el sentido de la influencia de la visualización del conocimiento en tres aspectos fundamentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje; el ambiente de aprendizaje en el aula, la comprensión de conceptos y el rendimiento académico.

La tabla 10 muestra el número de participantes por grupos según el profesor en esta última fase de la investigación:

**Tabla 10:** Número de participantes por grupo según el profesor en la última etapa de la intervención

	Prof_1	Prof_1	Prof_1
Experimental	23	35	
Control	26	23	21
Total	49	58	21

\* El grupo del profesor 3 únicamente participó en uno de los instrumentos de evaluación, en este caso en el instrumento general.

Para nuestro análisis se quieren de la verificación de algunos supuestos, uno de ellos el supuesto de aleatoriedad. En la investigación no hay control sobre la conformación de los grupos debido que estos se llenan a elección de los estudiantes por su cita de matrícula la cual dependen del promedio ponderado del semestre tras anterior. Por esta razón planteamos algunos análisis que muestran que los grupos que participaron son grupos homogéneos y que en principio no hay diferencias significativas entre ellos.

El curso previo que llevan los estudiantes participantes es el curso de Matemática General, por lo que hacemos un resumen descriptivo de la nota obtenida por los estudiantes (tabla 11).

**Tabla 11:** Estadísticos descriptivos de la nota obtenida en el curso Matemática General

Grupo	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.	Varianza
Profesor_2_Experimental	30	70	100	79,33	9,353	87,471
Profesor_1_Experimental	21	70	100	77,86	8,150	66,429
Profesor_1_Control	26	70	90	78,85	6,679	44,615
Profesor_2_Control	14	70	90	76,07	6,844	46,841

Si observamos la tabla 11, realmente no se notan diferencias ni en la media ni en la varianza, por lo menos diferencias significativas. Para verificar que estas diferencias no son significativas estadísticamente planteamos el siguiente contraste:

**Contraste  $N^0$ :** Las medias de todos los grupos

**Variable:** Nota (Matemática General)

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  : El rendimiento en el curso de Matemática General por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  con  $i = 1..5 \wedge j = 1..5$  : El rendimiento en el curso de Matemática General por parte de los estudiantes no es igual en al menos dos grupos

Lo primero que debemos verificar es el supuesto de homogeneidad de las varianzas, para esta prueba utilizamos el estadístico de Levene, el resultado obtenido se muestra en la tabla 12.

**Tabla 12:** Prueba de homogeneidad de varianzas

Estadístico de Levene	g1	g2	Sig.
1,259	3	87	0,293

La comparación de las medias la realizamos a través de un ANOVA de un factor, la tabla 13 muestra un resumen del resultado obtenido en dicha prueba.

**Tabla 13:** ANOVA para la nota en Matemática General para los grupos

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	113,196	3	37,732	,587	,625
Intra-grupos	5589,551	87	64,248		
Total	5702,747	90			

De acuerdo con la tabla 13, el valor de la prueba 0,625 es claramente superior a nuestro nivel de significación planteado ( $\alpha = 0.05$ ), por lo que podemos concluir que el rendimiento en el curso de Matemática General por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos. Esto nos permite partir del supuesto que los grupos son homogéneos, y que no habían diferencias significativas en cuanto al rendimiento en el curso previo de Cálculo Diferencial e Integral.

Por otro lado se realizó una comparación por género de tal modo que nos permitiera observar la composición de los grupos. Es importante aclarar que por lo general en el Instituto Tecnológico de Costa Rica la composición de los grupos está mayoritariamente conformado por varones. El gráfico 1 muestra la composición de los grupos por género.

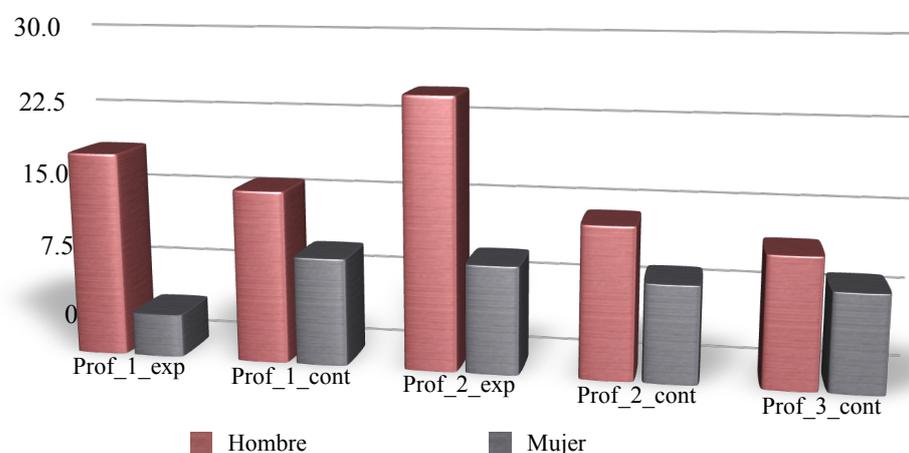


Gráfico 1: Gráfico de barra de la composición de los grupos por género

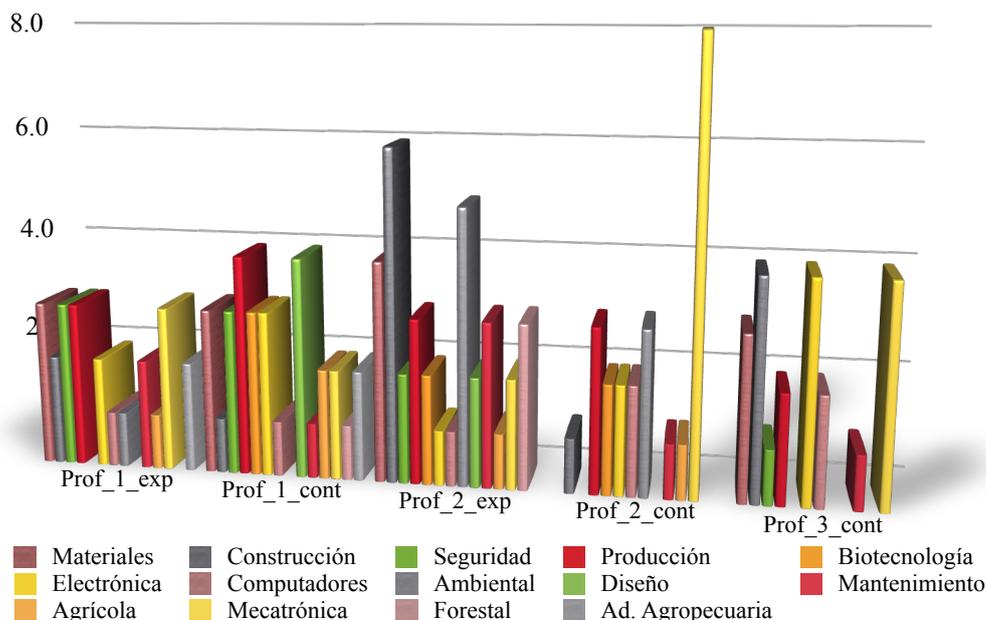
Podemos observar que no hay variaciones significativas en la composición y que la proporción de varones es claramente superior en todos los grupos que participaron, lo cual es consistente con nuestro comentario previo.

Para mostrar aún mas la homogeneidad de los grupos se realizó una distribución por carrera de los estudiantes que participaron en la investigación, esta información se muestra en la tabla 14.

**Tabla 14:** Distribución de estudiantes por carrera de los grupos participantes

Carrera	Prof_1_Exp	Prof_1_Cont	Prof_2_Exp	Prof_2_Cont	Prof_3_Cont
Ingeniería de los materiales	3	3	4	0	3
Ingeniería en Construcción	2	1	6	1	4
Ingeniería en Seguridad Laboral	3	3	2	0	1
Ingeniería en Producción	3	4	3	3	2
Ingeniería en Biotecnología	0	3	2	2	0
Ingeniería Electrónica	2	3	1	2	4
Ingeniería en Computadores	1	1	1	2	2
Ingeniería Ambiental	1	0	5	3	0
Ingeniería en Diseño Industrial	0	4	2	0	0
Ingeniería en Mantenimiento Industrial	2	1	3	1	1
Ingeniería Agrícola	1	2	1	1	0
Ingeniería en Mecatrónica	3	2	2	8	4
Ingeniería Forestal	0	1	3	0	0
Ingeniería en Administration Agropecuaria	2	0	0	0	0
Total	23	28	35	23	21

Podemos observar tanto en la tabla 14 como en el gráfico 2, que la distribución por carreras es uniforme, no hay una carrera que predomine o que nos indique que puedan producir diferencias en los resultados obtenidos.



Por último podemos hacer una comparación respecto a la nota de examen de admisión, esta nota es la que obtienen los estudiantes cuando realizan el examen de admisión de ingreso a la institución. La nota de este examen es un indicador sobre el éxito del estudiante en su carrera

por lo que podría ser un insumo importante a considerar. La tabla 15 muestra los estadísticos descriptivos de la nota de admisión obtenida por los estudiantes en los grupos participantes.

**Tabla 15:** Estadísticas descriptivas de la nota de examen de admisión de los grupos participantes

Grupo	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.	Varianza
Prof_2_Exp	34	100	700	568.69	98.109	9625.300
Prof_1_Exp	29	405	697	562.27	56.127	3150.295
Prof_1_Control	39	84	645	518.89	114.097	13018.04
Prof_2_Control	22	509	687	590.45	51.434	2645.408

La tabla 15 muestra algunas diferencias principalmente en el caso del grupo control del profesor\_2 respecto a la media y el grupo control del profesor\_1 respecto a su desviación. Para analizar si estas diferencias son significativas estadísticamente realizamos un ANOVA de un factor, los resultados se muestran en la tabla 16.

**Tabla 16:** Resumen de los resultados obtenidos del ANOVA de un factor para la variable nota de admisión.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	86380.463	3	28793.488	3.614	0.015
Intra-grupos	956082.357	120	7967.353		
Total	1042462.82	123			

Los datos de la tabla 16 muestran que el valor  $p$  de la prueba es 0,015 el cual es inferior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0,05$ ), por lo que podemos concluir que existen evidencia estadística de que los grupos tienen distinta nota de admisión. Como complemento utilizamos una prueba post hoc que nos permita discriminar entre cuáles grupos se dan dichas diferencias. Los resultados de la prueba se muestran en la tabla 17.

**Tabla 17:** Resumen de los resultados obtenidos de la prueba post hoc para la variable nota de admisión.

	(I) Grupo	(J) Grupo	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.
HSD de Tukey	Prof_2_Exp	Prof_1_Exp	6.422	22.563	0.992
		Prof_1_Control	49.795	20.943	0.087
		Prof_2_Control	-21.765	24.423	0.809
	Prof_1_Exp	Prof_2_Exp	-6.422	22.563	0.992
		Prof_1_Control	43.373	21.887	0.201
		Prof_2_Control	-28.187	25.237	0.680
	Prof_1_Control	Prof_2_Exp	-49.795	20.943	0.087
		Prof_1_Exp	-43.373	21.887	0.201
		Prof_2_Control	-71.560*	23.800	0.017
	Prof_2_Control	Prof_2_Exp	21.765	24.423	0.809
		Prof_1_Exp	28.187	25.237	0.680
		Prof_1_Control	71.560*	23.800	0.017

Los resultado de la prueba post hoc nos evidencia diferencias significativas únicamente entre los dos grupos control. Por lo que en nuestro análisis posterior debemos tomar en cuenta estas diferencias encontradas de tal forma que podamos dar una interpretación de los resultados bajo un contexto mucho mas claro.

Estas pruebas nos muestran la homogeneidad en la conformación de los grupos que participaron y nos permite ser más consistente y precisos en la interpretación de los resultados obtenidos en nuestra investigación.

Como parte del análisis estaremos revisando los distintos instrumentos aplicados, en el primero de ellos los estudiantes hacían una valoración por semana sobre las actividades que se realizaron en dicha semana, en términos de si fue agradable, desagradable o si se muestran una actitud de indiferencia.

### 7.1 Ambiente de aprendizaje en el aula

Analizamos el ambiente de aprendizaje en función de las actividades que se desarrollaron en el aula. Para ello se utilizaron dos instrumentos de evaluación, uno de ellos consistía en una pequeña valoración de las actividades que realizó durante la semana, en esta el estudiante únicamente indicaba si le pareció agradable, desagradable o si su actitud es de indiferencia. La tabla 18 muestra un resumen de las frecuencias obtenidas:

**Tabla 18:** Análisis de frecuencias sobre la valoración de las actividades realizadas en clase

	Desagradable	Indiferente	Agradable
Experimental_Profesor_1	1 (1.2%)	15 (18.5%)	65 (80.2%)
Control_Profesor_1	3 (4.9%)	30 (49.2%)	28 (45.9%)
Experimental_Profesor_2	21 (17.8%)	46 (39%)	51 (43.2%)
Control_Profesor_2	0 (0%)	15 (13.9%)	93 (86.1%)

Para tener una mejor interpretación de los resultados, realizamos los gráficos de barras obtenidos al aplicar este instrumento en las cuatro semanas en cada uno de los grupos involucrados. Iniciamos analizando dicha valoración en el caso del profesor\_1 en sus dos grupos:

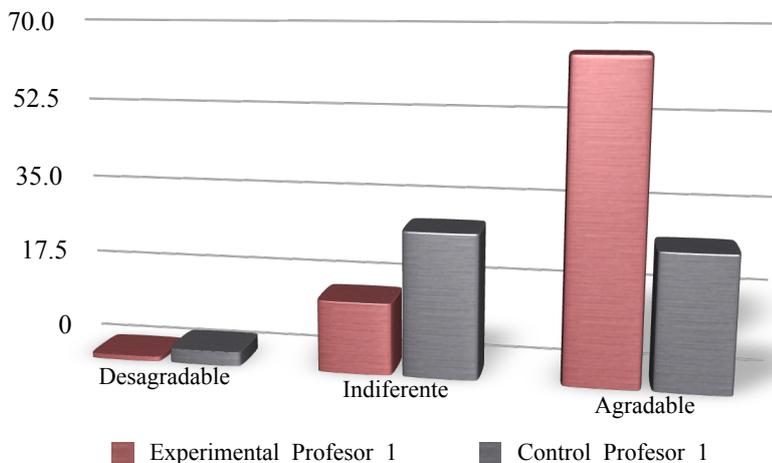


Gráfico 3: Gráfico de barra de la valoración de las actividades en clase de los grupos del profesor\_1

Observamos claramente un mayor nivel de satisfacción en el grupo experimental que en el grupo control, además en el grupo control la indiferencia es lo que priva.

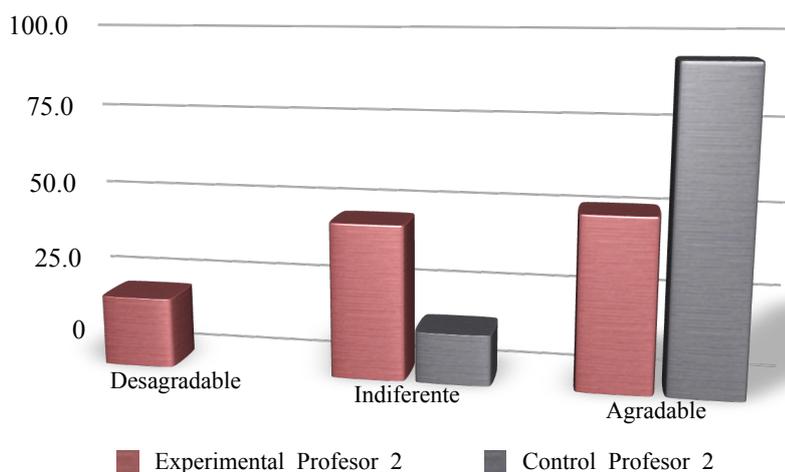


Gráfico 4: Gráfico de barra de la valoración de las actividades en clase de los grupos del profesor\_2

Es interesante en el caso del profesor\_2, en el cual la mayoría de los estudiantes del grupo control consideran que las actividades realizadas en clase fueron agradables, con algunas indiferencias pero lo curioso es que en ninguno de los casos la consideraron desagradable. Mientras que en el grupo experimental es muy parejo entre indiferencia y agradable, además presenta un porcentaje alto (17.8%) consideraron las actividades desagradables.

Estos resultados contrastan. Efectivamente uno esperaría que el grupo donde se llevó la intervención, en el cual además del enfoque novedoso y las actividades explícitamente definidas en el marco de la visualización del conocimiento fueran causantes de una percepción favorable sobre las actividades que se llevaron a cabo en cada una de las semanas. Esto es concordante con los datos asociados con el profesor\_1, pero no con el profesor\_2. Podemos decir que el grupo control del profesor\_2 se sintió más satisfecho con las actividades que se realizaron durante la semana.

De igual forma podemos comparar esa percepción entre los grupos que fueron utilizados como grupo control y los grupos experimentales, esto lo podemos ver en el gráfico 5.

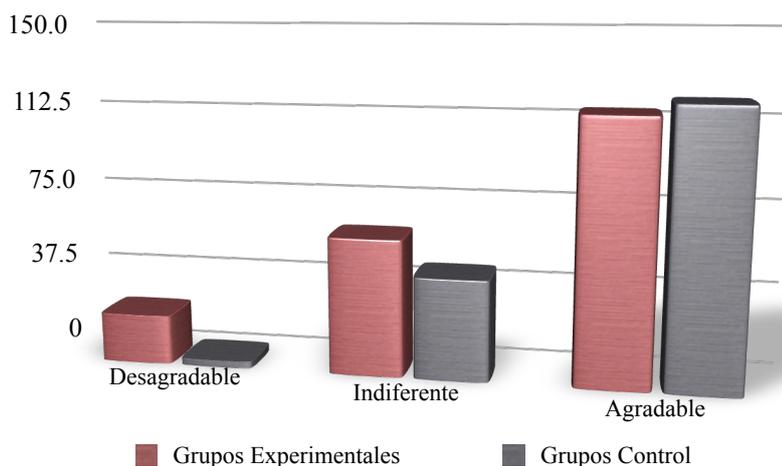


Gráfico 5: Gráfico de barra de la valoración de las actividades en clase de los distintos grupos

Conforme avancemos en nuestro análisis encontraremos una posible respuesta a estos resultados obtenidos en el caso del profesor\_2.

### 8.1.1 Análisis de los datos: Diferencial Semántico

Otro de los instrumentos que utilizamos para evaluar las actividades en clase fue el Diferencial Semántico, para su análisis se consideró valorar cada una de las parejas de adjetivos bipolares de acuerdo con el valor de la media aritmética de los datos correspondientes.

Las parejas de adjetivos bipolares utilizados fueron las siguientes:

1	DESALESTADORAS	INSPIRADORAS
2	DIFÍCILES	FÁCILES
3	ABURRIDAS	DIVERTIDAS
4	CONFUSAS	CLARAS
5	FRUSTRANTES	MOTIVADORAS
6	ESTRESANTES	RELAJANTES
7	COMPLICADAS	SENCILLAS
8	IRREFLEXIVAS	REFLEXIVAS
9	DESAGRADABLES	AGRADABLES
10	PASIVAS	DINÁMICAS
11	NO FORMATIVAS	FORMATIVAS
12	TRADICIONALES	INNOVADORAS
13	DESORDENADAS	SISTEMÁTICAS

Analizamos los resultados en los grupos involucrados utilizando las categorías previamente definidas, se obtiene la siguiente clasificación, reflejada en la tabla 19.

**Tabla 19:** Media para las parejas de adjetivos en el caso del profesor\_1

Adjetivos	Experimental_Profesor_1 Media(media)	Control_Profesor_1 Media(media)
Desalentadoras-Alentadoras	5,22	5,11

Difíciles-Fáciles	5,30	3,59
Aburridas-Divertidas	4,67	4,59
Confusas-Claras	5,19	4,41
Frustrantes-Motivadoras	5,15	4,33
Estresantes-Relajantes	4,81	3,81
Complicadas-Sencillas	5,00	3,93
Irreflexivas-Reflexivas	5,33	4,33
Desagradables-Agradables	5,59	5,04
Pasivas-Activas	4,59	5,22
No Formativas-Formativas	5,96	5,81
Tradicional-Innovadoras	6,22	4,22
Desordenadas-Ordenadas	5,41	5,70

Resumiendo esta información, podemos establecer una distribución de los pares de objetivos según las categorías establecidas, únicamente se respetan aquellas categorías que contenga al menos una pareja de adjetivos. El siguiente gráfico de barras muestra esta distribución para el grupo experimental\_profesor\_1

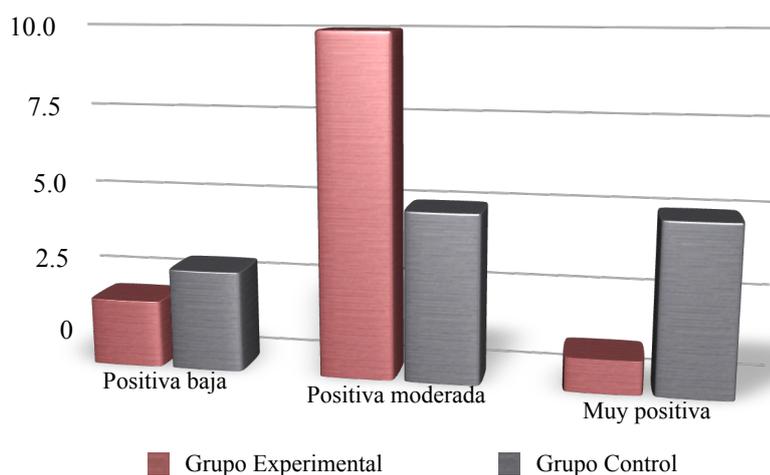


Gráfico 6: Distribución de las parejas de adjetivos según las categorías para los grupos del profesor\_1

Por tanto, se obtuvo que la percepción que predomina es la positiva moderada, se pudo concluir que las y los estudiantes muestran una percepción positiva moderada respecto a las actividades realizadas en el aula en términos de que fueron alentadoras, fáciles, claras, motivadoras, sencillas, reflexivas, agradables, activas, formativas y ordenadas. Rescatamos una percepción muy positiva en términos de la innovación y positiva baja en términos de que las actividades en clase fueron divertidas, relajantes y activas. En resumen en este grupo la percepción sobre las actividades que se desarrollaron en clase la consideran positiva.

En el caso del grupo control aunque la percepción que predomina es la positiva, sin embargo en este caso es similar el número de adjetivos que se ubican en las categorías de positiva baja y positiva moderada. La actitud positiva baja se presenta en términos de que fueron divertidas, fáciles, motivadoras, y reflexivas. Sin embargo hay tres parejas en los cuales los estudiantes tienen una actitud negativa baja y por tanto consideran que las actividades realizadas en clase fueron difíciles, estresantes y complicadas.

En el caso de los grupos del profesor\_2, tenemos los datos que muestra la tabla 20.

**Tabla 20:** Media para las parejas de adjetivos en el caso del profesor\_2

Adjetivos	Experimental_Profesor_2 Media(media)	Control_Profesor_2 Media(media)
Desalentadoras-Alentadoras	4,38	5,39
Difíciles-Fáciles	5,07	4,79
Aburridas-Divertidas	3,38	4,21
Confusas-Claras	4,31	5,29
Frustrantes-Motivadoras	4,48	4,86
Estresantes-Relajantes	4,41	4,57
Complicadas-Sencillas	4,79	4,93
Irreflexivas-Reflexivas	4,72	4,46
Desagradables-Agradables	4,59	5,46
Pasivas-Activas	3,45	4,50
No Formativas-Formativas	4,69	5,71
Tradicionales-Innovadoras	5,31	3,64
Desordenadas-Ordenadas	5,17	6,46

De igual forma que en el caso anterior establecemos una distribución de los pares de objetivos según las categorías establecidas, únicamente se respetan aquellas categorías que contenga al menos una pareja de adjetivos. El gráfico 7 de barras muestra esta distribución para el grupo experimental\_profesor\_2.

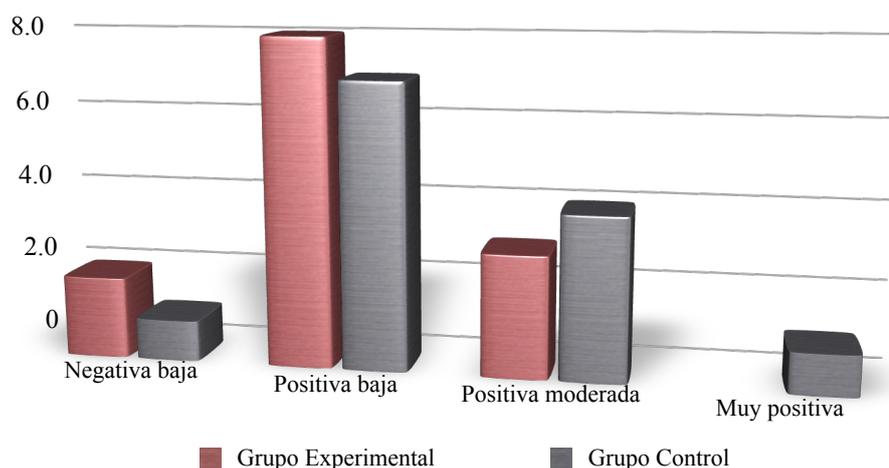


Gráfico 7: Distribución de las parejas de adjetivos según las categorías para los grupos del profesor\_2

En este grupo experimental aunque la percepción que predomina es la positiva, sin embargo la percepción que predomina es la positiva baja. Esta actitud positiva baja se presenta en términos de que las actividades de clase fueron alentadoras, claras motivadoras, relajantes, sencillas, reflexivas y formativas pero en un nivel muy bajo. Además hay dos parejas en las cuales los estudiantes tienen una actitud negativa baja y por tanto consideran que las actividades realizadas en clase fueron aburridas y pasivas.

En este caso este resultado merece un comentario, debido a que en este grupo fue donde se llevó a cabo la intervención y cómo investigador no puedo dejar pasar esta situación debido a que se espera que por las actividades realizadas en clase, en las cuales se utilizaron videos,

animaciones, simulaciones, el uso de imágenes como metáfora visual entre otros parece extraño que no logramos alcanzar uno de los objetivos propuesto en el uso de representaciones visual como la motivación. ¿Qué factores hicieron posible que esto ocurriera?,

Por tanto, se obtuvo que la percepción que predomina es la positiva moderada, se pudo concluir que las y los estudiantes muestran una percepción en general positiva respecto a las actividades realizadas. Rescatamos una percepción muy positiva en términos de que las actividades en clase fueron ordenadas.

Vale la pena mencionar igual que en el comentario anterior, en este caso la percepción general en el grupo control es mejor que la percepción en el grupo experimental y esto nos lleva a preguntarnos ¿Tiene estos resultados alguna explicación lógica? ¿Cuáles factores podrían incidir a que la percepción en el grupo control sea levemente mejor que el grupo experimental?, ¿Puede el uso de tecnología influir negativamente en el ambiente de aprendizaje en el aula?

De igual forma podemos comparar esa percepción entre los grupos que fueron utilizados como grupo control y los grupos experimentales, esto lo podemos ver en el gráfico 8.

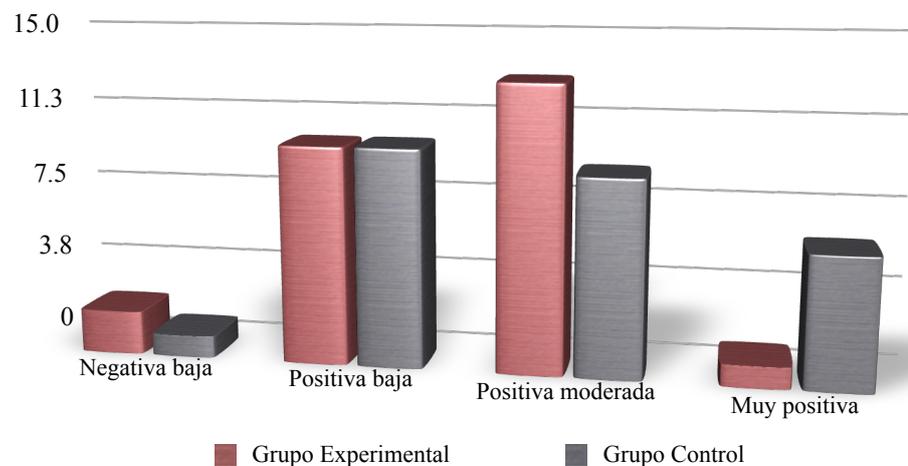


Gráfico 8: Distribución de las parejas de adjetivos según las categorías para los distintos grupo

## 8.2 Comprensión del concepto de derivada

Dentro de este apartado se consideraron dos aspectos fundamentales en la comprensión del concepto de derivada, el manejo del concepto propiamente y el manejo de la perspectiva analítica de la derivada. Los items en el instrumento diseñado correspondían a evaluar estos dos aspectos.

Seguidamente se muestran las variables definidas para el análisis:

### VARIABLES DEPENDIENTES:

- Comprensión de la derivada como razón de cambio, su relación con la monotonía y concavidad de la gráfica de una función(COD)
- Manejo de la perspectiva analítica de la derivada(PAD)

Para determinar si la utilización de componentes de la visualización del conocimiento mejoró la comprensión del concepto de derivada se realizaron varios contraste para cada una de las variables COD y PAD entre el grupo experimental y el grupo control de los grupos participantes.

Para realizar estos análisis fue necesario verificar varios supuestos, uno de ellos el de homogeneidad o aleatoriedad, para ello consideramos las notas de los estudiantes participantes en el curso previo de Cálculo Diferencial e Integral, en este caso corresponde al curso de Matemática General. Al inicio de este capítulo se verificó que no hay diferencias en entre los grupos en cuanto a su rendimiento en el curso previo al de Cálculo Diferencial e Integral

En la mayoría de los casos, los contrastes que se realizaron fueron contrastes de pruebas para dos muestras independientes y para cada una de ellas se utilizó un nivel de significación del 5% .

Se realizaron dos contrastes con los cinco grupos involucrados a través de un ANOVA de un factor y en los casos necesarios se realizó una prueba POST HOC.

En la tabla 21 se muestra en forma explícita los contrastes que se realizaron y las variables involucradas:

**Tabla 21:** *Contrastes propuestos para las variables COD y PAD*

Contraste	Variable	
Profesor_1_Control vs Profesor_1_Experimental	COD	PAD
Profesor_2_Control vs Profesor_2_Experimental	COD	PAD
Grupos Control vs Grupos Experimentales	COD	PAD
Grupos Control vs Grupos Experimentales	COD	PAD
Todos los grupos	COD	PAD

EL uso de pruebas paramétricas y no paramétricas para realizar los contrastes dependen de la distribución de las variables involucradas sea esta normal o no. Seguidamente se presenta en forma resumida el análisis de normalidad de cada una de las variables implicadas( tabla 22 ).

**Tabla 22:** *Resumen de prueba de normalidad para los grupos involucrados*

Grupo	Variable	Valor de la prueba de Kolmogorov-Smirnov	Total de casos válidos
Profesor_1_Control	COD	,307	26
	PAD	,212	
Profesor_1_Experimental	COD	,813	23
	PAD	,570	
Profesor_2_Control	COD	,918	23
	PAD	,081	
Profesor_2_Experimental	COD	,456	35
	PAD	,350	
Profesor_3_Control	COD	,512	21
	PAD	,306	

De acuerdo con los niveles de significación de la prueba establecidos (5%) y los valores obtenidos en la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov en cada una de las pruebas. Todas son claramente superiores al nivel de significación. Por tanto se concluyó que la distribución de las variables COD y PAD siguen una distribución normal en cada uno de los grupos, en consecuencia utilizamos pruebas paramétricas para realizar los contrastes.

Estadísticamente estos son los contrastes asociados a la tabla 8:

**Contraste  $N^{\circ}$  1:** Profesor\_1\_Control vs Profesor\_1\_Experimental:

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

**Variable: PAD**

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

Para la prueba de homogeneidad de las varianzas se utilizó la prueba de Levene y para la igualdad de las medias la prueba T para dos muestras independientes y la decisión se toma según la presunción de varianzas iguales o no. La tabla 23 resume los resultados de las pruebas:

**Tabla 23:** Resumen de prueba de Levene y prueba t para las variables COD y

*PAD*

Variable		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD Concepto de derivada	Se han asumido varianzas iguales	,011	
	No se han asumido varianzas iguales		,002
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Se han asumido varianzas iguales	,108	,286
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable COD tenemos un valor de la prueba T de 0.002 inferior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado por lo que existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control y en el experimental del profesor\_1.

En caso de la variable PAD podemos observar que la conclusión es distinta, el valor de la prueba T de 0.286 es claramente superior al nivel de significación, por lo que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el manejo de la perspectiva analítica de la derivada es igual en el grupo control como en el experimental del profesor\_1.

**Contraste  $N^{\circ}$  2:** Profesor\_2\_Control vs Profesor\_2\_Experimental:

**Variable: COD**

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

**Variable: PAD**

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

En estos contrastes utilizamos la mismas pruebas de homogeneidad de las varianzas y la prueba T, la tabla 24 resume los resultados de las pruebas:

**Tabla 24:** Resumen de prueba de Levene y prueba t para las variables COD y PAD

Variable		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD Concepto de derivada	Se han asumido varianzas iguales	,680	,912
	No se han asumido varianzas iguales		
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Se han asumido varianzas iguales	,626	,592
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable COD tenemos un valor de la prueba T de 0.912 superior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control y en el experimental del profesor\_2.

En caso de la variable PAD podemos observar que la conclusión es similar, el valor de la prueba T de 0.592 es claramente superior al nivel de significación, por lo que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el manejo de la perspectiva analítica de la derivada es igual en el grupo control como en el experimental del profesor\_2.

**Contraste  $N^{\circ}$  3:** Grupos\_Control vs Grupos\_Experimental:

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en los grupos control como en los grupos experimentales

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en los grupos control como en los grupos experimentales

**Variable:** PAD

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes es igual en los grupos control como en los grupos experimentales

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes no es igual en los grupos control como en los grupos experimentales

En estos contrastes utilizamos la mismas pruebas de homogeneidad de las varianzas y la prueba T, la siguiente tabla 25 resume los resultados de las pruebas:

Tabla 25: Resumen de prueba de Levene y prueba t para las variables COD y PAD

Variable		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD Concepto de derivada	Se han asumido varianzas iguales	,615	,023
	No se han asumido varianzas iguales		
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Se han asumido varianzas iguales	,893	,622
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable COD tenemos un valor de la prueba T de 0.023 inferior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es distinta en los grupos control y en los grupos experimentales

En caso de la variable PAD podemos observar que la conclusión es distinta, en este caso el valor de la prueba T de 0.622 es claramente superior al nivel de significación, por lo que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el manejo de la perspectiva analítica de la derivada es igual en los grupos control como en los grupos experimentales.

Por otro lado, en esta última intervención se invitó a un grupo adicional del profesor\_3 el cuál participó de la prueba únicamente, por lo que se realizó un contraste de este grupo con los grupos restantes, la tabla 26 muestra un resumen de los resultados obtenidos.

Tabla 26: Contraste entre el grupo profesor\_3 y cada uno de los otros grupos

Variable	Contraste	Suposición	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD Concepto de derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_2_Control	Se han asumido varianzas iguales	,158	,016
		No se han asumido varianzas iguales		
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_2_Control	Se han asumido varianzas iguales	,702	,044
		No se han asumido varianzas iguales		
COD Concepto de derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_1_Control	Se han asumido varianzas iguales	,919	,665
		No se han asumido varianzas iguales		
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_1_Control	Se han asumido varianzas iguales	,130	,754
		No se han asumido varianzas iguales		
COD Concepto de derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_2_Experime	Se han asumido varianzas iguales	,290	,011

	ntal	No se han asumido varianzas iguales		
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_2_Experimental	Se han asumido varianzas iguales	,974	,053
		No se han asumido varianzas iguales		
COD Concepto de derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_1_Experimental	Se han asumido varianzas iguales	,030	
		No se han asumido varianzas iguales		,007
PAD Perspectiva Analítica de la derivada	Profesor_3_Control vs Profesor_1_Experimental	Se han asumido varianzas iguales	,968	,242
		No se han asumido varianzas iguales		

Los resultados muestran algunas relaciones interesantes. Por ejemplo en el caso del grupo del Profesor\_3\_Control con los grupos del profesor\_2 (experimental y control) para ambas variables se concluye que hay diferencias estadísticas. Sin embargo este grupo del profesor\_3\_Control con el grupo control del profesor\_1 no muestra diferencias estadísticas para ninguna de las dos variables. Por último el contraste entre el grupo control del profesor\_3 y el grupo experimental del profesor\_1 muestra diferencias en la parte conceptual de la derivada y no así en el manejo de la perspectiva analítica de la derivada.

Antes de plantear el contraste entre todos los grupos revisamos los descriptivos generales y a partir de ellos podemos ver claramente la necesidad de proponer un contraste entre todos los grupos involucrados para las variables COD y PAD.

**Tabla 27:** Contraste entre el grupo profesor\_3 y cada uno de los otros grupos

Variable	Grupos	N	Media	Desviación típica
COD	Profesor_2_Experimental	35	49,7619	19,74984
	Profesor_3_Control	21	36,5079	15,47314
	Profesor_1_Experimental	23	52,5362	21,82269
	Profesor_1_Control	26	34,6154	14,27747
	Profesor_2_Control	23	50,3623	20,63975
	Total	128	45,1172	19,85642
PAD	Profesor_2_Experimental	35	59,0476	20,74702
	Profesor_3_Control	21	47,6190	21,26925
	Profesor_1_Experimental	23	55,0725	20,37203
	Profesor_1_Control	26	49,3590	16,65384
	Profesor_2_Control	23	62,3188	25,23495
	Total	128	55,0781	21,28408

Podemos observar claramente diferencias significativas en las medias de los grupos para ambas variables y con un menor grado de diferenciación en las varianzas. Presentamos por tanto el contraste propuesto.

**Contraste  $N^{\circ}$  4:** Las medias de todos los grupos

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  con  $i = 1..5 \wedge j = 1..5$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en al menos dos grupos

**Variable:** PAD

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  con  $i = 1..5 \wedge j = 1..5$  : El manejo de la perspectiva analítica de la derivada por parte de los estudiantes no es igual en al menos dos grupos

En la tabla, se presentó la prueba de normalidad y como resultado se obtuvo que la distribución de las variables dependientes en los cinco grupos es normal.

De igual forma que en las pruebas anteriores se realiza la prueba para verificar el supuesto de homogeneidad de las varianzas, en este caso la tabla 28 muestra el resultado de la prueba de Levene.

**Tabla 28:** Prueba de homogeneidad de las varianzas para el ANOVA

Variables	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
COD	1,908	4	123	,113
PAD	1,130	4	123	,346

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para ambas variables el valor de la prueba es superior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que asumimos la hipótesis nula de igualdad de varianzas de los cinco grupos. Bajo los supuestos verificados aceptamos la  $F$  del ANOVA como la prueba más adecuada para responder a la pregunta. El resultado obtenido se muestra en la tabla 29:

**Tabla 29:** ANOVA de un factor para las variables COD y PAD

Variables		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
COD	Inter-grupos	7077,790	4	1769,447	5,062	,001
	Intra-grupos	42995,452	123	349,557		
	Total	50073,242	127			
PAD	Inter-grupos	3776,155	4	944,039	2,160	,077
	Intra-grupos	53756,397	123	437,044		
	Total	57532,552	127			

En el caso de la variable PAD podemos observar que la prueba es levemente superior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ), por lo que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el manejo de la perspectiva analítica de la derivada es igual en todos los grupos. En cuanto a la variable COD el valor de la prueba es superior al nivel de significación por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en todos los grupos.

Como no sólo nos interesa conocer que existen diferencias entre los grupos sino la concreción respecto a cuales son esas diferencias y averiguar entre qué grupos se dan. Con el objetivo de determinar las diferencias mostradas por la prueba de la  $F$  del ANOVA utilizaremos una prueba de Comparación a Posteriori o Comparaciones Post Hoc. Como en nuestro caso la prueba de Levene nos ha informado que las varianzas de los grupos son iguales y dado que el tamaño de los grupos está equilibrado utilizaremos la prueba HSD de Tukey.

La tabla 30 recoge las diferencias de las medias entre todos los pares de grupos implicados.

**Tabla 30:** Prueba Post Hoc de HSD de Tukey

Variable dependiente	Método	(I) Grupo	(J) Grupo	Sig.	
COD	HSD de Tukey	Profesor_3_Control	Profesor_3_Control	,083	
			Profesor_1_Experimental	,981	
			Profesor_2_Experimental	Profesor_1_Control	,018
			Profesor_2_Control	1,000	
			Profesor_2_Experimental	,083	
			Profesor_1_Experimental	,041	
		Profesor_1_Experimental	Profesor_1_Control	,997	
			Profesor_2_Control	,108	
			Profesor_2_Experimental	,981	
			Profesor_3_Control	,041	
			Profesor_1_Control	,009	
			Profesor_2_Control	,995	
		Profesor_2_Control	Profesor_2_Experimental	,018	
			Profesor_3_Control	,997	
			Profesor_1_Experimental	,009	
			Profesor_2_Control	,031	
			Profesor_2_Experimental	1,000	
			Profesor_3_Control	,108	
		Profesor_2_Experimental	Profesor_1_Experimental	,995	
			Profesor_1_Control	,031	

De acuerdo con los datos de la tabla (descripción de los estadísticos) y los resultados de la prueba de Tukey, podemos establecer diferencias entre algunos grupos, algunas de ellas ya habían sido consideradas cuando se realizaron los análisis de comparación de dos medias. Rescatamos para el grupo del profesor\_1\_Experimental diferencias significativas con los grupos control del profesor\_3 y su grupo control, en ambos casos el grupo experimental es superior en el manejo del concepto de derivada.

En el caso del grupo del profesor\_2\_Experimental no presenta diferencias significativas con su grupo control y con el grupo\_profesor\_\_3 en cuanto al manejo del concepto de derivada. Sin embargo si se muestran diferencias entre el grupo profesor\_2\_control y el grupo profesor\_1\_control, mostrando el primero superioridad en cuanto al manejo del concepto de derivada.

### 8.3 Rendimiento académico

Dentro de los objetivos específicos planteados en la investigación se pretendía explorar si había diferencias en el rendimiento académico. Para ello se consideró la nota final del instrumento diseñado, el cual además de evaluar aspectos de la derivada y el manejo analítico de la derivada contenía ítems relacionados con el concepto de diferencial y el manejo de la perspectiva analítica de la diferencial.

Seguidamente se muestra la variable definida para el análisis:

#### Variable dependiente

Rendimiento en la prueba sobre el tema de derivadas(NOTA)

Para determinar si la utilización de componentes de la visualización del conocimiento mejoró el rendimiento, este caso la variable Nota se establecieron contrastes entre el grupo experimental y el grupo control de los grupos participantes.

Antes de realizar este contraste es importante revisar los descriptivos generales (tabla 31) obtenidos en la prueba:

**Tabla 31:** Estadísticos descriptivos para la variable Nota de todos los grupos

Grupo	N	Media	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Profesor_2_Experimental	35	54,29	14,859	30	95
Profesor_3_Control	21	38,10	11,009	20	55
Profesor_1_Experimental	23	54,13	16,213	25	85
Profesor_1_Control	26	40,00	12,570	25	70
Profesor_2_Control	23	55,65	16,118	25	85
Total	128	48,95	16,017	20	95

Observamos que las notas no fueron altas en ninguno de los grupos, sin embargo en algunos grupos parece haber diferencias significativas. Estas diferencias las vamos a tratar con varios contrastes.

Al igual que para las variables anteriores se realizaron contrastes de pruebas para dos muestras independientes y para cada una de ellas se utilizó un nivel de significación del 5% .

Además se realizó un contraste con los cinco grupos involucrados a través de un ANOVA de un factor y en caso necesario se realizó una prueba POSTHOC.

En la tabla 32 muestra en forma explícita los contrastes que se realizaron y las variables involucradas

**Tabla 32:** Contrastes propuestos para la variable Nota

N	Grupos para el contraste	Variable
1	Profesor_1_Control vs Profesor_1_Experimental	Nota
2	Profesor_2_Control vs Profesor_2_Experimental	
3	Grupos Control vs Grupos Experimentales	
4	Todos los grupos	

Nuevamente el uso de pruebas paramétricas y no paramétricas para realizar los contrastes dependen de la distribución de las variables involucradas sea esta normal o no. Seguidamente se presenta en forma resumida el análisis de normalidad de cada una de las variables implicadas( tabla 33 ).

**Tabla 33:** Prueba de normalidad para la variable Nota

Grupo	Variable	Valor de la prueba de Kolmogorov-Smirnov	Total de casos válidos
Profesor_1_Control	Nota	,287	26
Profesor_1_Experimental		,890	23
Profesor_2_Control		,781	23
Profesor_2_Experimental		,408	35
Profesor_3_Control		,450	21

De acuerdo con los niveles de significación de la prueba establecidos (5%) y los valores obtenidos en la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov en cada una de las pruebas. Todas son claramente superiores al nivel de significación. Por tanto se concluyó que la distribución de la variable Nota siguen una distribución normal en cada uno de los grupos, en consecuencia utilizamos pruebas paramétricas para realizar los contrastes.

Estadísticamente estos son los contrastes asociados a la tabla 32:

**Contraste  $N^{\circ}$  1:** Profesor\_1\_Control vs Profesor\_1\_Experimental:

**Variable:** Nota

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

Para la prueba de homogeneidad de las varianzas se utilizó la prueba de Levene y para la igualdad de las medias la prueba T para dos muestras independientes y la decisión se toma según la presunción de varianzas iguales o no. La tabla 34 resume los resultados de las pruebas:

**Tabla 34:** Prueba de homogeneidad y prueba t para la variable Nota

Variable	Supuestos	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
----------	-----------	--	-------------------------------------

Nota	Se han asumido varianzas iguales	,270	,001
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable Nota tenemos un valor de la prueba T de 0.001 inferior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1.

**Contraste N° 2: Profesor\_2\_Control vs Profesor\_2\_Experimental:**

**Variable:** Nota

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

Para la prueba de homogeneidad de las varianzas se utilizó la prueba de Levene y para la igualdad de las medias la prueba T para dos muestras independientes y la decisión se toma según la presunción de varianzas iguales o no. La tabla 35 resume los resultados de las pruebas:

**Tabla 35:** Prueba de homogeneidad y prueba t para la variable Nota

Variable	Supuestos	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
Nota	Se han asumido varianzas iguales	,507	,742
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable Nota tenemos un valor de la prueba T de 0.742 superior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2.

Nuevamente obtenemos que el rendimiento en los grupos del profesor\_2 no hubo diferencia alguna, este comportamiento ha sido concordante con la mayoría de los contrastes que involucran al profesor\_2.

**Contraste N° 3: Grupos\_Control vs Grupos\_Experimental:**

Variable: Nota

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes es igual en los grupos control como los experimentales

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en los grupos control como los experimentales

En estos contrastes utilizamos la mismas pruebas de homogeneidad de las varianzas y la prueba T, la siguiente tabla 36 resume los resultados de las pruebas:

**Tabla 36:** Prueba de homogeneidad y prueba t para la variable Nota grupos control vs grupo experimental

Variable	Supuestos	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
Nota	Se han asumido varianzas iguales	0,313	,026
	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable Nota tenemos un valor de la prueba T de 0,026 inferior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que el rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en los grupos control como los experimentales

La tabla 37 muestra que el rendimiento en el grupo experimental es levemente superior a los grupos control, es importante hacer notar que esta comparación se realizó únicamente con cuatro de los cinco grupos, eliminamos el grupo del profesor\_3.

**Tabla 37:** Resumen de los estadísticos descriptivos para la variable Nota en los grupos control y grupos experimentales

Tipo_Grupo	N	Media	Desviación típ.
Grupos Control	49	47,35	16,237
Grupos Experimentales	58	54,22	15,270

**Contraste  $N^{\circ}$  4:** Las medias de todos los grupos para la variable Nota

**Variable:** Nota

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  con  $i = 1..5 \wedge j = 1..5$  : El rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en al menos dos grupos

En la tabla 33 , se presentó la prueba de normalidad y como resultado se obtuvo que la distribución de las variables dependientes en los cinco grupos es normal.

La tabla 38 muestra el resumen de las notas de los grupos involucrados, donde observamos claramente diferencias

**Tabla 38:** Resumen de los estadísticos descriptivos para la variable Nota en los grupos participantes

Grupo	N	Media	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Profesor_2_Experimental	35	54,29	14,859	30	95
Profesor_3_Control	21	38,10	11,009	20	55
Profesor_1_Experimental	23	54,13	16,213	25	85
Profesor_1_Control	26	40,00	12,570	25	70
Profesor_2_Control	23	55,65	16,118	25	85
Total	128	48,95	16,017	20	95

De igual forma que en las pruebas anteriores se realiza la prueba para verificar el supuesto de homogeneidad de las varianzas, en este caso la tabla 39 siguiente muestra el resultado de la prueba de Levene.

**Tabla 39:** Prueba de homogeneidad de las varianzas para el ANOVA de un factor de la variable Nota

VARIABLES	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
Nota	0,90	4	123	,466

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla, el valor de la prueba es superior a nuestro nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que asumimos la hipótesis nula de igualdad de varianzas de los cinco grupos. Bajo los supuestos verificados aceptamos la  $F$  del ANOVA como la prueba más adecuada para responder a la pregunta. El resultado obtenido se muestra en la tabla 40:

**Tabla 40:** ANOVA de un factor de la variable Nota

Variable		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Nota	Inter-grupos	7203,839	4	1800,960	8,728	,000
	Intra-grupos	25378,778	123	206,332		
	Total	32582,617	127			

El valor de la prueba es inferior al nivel de significación por lo que se concluye que la el rendimiento en la prueba de derivada por parte de los estudiantes no es igual en al menos dos grupos.

Como no sólo nos interesa conocer que existen diferencias entre los grupos sino la concreción respecto a cuales son esas diferencias y averiguar entre qué grupos se dan. Con el objetivo de determinar las diferencias mostradas por la prueba de la  $F$  del ANOVA ,utilizaremos la prueba HSD de Tukey.

La tabla 41 recoge las diferencias de las medias entre todos los pares de grupos implicados.

**Tabla 41:** Prueba Pos Hoc de HSD de Turkey para la variable Nota

Variable dependiente		(I) Grupo	(J) Grupo	Sig.
Nota	HSD de Tukey	Profesor_2_Experimental	Profesor_3_Control	,001
			Profesor_1_Experimental	1,000
			Profesor_1_Control	,002
			Profesor_2_Control	,997
			Profesor_2_Experimental	,001
			Profesor_1_Experimental	,003
		Profesor_3_Control	Profesor_1_Control	,991
			Profesor_2_Control	,001
			Profesor_2_Experimental	1,000
			Profesor_3_Control	,003
			Profesor_1_Control	,007
			Profesor_2_Control	,996
		Profesor_1_Experimental	Profesor_2_Experimental	,002
			Profesor_3_Control	,991
			Profesor_1_Experimental	,007
			Profesor_2_Control	,002
			Profesor_2_Experimental	,997
			Profesor_3_Control	,001
		Profesor_2_Control	Profesor_1_Experimental	,996
			Profesor_1_Control	,002
			Profesor_2_Experimental	,997
			Profesor_3_Control	,001
			Profesor_1_Experimental	,996
			Profesor_1_Control	,002

De acuerdo con los datos de la tabla (descripción de los estadísticos) y los resultados de la prueba de Tukey, podemos establecer diferencias entre algunos grupos, algunas de ellas ya habían sido consideradas cuando se realizaron los análisis de comparación de dos medias.

Rescatamos para el grupo del profesor\_1\_Experimental diferencias significativas con todos los grupos control. Destacamos que el grupo experimental del profesor\_1 es superior en rendimiento respecto al grupo control del profesor\_1 y el grupo control del profesor\_3. Sin embargo las diferencias respecto al grupo control del profesor\_2 se da en el sentido inverso, observado la tabla 21 podemos observar que el grupo control del profesor\_2 presenta un rendimiento superior al rendimiento del grupo experimental.

De igual forma el grupo experimental del profesor\_2 presenta diferencias significativas con todos los grupos control, de forma similar las diferencias favorecen al grupo experimental en la mayoría de los grupos, sin embargo se presenta una diferencia con su grupo control el cual presenta un rendimiento superior.

Por último decidimos considerar las pruebas realizadas en el curso de Cálculo Diferencial e Integral elaborado por la cátedra, estas pruebas por lo general son de desarrollo. Para efectos de análisis se van a considerar tres de las pruebas parciales y la nota final que obtuvieron los estudiantes en el curso, la prueba que coincide con la intervención es la prueba parcial II. Esto significa que en la primer prueba no hay intervención, en la segunda se da la intervención y para la tercer prueba ya no hay intervención. El gráfico 9 muestra los resultados obtenidos en estas pruebas:

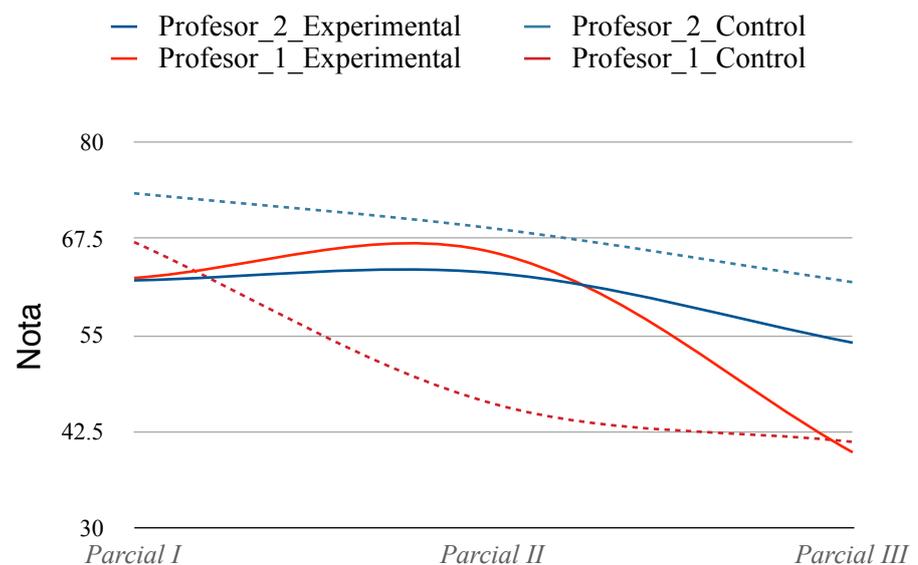


Gráfico 9: Distribución de las notas de los parciales de los grupos involucrados

En principio nos interesa el rendimiento, por lo que podemos observar que en el grupo del profesor\_2 sí mejoró su rendimiento, mientras que el del profesor\_2 no, esto sigue siendo consecuente con los análisis previos. Sin embargo en ambos el rendimiento es superior al del tercer parcial, claro esto también se da en los grupos control, por lo que es posible que estas diferencias se deban a otros factores.

Pero vale la pena destacar que únicamente en los grupos experimentales se produce mejoras cuando se da la intervención respecto al parcial I, en los dos grupos control el rendimiento bajó en el segundo parcial. Recordar que dentro de los objetivos previstos al usar las representaciones visuales está la motivación, esta podría ser la causante de que en los grupos experimentales en promedio el rendimiento mejora

## 9. Discusión y conclusiones

### 9.1 Conclusiones

#### 9.1.1 Impacto de la visualización del conocimiento

##### En el ambiente de clase

1. La forma en que perciben los estudiantes las actividades realizadas en clase dependen claramente del profesor que implemente la tecnología.
2. El uso de la tecnología en educación se ha desarrollado pero de forma incipiente, dado que la actitud del estudiante ante una intervención con tecnología es de asombro.
3. Los estudiantes valoran con mucha mayor rigurosidad actividades que incorporen elementos novedosos que aquellas que se mantienen en la prácticas tradicionales.
4. Cuando el profesor tiene manejo mas expedito de la tecnología los estudiantes perciben las actividades desarrolladas a través de la visualización del conocimiento más favorablemente que aquellos que trabajan de forma tradicional.
5. Cuando el profesor no tiene una actitud muy favorable sobre el uso de la tecnología la percepción de las actividades desarrolladas a través de la visualización del conocimiento no son percibidas tan favorablemente.
6. Hay una opinión muy marcada por los estudiantes que consideran que cuando se utiliza visualización del conocimiento las actividades son consideradas innovadoras. En contraste estas actividades que son desarrolladas en clase no son consideradas favorablemente como activas.
7. El nivel de motivación generado en los estudiantes por la visualización del conocimiento es sensible al papel que toma el profesor el la implementación de la tecnología.
8. Los estudiantes consideran en forma positiva que las clases con visualización del conocimiento son mucha más fáciles y sencillas que de la forma tradicional.
9. En algunos casos la percepción en el grupo control es mejor que la percepción en el grupo experimental y esto no lleva a preguntarnos ¿Tiene estos resultados alguna explicación lógica? ¿Cuáles factores podrían incidir a que la percepción en el grupo control sea levemente mejor que el grupo experimental?, ¿Puede el uso de tecnología influir negativamente en el ambiente de aprendizaje en el aula?
10. En todos los análisis realizados relacionados con la percepción de los estudiantes sobre las actividades que se realizan en clase hay una influencia directa del profesor sobre el impacto de la intervención de la visualización del conocimiento en el ambiente de clase.

##### En la comprensión de conceptos

1. El análisis estadístico muestra diferencias significativas en la comprensión del concepto de la deriva en los grupos experimentales respecto a los grupos control. En consecuencia hay una influencia de la visualización del conocimiento en la comprensión del concepto de deriva y por los descriptivos esta influencia es positiva.

2. En contraste el análisis estadístico no muestra diferencias significativas en el manejo de la perspectiva analítica de la deriva en los grupos experimentales respecto a los grupos control. Esto tiene un carácter positivo para la investigación debido a que el énfasis en la parte analítica es mínimo y a pesar de esto no hay diferencias respecto al grupo control en el cual tiene un carácter más algorítmico.
3. En un análisis más detallado encontramos que el grupo control es mejor que el grupo experimental cuando se hace una comparación entre todos los grupos involucrados. Sin embargo este resultado se presenta con el profesor cuyos resultados previos también mostraron cierta inconsistencia respecto a los resultados esperados.

### **En el rendimiento académico**

1. El hecho de que el análisis estadístico muestra diferencias significativas en el rendimiento académico favorables para uno de los profesores y no muestre diferencias en el caso del otro profesor nos plantea la interrogante sobre la variable profesor en cuanto a discriminar esas diferencias en los profesores que influyen directamente en el impacto que puede tener el uso de la visualización del conocimiento.
2. En contraste el análisis estadístico no muestra diferencias significativas en el manejo de la perspectiva analítica de la deriva en los grupos experimentales respecto a los grupos control. Esto tiene un carácter positivo para la investigación debido a que el énfasis en la parte analítica es mínimo y a pesar de esto no hay diferencias respecto al grupo control en el cual tiene un carácter más algorítmico.
3. En un análisis más detallado encontramos que el grupo control es mejor que el grupo experimental cuando se hace una comparación entre todos los grupos involucrados. Sin embargo este resultado se presenta con el profesor cuyos resultados previos también mostraron cierta inconsistencia respecto a los resultados esperados.

### **9.1.2 Generales**

1. Los resultados ofrecidos por la investigación nos indican que en la forma que se planteó la utilización de la visualización del conocimiento evidenció diferencias significativas en la comprensión de los conceptos.
2. La visualización del conocimiento nos proporciona un soporte teórico para incorporar en forma adecuada la tecnología en la enseñanza. Además nos brinda los alcances que podemos lograr cuando utilizamos tecnología.
3. La incorporación de la tecnología requiere de algunos supuestos que deben cumplir los agentes que intervienen en el proceso; en este caso el profesor, los estudiantes y el recurso.
4. El uso de la visualización del conocimiento no implica directamente el uso de la computadora por lo que este campo nos ofrece un abanico de opciones para implementar la tecnología en formatos distintos.
5. El uso de recursos tecnológicos en el proceso enseñanza -aprendizaje requiere que se cumplan muchas condiciones por los actores involucrados, sin embargo se quiere que estos actores se encuentren en espacios físicos adecuados.
6. El campo de la visualización del conocimiento debe ser tomado en cuenta para crear nuevas estrategias metodológicas en la enseñanza de la matemática cuando se quiera incorporar los recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza, la literatura garantiza la transferencia de conocimiento por medio del uso de representaciones visuales.

7. La utilización de la visualización del conocimiento debe ir acompañada de procesos de reflexión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos, sobre elementos de la psicología del aprendizaje de la matemática, la didáctica de la matemática y el pensamiento visual en matemática.
8. Se debe empezar con el uso de representaciones visuales para mejorar los ambientes de aprendizajes e ir profundizando en el uso de este marco de visualización para utilizarlo como apoyo al aprendizaje de conceptos matemáticos apoyados por las teorías relacionadas al aprendizaje de la matemática.
9. El modelo de visualización que plantea Burkhard como apoyo al marco general de visualización debe ser analizado cuidadosamente en el contexto de la enseñanza, dado que algunas de las etapas planteadas en el modelo podrían no ser desarrolladas en forma adecuada.
10. Cualquier medio de representación visual definido en el marco general de visualización que se desee utilizar debe llevar una evaluación previa con el objetivo de validar su uso y efectividad en las actividades de transferencia de conocimiento en la enseñanza de la matemática.
11. El profesor debe tener un dominio de los tipos de visualización y lo más importante estar convencido sobre el aporte que las representaciones visuales pueden ofrecer como apoyo a la enseñanza de la matemática.
12. La visualización del conocimiento no debe de considerarse aislada del enfoque teórico que se utilice para abordar un a temática específica.
13. El enfoque teórico que se utilice en el desarrollo del tema de derivada puede significar un punto de partida positivo en la búsqueda de alcanzar un aprendizaje significativo por parte de los y las estudiantes.
14. La actitud del profesor hacia el uso de la tecnología parece ser una variable relevante en el impacto que puede tener las tecnologías en la educación .
15. Uno de los factores que pueden contribuir al éxito al usar tecnología como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es que el profesor realmente crea que puede lograr diferencias con ella.
16. El uso de tecnologías puede permitir alcanzar otros objetivos distintos al de rendimiento como es; la motivación, mejorar la memoria, mejorar el trabajo colaborativo y la generación de nuevas ideas.

Todos estos aspectos comentados abren un abanico de opciones para temas de investigación que permitan una mayor profundización y así enriquecer el quehacer educativo. La visualización del conocimiento es un campo con gran potencial para definir estrategias de aprendizaje que lideren el uso de recursos multimediales como apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Esta investigación nos ha proporciona información en cuanto al alcance de la utilización del marco de visualización del conocimiento y su modelo, por ejemplo el papel de las perspectivas como la funcional(atención, coordinación y motivación entre otros ) es igualmente de efectiva en el ambiente de aprendizaje del aula.

Esto nos abre la posibilidad de realizar estudios más profundos para adaptar el modelo de visualización del conocimiento y utilizar el campo de la visualización del conocimiento como punto de partida para definir estrategias de enseñanza y aprendizaje de la matemática que incorporen los recursos tecnológicos. Se promueva el desarrollo de marcos de visualización del conocimiento en temáticas específicas que permitan enriquecer el nuestro

quehacer docente y contribuir a eliminar la incipiente presencia de la tecnología en los procesos educativos e impacten positivamente.

## **9.2 Limitaciones:**

1. Aunque hay un protocolo de clase que le indica al profesor el uso de las representaciones visuales, el desconocimiento de su potencial va en detrimento de su aprovechamiento.
2. Las condiciones de un espacio físico adecuado para el manejo de equipo y uso eficiente de las imágenes.
3. La dificultad para definir instrumentos de evaluación que permitan verificar si un estudiante comprendió y aprehendió un concepto matemático particular.

## 10. Recomendaciones:

Es importante en el marco de este proyecto de investigación, hacer algunas recomendaciones relacionadas a múltiples factores que deben ser considerados cuando se utilice visualización del conocimiento como apoyo a la enseñanza de la matemática. Estas observaciones son el resultado de una basta experiencia en este campo y los procesos de retroalimentación a lo largo de estos años. Estas observaciones se realizan en función de los agente involucrados en este proceso de enseñanza utilizando visualización del conocimiento.

1. Respecto al docente que desee utilizar el marco general de visualización del conocimiento, debe tener un conocimiento claro sobre el campo de la visualización del conocimiento, un dominio de los tipos de visualización y lo más importante estar convencido sobre el aporte que las representaciones visuales pueden ofrecer como apoyo a la enseñanza de la matemática.
2. El docente debe estar convencido que los elementos de visualización del conocimiento pueden jugar un papel importante en la definición de nuevas estrategias de aprendizaje que contribuyan positivamente a alcanzar un aprendizaje significativo, además debe estar convencido que el uso de múltiples representaciones visuales de un mismo concepto es lo que permite que el estudiantes se apropie de el.
3. En el caso del diseño de las imágenes, se debe hacer una evaluación preliminar antes de su diseño final, esto con el fin de verificar si la imagen realmente está comunicando lo planteado por el investigador, es decir, si la audiencia descodifica el mensaje y lo interpreta en forma adecuada.
4. En el caso particular de la enseñanza de la matemática se podría trabajar en la identificación y el diseño de imágenes que cumplan ciertos objetivos que se definen en la estructura o marco general de visualización, en particular en la perspectiva funcional por ejemplo si las imágenes llevan algún objetivo específico como llamar la atención de la audiencia, motivarla. Imágenes que permitan mejorar la coordinación o que generen discusión para la introducción de un tema.
5. Para efectos de implementación de las imágenes, es importante su ubicación dentro del aula, por cuanto las imágenes deben permanecer durante todo el periodo de duración del curso.
6. En el caso de que se utilice visualización interactiva, de igual forma debe haber un aprovechamiento al máximo de este recurso. Además si para la visualización interactiva se utiliza un proyector, la proyección debe ser óptima en cuanto a la posición y el tamaño, capturar la atención de la audiencia es fundamental.
7. En la visualización interactiva es importante decidir si esta será utilizada únicamente por el profesor o por el contrario el estudiante será participe directo. El resultado de esta decisión tendrá una repercusión directa en la estrategia que se debe utilizar.
8. Dado que la actitud del profesor hacia el uso de la tecnología es una variable relevante en el impacto que puede tener las tecnologías en la educación, es necesario neceser la actitud de los profesores para enfilear esfuerzos de capacitación con el objetivo de sensibilizar e identificación del profesor y su papel dentro de la tecnología y la educación.
9. Establecer algunas actividades que sean desarrolladas por los estudiantes en un laboratorio o como actividades extra.

## 11. Agradecimientos

Agradezco en primer instancia a los profesores que colaboraron en esta investigación, a Dr. Luis Gerardo Meza director de la Escuela de Matemática por darme las facilidades para llevarlo a cabo dicha investigación y al director o directora que estuvieron al frente de la Escuela de Ciencias Sociales en los periodos 2010 y 2011 por brindarme un espacio adecuado para llevar a cabo la intervención.

## 12. Referencias

Arnheim, R. (1993). *Arte y Percepción Visual* ( pp. 13-14). España.: Editorial Alianza.

Bruce, V., Green, Patrick & Goergeson, M. (2003). *Visual Perception, Physiology, Psychology and Ecology*(4ª. Ed.). New York .: Psychology Press.

Burkhard, R & Meier, M. (2005). Tube Map Visualization: Evaluation of a Novel Knowledge Visualization Application for the Transfer of Knowledge in Long-Term Projects. *Journal of Universal Computer Science* , vol. 11, no 4. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de, <http://www.knowledgemedia.org/modules/pub/download.php?id=knowledgemedia-66>

Burkhard, R. (2002). Learning from Architects Difference between Knowledge Visualization and Information Visualization . *Proceeding of the Eighth Conference on Information Visualisation: IEEE*, pp. 519-524. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de la base de datos IEEE Xplorer.

Burkhard, R. (2005). *Knowledge Visualization*. A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Sciences. Obtenido el 7 de Septiembre del 2007, de [http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo\\_burkhard/2005\\_burkhard\\_knowledge\\_visualization\\_dissertation\\_remo\\_burkhard.pdf](http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo_burkhard/2005_burkhard_knowledge_visualization_dissertation_remo_burkhard.pdf)

Burkhard, R., Meier, M. Smis, M. Allemang, J. & Honisch, L. (2005). Beyond Excel and Powerpoint: Knowledge Maps for the Transfer and Creation of Knowledge in Organization. *Proceeding of the Ninth Conference on Information Visualisation: IEEE*, pp. 76-81. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de la base de datos IEEE Xplorer.

Burkhard, R.(2007). *Visualize Desires, not Cities*. ETH Zurich, Chair for Information Architecture. Obtenido el 31 de Octubre del 2007, de <http://www.ia.arch.ethz.ch>

Carter, R. (1998). *Mapping the Mind*. Impreso por Weidenfeld & Nicolson. Italia

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, No. 5. (Nov., 1982), pp. 360-380. Obtenido el 23 de octubre del 2007 de la base de datos Jstor.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. *Proceeding of the Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Obtenido el 7 de octubre del 2007, de <http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf>

- Eppler, M & Burkhard, R. (2004). Knowledge Visualization: Towards a New Discipline and its Fields of Application. Obtenido el 11 de abril del 2008, de <http://www.bul.unisi.ch/cerca/bul/pubblicazioni/com/pdf/wpca0402.pdf>
- Eppler, M & Burkhard, R. (2005). Knowledge Visualization. Visualization. Encyclopedia de Knowledge Management . Idea Group. Obtenido el 11 de abril del 2008, de [http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo\\_burkhard/2005\\_Eppler\\_Burkhard\\_Knowledge%20Visualization\\_Encyclopedia%20of%20KM.pdf](http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo_burkhard/2005_Eppler_Burkhard_Knowledge%20Visualization_Encyclopedia%20of%20KM.pdf)
- Eppler, M. (2003). The Image of Insight: The use of Visual Metaphors in the communication of Knowledge. Proceeding of I-KNOW '03, Graz, Austria. . Obtenido el 11 de abril del 2008, de [http://i-know.know-center.tugraz.at/previous/i-know03/papers/ivkm/Eppler\\_IVKM.pdf](http://i-know.know-center.tugraz.at/previous/i-know03/papers/ivkm/Eppler_IVKM.pdf)
- Eppler, M. & Burkhard, R.(2006). Using Visual Representations in Knowledge Management– a Conceptual Framework and Application Examples. Obtenido el 31 de Octubre del 2007, de <http://www.ia.arch.ethz.ch/publications.htm>
- Fairchild, K., Poltrock, S. & Furnas, G. (1988). SemNet: Three-Dimensional Representations of Large Knowledge Bases. In R. Guindon (ed.) Cognitive Science and its applications for human-computer interaction. Hillsdale, NJ.
- Friasse, P & Piaget , J. (1973). La percepción. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Hernández, F. & Monge, J. (2007). Diagnóstico General de Visualización de Estructuras Jerárquicas(Parte I). Volumen 7, Número 3, Agosto 2007. Tiempo Compartido, Escuela de Ingeniería en Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Hernández, F. & Monge, J. (2007). Visualización Tridimensional de Estructuras Jerárquicas. Tesis para optar por el grado de Magíster Scientae en Computación, con Énfasis en Ciencias de la Computación. Escuela de Ingeniería en Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Marzo del 2007.
- Hernández, F. & Monge, J. (2007). Visualización Tridimensional de Estructuras Jerárquicas. Tesis para optar por el grado de Magíster Scientae en Computación, con Énfasis en Ciencias de la Computación. Escuela de Ingeniería en Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Marzo del 2007.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (1997). Metodología de la Investigación. México, D.F.: McGraw-Hill.
- Hitt, F. (1998). Working Group on Representations and Mathematics Visualization. Cinvestav-IPN, Mexico. Obtenido el 7 de Septiembre del 2007, de [http://www.west.asu.edu/cmw/pme/plenaryworgweb/PMENA\\_FHitt-WG.htm](http://www.west.asu.edu/cmw/pme/plenaryworgweb/PMENA_FHitt-WG.htm)
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 . Obtenido el 11 de junio del 2008, de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>

- Hoffman, D.(1998). *Inteligencia Visual*. Editorial Paidós.: Barcelona, España.
- Koffka, K. (1928). On the Structure of the Unconscious. First published in:  
The Unconscious. A Symposium. New York: Alfred A. Knopf, 1928.  
43-68. [Numbers in square brackets in the text indicate end of respective  
page in the original 1928 publication.]
- Kosslyn, S. (1980). *Image and Mind*.: Harvard University Press. Cambridge  
(MA).
- Larkin, J. & Simon, H. (1987). "Why a diagram is (sometimes) worth ten  
thousand words", *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- Lazotti, L.(1982). *Comunicación Visual y Escuela*. Editorial Gustavo Gill.:  
México. Version castellano.
- Novak, J. (2007). Helping Knowledge Cross Boundaries: Using Knowledge  
Visualization to Support Cross-Community Sensemaking. Proceedings of the 40th  
Hawaii International Conference on System Sciences – 2007. Obtenido el 21 de  
febrero del 2008 de la base de datos IEEE Xplorer.
- Palais,R. (1999). *The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical  
Exploratorium*. Obtenido el 7 de Septiembre del 2007, de [http://  
vmm.math.uci.edu/](http://vmm.math.uci.edu/).
- Peterson, J. (2002). *A Language for Mathematical Visualization*. Obtenido el  
26 de abril del 2008, de [http://www.haskell.org/yale/papers/fdpe02/  
index.html](http://www.haskell.org/yale/papers/fdpe02/index.html).
- Presmeg, N. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality  
in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 23, No. 6.  
(Dec., 1992), pp. 595-610. Obtenido el 23 de octubre del 2007 de la base de datos  
Jstor.
- Presmeg, N. (2005). *Research on Visualization in Learning and Teaching  
Mathematics. Emergence from psychology*. Obtenido el 10 de abril del 2008, de  
[http://merg.umassd.edu/projects/symcog/bibliography/  
pmeVisualizationFinalAPA.pdf](http://merg.umassd.edu/projects/symcog/bibliography/pmeVisualizationFinalAPA.pdf)
- Rao, R. & Sprague, R. (1998). *Natural Technologies for Knowledge Work:  
Information Visualization and Knowledge Extraction*. *Journal of  
Knowledge Management* Volume 2 Number 2 December 1998. Obtenido  
el 7 de octubre del 2007, de [http://www.emeraldinsight.com/Insight/  
ViewContentServlet?Filename=Published/EmeraldFullTextArticle/Pdf/  
2300020208.pdf](http://www.emeraldinsight.com/Insight/ViewContentServlet?Filename=Published/EmeraldFullTextArticle/Pdf/2300020208.pdf)
- Rock, I. (1987). *Figuren, die man wahrnimmt, ohne sie zu sehen*. In

Wahrnehmung und visuelles System. Spektrum der Wissenschaft.  
Heidelberg.

Saad, A. & Zaghoul, R. (2002). A Knowledge Visualization Tool for Teaching and Learning Computer Engineering Knowledge, Concepts, and Skills. *Frontiers in Education Conference*, pp. T2F-7-T2F-10. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de la base de datos IEEE Xplorer.

Spencer, R. (2001). *Information Visualization*. Oxford .: Editorial Addison-Wesley.

Vinner, S. (1976). The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 7, No. 4. (Dec., 1976), pp. 413-429. Obtenido el 23 de octubre del 2007 de la base de datos Jstor.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, No. 4. (Jul., 1989), pp. 356-366. Obtenido el 23 de octubre del 2007 de la base de datos Jstor.

Vinner, S., Hershkowitz, R. & Bruckheimer, M. (1981). Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 12, No. 1. (Jan., 1981), pp. 70-76. Obtenido el 23 de octubre del 2007 de la base de datos Jstor.

Ware, C. (2004). *Information Visualization Perception for Design* (2ª. Ed.). USA .: Editorial Morgan Kaufmann.