

preparación sera todo el periodo comprendido entre los once y los trece o catorce años y el completamiento será el nivel de equilibrio que aparece en ese momento." (ib.). A los sujetos ubicados en el nivel de preparación de las operaciones formales Piaget los denomina transicionales.

Siguiendo estos criterios, Piaget distingue tres estadios en el desarrollo cognoscitivo:

I. El estadio senso-motriz

Se extiende desde el nacimiento hasta la aparición del lenguaje. En este estadio se da una organización paulatina desde los primeros reflejos hasta la ubicación del niño en el espacio y en su medio social como un elemento y un sujeto entre otros. Este estadio se distingue por la dependencia de la inteligencia de las configuraciones perceptivas y por la incapacidad de aprehender los estados de las cosas como momentos de un proceso.

II. El estadio de preparación y organización de las operaciones concretas

Se extiende, en los niños estudiados por Piaget, aproximadamente desde los 2 hasta los 11 ó 12 años. El autor divide este estadio en dos subestadios (que a veces son tomados como estadios en sí mismos): II-A: subestadio de preparación de las operaciones concretas o preoperatorio, que se extiende aproximadamente hasta los 7 u 8 años; II-B: subestadio de las operaciones concretas, caracterizado por la operación de los agrupamientos que adelante se exponen en detalle.

III. El estadio de las operaciones formales

En este Piaget también distingue dos subestadios: III-A que es de preparación de las operaciones formales y que abarca aproximadamente los 11 y 13 años; III-B en el que se alcanza el equilibrio de las operaciones formales y que se extiende de 14 a los 15 años. Este estadio se caracteriza por la posibilidad de operar con la lógica proposicional y con el grupo de las cuatro transformaciones (véase adelante una exposición detallada de la estructura de grupo-reticulado que caracteriza este estadio).

LAS ESTRUCTURAS PROPUESTAS POR PIAGET

Piaget plantea que el comportamiento inteligente en el humano, a través de sus sucesivas edades, no obedece al azar o a una conjunción caótica de factores, sino a estructuras de conjunto que se van construyendo unas sobre las otras, a partir de los reflejos innatos, por intermedio de la equilibración de los procesos de asimilación y acomodación, hasta llegar al pensamiento interproposicional. El autor se interesó por explicar cómo a partir de los niveles más elementales se construyen paso a paso las operaciones que luego la lógica en cuanto disciplina científica llevará a sus límites y a su formalización.

Como ya se anotó, Piaget distingue tres estadios: el sensorio-motriz; el operatorio concreto, dividido a su vez en dos subestadios: el preoperatorio y el operatorio concreto; y el estadio de las operaciones formales. En los niveles sensorio-motriz y preoperatorio, por no existir operaciones, no se dan compensaciones propiamente dichas sino regulaciones (cambios de estado sin reversibilidad) lo cual hace que no sean formalizables, al menos en términos algebraicos. Por esta razón, y principalmente porque los objetivos de este estudio se centran en las operaciones concretas y formales, sólo nos referiremos a la estructura de los Agrupamientos y de Grupo-Reticulado, que corresponden a los estadios de las operaciones concretas y formales, respectivamente.

Antes de pasar a exponer los Agrupamientos y la estructura de Grupo-Reticulado, se hace necesario definir las estructuras de Grupo y de Reticulo, de los cuales el Agrupamiento es una forma

imperfecta que sólo el pensamiento formal integra y cumple a cabalidad.

Grupo. Un grupo es una estructura formada por un conjunto de elementos (por ejemplo el conjunto de números enteros), sobre el que se define una operación \circ (por ejemplo la adición), tal que para cualesquiera elementos del conjunto se cumplen las siguientes propiedades:

1. Ley de Cierre: la aplicación de la operación a cualquier par de elementos del conjunto da como resultado otro elemento del conjunto. (ejemplo: la adición de dos números enteros siempre da como resultado un número entero)

2. Existe un elemento neutro tal que compuesto con cualquier otro elemento del conjunto lo deja invariante. (el 0 en el caso de números enteros).

3. Para todo elemento del conjunto existe un elemento inverso tal que la composición de ambos da como resultado el elemento neutro (en el ejemplo de los números enteros: $+3 \circ -3 = 0$).

4. La operación \circ es asociativa: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (en el ejemplo de los números enteros: $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$).

Reticulado. "Un reticulado es un conjunto parcialmente ordenado por una relación que escribiremos $=<$ y tal que, para toda cupla de elementos de E se pueda definir el más pequeño de los "mayorantes" común a ambos o supremum y el mayor de los "minorantes" común a ambos o infimum." (Piaget, 1977, p.118).

Para aclarar los conceptos de supremum e infimum

ejemplificamos con un conjunto de subconjuntos parcialmente ordenados. En este caso el supremum de dos subconjuntos A y B será $A \cup B$; el infimum de A y B será su intersección.

Los Agrupamientos

Piaget no hace una exposición formal para el agrupamiento como estructura única; antes bien, expone 8 agrupamientos para cada uno de los cuales define los elementos, operaciones, y propiedades que cumple. Para nuestros efectos hacemos una breve exposición de cada agrupamiento, ilustrando sus propiedades sólo para los agrupamientos I, IV, y VIII. Para evitar las referencias constantes advertimos que la exposición "formal" de los agrupamientos está tomada de la segunda edición del Ensayo de Lógica Operatoria (Piaget, 1977) y las ejemplificaciones de Castorina y Palau (1982), y de Flavel (1982).

Anotamos que la formalización del Agrupamiento y sus ocho modalidades son una construcción teórica hecha por Piaget a partir de sus experiencias con niños, pero sus derivaciones formales no necesariamente han sido observadas empíricamente. De hecho en el Ensayo de Lógica Operatoria no se ejemplifica ni prueba la existencia de cada uno de los ocho agrupamientos en el pensamiento del niño operatorio concreto, lo que por lo demás no es el interés en esta obra. Se trata pues, de una construcción teórica con una contrastación empírica parcial.

El Agrupamiento pretende formalizar las operaciones lógicas con clases y relaciones del pensamiento concreto. Debe advertirse de entrada que no toda clasificación es susceptible de tal

formalización. Quedan fuera la clasificación de clases elementales simplemente yuxtapuestas y las clasificaciones fuertemente estructuradas que son objeto de la lógica interproposicional. La clasificación a que se refieren los agrupamientos cumple con los siguientes principios:

"I.- El primer principio de una clasificación formalmente elaborada es que toda clase se presenta siempre incluida en otra clase de orden superior e incluyendo simultáneamente alguna otra clase de orden inferior, con la única excepción de la clase considerada como total (la clase referencial Z, que contiene a todas las otras) y de las clases elegidas como elementales."

"II.- Segundo principio: las distintas clases pertenecientes a un mismo nivel jerárquico son disyuntas."

$$A \cap A' = \emptyset; \quad B \cap B' = \emptyset$$

"III.- Tercer principio: las clases de un mismo rango no pueden caracterizarse más que de manera dicotómica, es decir, por la presencia o ausencia de los caracteres dados"

"IV.- El cuarto principio esencial de la clasificación es que todo término individual se halla incluido en una serie de clases, las cuales pertenecen respectivamente a cada uno de los niveles de la jerarquía."

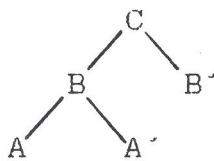
No puede haber un individuo que pertenezca a A y que no pertenezca a C.

"V.- Quinto principio: La clasificación supone un cierto principio de orden" .

Se trata de un conjunto parcialmente ordenado en el que las

clases primarias (A, B, C) están incluidas en otra clase primaria (B ó C), pero las clases disyuntas no están ordenadas.

Se trata de un sistema de clasificación del tipo utilizado en biología, en el cual los seres vivos se ordenan según especie, género, familia, ... reino. Así un elemento de A está a su vez incluido en B y en C, pero no es posible construir B a partir de A, ni viceversa, son clases dadas, no construidas. Además, para efectos de operación lógica se llama A' a los elementos del mismo nivel de A, incluidos en B, pero distintos de A, lo que viene a ser su clase complementaria (A' , por supuesto puede representar muchas clases). De este modo, se tiene una clasificación que puede representarse así:



El conjunto de las operaciones de clases y de relaciones da origen a ocho agrupamientos. Una división surge según se trate de clases o de relaciones, otra de según se trate de operaciones aditivas o multiplicativas y otra según se trate de clases primarias o secundarias, o de relaciones simétricas o asimétricas. Los agrupamientos posibles son pues:

| | | Agrupamientos de clases | Agrupamientos de relaciones |
|-------------------|-------------|---------------------------------------|---|
| Aditivos | Primarios | 1. Adición de clases | 5. Adición de relaciones asimétricas |
| | Secundarios | 2. Vicariancias | 6. Adición de relaciones simétricas |
| Multiplificativos | Secundarios | 3. Multiplicación counívoca de clases | 7. Multiplicación counívoca de relaciones |
| | Primarios | 4. Multiplicación biunívoca de clases | 8. Multiplicación biunívoca de relaciones |

I.- Agrupamiento Aditivo de Clases Primarias

Este agrupamiento contempla únicamente la descomposición de clases primarias (A, B, C, etc.), dejando de lado la de clases secundarias (A', B', C', etc.). Contempla las siguientes propiedades:

1.- Ley de cierre: "dos operaciones cualesquiera del agrupamiento dan, por su composición, una nueva operación del agrupamiento".

2.- La operación directa es la adición de clases. La operación inversa es la que anula la operación directa (la sustracción). Por ejemplo: $A + A' = B$; $A - A = \emptyset$

3.- El elemento neutro u operación idéntica general es la clase vacía. $A + \emptyset = A$; $A - A = \emptyset$

4.- Idénticas especiales. Absorción: si una clase está inmediatamente incluida en otra, la adición de ambas es igual a la clase incluyente. $A + B = B$

Tautología: una clase adicionada a sí misma queda invariante. $A + A = A$

Las idénticas especiales no se conservan al cambiar el signo en caso de la tautología ni al cambiar el signo de la clase superior en el caso de la absorción: $A - A = \emptyset$; $A - B = -A'$

5.- La operación adición es asociativa "entre términos de signos iguales o entre términos de distintos signos, pero que no contengan idénticas especiales".

$(A + A) + A' = A + (A + A')$, pero no se cumple que

$(-A - A) + B = -A + (-A + B)$ que implicaría que

$A' = -A + A'$

Ya adelantamos que el agrupamiento es una construcción teórica con una contrastación empírica parcial. El autor de este trabajo no conoce ninguna exposición en que se demuestre el isomorfismo entre la propuesta lógica y los procesos cognitivos, ni en la que se demuestre, en el comportamiento cognitivo, la existencia de cada una de las propiedades de los agrupamientos. Según Castorina y Palau (1982) y Flavell (1982) el indicador fundamental esgrimido por Piaget es la reversibilidad de las operaciones, reversibilidad inexistente en el período preoperacional, y que señala a su vez el carácter de sistema que tienen las operaciones para hacer posible tal reversibilidad.

Como ejemplo de la operación cognoscitiva del agrupamiento I, encontramos la posibilidad de operar con la clasificación simple, en particular la cuantificación (intensiva) de la inclusión. Si a un niño de nivel preoperatorio se le dan, por ejemplo, 10 fichas rojas y 5 fichas amarillas, las puede clasificar (según su desarrollo) de modo que, en nuestro lenguaje, $A =$ fichas rojas,

A' = fichas amarillas, B = el conjunto de fichas. Podría incluso deshacer la clasificación y clasificar las fichas según otro criterio como por ejemplo la forma (vease agrupamiento II). Si al niño preoperatorio se le pregunta si hay más fichas rojas o más fichas, la probabilidad más alta la tiene la respuesta de que hay más fichas rojas, porque el niño está dominado por las impresiones figurales y la intuición y aun no se constituyen las operaciones. El niño operatorio por su parte es capaz de contestar correctamente porque es capaz de concebir la operación directa (adición de clases) y la inversa (sustracción de clases), lo que posibilita la reversibilidad por inversión. El niño preoperatorio puede saber que $A + A' = B$, pero al ser interrogado por la relación fichas rojas-total de fichas fácilmente pierde de vista la clase B y se limita a comparar A con A' , no conserva la clase B . El niño operatorio además de que $A + A' = B$ maneja la inversión $A = B - A'$, puede manejar A y A' conservando B de donde puede operar con la cuantificación de la inclusión de clases.

II.- Agrupamiento Aditivo de Clases Secundarias: las Vicariancias

A diferencia del agrupamiento I que versa sobre la descomposición de las clases primarias, el agrupamiento II versa sobre la descomposición de las clases secundarias. En efecto, las clases secundarias, definidas por oposición a las clases primarias, pueden ser portadoras de infinidad de clases del mismo rango de las clases primarias; mas aún, la clase B se puede dividir según distintos criterios, por ejemplo, si llamamos B a la clase de los centroamericanos, podemos llamar A_1 a la clase de los costarricenses y A_1' a la clase de los no costarricenses,

pero también podemos hacer otras clasificaciones como $A_2 =$ los nicaragüenses y $A_2' =$ los no nicaragüenses. Así tenemos que $A_1 + A_1' = A_2 + A_2' = B$; $A_1' + A_2' = B$; $A_1 \subset A_2'$ y $A_2 \subset A_1'$

Una operación de la forma $A_1 + A_1' = A_2 + A_2' = \dots$ se designa "sustitución complementaria" o "vicariancia" y estas constituyen, ya no las clases sino las ecuaciones, los elementos del agrupamiento II.

Antes de pasar a dar indicadores de la operación del agrupamiento II se hace necesaria una pequeña digresión. Piaget distingue dos niveles del comportamiento cognitivo: el nivel lógico que trata sobre objetos considerados como unidades invariantes y los reúne o relaciona; el nivel infralógico (no prelógico) son "acciones cognoscitivas vinculadas con las relaciones de posición y distancia y de parte-todo que atañen a objetos y configuraciones espacio-temporales" (Flavell, 1982, 189). Las operaciones lógicas se relacionan con la constitución de clases y relaciones, y las operaciones infralógicas con la constitución del objeto, la cual tiene carácter espacio-temporal.

Como ejemplo de contraparte cognoscitiva del agrupamiento II, Castorina y Palau refieren la constitución de las perspectivas en el niño operatorio. El procedimiento ideado al efecto por Piaget consiste en una plancha de cartón de un metro cuadrado sobre la que se construyeron tres montañas de distinto color. en primer plano, desde la posición A, una montaña verde orientada a la derecha de la plancha de cartón, en segundo plano una montaña marrón orientada a la izquierda, y en tercer plano una montaña más alta, de color gris, situada hacia el centro. Según la posición

respecto de la plancha de cartón se llama A a la perspectiva ya descrita; B a la perspectiva del lado derecho del cartón respecto de la posición A; C a la perspectiva opuesta a A, y D a la perspectiva del lado izquierdo respecto de la posición A. Utilizando una muñeca como observador se interroga al niño sobre la posición de las montañas desde las cuatro posiciones. Sin permitir que el niño se desplace físicamente, se le pregunta por las posiciones adelante, atrás, izquierda y derecha de las montañas unas respecto de las otras. Es hasta el nivel de las operaciones concretas que el niño logra coordinar las perspectivas, coordinación posible por la inversión de las operaciones. En este caso no se trata ya de una inversión por negación como en el agrupamiento I sino de una inversión por reciprocidad: el niño, al pasar de la perspectiva A a la C cambia la relación izquierda por derecha o viceversa y la relación adelante por atrás o viceversa.

La experiencia es interpretada por Castorina y Palau de la siguiente forma: "el conjunto U está dado por un conjunto de perspectivas en el sentido de que los elementos de U son las distintas posiciones que cada montaña toma según las cuatro perspectiva A, B, C y D. Las perspectivas vienen a ser respecto de este agrupamiento las nociones análogas a los cambios de criterio en una clasificación, en el plano de las operaciones lógicas ... en el plano infralógico de la geometría proyectiva el cambio de criterio lo dan las distintas perspectivas... desde la perspectiva A el niño ve lo siguiente: montaña marrón - montaña gris - montaña verde, es decir, $A1 + A^{-1} + A''1$. Al cambiar a la

posición C el niño puede inferir: montaña verde - montaña gris - montaña marrón, o sea $A_2 + A'_2 + A''_2$. Puesto que A''_1 es la posición de la montaña verde según A, y A_2 es la posición de esta misma montaña según C, se puede ver que

$$(A_1 + A'_1) + A''_1 = A_2 + (A'_2 + A''_2).$$

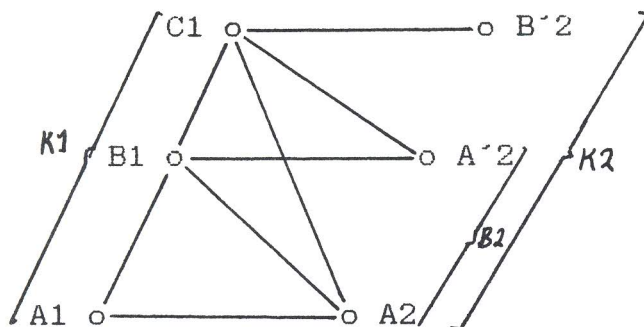
Ya que desde A se observa que $A_1 + A'_1$ está a la izquierda de A''_1 , desde C se infiere que $A'_2 + A''_2$ estará a la derecha de A_2 . Es decir que la relación "a la izquierda de" ha sido sustituida por su recíproca "a la derecha de". De esta forma la perspectiva A se convierte en la recíproca de la perspectiva C y B en la recíproca de la perspectiva D. Cualquiera sea la composición de perspectivas que se considere, la posición de las montañas sobre el tablero permanece invariante" (Castorina y Palau, p.84)

III.- Agrupamiento Multiplicativo Co-unívoco de Clases

"Definición.- Sea $A_1; B_1; C_1; \text{etc.}$, una serie de clases primarias de las cuales cada una está incluida en la siguiente y sea $A_2; A'_2; B'_2; \text{etc.}$, la serie de clases elementales susceptibles de estar incluidas en cada una respectivamente de las clases de la serie $A_1; B_1; C_1; \text{etc.}$; llamaremos "multiplicación co-unívoca" la operación que determina la parte común entre una cualquiera de las clases de la primer serie K_1 y todas las clases de la segunda serie comprendidas entre A_2 y la clase de rango K_2 (correspondiente al rango de K_1)."

En el ejemplo puesto por Piaget, K_1 es una clasificación en la cual $A_1 =$ hijos de un mismo padre; $B_1 =$ nietos de un mismo abuelo; $C_1 =$ bisnietos de un mismo bisabuelo. K_2 por su parte no es propiamente una clasificación sino una serie de clases que

encajan en las clases de la serie K1 y que al componerse entre si son equivalentes a las clases de la serie K1. En el ejemplo de Piaget A2 = hermanos; A'2 = primos hermanos; B'2 = primos segundos. Según el diagrama presentado por Castorina y Palau



De la multiplicación co-unívoca se obtiene

$$A1 \times A2 = A1 A2$$

$$B1 \times B2 = B1 A2 + B1 A'2 = B1 B2$$

$$C1 \times C2 = C1 A2 + C1 A'2A + C1 B'2 = C1 C2$$

Anota Piaget que "los individuos comprendidos en las clases A1 y A2, o B1 y B2, o C1 y C2, etc, son, para cada una de las cuplas respectivas de esta tabla, los mismos individuos."

El autor de este estudio no conoce ninguna experiencia que haga de contraparte cognitiva del agrupamiento III. Castorina y Palau no ofrecen ningun ejemplo en el capítulo que dedican a "Agrupamientos y comportamiento cognitivo". Por su parte, Flavell afirma explícitamente no conocer ninguno. (Flavell, ob.cit.,208)

IV. Agrupamiento Multiplicativo Bi-unívoco de Clases

"Definición.- Estando dadas dos series de clases elementales $A_1; A'_1; B'_1; \dots$ y $A_2; A'_2; B'_2; \dots$, llamaremos multiplicación bi-unívoca la operación consistente en determinar la parte común entre cada clase de la primera serie y cada clase de la segunda."

Si por ejemplo un conjunto de fichas se puede clasificar según su forma y, cambiando de criterio, según su color, la multiplicación bi-unívoca de ambas clasificaciones dará origen a una tabla de doble entrada de la siguiente forma

| | | | |
|-----------|-----|-----------|---------|
| | | forma(B1) | |
| | | A1 | A'1 |
| | A2 | A1 A2 | A'1 A2 |
| color(B2) | A'2 | A1 A'2 | A'1 A'2 |

$$B_1 \times B_2 = A_1 A_2 + A'_1 A_2 + A_1 A'_2 + A'_1 A'_2.$$

Propiedades de este agrupamiento.

1.- Ley de cierre. La multiplicación entre dos clases da como resultado una clase que pertenece a U.

2.- La operación directa es la multiplicación o intersección de clases. Por ejemplo, $A_1 \times A_2 = A_1 A_2$

Si A_1 = fichas cuadradas; A'_1 = fichas redondas; A_2 = fichas rojas; A'_2 = fichas azules; $A_1 A_2$ = fichas cuadradas de color rojo.

La operación inversa es la división lógica o abstracción. Cuando se multiplican dos clases no se aumenta la extensión, como en el caso de la adición. Si una de las clases está incluida en la otra el producto tiene una extensión igual a

la de la clase incluida. Piaget insiste en que al multiplicar lo que se aumenta es el número de encajes, así $A \times B = AB$ "significa que los individuos de A pertenecen a la vez a A y a B. De aquí que la sustracción no consiste en suprimir los individuos del producto AB sino en abstraer un encaje; $AB : B = A$. "Al formular la clase A bajo la forma A, en lugar de formularla bajo la forma AB o ABC, etc., se establece el derecho de hacer abstracción de sus encajes AB, o ABC, etc., para no considerar más que la clases A en sí misma."

Así, $A_1A_2 : A_2 = A_1$; $A_1A_2 : A_1 = A_2$

3.- El elemento neutro u operación idéntica general es la clase que resta cuando se hace abstracción de todos los encajes, o sea la clase total U. "una clase cualquiera (...), abstracción hecha de sí misma ($B : B$) significa que los individuos de los cuales está compuesta, no se diferencian de los individuos de cualquier otra clase, y que son simplemente considerados como pertenecientes a la clase más general del sistema en cuestión."

$A_1 : A_1 = U$; $A_1A_2 : A_1A_2 = U$; etc.

4.- Idénticas especiales. Absorción: es la absorción del todo en la parte, a diferencia de la adición en la cual la parte se absorbe en el todo. "Si $A \subset B$, entonces $A \times B = AB$, donde $AB \subset B$, puesto que AB equivale a A misma.

$B_1A_2 \times B_1B_2 = B_1A_2$

Tautología: $A \times A = A$; $B \times B = B$

5.- La asociatividad se cumple en las series de operaciones

todas directas o inversas, no se cumple en series mixtas.

Como ejemplo de la operación con multiplicación biunívoca de clases tenemos los resultados de las pruebas de matrices. Se trata de matrices del tipo empleado por Raven en su conocido Test de Matrices Progresivas. En las pruebas ideadas por Piaget se ofrecen matrices de 4 ó 6 objetos de los cuales el último se debe escoger de entre 4, 6 u 8 que se ofrecen como opciones. Cada matriz presenta un ordenamiento según dos o tres criterios, por ejemplo Forma-color, Forma-Tamaño, Forma-Color-Tamaño, Forma-Color-Orientación, que es la clave para determinar el elemento que falta. Este tipo de problema implica la multiplicación de dos o más clasificaciones y, aparte un pequeño desfase por la ayuda que puede presentar la configuración perceptual de las matrices, sólo lo llegan a resolver correctamente los niños del estadio operatorio.

V.- Agrupamiento Aditivo de Relaciones Asimétricas Transitivas (seriación intensiva)

Dado un conjunto de clases (o elementos) diferentes entre sí pero comparables según determinado criterio (peso, tamaño, etc.), es posible ordenarlos, según el criterio elegido, de modo que se establezca una serie de relaciones asimétricas transitivas. Si llamamos O, A, B, C, D, etc. a las clases (o elementos) y simbolizamos la relación por \rightarrow , tenemos

$$O \xrightarrow{a'} A; A \xrightarrow{a'} B; B \xrightarrow{b'} C; C \xrightarrow{c'} D; \text{ etc.}$$

donde "la dirección de la flecha marca una desigualdad a favor del término señalado; "A $\xrightarrow{a'}$ B" significa así "B es más (grande,

etc.) que A". Las conversas serán:

$$A \xleftarrow{a} O; B \xleftarrow{a'} A; C \xleftarrow{b'} B; \text{ etc.}$$

con la significación: "O es menos (grande, etc.) que A", etc.

Definición.- Escribiremos $(O \xrightarrow{a} A) + (A \xrightarrow{a'} B) = (O \xrightarrow{b} B)$, atribuyendo a esta operación el siguiente significado: "si se añade la diferencia (a') existente entre A y B, a la diferencia (a) existente entre O y A, se obtiene la diferencia ($b = a + a'$) existente entre O y B". Esta operación se llamará adición serial.

Se constata que esta adición serial ($a + a' = b$) implica $a < b$ y $a' < b$, pero ignora toda comparación entre las partes a y a' (cantidad intensiva)."

Como ejemplo de operación de este agrupamiento en el nivel cognoscitivo se ofrece un problema de seriación, misma que sólo se logra con el dominio de la reversibilidad por reciprocidad. Una de las pruebas ideadas por Piaget consiste en un juego de 10 reglas de 9 a 16.2 cm y otro juego de reglas de dimensiones intermedias para intercalar entre la primer serie. Los niños preoperatorios no logran seriar ni el primer juego, en el subestadio de preparación de las operaciones concretas el niño lo logra por tanteo, "En cambio, en el tercer estadio, que empieza hacia los 7-8 años, el sujeto usa un método sistemático que consiste en buscar primeramente, entre todos los elementos, el más chico (o el más grande), luego el más pequeño entre todos los restantes, etc. Unicamente este último método puede ser considerado como operatorio, pues da testimonio del hecho que un elemento cualquiera E es al mismo tiempo más grande que los precedentes ($E > D, C, \text{ etc.}$) y más chico que los siguientes ($E < F, G, \text{ etc.}$). Esta reversibilidad operatoria del tercer estadio va

acompañada, además, de una capacidad de intercalar directamente (sin tanteo) los elementos suplementarios." (Piaget e Inhelder, 1983, 217).

VI. Agrupamiento Aditivo de Relaciones Simétricas

"Definición.- Llamaremos relaciones de "equivalencias positivas" las relaciones simétricas, transitivas y reflexivas $\overset{a}{\leftrightarrow}$; $\overset{b}{\leftrightarrow}$; etc., que expresan la co-posesión de los caracteres distintivos propios de las clases A, B, etc., y que tienen por límites la identidad $\overset{o}{\leftrightarrow}$ relativa a las clases singulares $\{x\}$, etc."

Por ejemplo, la propiedad "ser compatriota" es una equivalencia positiva: si a es compatriota de b, entonces b también lo es de a (simetría); si a es compatriota de b, y este a su vez es compatriota de c, entonces a es compatriota de c (transitividad); a es compatriota de sí mismo (reflexibilidad).

"Definición.- Se llamarán "alteridades positivas" $\overset{o'}{\leftrightarrow}$; $\overset{a'}{\leftrightarrow}$; $\overset{b'}{\leftrightarrow}$; etc., las relaciones simétricas, intransitivas e irreflexivas que expresan la co-posesión de los caracteres específicos de las clases A (para $\overset{o'}{\leftrightarrow}$); B (para $\overset{a'}{\leftrightarrow}$); C (para $\overset{b'}{\leftrightarrow}$); etc., y la no-común posesión de los caracteres propios de las clases de rango inferior: $\{x\}$ para $\overset{o'}{\leftrightarrow}$; A para $\overset{a'}{\leftrightarrow}$; A y B para $\overset{b'}{\leftrightarrow}$; A, B, y C para $\overset{c'}{\leftrightarrow}$; etc."

En el ejemplo desarrollado por Piaget. Si llamamos $\overset{a}{\leftrightarrow}$ a la relación "hijos de un mismo padre"; $\overset{b}{\leftrightarrow}$ a la relación "nietos de un mismo abuelo"; y $\overset{c}{\leftrightarrow}$ a la relación "bisnietos de un mismo bisabuelo", entonces podemos definir una jerarquía de clases en la cual el nivel de las clases A (A1, A2, etc.) reúne a los hijos de un mismo padre; el nivel B (B1, B2, etc.) reúne a los nietos de

un mismo abuelo y el nivel C a los bisnietos de un mismo bisabuelo. Así, \overleftarrow{o} hace referencia a hermano (no idéntico a sí mismo pues sólo una clase singular puede ser idéntica a sí misma); \overleftarrow{e} a primo hermano (clases B1, B2, etc., nietos de un mismo abuelo pero no necesariamente hijos de un mismo padre), etc.. Se ve fácilmente que la relación \overleftarrow{e} (primo hermano) es simétrica, intransitiva e irreflexiva.

"Definición.- Se llamarán "equivalencias negativas" \overleftarrow{o} ; \overleftarrow{a} ; \overleftarrow{b} ; etc., las relaciones simétricas, intransitivas e irreflexivas que expresan la no-común posesión de los caracteres distintivos propios de las clases de rango correspondiente: $\{x\}$ para \overleftarrow{o} ; A para \overleftarrow{a} ; etc., y se llamarán "alteridades negativas" \overleftarrow{o} ; \overleftarrow{a} ; \overleftarrow{b} ; etc., las relaciones simétricas, intransitivas y reflexivas que niegan la alteridad correspondiente (Ejemplo $x \overleftarrow{a} y$: "x no es primo hermano de y"; y $x \overleftarrow{a} x$: "x no es su propio primo hermano")."

En el ejemplo referido, $x \overleftarrow{o} y$ significa x no es idéntico a y; $x \overleftarrow{e} y$ significa x no es hermano de y.

"Definición.- Llamaremos "producto aditivo de dos relaciones simétricas" entre tres términos x, y i z, a la relación simétrica de rango más débil determinada entre x i z por las relaciones simétricas dadas entre x e y, así como entre y i z: sea $(x \overleftarrow{e} y) + (y \overleftarrow{e} z) = (x \overleftarrow{e} z)$.

También se pueden adicionar las relaciones simétricas dadas entre los dos términos: $(x \overleftarrow{e} y) + (x \overleftarrow{e} y)$, ya que estas relaciones son compatibles entre sí (no contradictorias); y como

límite, se pueden adicionar las relaciones reflexivas $(x \leftrightarrow x) + (x \leftrightarrow x)$."

No conocemos correlatos empíricos de este agrupamiento que engloben las complejas combinaciones posibles de equivalencias y alteridades positivas y negativas a que puede dar origen. Un ejemplo parcial lo constituye una experiencia ideada por Piaget que consiste en dar al niño cuatro barras de metal de igual forma y peso; se le ofrece una balanza para que pueda comprobar la igualdad de peso y luego se le interroga por la transitividad. Si A pesa lo mismo que B y ésta lo mismo que C, se interroga por la igualdad $A = C$; en general el niño preoperatorio no puede responder adecuadamente. Como un elemento adicional, para obviar el papel de las configuraciones perceptivas, se ofrecen al niño cuatro objetos de plomo de distinta forma pero de igual peso, que a la vez coinciden con el de las barras. Una vez que el niño comprueba los pesos se le interroga respecto del resultado de poner dos barras en un platillo de la balanza y una barra y un objeto de plomo en el otro. Sólo el niño operatorio responde satisfactoriamente.

En esta experiencia se toma la transitividad como indicador de la operación del agrupamiento, la cual implica la operación reversible: si $A = B$, $B = A$. Al respecto es notable que el niño pequeño que tiene un hermano, aun afirmando que él tiene un hermano, no concibe que su hermano a su vez tenga un hermano.

VII.- Agrupamiento Multiplicativo Co-unívoco de Relaciones

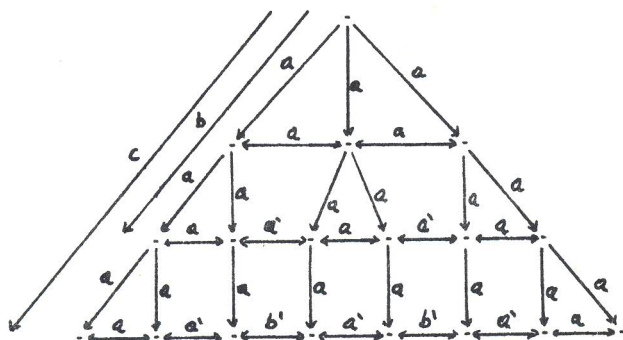
"Definición.- Llamaremos relación "co-unívoca" toda relación asimétrica que une un mismo término a varios. ...

Definición.- Se llamará "multiplicación co-unívoca de relaciones" la operación que determine entre dos términos x y z las relaciones co-unívocas y las relaciones simétricas de rango más débil, partiendo de las mismas formas dadas entre x e y, y entre y i z; sea

$$(x \downarrow^a \overset{a'}{\circ} y) \times (y \downarrow^a \overset{a'}{\circ} z) = (x \downarrow^b \overset{a'}{\circ} z)$$

Por ejemplo, x es el padre (\downarrow^a) del hermano ($\overset{a'}{\circ}$) de y; y es el padre (\downarrow^a) del primo paterno ($\overset{a'}{\circ}$) de z: por lo tanto, x es el abuelo ($\downarrow^b \overset{a'}{\circ}$) de z." donde $\overset{a'}{\circ}$ es la relación de identidad y $\overset{a'}{\circ}$ se refiere a individuos de una misma clase pero no idénticos, p. ej. hermanos.

Piaget ejemplifica este agrupamiento con un sistema de parentesco basado en la filiación paterna.



1. Donde las relaciones asimétricas se representan:

- $x \downarrow^a y = x$ es el padre de y
- $x \downarrow^b y = x$ es al abuelo de y
- $x \downarrow^c y = x$ es el bisabuelo de y

cuyas conversas se designan

- $x \uparrow^a y = x$ es hijo de y
- $x \uparrow^b y = x$ es nieto de y, etc.

asi,

$$(x \downarrow^a y) + (y \downarrow^a z) = (x \downarrow^b z).$$

"Escribiremos pues, de manera general, si \downarrow^g es una relación cualquiera de rango a, b, c, etc., y $\downarrow^{g'}$ otra relación cualquiera igualmente de rango a, b, c, etc.:

$$(x \downarrow^g y) + (y \downarrow^{g'} z) = (x \downarrow^{g+g'} z)$$

y

$$(x \downarrow^g y) + (y \uparrow^{g'} z) = (x \downarrow^{g-g'} z)$$

2. y las relaciones simétricas se representan

$$x \overset{a}{\leftrightarrow} y = x \text{ es hijo del mismo padre que } y = (z \downarrow^a x)x(y \uparrow^a z)$$

$$x \overset{b}{\leftrightarrow} y = x \text{ es nieto del mismo abuelo que } y = (z \downarrow^b x)x(y \uparrow^b z)$$

$$x \overset{c}{\leftrightarrow} y = x \text{ es hermano de } y$$

$$x \overset{d}{\leftrightarrow} y = x \text{ es primo hermano de } y$$

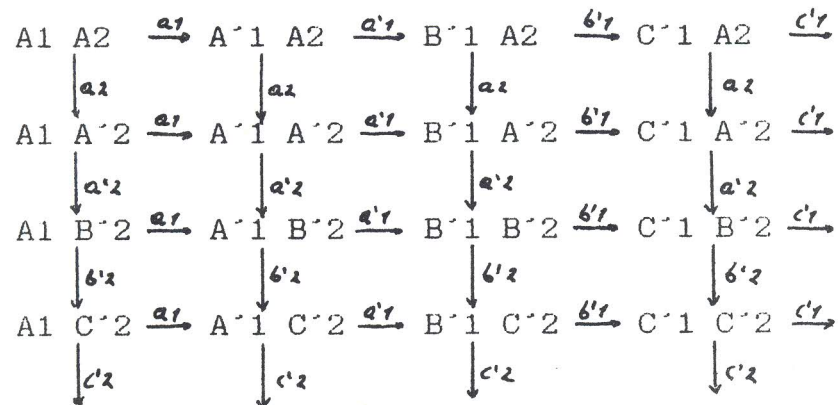
$$x \overset{e}{\leftrightarrow} y = x \text{ es primo segundo de } y$$

Respecto del correlato empirico de este agrupamiento en el pensamiento del niño, el autor de este estudio no conoce ninguna experiencia que lo ilustre. Castorina y Palau no ofrecen ejemplos y Flavell afirma explícitamente no conocerlos.

VIII.- Agrupamiento Multiplicativo Bi-unívoco de Relaciones

Este agrupamiento es el homólogo, para las relaciones, del agrupamiento de multiplicación bi-unívoca de clases. Se trata pues de la multiplicación de dos series de relaciones. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de objetos de distintos pesos y volúmenes es posible construir series de relaciones asimétricas según una u otra variable, y poner ambas series en

correspondencia, lo que da origen a una tabla de doble entrada que combina los dos tipos de diferencias y las equivalencias que surgen, así:



donde A1 A2 son elementos con un mismo peso y un mismo volumen; A1 A'2 son elementos con el mismo peso que A1 A2 pero con volumen mayor; A'1 A2 son elementos con el mismo volumen que A1 A2, pero con mayor peso, etc.

Propiedades de este agrupamiento

- 1.- Ley de cierre. La multiplicación de dos o más relaciones da como resultado otra relación.
- 2.- La operación directa es la multiplicación de relaciones, tanto la multiplicación de las series que da origen a la tabla de dos o más entradas, como la de las relaciones producto de la consideración de dos o más series.

$$\begin{aligned}
 (a_1 \dots z_1) \times \left(\begin{array}{c} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{array} \right) &= (a_1 \dots z_1 \begin{array}{c} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{array}); \\
 (x \xrightarrow{b_1} y) \times (y \xrightarrow{c_1} z) &= (x \xrightarrow{b_1} \xrightarrow{c_1} z)
 \end{aligned}$$

La operación inversa es la abstracción de una relación

$$(a_1 \dots z_1 \begin{array}{c} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{array}) : \left(\begin{array}{c} a_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{array} \right) = (a_1 \dots z_1)$$

si de la consideración simultánea de peso y volumen se hace abstracción de éste último, entonces se considera únicamente el peso.

3.- La operación idéntica o elemento neutro es la ausencia de relación

$$(a_1 \dots z_1) : (a_1 \dots z_1) = (\overset{0}{\rightarrow})$$

$$(\overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2}) : (\overset{0}{\rightarrow} \downarrow^0) = (\overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2})$$

4.- Idénticas especiales. La relación inferior se absorbe en la relación superior

$$(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y) \times (y \overset{b_1}{\rightarrow} \downarrow^{b_2} z) = (x \overset{b_1}{\rightarrow} \downarrow^{b_2} z)$$

Se cumple la tautología

$$(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y) \times (y \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y) = (x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y)$$

5.- La asociatividad se cumple sin restricciones.

Como correlato empírico de la operación de este agrupamiento referimos la construcción de tablas de doble entrada. En una experiencia ideada por Piaget se dan al niño 49 (o 49 pares, sea 98) dibujos de hojas de árbol, ordenables según 7 tamaños y siete tonalidades que van del verde claro al oscuro. Los niños preoperatorios no logran conformar ni una serie; los del subestadio de constitución de las operaciones concretas constituyen una u otra serie pero no pueden considerar las dos simultáneamente. Sólo los niños operatorios son capaces de construir la tabla de doble entrada por consideración simultánea de los dos criterios de seriación.

La Estructura de Grupo-Reticulado del Pensamiento Formal

Antes de proceder a la exposición de la estructura de Grupo-Reticulado será necesario definir algunos términos:

Proposición. "Llamaremos "proposiciones" p, q, r, etc., a los

enunciados categóricos, verdaderos o falsos, y afirmativos (positivos) o negativos." (Piaget, 1977, p.56)

Escribiremos p , q , etc., cuando el enunciado es afirmativo y \bar{p} , \bar{q} , etc., cuando es negativo.

Operación interproposicional. "Se llamará "operación interproposicional" toda composición que permita construir, mediante proposiciones cualesquiera, p , q , r , de las cuales sólo se conocen sus valores de verdad o falsedad, otras proposiciones bien determinadas, y caracterizadas respectivamente por las distintas combinaciones posibles de esos únicos valores de verdad." (ibidem).

Por ejemplo la Conjunción $p \cdot q$, definida por la afirmación de p y la afirmación de q ; la Disyunción $p \vee q$, definida por la afirmación de p ó de q ó de ambas.

Forma Normal Disyuntiva (FND). Se llama Forma Normal Disyuntiva a la expresión de una operación interproposicional mediante la disyunción de las conjunciones en que su valor es verdadero.

Así, en la tabla de verdad de la Conjunción para p y q el valor es verdadero sólo cuando p y q son verdaderos, de modo que la FND de la Conjunción es $p \cdot q$; por su parte, la FND de la Disyunción es $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$.

Forma Normal Conjuntiva (FNC). Se llama Forma Normal Conjuntiva a la expresión de una operación interproposicional mediante la conjunción de las disyunciones de los valores de verdad de p y q invertidos, cuando la operación es falsa.

Así, si la Conjunción sólo es verdadera cuando p y q son verdaderos, será falsa cuando p ó q ó ambos sean falsos, de modo que su FNC será $(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$; la FNC de la

Disyunción será (p v q).

Nos abocamos, ahora si, a la exposición de la estructura de Grupo-Reticulado.

El niño del estadio de las operaciones concretas tiene un instrumental cognitivo muy superior al del niño preoperatorio. Es capaz de estructurar la realidad clasificando, ordenando, estableciendo relaciones, etc; sin embargo las potencialidades que le brinda el manejo de los agrupamientos son insuficientes para enfrentar toda la complejidad de la realidad. En particular, al enfrentar problemas en los que intervienen varios factores para producir un efecto, por ejemplo, con la naturaleza de condiciones suficientes pero no necesarias, el niño tropieza con resultados que demandan la disociación de factores para poder comprenderlos, disociación que en un primer momento se puede hacer sólo por negación o eliminación del factor, y que un segundo momento incluye la igualación de términos respecto de una variable que no es posible excluir, o sea, inversión por reciprocidad.

Según Piaget la disociación de factores implica la combinatoria, condición sine qua non del pensamiento formal y que marca la diferencia esencial entre éste y el pensamiento concreto. En sus palabras:

"Por lo tanto aquí es donde aparece necesariamente la combinatoria. En efecto, puede concebirse que cada uno de estos factores asociados actúe separadamente, por su propia cuenta, y entonces la combinación probatoria consiste en hacer variar a uno manteniendo invariable a los restantes (...). Pero también puede concebirse que dos o tres factores deban intervenir de modo simultáneo para provocar el efecto observado (...). O también puede ser que el factor

interviniente sea uno u otro, pero cada uno con exclusión de otro, o uno en sentido inverso a los otros (...), etc. Resulta pues evidente que la disociación de los factores desemboca, según los casos, en un cierto número de posibilidades distintas que se traducen mediante implicaciones, equivalencias, disyunciones, conjunciones, exclusiones, incompatibilidades, etc. Cuando estas posibilidades ya existen en la mente del sujeto, vale decir, cuando éste posee de antemano, en virtud de sus adquisiciones anteriores, una gama suficiente de combinaciones posibles, resulta claro que ellas son las que orientan la disociación de los factores, mediante un rebote fácil de comprender. Pero si el sujeto aún las ignora y llega a descubrir el medio de disociar los factores al final del período de las operaciones concretas, entonces esta disociación lo conduce por sí misma a esta combinatoria, porque las combinaciones probatorias varían según las situaciones y porque, en cada situación, el descubrimiento de la combinación probatoria (descubrimiento que es el resultado de la disociación de los factores) supone una elección entre las asociaciones posibles ... En una palabra, la disociación de los factores desemboca necesariamente en la combinación n a n de las asociaciones de base entre sí, por lo tanto, en la sustitución de la combinatoria característica del "conjunto de las partes" por las simples operaciones de multiplicación o correspondencia que engendraron estas asociaciones de base." (Piaget, 1985, 243)

El enfrentamiento de problemas complejos que requieren la disociación de factores, simultáneamente puede demandar reunir en un sólo sistema las operaciones de clases y relaciones, lo que no es posible sin construir el "conjunto de las partes", o sea, la combinatoria:

"... como acabamos de verlo en cuanto a la disociación de los factores y la combinatoria de ella resultante, al sujeto se le plantean nuevos problemas apenas tiene que decidir cuáles son, entre estas asociaciones, las verdaderas y cuál es la significación que debe atribuirles a estos subconjuntos. ¿Cómo opera entonces el sujeto? Resulta muy interesante comprobar que esta elección, o esta determinación de los subconjuntos de asociaciones verdaderas, dentro del conjunto de las posibilidades $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$, es el resultado de simples operaciones de clasificación, pero aplicadas a las mismas asociaciones (xy etc.) y generalizadas a todos los casos posibles: de este modo el sujeto reúne el caso xy con el caso $x\bar{y}$, o el caso xy con el caso $\bar{x}\bar{y}$, etc., como si se tratase de una reunión de objetos calificados por propiedades comunes, mientras que,

en realidad, se trata de reunir asociaciones, vale decir situaciones en las que dos propiedades se presentan juntas (o una sin la otra, etc.) o incluso situaciones en las que se producen dos acontecimientos juntos (o el uno sin el otro, etc.) En otros términos, el sujeto, al partir del conjunto multiplicativo $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$, construye su "conjunto de partes" mediante una nueva clasificación: aplica pues la más simple de las agrupaciones (la clasificación) a la más general (el cuadro de las multiplicaciones lógicas), y de este modo desemboca en una especie de agrupación a la segunda potencia que coordinará a todas las agrupaciones dentro de un sistema superior ya que no puede relacionarlas directamente unas con otras. Ahora bien, esta agrupación a la segunda potencia, por la aplicación de la clasificación generalizada a las asociaciones multiplicativas no es otra sino una combinatoria n a n ". (ob. cit. 244)

De las cuatro asociaciones de base de x e y , representadas aquí con números $1 = xy$; $2 = x\bar{y}$; $3 = \bar{x}y$; $4 = \bar{x}\bar{y}$, surgen 16 combinaciones posibles

(0)

(1) ; (2) ; (3) ; (4)

(1 + 2) ; (1 + 3) ; (1 + 4) ; (2 + 3) ; (2 + 4) ; (3 + 4)

(1 + 2 + 3) ; (1 + 2 + 4) ; (1 + 3 + 4) ; (2 + 3 + 4)

(1 + 2 + 3 + 4)

que se corresponden con las 16 operaciones binarias de la lógica formal, con lo que el pensamiento se libera de los contenidos para operar con proposiciones y sus valores de verdad o falsedad. El razonamiento deja de referirse sólo a los contenidos para referirse a lo real en función de los posible: " $x \vee y$ significa entonces (...) "o xy es verdadero, o $x\bar{y}$, o $\bar{x}y$ o dos de estos casos sobre tres o los tres", lo cual equivale a afirmar que la expresión $x \vee y$ es una adición de 7 posibilidades" (ob.cit. 246)

Veamos con más detalle las 16 operaciones binarias de la

lógica proposicional. A partir de 2 proposiciones p,q que pueden tomar valores de verdad o falsedad, se obtienen 16 combinaciones posibles

| p | V | V | F | F | | | |
|----|---|---|---|---|------------------------|--|--------------------------------------|
| q | V | F | V | F | | | |
| 1 | F | F | F | F | Negación completa | | 0 |
| 2 | V | F | F | F | Conjunción | | $p \cdot q$ |
| 3 | F | V | F | F | No condicional | | $\overline{p \supset q}$ |
| 4 | F | F | V | F | No condicional inverso | | $\overline{p \subset q}$ |
| 5 | F | F | F | V | Negación conjunta | | $p \downarrow q$ |
| 6 | V | V | F | F | Afirmación de p | | $p \quad [q]$ |
| 7 | V | F | V | F | Afirmación de q | | $q \quad [p]$ |
| 8 | V | F | F | V | Equivalencia | | $p \equiv q$ |
| 9 | F | V | V | F | Exclusión recíproca | | $p \vee\vee q$ |
| 10 | F | V | F | V | Negación de q | | $\bar{q} \quad [p]$ |
| 11 | F | F | V | V | Negación de p | | $\bar{p} \quad [q]$ |
| 12 | V | V | V | F | Disyunción | | $p \vee q$ |
| 13 | V | F | V | V | Condicional | | $p \supset q$ |
| 14 | V | V | F | V | Condicional Inverso | | $p \subset q \text{ ó } q \supset p$ |
| 15 | F | V | V | V | Incompatibilidad | | p / q |
| 16 | V | V | V | V | Afirmación completa | | $p * q$ |

Estas operaciones forman un sistema en el que es posible llegar a unas operaciones por transformación de otras. En particular, el sistema es reversible, según lo expresa la regla de la dualidad:

"Regla de la dualidad.- La negación de una forma normal se