



LAS AVENTURAS MATEMÁTICAS DE

SUPER DISCRETO

SÚPER DISCRETO Y EL DOMINÓ

POR PROF. MARCIAL CORDERO QUIRÓS

VOL 1

NUESTRA HISTORIA MATEMÁTICA SE DESARROLLA EN CARTAGO, EN EL TEC, DONDE EL AMOR Y EL TRABAJO EN EQUIPO AYUDARÁN A RESOLVER SITUACIONES MATEMÁTICAS CON LA AYUDA DE UN MISTERIOSO SÚPERHÉROE.

BAJO UNA FUERTE LLUVIA, LOS ESTUDIANTES HACEN FILA PARA INGRESAR AL COMEDOR ESTUDIANTIL ENTRE RISAS Y MUCHA HAMBRE, ALGUNOS SE CONOCEN, OTROS NUNCA SE HAN VISTO EN SU VIDA.

EN UNA MISMA MESA COINCIDEN CUATRO ALUMNOS QUE NO SE CONOCEN..

¡HOLA CHIQUILLOS, PROVECHO! MI NOMBRE ES SHAINA, DE ATI, MUCHO GUSTO. ¿CÓMO SE LLAMAN USTEDES?

¿TODO BIEN? YO SOY MELISSA, DE ATI TAMBIÉN. ¡MUCHO GUSTO!

¡HOLA! PUES AQUÍ CON HAMBRE. SOY ARTURO, ESTUDIO ENSEÑANZA DE LA MATE.

PURA VIDA, MI NOMBRE ES JEAN Y ESTOY LLEVANDO COMPU.

¡MUCHO GUSTO A TODOS! HEY QUÉ CASUALIDAD, TODOS ESTAMOS EN EL MISMO GRUPO DE MATE DISCRETA ¿VERDAD?

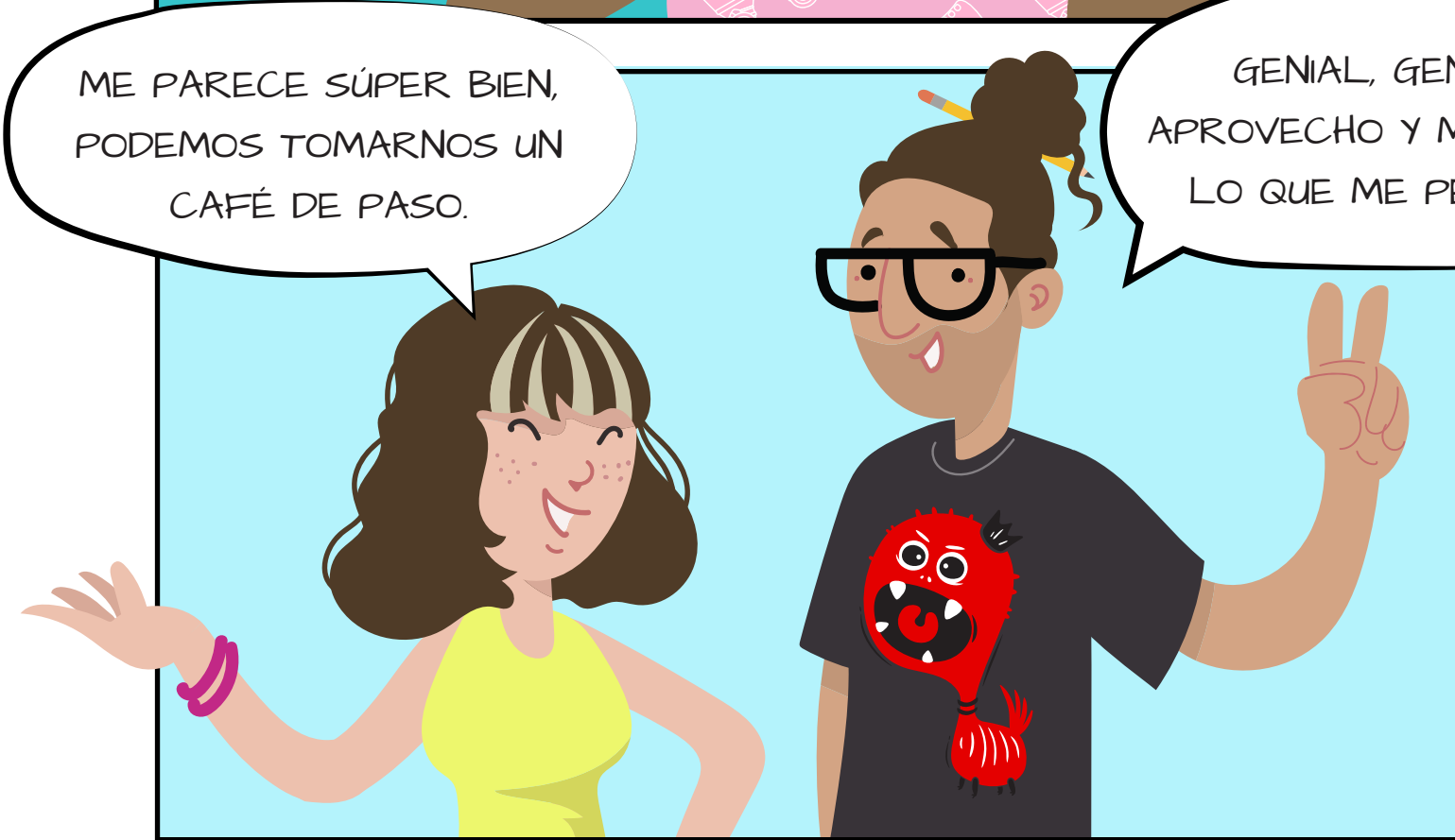
MIRÁ, SÍ, ¿ES CIERTO! YO HE ESTADO PENSANDO EN LO QUE NOS EXPLICARON AYER SOBRE INDUCCIÓN MATEMÁTICA..

YO SINCERAMENTE NO ENTENDÍ NADA, ESTABA MUY DORMIDO. PERO SI ME EXPLICAN ME PONGO LAS PILAS.

ESE TEMA ES MUY IMPORTANTE. HAY QUE PONERLE BUENA ATENCIÓN Y HACER MUCHA PRÁCTICA.



CHIKILLOS, ¿QUÉ LES PARECE SI NOS VEMOS MAÑANA AHI EN LAS MESITAS POR LA BIBLIO Y HACEMOS UN GRUPO DE ESTUDIO?



ME PARECE SÚPER BIEN, PODEMOS TOMARNOS UN CAFÉ DE PASO.

GENIAL, GENIAL, ASI APROVECHO Y ME EXPLICAN LO QUE ME PERDI AYER.



DE ACUERDO, ¡NOS VEMOS!

AL DÍA SIGUIENTE, LUEGO DEL ALMUERZO, EN LAS MESITAS CERCA DE LA BIBLIOTECA, COMPARTIAN LOS CUATRO COMPAÑEROS.



TRAJE UN DOMINÓ QUE TENIA EN LA CASA. ¿JUGAMOS?

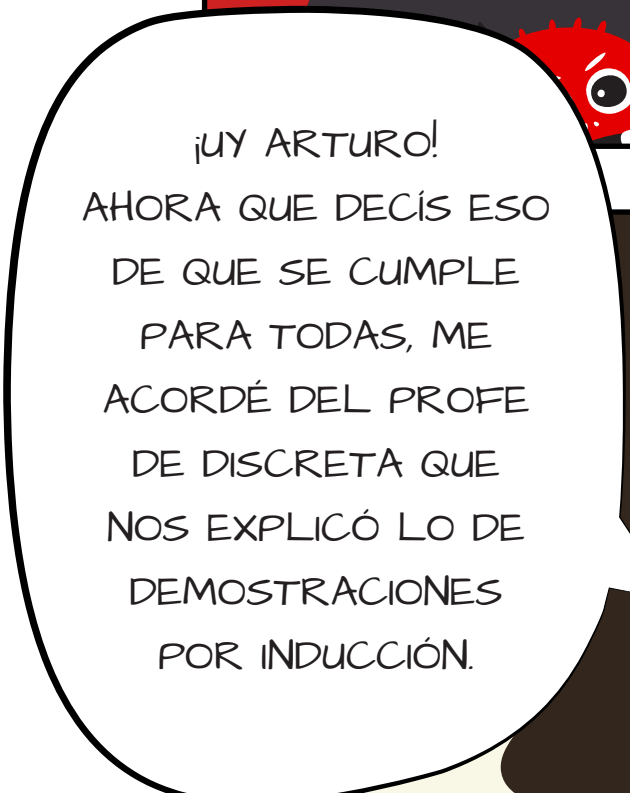
SÚPER, YO REPARTO LAS FICHAS.



¡QUÉ CHIVA, SÍ, DÉMOSLE! YO SOY EXPERTA EN DOMINÓ, NADIE ME GANA. ¿VOS SABES JUGAR JEAN?

NO, NI IDEA... PERO SI ME EXPLICAN ME PONGO LAS PILAS.

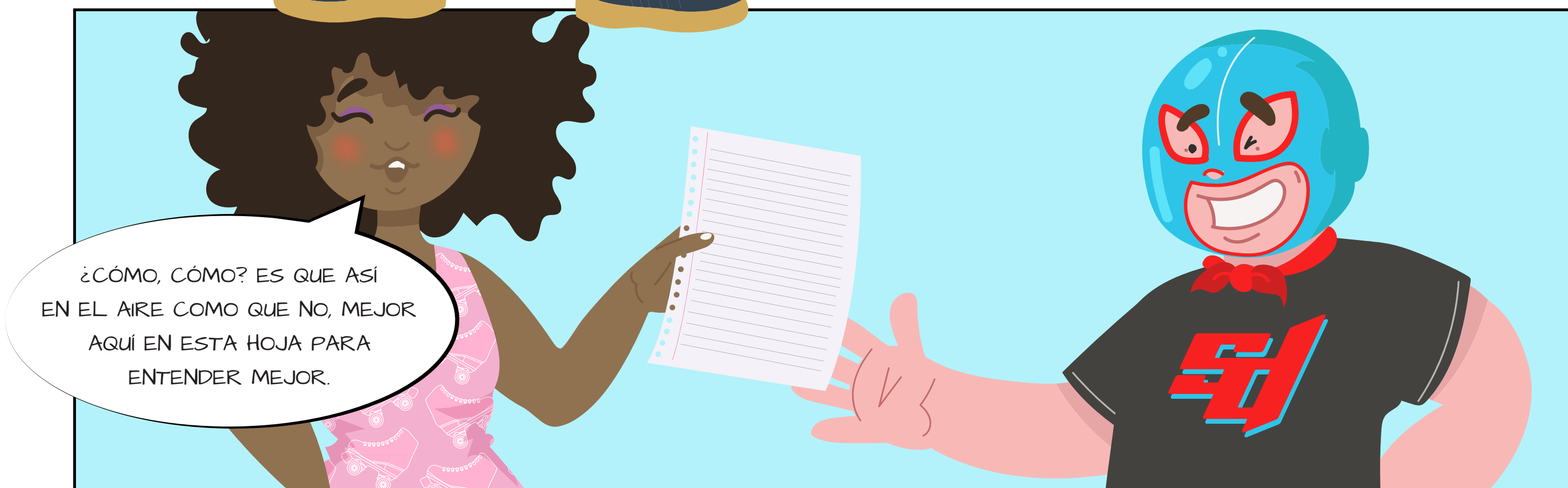
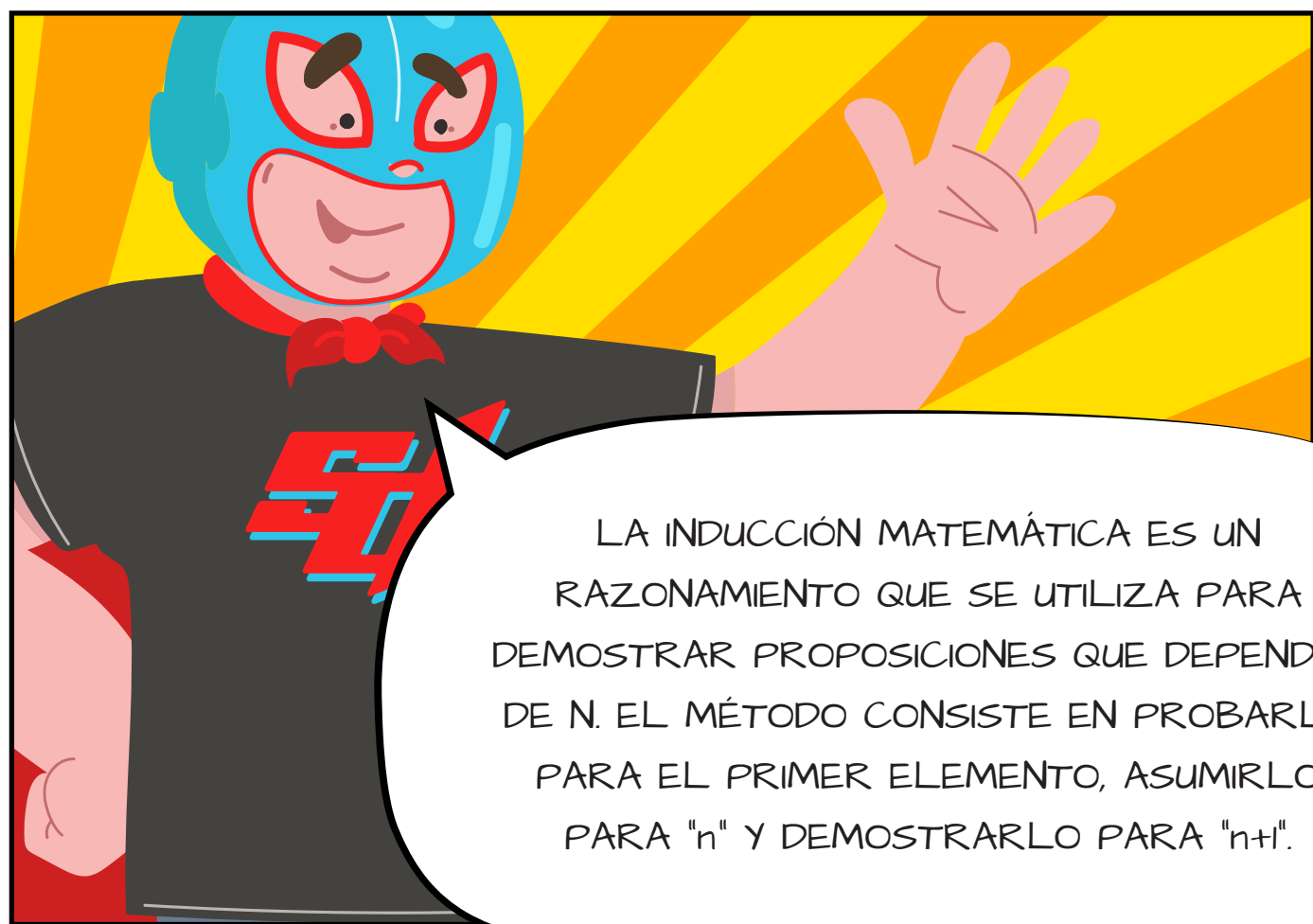
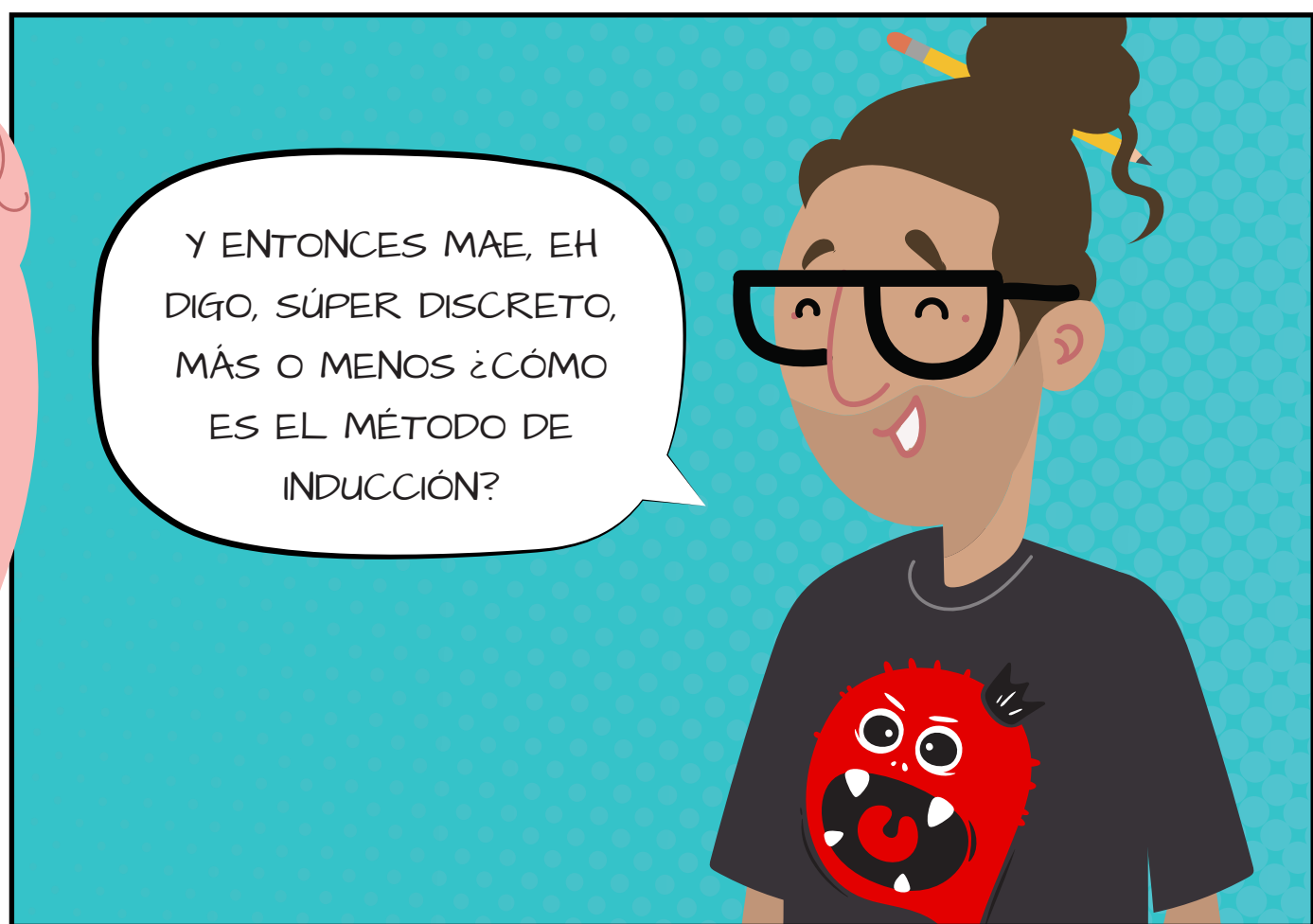
DESPUÉS DE UNAS CUANTAS PARTIDAS CON GANADORES, PERDEDORES Y ALGUNOS EGOS ROTOS...



DE PRONTO, DE ENTRE LOS ARBUSTOS, SOBRE UN DIMINUTO SCOOTER ELÉCTRICO, APARECE UNA LLAMATIVA FIGURA ENCAPOTADA, CON MÁSCARA DE LUCHADOR Y UN DESLUMBRANTE ESCUDO QUE GRITA "SD" EN SU PECHO. RÁPIDAMENTE SE ACERCA A LOS MUCHACHOS, LOS CUALES SE QUEDAN OBSERVANDO BOQUIABIERTOS.

¡HOLA AMIGOS! ESCUCHÉ QUE ME NECESITAN. SOY SÚPER DISCRETO Y VEO QUE TIENEN PROBLEMAS CON EL TEMA DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA.





si tenemos la proposición:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

CLARO, VÉANLO
ASÍ...

válida para todos los números naturales n iniciando con el 1, entonces verificamos para $n=1$ y sustituimos en el lado derecho así: $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, lo cual es cierto, porque $P(1) = 1$, en el lado izquierdo.

¡AY SÍ, YA LO VI! SI ME DA IGUAL, ES CIERTO, ¡ASÍ ES!

¿SIEMPRE INICIA EN 1
ENTONCES?

NO NECESARIAMENTE. DEPENDE
DEL PRIMER ELEMENTO DE LA
PROPOSICIÓN.

EL PROFE MENCIONÓ
ALGO DE UN PASO FANTASMA,
DONDE NO SE HACE NADA.
¿VA POR AHI LA COSA?

JAJAJA CLARO, MUY SABIO SU
PROFESOR. EL PASO FANTASMA ES
EL SEGUNDO PASO, DONDE SE DEFINE
LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN HI...

AH OK, PERFECTO, ENTONCES ESE
PASO ESTÁ LISTO. ¡VEAMOS EL
TERCER PASO PORRRRR FIS!

...lo cual es tomar el enunciado
inicial como verdadero, así la HI es

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¡SÍ POR SUPUESTO, CON SÚPER GUSTO!

EN EL TERCER PASO, DEBEMOS PROBAR QUÉ SE CUMPLE PARA LA SEGUNDA PIEZA DEL DOMINÓ Y LAS SIGUIENTES. ES DECIR, PARA $n+1$. LO HACEMOS ASÍ:

Sumamos $n+1$ al lado izquierdo de la igualdad y cambiamos a $n+1$ en lugar de la n al lado derecho:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ahora, para intentar obtener el lado derecho de la igualdad anterior, cambiamos nuestra HI en el lado izquierdo y resolvemos así:

HI

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1+2+3+\dots+n)}_{\text{HI}} + n+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n+1, \text{ simplificando} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \text{ y obtenemos} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

¿VIERON CHIQUILLOS?
¡LLEGÓ AL LADO DERECHO
DE LA IGUALDAD!



¡DE ESO SE TRATA JUSTAMENTE! SI LOGRAMOS LLEGAR, DEMOSTRAMOS QUE SE CUMPLE PARA CUALQUIER "n". ¿LES QUEDÓ CLARO?





Y ASÍ LOS CHICOS VIERON ALEJARSE A SÚPER DISCRETO VELOZMENTE EN SU MINI SCOOTER...

¿CÓMO DIJO? AH SÍ, LA MATE DISCRETA ES MI PASIÓN SECRETA.

ARTURO REGRESA A ENCONTRARSE NUEVAMENTE CON SUS COMPAÑEROS, COMPLACIDO Y COMO SI HUBIESEN PASADO SOLAMENTE UN PAR DE MNUTOS DESDE SU PARTIDA.

¿ME ESTÁN JODIENDO? ¡NO LES PUEDO CREER! ¿Y SI ERA ASÍ TAN DISCRETO?

MAE ARTURO, ¡NO SABES DE LO QUE TE PERDISTE! APENAS TE FUISTE SE NOS APARECIÓ UN MAE EN UN SCOOTER DIMINUTO, CON MÁSCARA DE LUCHADOR, QUE SE HACE LLAMAR SÚPER DISCRETO.

JA
JA
JA!

PENSAMOS QUE NOS IBA A ASALTAR, PERO RESULTA QUE NOS EXPLICÓ MATE DISCRETA. ¡EL MAE ESTÁ VOLANDO!

HABLANDO DE ESO, TENEMOS QUE HACER LA PRÁCTICA DE LA CÁTEDRA PARA VER DIFERENTES TIPOS DE CASOS. ¿QUEDAMOS PARA EL VIERNES, DE NUEVO?

DEJAME PENSAR... ANDABA EN UN SCOOTER SÚPER CHIQUITILLO Y CON MÁSCARA DE LUCHA LIBRE EN EL TEC... ¡¡CLARO, SÚPER DISCRETO!!!

PERO GRACIAS A ÉL Y AL DOMINÓ QUE TRAJISTE, QUEDÉ RE MOTIVADA PARA APRENDER MÁS DE INDUCCIÓN Y PRACTICAR BASTANTE.

EL VIERNES POR LA TARDE EN EL LEARNING COMMONS, ESTÁN LOS MUCHACHOS REUNIDOS HACIENDO PRÁCTICA PARA UN QUIZ DE MATE DISCRETA QUE DEBEN PRESENTAR LA SEMANA SIGUIENTE.

BUENO CHIQUILLOS, INTENTEMOS HACER UNO DE LOS EJERCICIOS DE DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN ENTRE TODOS.

¡UY SÍ! TENGO UNO DE LA LISTA PROPUESTA POR LA CÁTEDRA. HAGAMOS UNO DEL CENTRO, PARA NO SER COMO DICE EL PROFE, QUE UNO HACE SOLO EL PRIMERO Y EL ÚLTIMO.

MAE ARTURO, ¡DALE, DALE!

¡HM, HM! DICE ASI...

UTILICE EL MÉTODO DE INDUCCIÓN PARA PROBAR LA VALIDEZ DE LA IGUALDAD DADA, PARA $n \geq 1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

YO INICIO:

El primer paso es probar para el primer elemento, en este caso el 1, entonces $1 \cdot 2$ tiene que ser igual a:

$$2 + (1 - 1) \cdot 2^{1+1} = 2 + 0 = 2$$

¡YESSSS! ¡LO LOGRÉ, SI DA IGUAL! ¡ESTOY VOLANDO CHIQUILLOS!

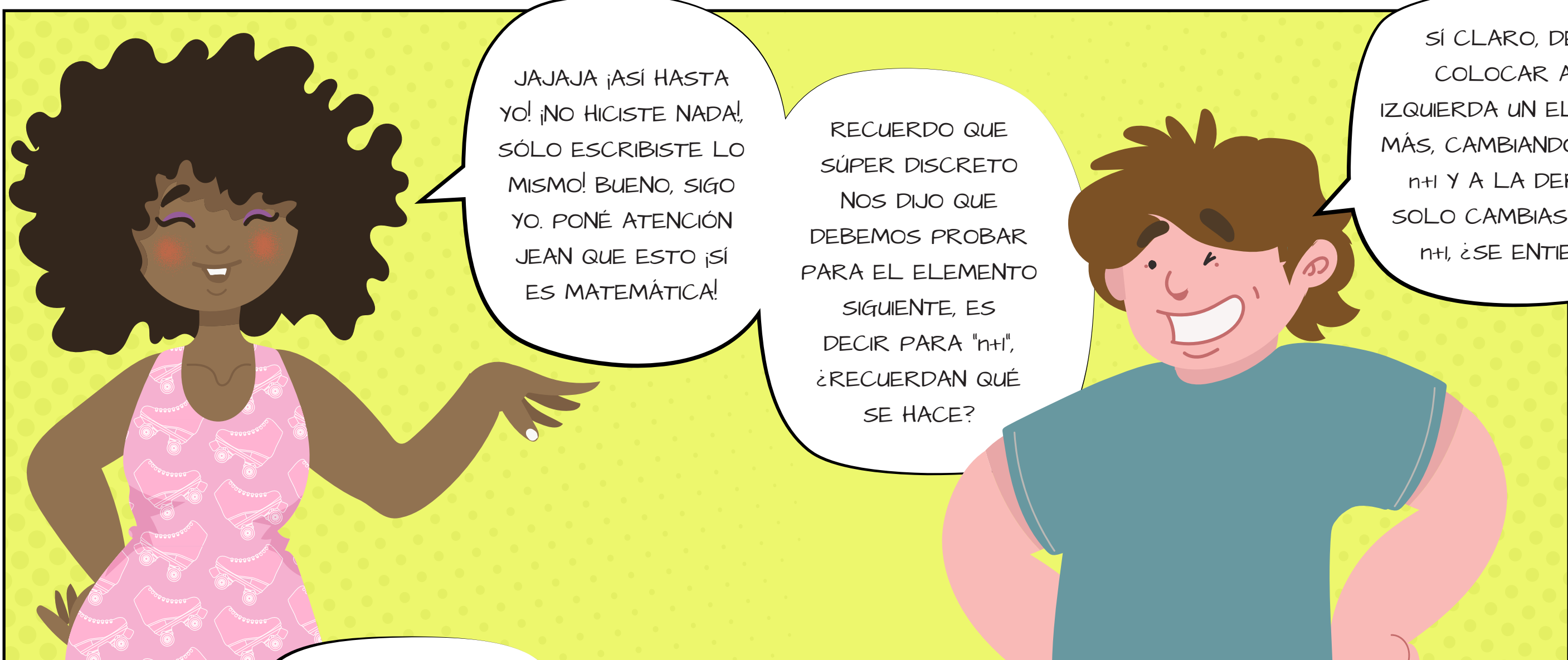
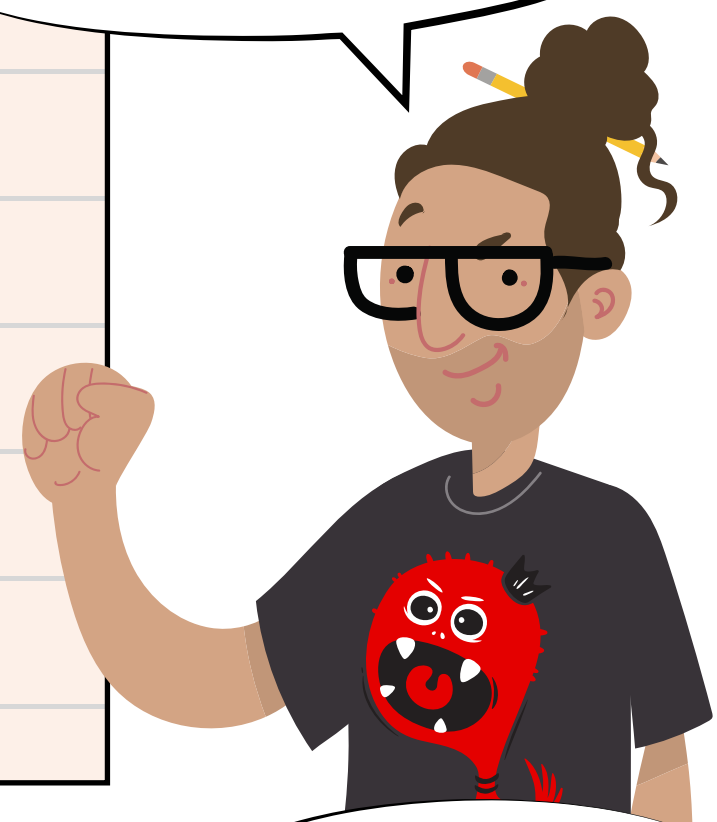


AGÜÍ YO ME LANZO CON LO MÄS RUDO, EL PASO 2, LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN (HI) Y ES ESCRIBIR ASÍ:

Suponga que la proposición se cumple para todo $n \geq 1$:

$$P(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

¡LISTO! ¡PILAS PUESTAS! YA TERMINÉ EL PASO FANTASMA.



JAJAJA ¡ASÍ HASTA YO! ¡NO HICISTE NADA! SÓLO ESCRIBISTE LO MISMO! BUENO, SIGO YO. PONÉ ATENCIÓN JEAN QUE ESTO ¡SÍ ES MATEMÁTICA!

RECUERDO QUE SÚPER DISCRETO NOS DIJO QUE DEBEMOS PROBAR PARA EL ELEMENTO SIGUIENTE, ES DECIR PARA "n+1", ¿RECUERDAN QUÉ SE HACE?

SÍ CLARO, DEBES COLOCAR A LA IZQUIERDA UN ELEMENTO MÄS, CAMBIANDO "n" POR n+1 Y A LA DERECHA SOLO CAMBIAS "n" POR n+1, ¿SE ENTIENDE?

SÍ CLARO, ASÍ VE:



$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{(n+1)} = 2 + ((n + 1) - 1) \cdot 2^{(n+1)+1}$$

AHORA, HAY QUE TRABAJAR EL LADO IZQUIERDO PARA LLEGAR AL LADO DERECHO QUE QUEDA, SIMPLIFICANDO ASÍ:

$$= 2 + (n) \cdot 2^{n+2}$$

SHAI, SI QUERES TE AYUDO A TRABAJAR EL LADO IZQUIERDO...



CLARO AMIGA, ¡DALE!



OJO CHIQUILLOS,
TENEMOS QUE:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{(n+1)} =$$

PEEEEEERO, UNA PARTE ES
LA HI, QUE JEAN HIZO CON
TANTO ESFUERZO JAJA

$$\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n + (n + 1) \cdot 2^{(n+1)}}_{= HI + (n + 1) \cdot 2^{(n+1)}}$$

cambiando HI por $2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$ obtenemos:

$$= 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1} + (n + 1) \cdot 2^{(n+1)}$$

VAMOS BIEN,
¿VERDAD?

¡SÍ, SÍ, SEGUÍ, SEGUÍ! AHORA SOLO
DEBES FACTORIZAR $2^{(n+1)}$ DE LOS
DOS QUE SE REPITEN.

AH SÍ, YA VI, YA VI. ASÍ:


$$2 + (n - 1 + n + 1) \cdot 2^{(n+1)}$$

cancelamos los unos y

nos queda:

$$= 2 + (2n) \cdot 2^{(n+1)}$$






¡ES LO MISMO JEAN! VE:

Ese resultado se puede escribir como $2 + (n) \cdot 2 \cdot 2^{(n+1)}$

sumamos exponentes y nos queda $2 + (n) \cdot 2^{(n+2)}$



EXACTO, POR TANTO, DISCRETAMENTE PODEMOS DECIR QUE:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

para todo $n \geq 1$

¡TANTA MATE ME DIO HAMBRE!
¿NO SE LES ANTOJA IR AL COMEDOR? CREO QUE HOY TIENEN CHICHARRONES PARA EL CAFÉ.



EXCELENTE MAESSS ¡LO LOGRAMOS! SI SIRVIERON DE ALGO LAS RECOMENDACIONES DE SÚPER DISCRETO. MAE ARTURO, POR CIERTO, YA ESTÁS HABLANDO IGUAL A ÉL.

¿DE QUÉ ESTÁS HABLANDO JEAN? ¡NADA QUE VER! CREO QUE TANTA INDUCCIÓN TE ESTÁ HACIENDO IMAGINAR COSAS. ¿HACEMOS UN PAR DE EJERCICIOS MÁS ANTES DE IRNOS?

DESPUÉS DE HACER VARIOS EJERCICIOS MÁS DE INDUCCIÓN, SE FUERON A CELEBRAR CON UNA GASEOSA, O DOS, UNA PROVECHOSA SESIÓN DE ESTUDIO GRACIAS A SÚPER DISCRETO.



¡AHORA INTÉNTALO VOS!

Demuestre por el método de inducción matemática la proposición

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{5}{162} + \dots + 3^{1-n} \cdot \frac{2n-5}{2} = \frac{3^{1-n}(1-n)}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$



CRÉDITOS

GUIÓN MARCIAL CORDERO · ANDREA CALVO · DANIEL UGALDE

DISEÑO DE PERSONAJES E ILUSTRACIÓN ANTONIO SALAZAR · ANDREA CALVO

MONTAJE Y DIAGRAMACIÓN ANDREA CALVO

ACCESIBILIDAD MELISSA BERROCAL