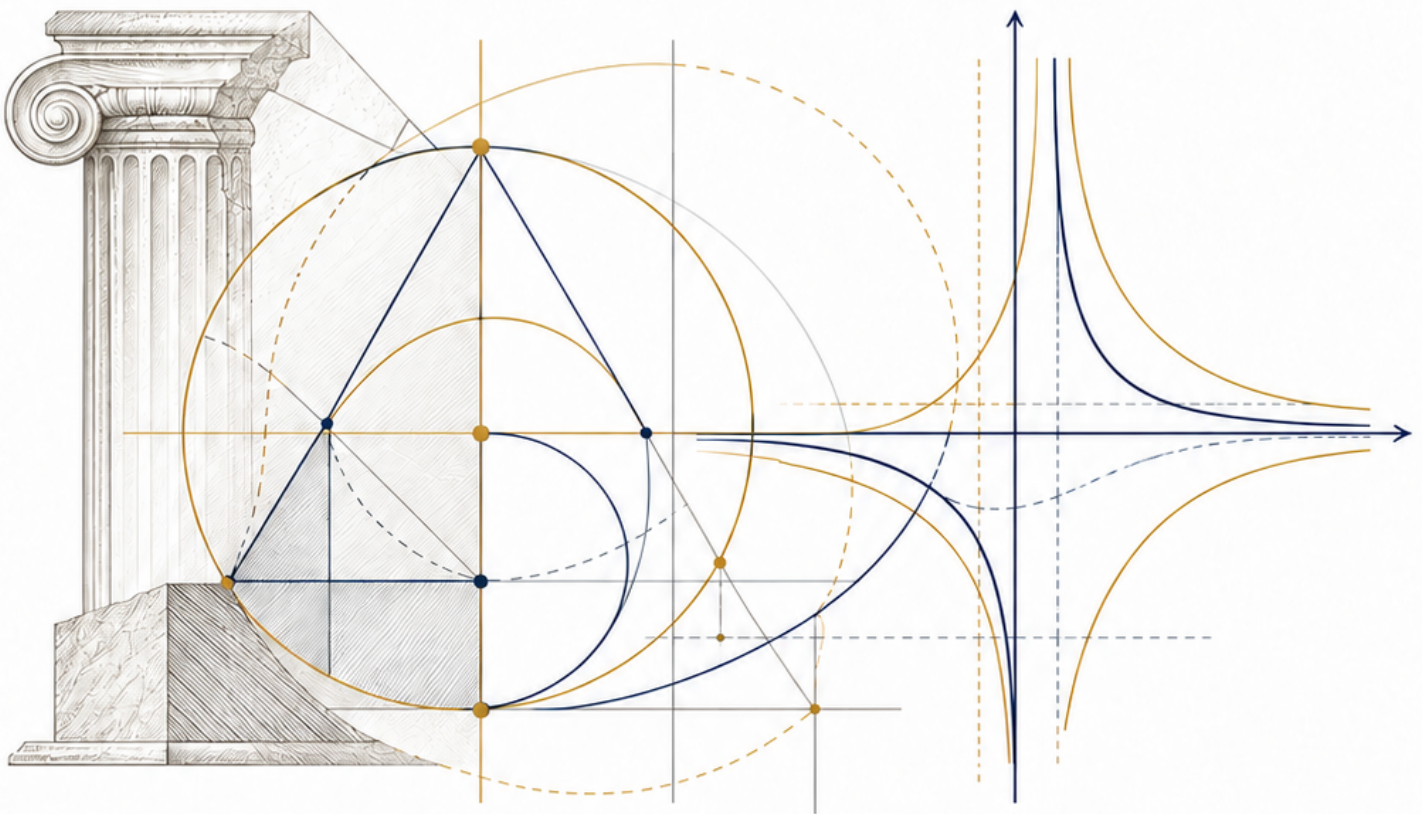


La evolución histórica de los números irracionales, del problema geométrico a la formación analítica

Un análisis crítico fundamentado en la trayectoria de investigación y divulgación científica



Jorge Luis Chinchilla Valverde

Profesor de la Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

La evolución histórica de los números irracionales, del problema geométrico a la formación analítica

Un análisis crítico fundamentado en la trayectoria de investigación y divulgación científica

© 2026, Jorge Luis Chinchilla Valverde

Esta obra ha sido desarrollada en el marco de las labores académicas e investigativas en la enseñanza de la matemática. Quedan reservados todos los derechos de autor conforme a las disposiciones legales.

Ninguna parte de esta publicación puede reproducirse, almacenarse ni transmitirse por ningún medio sin la autorización previa y por escrito del titular de los derechos.

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

Cartago, Costa Rica

ISBN: 978-9930-656-23-5

Edición: Primera edición, 2026

Las figuras señaladas como *elaboración propia* fueron realizadas por el autor, varias de ellas a partir de su trabajo final de graduación en la Universidad de Costa Rica (2012); las señaladas como *tomadas de internet* se reproducen con fines académicos y la fuente se indica al pie de cada una.

Diseño de edición y maquetación académica: composición en $\text{\LaTeX}$ con tipos Palatino.

Prefacio y nota del autor

Este libro es el resultado de un riguroso trabajo de análisis histórico y didáctico desarrollado a lo largo de varios años. Su origen se cimenta en el estudio profundo de la evolución histórica de los números irracionales a través de diferentes espacios matemáticos, así como en las discusiones, ponencias y conferencias presentadas en diversos congresos nacionales e internacionales de matemática educativa. Su punto de partida más lejano es el trabajo final de graduación que, junto con tres colegas, presenté en 2012 en la Universidad de Costa Rica, y del que conservo, ampliadas y revisadas, varias de las figuras y de las construcciones geométricas que aparecen en estas páginas; pero el libro no es una reedición de aquel trabajo, sino el producto de haber vuelto sobre sus preguntas con la bibliografía histórica y didáctica de las últimas décadas, y de haber comprobado, en el aula y en los congresos, que la historia de los irracionales sigue siendo una de las vías más fecundas para comprender qué es un número real y por qué cuesta tanto enseñarlo.

Público objetivo

La obra está dirigida primordialmente a estudiantes universitarios de los primeros años, a profesores de matemática en servicio, tanto de educación secundaria como superior, y a investigadores interesados en la historia de la matemática y en su mediación pedagógica. No presupone más conocimientos que los de un primer curso de cálculo y de álgebra; cuando una demostración exige alguna herramienta adicional, se la introduce en el lugar en que se necesita.

Guía de lectura y aprovechamiento

Para un óptimo aprovechamiento de este texto, se recomienda al lector abordar los capítulos de manera secuencial si se busca construir una perspectiva histórica y epistemológica sólida, pues cada uno retoma las preguntas que el anterior deja abiertas: el primero recorre las aproximaciones mesopotámicas e indias y el descubrimiento griego de la inconmensurabilidad; el segundo, la teoría de las proporciones de Eudoxo y el método de exhaustión; el tercero, el largo tránsito de la geometría al álgebra y al análisis, desde el mundo islámico hasta Wantzel, Liouville y Lindemann; y el cuarto, la construcción rigurosa de los números reales por Dedekind y Cantor. El apéndice reúne las construcciones de los tres problemas clásicos de la Antigüedad.

No obstante, cada capítulo funciona de manera modular, lo que permite su consulta focalizada como referencia teórica y metodológica para la práctica docente o la investigación. Con ese fin, cada capítulo se abre con un mapa de sus secciones y se cierra con una síntesis, una serie de ejercicios y una breve lista de lecturas recomendadas, y a lo largo del texto se distinguen tres tipos de recuadros: las *notas históricas*, que precisan fuentes, fechas y debates historiográficos; los *documentos de época*, que reproducen en traducción los pasajes originales; y los recuadros *En el*

IV PREFACIO Y NOTA DEL AUTOR

aula, que proponen actividades y reflexiones para la enseñanza. El lector interesado sobre todo en la didáctica puede comenzar por la última sección de cada capítulo, y el interesado en las demostraciones, por los teoremas y proposiciones numerados, que remiten entre sí a lo largo de todo el libro. La bibliografía general, al final, distingue las fuentes primarias de las secundarias.

Índice general

Prefacio y nota del autor	III
1 Orígenes y la crisis de la conmensurabilidad	1
1.1 Aproximar sin preguntar: la raíz de dos en Mesopotamia	2
1.1.1 El contexto: una aritmética de escribas.	2
1.1.2 La tablilla YBC 7289	3
1.1.3 Las listas de coeficientes	4
1.1.4 ¿Cómo calculaban?.	4
1.2 La diagonal del altar: los Śulbasūtras	6
1.2.1 La reconstrucción de Datta	6
1.3 Número, razón y medida común en la Grecia arcaica	8
1.3.1 El problema de las fuentes	8
1.3.2 El número como pluralidad de unidades	9
1.3.3 Medida común	9
1.4 La sustracción recíproca	11
1.5 Sócrates, un esclavo y el cuadrado doble.	13
1.6 La diagonal del cuadrado: cinco demostraciones	15
1.6.1 El testimonio de Aristóteles.	15
1.6.2 Primera demostración: pares e impares	15
1.6.3 Segunda demostración: la factorización única	16
1.6.4 Tercera demostración: el descenso algebraico.	16
1.6.5 Cuarta demostración: el triángulo de Apostol	17
1.6.6 Quinta demostración: los cuadrados de Tennenbaum.	18
1.6.7 Lo que cada demostración enseña.	19
1.7 Los números laterales y diagonales	19
1.8 El pentágono, Hipaso y la sección en extrema y media razón	21
1.8.1 La hipótesis de von Fritz y su crítica.	21
1.8.2 La geometría del pentágono	21
1.9 Teodoro de Cirene y el enigma del diecisiete.	24
1.9.1 El testimonio del <i>Teeteto</i>	24
1.9.2 Tres explicaciones de la detención.	25
1.10 Teeteto y la teoría general	28
1.10.1 El teorema de Teeteto.	28
1.10.2 Una generalización moderna	28
1.10.3 La herencia de Teeteto	29
1.11 Las leyendas: el secreto, el naufragio y el castigo	29
1.12 ¿Hubo realmente una crisis?	30
1.12.1 La tesis de la crisis y su crítica.	30
1.12.2 El testimonio de las <i>Leyes</i>	31
1.12.3 Una posición	31

VI ÍNDICE GENERAL

1.13	Por qué esta historia importa en la enseñanza	32
1.13.1	La historia de la matemática como recurso: el estado de la cuestión	32
1.13.2	Lo que muestra la investigación sobre los irracionales	33
1.13.3	Una propuesta de secuencia	34
	Síntesis del capítulo	34
	Ejercicios	35
	Lecturas recomendadas	36
2	El tratamiento geométrico en la Antigüedad: Eudoxo y el Libro V	39
2.1	El problema: proporciones sin medida común	40
2.1.1	La proporción entre números	40
2.1.2	Un teorema sin demostración	40
2.2	Una primera respuesta: la proporción antifairética.	41
2.2.1	El testimonio de Aristóteles.	41
2.2.2	Virtudes y límites de la teoría	42
2.3	Eudoxo de Cnido.	43
2.3.1	Lo que dicen los testimonios	43
2.3.2	Los testimonios matemáticos	44
2.4	Las definiciones del Libro V	45
2.4.1	Definir la igualdad sin definir el objeto	45
2.4.2	Cómo leer la definición 5	46
2.4.3	Por qué no basta un número finito de comprobaciones	47
2.4.4	Primeras consecuencias	48
2.4.5	Eudoxo en lenguaje de conjuntos	49
2.5	Una demostración eudoxiana: las proposiciones VI.1 y VI.2	50
2.6	Los supuestos implícitos: la «mancha en el sol de Euclides».	52
2.6.1	El axioma de Arquímedes	52
2.6.2	Hilbert y la pureza del método	53
2.6.3	La cuarta proporcional	53
2.7	El método de exhaución	54
2.7.1	El lema fundamental	54
2.7.2	Los círculos son como los cuadrados de sus diámetros	54
2.7.3	Rigor sin límites	56
2.8	Arquímedes: el círculo y la parábola	56
2.8.1	La medida del círculo	56
2.8.2	El lema de la bisectriz	57
2.8.3	El cálculo de Arquímedes.	58
2.8.4	La cuadratura de la parábola	59
2.9	El Libro X: una teoría de los irracionales	61
2.9.1	El vocabulario de Euclides	61
2.9.2	¿Para qué servía el Libro X?.	62
2.10	¿Anticipó Eudoxo a Dedekind?	62
2.10.1	Una pregunta con historia	62
2.10.2	Una respuesta matizada	63
2.11	¿Hubo un álgebra geométrica griega?	64
2.12	Por qué esta historia importa en la enseñanza	65
2.12.1	Razón y proporción: un campo central y problemático	65
2.12.2	El límite y sus obstáculos	66
2.12.3	La historia en la formación del profesorado	66

Síntesis del capítulo	68
Ejercicios	68
Lecturas recomendadas	69
3 La evolución hacia el concepto aritmético y analítico	71
3.1 Herón, Teón y el cálculo alejandrino	72
3.1.1 El método de Herón	72
3.1.2 Teón y la extracción sexagesimal	74
3.2 La India: de las <i>karaṇī</i> a la ecuación de Pell.	74
3.2.1 Las raíces como objetos de cálculo.	74
3.2.2 La composición de Brahmagupta	74
3.2.3 Mādhava y las series infinitas.	76
3.3 China: el algoritmo y la aproximación	76
3.4 El mundo islámico: los números sordos y la razón como número	77
3.4.1 El álgebra de los irracionales	77
3.4.2 Al-Jayyām: las razones como números.	77
3.5 La Europa medieval: Campano, Fibonacci y Oresme	78
3.5.1 Campano y la denominación de las razones	78
3.5.2 Fibonacci y la ecuación de Juan de Palermo	78
3.5.3 Oresme: la mayoría de las razones son irracionales.	79
3.6 El Renacimiento: ¿son números los irracionales?.	79
3.6.1 El álgebra de las cúbicas	79
3.6.2 Stifel: números en la geometría, no en la aritmética	80
3.6.3 Stevin: no hay números sordos	80
3.7 Descartes y Newton: el número como razón	81
3.7.1 La aritmética de los segmentos	81
3.7.2 Newton: el número como razón abstracta	83
3.8 Los procesos infinitos: productos, fracciones y series	84
3.9 Las fracciones continuas: la antifairesis hecha aritmética	85
3.9.1 Definiciones y propiedades básicas	85
3.9.2 La caracterización de los irracionales	87
3.9.3 El número de oro, el más irracional	88
3.9.4 Los irracionales cuadráticos	88
3.10 Las primeras demostraciones modernas de irracionalidad.	90
3.10.1 El número e	90
3.10.2 El número π	91
3.11 Wantzel y el fin de dos problemas clásicos	92
3.11.1 Los problemas y su traducción algebraica	92
3.11.2 Un teorema olvidado.	94
3.12 Los decimales infinitos en el aula	95
3.12.1 Cómo llegan los irracionales a la escuela.	95
3.12.2 Lo que muestran los estudiantes y los futuros profesores	95
3.12.3 Otras puertas de entrada	96
3.13 En el umbral del rigor	97
Síntesis del capítulo	98
Ejercicios	98
Lecturas recomendadas	100

4	La formalización rigurosa moderna	101
4.1	El círculo de Cauchy	102
4.2	El problema de Dedekind	103
4.3	La continuidad de la recta y las cortaduras	103
4.3.1	La esencia de la continuidad	103
4.3.2	Los números reales como conjuntos de racionales	105
4.4	Las sucesiones fundamentales de Cantor	107
4.5	Dedekind y Cantor: una colaboración menos armoniosa de lo que se cree.	108
4.6	Un único continuo: la axiomatización	109
4.7	Números algebraicos y trascendentes	111
4.7.1	Una jerarquía de irracionales	111
4.7.2	Hermite, Lindemann y la cuadratura del círculo	112
4.8	La numerabilidad: los irracionales son mayoría	113
4.8.1	Los racionales y los algebraicos se pueden contar	113
4.8.2	Los reales no se pueden contar	114
4.9	El cierre epistemológico y sus límites	115
4.9.1	La objeción de Kronecker	115
4.9.2	Lo que podemos nombrar	116
4.9.3	Lo que todavía no sabemos	116
4.10	Continuidad, completitud e infinito en la enseñanza	116
4.10.1	Una propiedad que casi nunca se enseña	117
4.10.2	El infinito actual como obstáculo	117
4.10.3	La historia como lente	118
	Síntesis del capítulo	121
	Ejercicios	121
	Lecturas recomendadas	122
A	Los tres problemas clásicos: construcciones con regla, compás y algo más	125
A.1	Las reglas del juego	125
A.2	La duplicación del cubo	126
A.2.1	El problema de Delos.	126
A.2.2	La reducción de Hipócrates.	126
A.2.3	Una construcción con regla marcada	126
A.3	La trisección del ángulo	128
A.3.1	La cuadratriz de Hippias	128
A.3.2	Dos inserciones: Papo y Arquímedes	129
A.3.3	El <i>tomahawk</i>	130
A.3.4	Un error frecuente	131
A.4	La cuadratura del círculo y las lúnulas.	132
A.5	Lo que enseñan los tres problemas.	133
	Ejercicios	134
	Bibliografía	135
	Fuentes primarias	135
	Fuentes secundarias	137

Orígenes y la crisis de la conmensurabilidad

Todos comienzan admirándose de que las cosas sean como son [...], como ocurre con la incommensurabilidad de la diagonal; pues a todos los que todavía no han contemplado la causa les parece admirable que algo no pueda ser medido ni siquiera por la unidad más pequeña.

Aristóteles, Metafísica A 2, 983a13–17

La historia de los números irracionales no comienza con un número, sino con una ausencia, y esa ausencia tardó mucho en ser percibida como tal. Durante más de un milenio los calculistas de Mesopotamia y los sacerdotes geómetras de la India védica obtuvieron aproximaciones asombrosamente precisas de la diagonal del cuadrado sin que, hasta donde nos permiten saber las fuentes, se plantearan nunca la pregunta de si ese valor podía escribirse exactamente mediante una razón entre números enteros; les bastaba con que la aproximación fuese suficiente para el cálculo de un terreno, de un muro o de un altar, y el error, cuando lo había, se atribuía al procedimiento y no a la magnitud. Fue en el ámbito griego, y muy probablemente en la segunda mitad del siglo V a. C., donde por primera vez alguien *demonstró* que ciertas magnitudes carecen de toda medida común, es decir, que no existe unidad alguna, por pequeña que se la elija, capaz de medir exactamente a ambas. Con esa demostración nació algo más que un resultado: nació la conciencia de que en la matemática hay imposibilidades que no dependen de la habilidad del calculista sino de la naturaleza de los objetos, y con ella la primera forma de lo que hoy llamamos un teorema de imposibilidad.

Me gusta imaginar lo que debió de sentir quien lo comprobó por primera vez. Durante generaciones, medir había sido una tarea de paciencia: si la unidad no alcanzaba, se tomaba otra más pequeña, y luego otra más pequeña todavía, con la confianza de que tarde o temprano alguna encajaría exactamente. Descubrir que para la diagonal y el lado de un cuadrado ninguna encaja, por pequeña que sea, no es solo aprender un teorema; es descubrir que el mundo de las figuras no se deja reducir por completo al de los números que sabemos contar, y que la razón humana puede demostrar con certeza algo que nunca podrá comprobar midiendo. Esa mezcla de vértigo y de asombro, que los estudiantes reviven cada vez que alguien les dice que $\sqrt{2}$ «no termina nunca», es el hilo humano de esta historia, y he procurado no perderlo de vista en las páginas que siguen.

Este capítulo recorre ese tránsito de la aproximación a la imposibilidad, y lo hace con una doble exigencia que atraviesa todo el libro. La primera es la del rigor matemático: cada afirmación sobre la irracionalidad de un número se acompaña de una demostración completa, y cuando las fuentes antiguas conservan varias demostraciones posibles se examinan y se comparan, porque la pluralidad de caminos hacia un mismo resultado es, en sí misma, una

forma de comprensión. La segunda es la del rigor histórico: las fuentes que nos informan sobre los primeros pasos de esta historia son escasas, tardías y a menudo contradictorias, y he procurado distinguir con claridad lo que puede afirmarse con seguridad, lo que es una conjetura razonable y lo que pertenece al terreno de la leyenda. A esas dos exigencias se suma una tercera, que es la razón de ser del libro: mostrar por qué esta historia importa para quien enseña y para quien aprende matemáticas, tema al que se dedica la sección final del capítulo y que asoma, en recuadros señalados como *En el aula*, a lo largo de todo él.

MAPA DEL CAPÍTULO	
1.1–1.2	Las aproximaciones antes de la pregunta: Mesopotamia y la India védica.
1.3–1.4	La noción griega de número, la medida común y el algoritmo de la sustracción recíproca.
1.5	El <i>Menón</i> : la diagonal como respuesta que no es un número.
1.6–1.7	Cinco demostraciones de la inconmensurabilidad de la diagonal; los números laterales y diagonales.
1.8	El pentágono, Hipaso y la sección en extrema y media razón.
1.9–1.10	Teodoro de Cirene, el enigma del diecisiete y la teoría general de Teeteto.
1.11–1.12	Las leyendas y el debate historiográfico sobre la «crisis».
1.13	Por qué esta historia importa en la enseñanza: la investigación reciente.

1.1 Aproximar sin preguntar: la raíz de dos en Mesopotamia

1.1.1 El contexto: una aritmética de escribas

Las fuentes matemáticas más antiguas que se conservan en abundancia proceden de Mesopotamia y de Egipto. Los papiros matemáticos egipcios, de los cuales el más extenso es el papiro Rhind, copiado por el escriba Ahmes hacia 1650 a. C. a partir de un original más antiguo, contienen problemas de áreas y volúmenes resueltos con una aritmética de fracciones unitarias notablemente elaborada, y en ellos aparece, por ejemplo, la regla que toma como área del círculo la del cuadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ del diámetro, equivalente a $\pi \approx \frac{256}{81}$ (Boyer y Merzbach, 2011; Eves, 1969). No se conoce, sin embargo, en los papiros egipcios ninguna aproximación elaborada de una raíz cuadrada no exacta, y es en las tablillas de arcilla mesopotámicas donde encontramos el primer testimonio de un cálculo de $\sqrt{2}$.

Los textos matemáticos mesopotámicos del período paleobabilónico, aproximadamente entre 2000 y 1600 a. C., fueron escritos en su inmensa mayoría por escribas o aprendices de escriba, en el marco de una institución escolar, la *eduba* o «casa de las tablillas», cuya finalidad era formar a los funcionarios que administraban templos y palacios (Høyrup, 2002; Robson, 2001). Su matemática es, por ello, una matemática de procedimientos: los textos presentan problemas concretos, a menudo artificiales, y describen paso a paso cómo resolverlos, sin enunciar reglas generales ni ofrecer nada que se parezca a una demostración en el sentido griego. Utilizaban un sistema de numeración posicional de base sesenta, sin símbolo para el cero y sin marca que indicara el orden de magnitud, de modo que el mismo signo podía valer 1, 60 o $\frac{1}{60}$ según el contexto; la notación moderna con punto y coma, introducida por Otto Neugebauer, hace explícita la lectura que el especialista considera adecuada, y así 1;30 representa $1 + \frac{30}{60} = 1\frac{1}{2}$.

1.1.2 La tablilla YBC 7289

El documento más célebre de la matemática mesopotámica relacionado con nuestro tema es una pequeña tablilla de arcilla de forma aproximadamente circular, conservada en la Colección Babilónica de la Universidad de Yale con la signatura YBC 7289. En ella aparece dibujado un cuadrado con sus dos diagonales; sobre uno de los lados se lee el número 30 y sobre la diagonal horizontal los números 1; 24, 51, 10 y 42; 25, 35 (figura 1.1). Fowler y Robson, que dedicaron a la tablilla un estudio minucioso, resumen lo que puede afirmarse sobre su origen: «su procedencia y su datación exactas son desconocidas, pero la forma redonda de la tablilla y la paleografía sugieren que fue escrita por un aprendiz de escriba en algún lugar del sur de Mesopotamia (el actual Irak) durante el primer tercio del segundo milenio antes de nuestra era» (Fowler y Robson, 1998, p. 366; traducción propia).

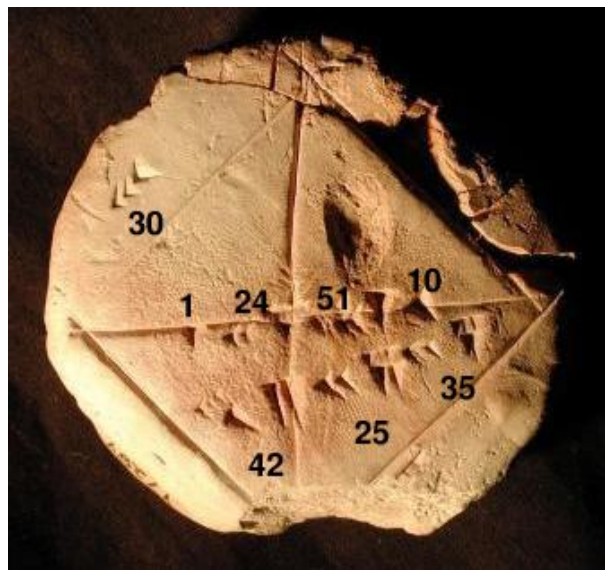


FIGURA 1.1. La tablilla YBC 7289 (Yale Babylonian Collection, período paleobabilónico), con la transcripción moderna de los numerales superpuesta. El valor 1; 24, 51, 10 aproxima $\sqrt{2}$ con un error inferior a $6 \cdot 10^{-7}$.

Fuente: Tomada de internet. Fotografía de la tablilla YBC 7289 (Yale Babylonian Collection) con la transcripción de los numerales superpuesta.

Leído como 1; 24, 51, 10, el primer número de la diagonal es

$$1; 24, 51, 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} \approx 1,41421296,$$

valor que difiere de $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ en menos de seis diezmiliones y cuyo cuadrado, $1,9999983 \dots$, se aparta de 2 en menos de dos millones: una precisión equivalente a la de seis cifras decimales, que no sería superada en Europa hasta muchos siglos después. El segundo número, $42; 25, 35 \approx 42,42638$, es exactamente el producto de 30 por el primero, y representa por tanto la diagonal de un cuadrado de lado 30.

Fowler y Robson aportan dos observaciones que transforman la lectura de la tablilla. La primera concierne a su naturaleza: las tablillas redondas de ocho a doce centímetros eran las

«tablillas de mano» que los aprendices usaban para sus ejercicios, y además «el hecho de que la escritura de YBC 7289 sea inusualmente grande (unos 8 mm de altura) sugiere también que la tablilla fue escrita por un aprendiz: la escritura de los escribas tendía a hacerse más pequeña con la práctica» (Fowler y Robson, 1998, p. 369; traducción propia). La tablilla no es, por tanto, el registro de un descubrimiento, sino un ejercicio escolar en el que un estudiante aplicaba un coeficiente que había aprendido. La segunda observación concierne a la lectura del número del lado: si en lugar de 30 se lee 0;30, es decir, $\frac{1}{2}$, entonces «los números escritos junto a la diagonal representan aproximaciones de $\sqrt{2}$ y de $1/\sqrt{2}$ » (Fowler y Robson, 1998, p. 368; traducción propia), pues $0;42,25,35 = \frac{1}{2} \cdot 1;24,51,10 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$. La tablilla presenta entonces un par de números recíprocos con una interpretación geométrica, y todos sus números están estrechamente relacionados con el número 2.

1.1.3 Las listas de coeficientes

El valor 1;24,51,10 no era una rareza. Los escribas memorizaban y copiaban listas de *coeficientes*, constantes numéricas que intervenían en los cálculos de áreas, volúmenes y rendimientos de trabajo, y Fowler y Robson localizan el valor de la tablilla en una de ellas, la tablilla YBC 7243, que registra en su décima línea 1;24,51,10 como «la diagonal de un cuadrado»; en otra lista, procedente de Susa y conocida como TMS 3, figura en cambio el valor más tosco 1;25 como «el coeficiente de la diagonal de un cuadrado» (Fowler y Robson, 1998, pp. 369–370). La coexistencia de dos valores con precisiones muy distintas es elocuente: el escriba elegía el coeficiente adecuado al problema, del mismo modo que un ingeniero actual elige cuántas cifras de π necesita, y en ningún caso se planteaba la cuestión de cuál era el valor «verdadero».

1.1.4 ¿Cómo calculaban?

La pregunta de cómo se obtuvo un valor tan preciso no tiene todavía una respuesta segura, y conviene desconfiar de la afirmación, muy repetida en la divulgación, de que los babilonios conocían «el método de Herón». Lo que sí puede establecerse es que la matemática paleobabilónica resolvía los problemas cuadráticos mediante manipulaciones geométricas de rectángulos y cuadrados, un procedimiento de «cortar y pegar» que Høyrup ha reconstruido a partir del vocabulario técnico de los textos (Høyrup, 2002). Fowler y Robson proponen, dentro de ese marco, un algoritmo compatible con todos los ejemplos paleobabilónicos conocidos. Si se quiere la raíz de un número N y se dispone de una aproximación a por defecto, se escribe $N = a^2 + r$, donde el «resto» r es un área que falta añadir al cuadrado de lado a ; ese resto se transforma en un rectángulo de lados a y r/a , se corta longitudinalmente en dos mitades y estas se adosan a dos lados contiguos del cuadrado (figura 1.2). La nueva figura es casi un cuadrado de lado $a + \frac{r}{2a}$, y, en palabras de los autores, esa nueva aproximación «será claramente un exceso, a causa del mordisco que falta en la esquina» (Fowler y Robson, 1998, p. 371; traducción propia).

En notación moderna, el procedimiento produce

$$a' = a + \frac{N - a^2}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{N}{a} \right), \quad a'^2 - N = \left(\frac{N - a^2}{2a} \right)^2 > 0,$$

es decir, exactamente la media entre a y N/a , y la segunda igualdad expresa en álgebra lo que la figura muestra en geometría: el exceso es el área del «mordisco». Recientemente, Buckle

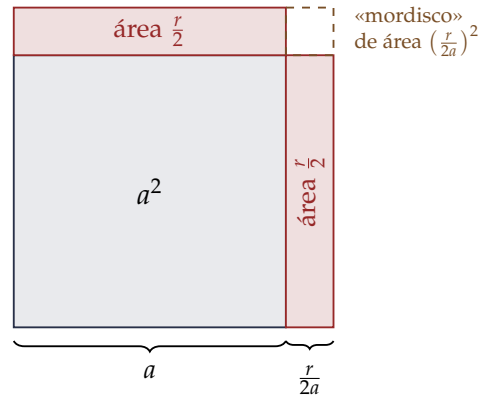


FIGURA 1.2. El procedimiento geométrico reconstruido por Fowler y Robson. El resto $r = N - a^2$ se convierte en dos rectángulos de lados a y $\frac{r}{2a}$, cada uno de área $\frac{r}{2}$, que se adosan al cuadrado a^2 . El cuadrado de lado $a + \frac{r}{2a}$ excede a N precisamente en el pequeño cuadrado de la esquina.

Fuente: Elaboración propia.

ha mostrado que una sola aplicación de este procedimiento, partiendo del número regular 1;24,22,30, cuyo inverso 0;42,40 tiene solo dos posiciones, produce 1;24,51,15, que difiere del valor de la tablilla únicamente en la última posición, y que a partir de ahí unos pocos cálculos de comprobación conducen a 1;24,51,10 (Buckle, 2023).

Observación 1.1. Un número se llama *regular* en base sesenta si su inverso tiene una expresión sexagesimal finita, lo cual ocurre exactamente cuando sus únicos factores primos son 2, 3 y 5, los divisores primos de la base. Los escribas disponían de tablas de inversos solo para números regulares, y dividir significaba multiplicar por el inverso; por eso la elección de un punto de partida regular no es un detalle técnico, sino una condición del cálculo. La hipótesis de Buckle tiene la virtud de explicar el valor de la tablilla sin suponer más herramientas que las documentadas en los textos escolares.

Sea cual fuere el método exacto, lo que interesa subrayar es que nada en las fuentes mesopotámicas sugiere que los escribas consideraran su valor como algo distinto de una buena aproximación, ni que se preguntaran si la aproximación podía perfeccionarse hasta volverse exacta. El sistema sexagesimal, con su abundancia de divisores, hacía exactas muchas divisiones que en base diez no lo son, y es posible que esa misma eficacia contribuyera a ocultar la pregunta: en una aritmética en la que casi todo «sale», lo que no sale se atribuye al procedimiento. La pregunta por la existencia de una medida exacta requería una actitud distinta, que no se interesa por el resultado sino por su posibilidad, y esa actitud no aparece en las fuentes antes de los griegos.

NOTA HISTÓRICA: EL DESCIFRAMIENTO Y LA TABLILLA PLIMPTON 322

Aunque la escritura cuneiforme había sido descifrada en lo esencial a mediados del siglo XIX, el contenido matemático de las tablillas solo comenzó a comprenderse de manera sistemática en la década de 1930, gracias a los trabajos de Otto Neugebauer y François

Thureau-Dangin; la edición de referencia de muchos textos, incluida la célebre tablilla Plimpton 322, es la de Neugebauer y Sachs (1945). La interpretación de esta última como una tabla de ternas pitagóricas, e incluso como una tabla trigonométrica, ha sido objeto de una discusión intensa: Robson (2001) ha mostrado que puede explicarse como un texto escolar construido a partir de pares de números recíprocos, mientras que Mansfield y Wildberger (2017) han defendido una lectura trigonométrica que buena parte de los especialistas considera anacrónica. El episodio ilustra el riesgo, siempre presente en esta historia, de leer en los documentos antiguos las preguntas que nos interesan a nosotros.

1.2 La diagonal del altar: los Śulbasūtras

En la India védica, la construcción de los altares del fuego obedecía a prescripciones rituales muy estrictas sobre la forma y el área de las figuras, y los manuales que las recogen, los *Śulbasūtras* o «reglas de la cuerda», contienen una geometría práctica notablemente elaborada, destinada a transformar unas figuras en otras de igual área. El más antiguo, atribuido a Baudhāyana, suele fecharse entre los siglos VIII y VI a. C., aunque la cronología de la literatura védica es muy insegura y algunos especialistas proponen fechas más tardías (Plofker, 2009). En él se enuncia con toda claridad el teorema que hoy llamamos de Pitágoras, en la forma de una regla sobre la cuerda tendida a lo largo de la diagonal de un rectángulo, que «produce» por sí sola lo que producen por separado el lado mayor y el menor, y se da una regla para la diagonal del cuadrado que, traducida libremente, dice: *aumenta la medida en su tercera parte, y esta tercera parte en su propia cuarta parte menos la trigésima cuarta parte de esa cuarta parte*. En notación moderna:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1,4142157.$$

El texto añade que el resultado es *saviṣeṣa*, «con un excedente». Algunos comentaristas modernos han querido ver en esa palabra un reconocimiento de la irracionalidad; me parece más prudente leerla como la simple indicación de que el valor no es exacto, lo cual es compatible con la actitud aproximativa que acabamos de describir en Mesopotamia y no implica en modo alguno la conciencia de que ningún valor racional pueda serlo.

1.2.1 La reconstrucción de Datta

La reconstrucción más aceptada del origen de la regla, propuesta por Bibhutibhusan Datta, parte de un procedimiento geométrico de disección coherente con el resto de los *Śulbasūtras* (Datta, 1932). Para construir un cuadrado de área doble se toman dos cuadrados unitarios. El segundo se corta en tres franjas iguales de anchura $\frac{1}{3}$; dos de ellas se adosan a dos lados contiguos del primero, y la tercera se corta en tres cuadraditos de lado $\frac{1}{3}$, uno de los cuales completa la esquina. Los dos cuadraditos restantes se dividen cada uno en cuatro franjas de anchura $\frac{1}{12}$, y las ocho franjas resultantes, de longitud total $\frac{8}{3}$, se distribuyen a lo largo de los dos lados exteriores de la figura, cuya longitud conjunta es precisamente $2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (figura 1.3).

La figura así formada es casi un cuadrado de lado $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$, al que solo le falta, en una esquina, un pequeño cuadrado de lado $\frac{1}{12}$; en consecuencia, el cuadrado de lado $\frac{17}{12}$ excede el área

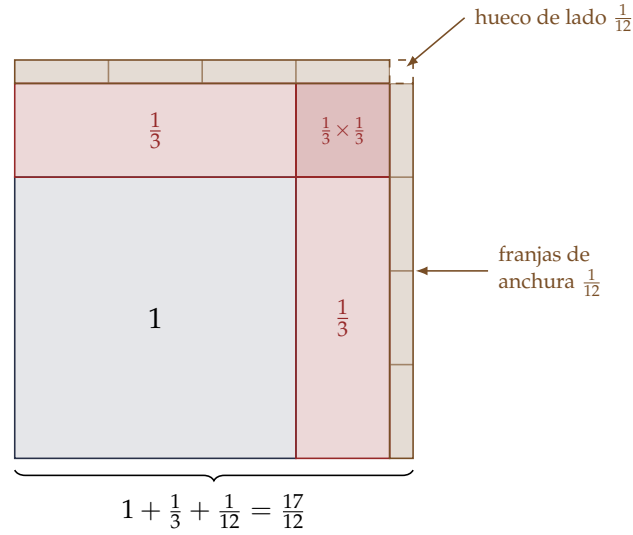


FIGURA 1.3. La reconstrucción de Datta de la regla de Baudhāyana. El segundo cuadrado unitario se disecciona en franjas de anchura $\frac{1}{3}$, un cuadradito de lado $\frac{1}{3}$ y ocho franjas de anchura $\frac{1}{12}$. La figura resultante es un cuadrado de lado $\frac{17}{12}$ al que le falta, en una esquina, un pequeño cuadrado de lado $\frac{1}{12}$.

Fuente: Elaboración propia.

buscada en exactamente $\frac{1}{144}$, como puede comprobarse directamente, pues $(\frac{17}{12})^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$. Para compensar el exceso se retira de dos lados contiguos una franja de anchura x ; si se desprecia el diminuto cuadrado x^2 que queda en la esquina, la condición es

$$2 \cdot \frac{17}{12} x = \frac{1}{144}, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{1}{408} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

que es exactamente la corrección de Baudhāyana. Si la reconstrucción es correcta, la regla no procede de ningún algoritmo numérico sino de una manipulación geométrica del mismo tipo que las paleobabilónicas, y su precisión es el resultado de una corrección de primer orden bien calculada; el término despreciado, $x^2 = \frac{1}{408^2}$, es precisamente la razón por la cual $(\frac{577}{408})^2$ excede a 2 en $\frac{1}{408^2}$.

La comparación con la figura 1.2 es instructiva. En ambos casos la aproximación se obtiene completando un cuadrado mediante franjas adosadas a dos de sus lados, y en ambos casos el error es el área de un cuadradito en la esquina. En términos modernos, las dos reglas son aplicaciones del mismo procedimiento de la media: partiendo de $\frac{4}{3}$, se obtiene $\frac{1}{2}(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{17}{12}$, y partiendo de $\frac{17}{12}$, se obtiene $\frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408}$. El valor $\frac{577}{408}$ no es, como veremos en la sección 1.7, una fracción cualquiera: es uno de los llamados números laterales y diagonales de la tradición griega. Esta coincidencia entre tradiciones independientes, que no debe interpretarse como transmisión, revela algo sobre la estructura del problema antes que sobre la historia de las ideas: las buenas aproximaciones de $\sqrt{2}$ son pocas y muy particulares, y cualquier procedimiento geoméricamente razonable termina por encontrarlas.

EN EL AULA: APROXIMAR CON LAS MANOS

Las construcciones de las figuras 1.2 y 1.3 pueden realizarse con papel cuadriculado y tijeras en un aula de secundaria. Tienen la virtud de hacer visible que la aproximación nunca es exacta, porque siempre queda un «mordisco» o un «hueco» en la esquina, y de plantear de manera natural la pregunta que ni los escribas ni los sacerdotes védicos formularon: ¿podría elegirse la franja de modo que el hueco desapareciera por completo? La respuesta negativa es el contenido de las secciones 1.6 y siguientes, y el contraste entre la pregunta práctica («¿cuánto mide?») y la pregunta teórica («¿puede medirse exactamente?») es, a mi juicio, uno de los mejores puntos de entrada al concepto de número irracional.

Una advertencia que me ha resultado útil en clase: cuando aparece el cuadradito que sobra o que falta, muchos estudiantes creen que recortaron mal y quieren empezar de nuevo. Es bueno dejar que lo intenten dos o tres veces y luego decirles la verdad: el hueco no es un error de sus tijeras, y la incomodidad de no poder eliminarlo es exactamente la que tuvieron quienes se hicieron la pregunta por primera vez.

1.3 Número, razón y medida común en la Grecia arcaica

1.3.1 El problema de las fuentes

Para comprender el alcance del descubrimiento griego es preciso reconstruir, aunque sea de manera aproximada, la noción de número que manejaban los pitagóricos del siglo V a. C., y esa reconstrucción tropieza desde el principio con un problema de fuentes que conviene exponer con franqueza. Pitágoras no escribió nada, y, como advierte Huffman, «no hubo ningún relato contemporáneo extenso o autorizado» sobre él (Huffman, 2024a, sección 1; traducción propia). Lo que sabemos procede, en su mayor parte, de autores de los siglos III y IV de nuestra era, como Porfirio y Jámblico, profundamente influidos por el neopitagorismo y el neoplatonismo, para quienes Pitágoras era un sabio casi divino al que había que atribuir todo lo valioso de la filosofía griega. La crítica de Burkert (1972) mostró que buena parte de esa imagen es una idealización tardía, y la investigación posterior ha confirmado y precisado su diagnóstico: hacia el final del siglo IV de nuestra era, observa Huffman, muchos de los filósofos griegos más destacados, incluidos Parménides, Platón y Aristóteles, llegaron a ser llamados pitagóricos «sin ninguna justificación histórica» (Huffman, 2024b, introducción; traducción propia).

El testimonio más fiable sigue siendo el de Aristóteles, quien en el Libro A de la *Metafísica* atribuye a «los llamados pitagóricos» la doctrina de que los principios de los números son los principios de todas las cosas, y de que el cielo entero es armonía y número (Aristóteles, 1994). Pero incluso este testimonio debe leerse con cautela. Huffman sostiene que Aristóteles no ofrece un informe histórico de lo que dijeron los pitagóricos sino una interpretación de lo que encontró en Filolao y otros autores del siglo V, y que, de hecho, Aristóteles «no conoce ningún texto en el que los pitagóricos dijeran que las cosas eran números o estaban hechas de números. Se trata, en cambio, de una conclusión extraída por Aristóteles; es su enunciado sintético de aquello a lo que equivale el sistema pitagórico» (Huffman, 2024b, sección 2.3; traducción propia). La fórmula «todo es número», que tantos libros de texto atribuyen a Pitágoras como si fuera una cita, es por tanto una síntesis aristotélica de una doctrina más matizada, y conviene presentarla como tal.

NOTA HISTÓRICA: ¿IRRACIONALES O PROPORCIONES? UNA VARIANTE TEXTUAL

El resumen de la historia de la geometría que Proclo incluye en su comentario al Libro I de los *Elementos* (siglo V d. C.), y que remonta en parte a la historia perdida de Eudemo de Rodas, atribuye a Pitágoras el descubrimiento de la «teoría de los irracionales», *tōn alōgōn pragmateía* (literalmente, «el estudio de lo que no tiene razón», es decir, de lo que no puede expresarse como razón entre números). Pero una parte de la tradición manuscrita lee *tōn analōgōn*, «de las proporciones», y la diferencia, de una sola sílaba, cambia por completo el sentido del testimonio (Heath, 1921). Huffman señala, además, que la atribución a Pitágoras del estudio de las magnitudes irracionales no procede de Eudemo sino de Jámblico, y refleja la glorificación tardía antes que una evidencia temprana fiable (Huffman, 2024a, sección 5). El episodio es una buena muestra de hasta qué punto el suelo documental de esta historia es frágil.

1.3.2 El número como pluralidad de unidades

Con estas cautelas, puede afirmarse que para los matemáticos griegos del período clásico un *número* (*arithmós*) era una pluralidad compuesta de unidades, es decir, lo que hoy llamaríamos un entero mayor que uno; la unidad misma no era, en sentido estricto, un número, sino el principio a partir del cual los números se generan, y Euclides conserva esta concepción en las definiciones 1 y 2 del Libro VII. No había, en este sentido, fracciones como números: lo que nosotros escribimos $\frac{2}{3}$ era para un griego una *razón* entre los números 2 y 3, o bien una cantidad compuesta de «partes» de una unidad de medida, y la aritmética teórica se ocupaba exclusivamente de los enteros (Fowler, 1999; Heath, 1921).

Los números se representaban mediante configuraciones de puntos o piedrecillas, y la aritmética pitagórica, tal como puede reconstruirse a partir de Nicómaco de Gerasa y de Teón de Esmirna, estudiaba con predilección las propiedades de los números *figurados* (triangulares, cuadrados, oblongos, pentagonales) que esas configuraciones sugieren. Uno de sus resultados, que desempeñará un papel inesperado en la sección 1.9, merece enunciarse desde ahora.

Lema 1.2 (Los cuadrados impares). *Todo cuadrado impar es igual a ocho veces un número triangular más uno:*

$$(2k + 1)^2 = 8 \cdot T_k + 1, \quad T_k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

En particular, todo cuadrado impar deja resto 1 al dividirlo entre 8.

Demostración. $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 8T_k + 1$. La figura 1.4 muestra la versión «pitagórica» de la demostración: el cuadrado de lado $2k + 1$ se descompone en una piedrecilla central y cuatro rectángulos oblongos de lados k y $k + 1$, cada uno de los cuales es la suma de dos números triangulares iguales. ■

1.3.3 Medida común

Si un segmento contiene exactamente tres veces a cierto segmento y otro lo contiene cinco veces, se dice que ambos están en la razón de tres a cinco, y esa razón entre números describe la

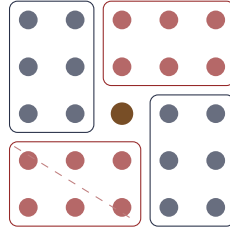


FIGURA 1.4. El cuadrado impar $5^2 = 25$ como una piedrecilla central y cuatro números oblongos 2×3 . Cada oblongo es el doble del número triangular $T_2 = 3$ (la línea discontinua indica la división en uno de ellos), de modo que $25 = 8 \cdot 3 + 1$.

Fuente: Elaboración propia.

relación entre los segmentos. La idea implícita, que la tradición atribuye a los pitagóricos aunque no sabemos si fue alguna vez formulada como tesis, es que dos segmentos cualesquiera admiten siempre una medida común, de modo que toda relación entre magnitudes sería reducible a una razón entre números enteros. Euclides fija el vocabulario en las primeras definiciones del Libro X, que adoptamos en forma moderna (Euclides, 1991–1996; Heath, 1956).

Definición 1.3 (*Elementos X*, def. 1–3). Dos magnitudes homogéneas A y B son *conmensurables* si existe una magnitud E de la misma especie, llamada *medida común*, y dos enteros positivos m y n tales que $A = mE$ y $B = nE$; en caso contrario son *inconmensurables*. Dos segmentos son *conmensurables en cuadrado* (*dynamēi sýmmetroi*, literalmente «conmensurables en potencia», porque los griegos llamaban *dýnamis*, «potencia», al cuadrado construido sobre un segmento) si los cuadrados construidos sobre ellos son conmensurables como áreas.

Si tomamos B como unidad, la medida de A es el número racional m/n , y la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado equivale a la irracionalidad de $\sqrt{2}$; así la entenderemos en lo sucesivo, aunque conviene no olvidar que para un griego del siglo V se trataba de un enunciado sobre segmentos y no sobre números, y que precisamente esa diferencia de categoría tardará veintitrés siglos en resolverse. La noción de conmensurabilidad en cuadrado, por su parte, es la que permite decir que la diagonal y el lado, inconmensurables «en longitud», son sin embargo conmensurables «en potencia», puesto que el cuadrado de la diagonal es el doble del cuadrado del lado; es la misma distinción que emplea Teeteto en el pasaje platónico de la sección 1.9.

Proposición 1.4. *La conmensurabilidad es una relación de equivalencia entre magnitudes homogéneas: si A es conmensurable con B y B con C , entonces A es conmensurable con C .*

Demostración. La reflexividad y la simetría son evidentes. Si $A = mE$, $B = nE$ y $B = pF$, $C = qF$, entonces $nE = pF$, y la magnitud $G = E/p = F/n$ (la p -ésima parte de E , que es también la n -ésima parte de F , pues $npG = nE = pF$) mide a las tres: $A = mpG$, $B = npG$ y $C = qnG$. ■

La proposición, que Euclides demuestra como X.12, tiene una consecuencia que conviene retener: si la diagonal fuera conmensurable con el lado, lo sería también con cualquier segmento conmensurable con el lado, de modo que la inconmensurabilidad de la diagonal no depende de la unidad elegida. Es una propiedad de la figura, no de la manera de medirla.

NOTA HISTÓRICA: MAGNITUD, RAZÓN Y NÚMERO: UNA ADVERTENCIA SOBRE EL LENGUAJE

En este capítulo y en el siguiente escribiremos con frecuencia $\sqrt{2}$, d/s o p/q , porque es la manera más clara de seguir los argumentos. Esa notación debe leerse como una traducción y no como una descripción de lo que pensaban los griegos. Para un geómetra del siglo V a. C., la diagonal y el lado de un cuadrado eran *magnitudes*; entre ellas había una *razón*, y esa razón no era un número, porque un número era una pluralidad de unidades. Decir que «la razón entre la diagonal y el lado es irracional» significa, en su lenguaje, que no existen dos números que guarden entre sí la misma razón que esas dos líneas. La diferencia no es un detalle de erudición: es precisamente el problema que la teoría de Eudoxo intentará resolver en el capítulo 2 y que solo la construcción de los números reales cerrará en el capítulo 4. El cuadro siguiente reúne los términos griegos que aparecen con más frecuencia en el libro.

<i>arithmós</i>	número: pluralidad compuesta de unidades (lo que hoy llamaríamos un entero mayor que uno)
<i>lógos</i>	razón, relación de tamaño entre dos magnitudes; también «palabra» y «cuenta»
<i>álogos</i>	«sin razón», «que no se puede decir»: el origen de nuestro «irracional»
<i>analogía</i>	proporción, es decir, igualdad de razones
<i>symmetros, asymmetros</i>	conmensurable, inconmensurable («con medida común», «sin medida común»)
<i>dynámei symmetroi</i>	conmensurables en cuadrado («en potencia»)
<i>anthyphaíresis, antanaíresis</i>	sustracción recíproca (antifairesis)
<i>rhētós</i>	expresable: en el Libro X, conmensurable con una recta de referencia
<i>neûsis</i>	inserción: construcción con regla marcada (apéndice A)

1.4 La sustracción recíproca

¿Cómo puede averiguarse si dos segmentos admiten una medida común? El procedimiento natural, que los griegos llamaron *antifairesis* o *antanaíresis*, «sustracción recíproca» (del griego *anthyphaíresis*, «sustracción alternada»: se quita una magnitud de la otra, y luego al revés), consiste en restar repetidamente el menor del mayor hasta que el resto sea menor que el sustraendo, y continuar luego con el menor y el resto. Es el algoritmo que Euclides describe para los números en las proposiciones VII.1 y VII.2 y que hoy llamamos algoritmo de Euclides; en X.2 y X.3 lo aplica a las magnitudes. Aristóteles lo menciona en los *Tópicos* (VIII.3, 158b29–35) de un modo que ha resultado decisivo para la historiografía: dice que ciertas proposiciones geométricas difíciles de demostrar se vuelven evidentes una vez dada la definición adecuada, y que las rectas y las áreas que cortan de la misma manera «tienen la misma antanaíresis», lo cual sugiere que antes de Eudoxo existió una teoría de las proporciones basada en la sustracción recíproca, cuya reconstrucción ha ocupado a Zeuthen, Becker, Knorr y, de manera muy sistemática, a Fowler (1999).

Ejemplo 1.5. En la figura 1.5, el segmento B cabe dos veces en A y deja un resto $C < B$; C cabe una vez en B y deja un resto $D < C$; finalmente D cabe cuatro veces en C sin dejar resto. La última magnitud obtenida es medida común: $C = 4D$, $B = C + D = 5D$ y $A = 2B + C = 14D$. La sucesión de cocientes $(2, 1, 4)$ describe la razón de A a B , que es la de 14 a 5, y en lenguaje moderno se escribe

$$\frac{14}{5} = [2; 1, 4] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}.$$

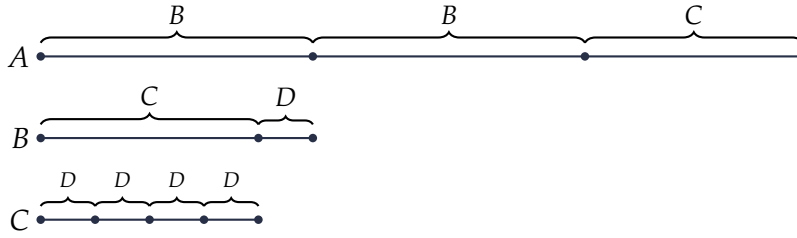


FIGURA 1.5. La antifairesis de dos segmentos conmensurables termina después de un número finito de pasos: $A = 2B + C$, $B = C + D$, $C = 4D$. El último resto no nulo, D , es la mayor medida común.

Fuente: Elaboración propia.

Proposición 1.6 (Elementos X.3). *Si la antifairesis de dos magnitudes $A > B$ termina, es decir, si algún resto mide exactamente al anterior, entonces el último resto no nulo D es una medida común de A y B , y toda medida común de A y B mide también a D . En particular, D es la mayor medida común.*

Demostración. Con la notación $r_0 = A$, $r_1 = B$ y $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$, supongamos que $r_{N+1} = 0$, de modo que $D = r_N$ mide a r_{N-1} . De la igualdad $r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}$ se sigue, recorriéndola hacia atrás, que si D mide a r_k y a r_{k+1} , también mide a r_{k-1} ; por inducción descendente, D mide a $r_1 = B$ y a $r_0 = A$. Recíprocamente, si E mide a A y a B , de $r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k$ se sigue que mide a todos los restos, y en particular a D . ■

La observación decisiva es que el proceso puede *no terminar*, y que en tal caso la no terminación prueba la inconmensurabilidad. Euclides lo establece en X.2 apoyándose en el lema de X.1; formulamos el resultado en términos modernos y damos una demostración que hace explícito el principio del que depende.

Teorema 1.7 (Elementos X.2). *Sean $A > B$ dos segmentos. Si en la antifairesis de A y B ningún resto mide exactamente al que le precede, de modo que el proceso no termina, entonces A y B son incommensurables.*

Demostración. Con la notación anterior, la hipótesis garantiza que $0 < r_{k+1} < r_k$ para todo k . Supongamos que existe una medida común E , con $A = mE$ y $B = nE$. Por la segunda parte de la demostración de la proposición 1.6, cada resto es un múltiplo entero positivo de E , y en

particular $r_k \geq E$ para todo k . Por otra parte, $r_{k-1} \geq r_k + r_{k+1} > 2r_{k+1}$, es decir, $r_{k+1} < \frac{1}{2}r_{k-1}$, de donde $r_{2j} < A/2^j$. Como $2^m > m$,

$$r_{2m} < \frac{A}{2^m} = \frac{m}{2^m} E < E,$$

lo que contradice la conclusión anterior. ■

Observación 1.8. La demostración utiliza que A es un múltiplo entero de E , lo que permite acotar $A/2^m$ por E sin invocar ningún principio adicional. En la versión euclidiana, que no parte de la existencia de E sino que razona directamente sobre las magnitudes, el paso equivalente requiere el lema X.1, según el cual, si de una magnitud se sustrae reiteradamente más de su mitad, se llega a un resto menor que cualquier magnitud dada; y ese lema depende de que ninguna magnitud sea infinitamente pequeña respecto de otra, supuesto que Euclides no enuncia como axioma y que hoy llamamos axioma de Arquímedes. Hilbert calificará esa omisión, veintidós siglos después, de «mancha en el sol de Euclides», y el capítulo 2 examinará su alcance. Volveremos sobre este principio en la sección 2.6, donde se verá que no se trata de un tecnicismo: es la garantía lógica que impide que en la teoría de las proporciones aparezcan magnitudes infinitamente pequeñas, capaces de hacer indistinguibles dos razones que en realidad son distintas.

El teorema 1.7 convierte la inconmensurabilidad en una propiedad de un proceso: dos magnitudes son inconmensurables exactamente cuando la sustracción recíproca no se detiene nunca. Pero un proceso infinito no puede recorrerse efectivamente, y para demostrar que no termina hace falta encontrar en él una regularidad que se repita. Veremos en las secciones siguientes que esa regularidad existe en el caso de la diagonal y del pentágono, donde la figura se reproduce a sí misma a escala menor, y que su búsqueda para otros casos explica, probablemente, el rumbo que tomó la investigación de Teodoro y de Teeteto.

1.5 Sócrates, un esclavo y el cuadrado doble

Antes de examinar las demostraciones de la inconmensurabilidad conviene detenerse en un texto que, sin mencionarla nunca, muestra con extraordinaria nitidez el lugar que la diagonal ocupaba en la cultura intelectual ateniense de comienzos del siglo IV. En el *Menón* (82b–85b), Platón presenta a Sócrates interrogando a un joven esclavo, que no ha recibido instrucción alguna, sobre cómo construir un cuadrado de área doble que la de un cuadrado dado de lado dos pies (Platón, 1983). El esclavo propone primero duplicar el lado y descubre, guiado por las preguntas de Sócrates, que obtiene un área cuádruple; propone luego un lado de tres pies y encuentra un área de nueve, que tampoco es ocho; y cuando ya no sabe qué responder, Sócrates traza las diagonales de cuatro cuadrados iguales y le hace ver que el cuadrado construido sobre ellas contiene cuatro mitades de cuadrado, es decir, dos cuadrados enteros (figura 1.6).

El pasaje es célebre por su tesis filosófica, la de que aprender es recordar, pero para nuestra historia importa un detalle que suele pasar inadvertido. Cuando el esclavo, tras sus dos intentos, no acierta con el lado del cuadrado doble, Sócrates le pide que diga cuál es, «y si no quieres calcularlo, muéstranos al menos sobre qué línea» (84a). La respuesta correcta no es un número sino un segmento señalado en la figura: la diagonal. Platón, que escribe hacia el año 385 a. C. y conocía sin duda la inconmensurabilidad, pone en boca de Sócrates una pregunta que admite dos

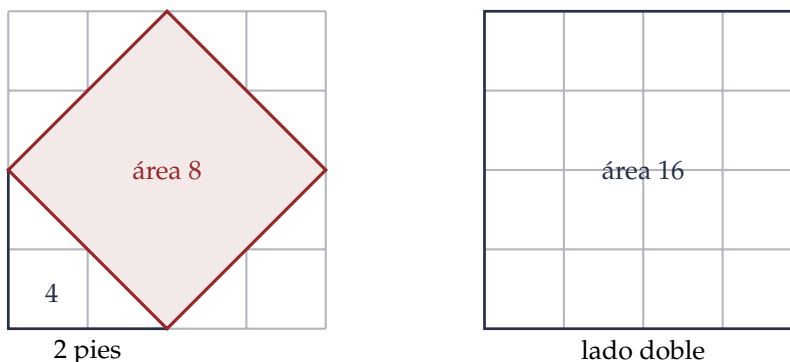


FIGURA 1.6. El *Menón*. A la derecha, el primer intento del esclavo: duplicar el lado cuadruplica el área. A la izquierda, la solución de Sócrates (84d–85b): el cuadrado inclinado, construido sobre las diagonales de cuatro cuadrados iguales, contiene cuatro mitades de ellos y tiene área 8, el doble del cuadrado original; su lado es la diagonal.

Fuente: Elaboración propia.

respuestas, una aritmética que no existe y una geométrica que sí existe, y elige cuidadosamente la segunda. El esclavo ha comprobado que el lado buscado es mayor que dos y menor que tres, pero no puede nombrarlo con ningún número entero, y Sócrates no le ofrece una fracción: le ofrece una construcción.

En ese desplazamiento del calcular al mostrar está condensada, a mi juicio, toda la estrategia que la matemática griega adoptará frente a los irracionales durante los dos siglos siguientes: lo que no puede nombrarse con números puede, sin embargo, construirse, compararse y demostrarse. Es la estrategia que culminará en la teoría de las proporciones de Eudoxo y en la clasificación de las rectas irracionales del Libro X, y es también la que, al mantener separados el número y la magnitud, dejará abierto el problema que solo la matemática del siglo XIX resolverá.

EN EL AULA: EL *Menón* COMO SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La escena del *Menón* es probablemente la primera «secuencia didáctica» documentada de la historia, y reproduce con notable fidelidad las fases que la didáctica contemporánea reconoce en la resolución de problemas: una conjetura ingenua (duplicar el lado), su refutación por el cálculo, una segunda conjetura (tres pies), una nueva refutación, un momento de desconcierto que Sócrates considera fecundo, y una reorganización del problema mediante una construcción. Con estudiantes de noveno año puede recrearse con papel cuadriculado y conduce, sin forzarla, a la pregunta que el propio texto deja abierta: ¿cuánto mide exactamente la diagonal de un cuadrado de lado dos?

El esclavo se equivoca dos veces, y Sócrates no lo corrige de inmediato ni lo avergüenza: deja que el error aparezca y que el propio muchacho lo descubra. Hay en ello una lección para nosotros. Un estudiante que propone duplicar el lado para duplicar el área no razona mal; aplica a un problema de áreas una idea proporcional que en otros contextos funciona muy bien. Reconocerlo en voz alta, y contarle que ese mismo error tiene veinticuatro siglos de historia, suele aliviar mucho más de lo que imaginamos a quien se equivocó, y lo dispone a seguir pensando.

1.6 La diagonal del cuadrado: cinco demostraciones

1.6.1 El testimonio de Aristóteles

La referencia más antigua que conservamos a una demostración de la inconmensurabilidad se encuentra en Aristóteles, quien la menciona en los *Analíticos primeros* como ejemplo típico de razonamiento por reducción al absurdo (Aristóteles, 1988).

ARISTÓTELES, *Analíticos primeros* I.23, 41A23–30 (TRADUCCIÓN PROPIA)

Todos los que concluyen por medio de lo imposible deducen lo falso y demuestran por hipótesis la tesis inicial cuando de la suposición de lo contradictorio se sigue algo imposible; por ejemplo, que la diagonal es inconmensurable porque, si se la supone conmensurable, los impares resultan iguales a los pares.

La brevedad de la alusión solo se explica si el argumento era bien conocido por sus lectores, y es plausible que corresponda a la demostración que algunos manuscritos de los *Elementos* añaden al final del Libro X, y que las ediciones anteriores a la de Heiberg numeraban como proposición X.117, mientras que Heiberg la consideró una interpolación antigua (Heath, 1956; Knorr, 1975). Knorr subraya que los testigos del siglo IV, como Platón y Aristóteles, «tratan el lado y la diagonal del cuadrado como el paradigma de los inconmensurables, mientras que una forma geométrica de la conocida demostración de su inconmensurabilidad, fundada en la distinción entre enteros pares e impares, ofrece una vía perfectamente viable para el descubrimiento y la primera demostración de este resultado» (Knorr, 1983, p. 42; traducción propia).

La inconmensurabilidad de la diagonal admite muchas demostraciones, y presentarlas juntas no es un ejercicio de erudición sino una forma de comprensión: cada una ilumina un aspecto distinto del fenómeno, y la manera en que cada una se generaliza, o deja de generalizarse, a otros casos explica buena parte de la historia que sigue. Todas ellas establecen el mismo enunciado.

Teorema 1.9. *La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado. Equivalentemente, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.*

La equivalencia entre ambas formulaciones descansa en el teorema de Pitágoras: si s es el lado y d la diagonal, $d^2 = 2s^2$, y si ambos fueran múltiplos $d = mE$, $s = nE$ de una misma magnitud, entonces $m^2 = 2n^2$ y $(m/n)^2 = 2$; recíprocamente, si $(m/n)^2 = 2$, la n -ésima parte del lado mediría también a la diagonal.

1.6.2 Primera demostración: pares e impares

Demostración por paridad. Supongamos que $m^2 = 2n^2$ con m, n enteros positivos, y que m y n son primos entre sí, lo cual puede suponerse dividiendo ambos por su máximo común divisor o, en términos geométricos, tomando la mayor medida común. Entonces m^2 es par y, como el cuadrado de un impar es impar, m es par, $m = 2k$. Sustituyendo, $4k^2 = 2n^2$, es decir, $n^2 = 2k^2$, y por el mismo razonamiento n es par. Pero m y n , primos entre sí, no pueden ser ambos

pares: el número n tendría que ser a la vez par e impar, que es la contradicción a la que alude Aristóteles. ■

La demostración utiliza exclusivamente la distinción entre pares e impares, uno de los temas predilectos de la aritmética pitagórica, y el hecho de que una razón entre números puede reducirse a sus términos mínimos. Es, con toda probabilidad, la más antigua de las que conocemos.

1.6.3 Segunda demostración: la factorización única

Demostración por factorización. Todo entero positivo se escribe de manera única como producto de potencias de primos. En la factorización de m^2 , cada primo aparece con exponente par, y en particular el exponente de 2 en m^2 es par; en la de $2n^2$, en cambio, el exponente de 2 es uno más el exponente de 2 en n^2 , que es par, y por tanto es impar. Luego $m^2 \neq 2n^2$ para todos los enteros positivos m, n . ■

Esta es la demostración que un matemático actual considera más natural, y tiene la ventaja de generalizarse inmediatamente: el mismo argumento prueba que $\sqrt{n}$ es irracional siempre que algún primo aparezca con exponente impar en la factorización de n , es decir, siempre que n no sea un cuadrado perfecto. Su precio es el teorema fundamental de la aritmética, cuya demostración completa no aparece en la matemática griega (Euclides demuestra en VII.30 que si un primo divide a un producto divide a alguno de los factores, que es el paso esencial, pero no enuncia la unicidad de la factorización) y que solo Gauss formuló explícitamente en 1801. La demostración es anacrónica como reconstrucción histórica, pero es la que mejor muestra que la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es un hecho sobre la estructura multiplicativa de los enteros.

1.6.4 Tercera demostración: el descenso algebraico

Demostración por descenso. Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$ con p, q enteros positivos, y elijamos entre todas las representaciones posibles la de menor denominador q . Como $1 < \sqrt{2} < 2$, se tiene $q < p < 2q$, de modo que $p - q$ y $2q - p$ son enteros positivos y $p - q < q$. Ahora bien,

$$\frac{2q - p}{p - q} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2},$$

donde hemos dividido numerador y denominador por q y usado $p/q = \sqrt{2}$. Así, $\sqrt{2} = (2q - p)/(p - q)$ con un denominador positivo y menor que q , contra la elección de q . ■

El argumento, que no utiliza ni la paridad ni la factorización, se apoya en un principio que los griegos aplicaban implícitamente y que Fermat haría explícito en el siglo XVII con el nombre de *descenso infinito*: no puede haber una sucesión infinita estrictamente decreciente de enteros positivos. Su interés principal reside en que admite una interpretación geométrica inmediata, que es la demostración siguiente.

La correspondencia es exacta, y vale la pena verla antes de leer la demostración. En el descenso algebraico, a partir de un supuesto par (p, q) con $p/q = \sqrt{2}$ se fabricaba otro par más

pequeño, $(2q - p, p - q)$, con el mismo cociente. En la figura de Apostol ocurre lo mismo a la vista: el triángulo grande tiene catetos q e hipotenusa p , y el triángulo pequeño que queda recortado en su esquina tiene catetos $p - q$ e hipotenusa $2q - p$. El cociente entre la hipotenusa y el cateto del triángulo pequeño es, por tanto, $(2q - p)/(p - q)$, exactamente la fracción del argumento algebraico, y el hecho de que ese triángulo sea semejante al grande es la versión geométrica de la igualdad $(2q - p)/(p - q) = \sqrt{2}$. Lo que el álgebra hace con símbolos, la figura lo hace doblando un papel, y el descenso infinito de los números se convierte en una sucesión de triángulos cada vez más pequeños que nunca se acaba.

1.6.5 Cuarta demostración: el triángulo de Apostol

Demostración geométrica de Apostol. La siguiente versión, publicada por Apostol (2000), prueba que no existe ningún triángulo rectángulo isósceles cuyos lados tengan longitudes enteras respecto de una misma unidad. Supongamos que existen tales triángulos y tomemos uno cuyo cateto sea el menor posible; sea ABC , recto en C , con catetos $CA = CB = q$ e hipotenusa $AB = p$ enteros (figura 1.7). Con centro en A y radio q trazamos un arco que corta la hipotenusa en D , de modo que $AD = q$ y $DB = p - q$, y por D levantamos la perpendicular a AB , que corta al cateto CB en E . El triángulo BDE es rectángulo en D y tiene en B un ángulo de 45° , luego es isósceles y $DE = DB = p - q$. Además, EC y ED son tangentes desde E a la circunferencia de centro A y radio q , por ser $AC \perp CE$ y $AD \perp DE$; por tanto $EC = ED = p - q$ y

$$EB = CB - CE = q - (p - q) = 2q - p.$$

Así, BDE es rectángulo isósceles de catetos $p - q$ e hipotenusa $2q - p$, ambos enteros, y, como $0 < p - q < q$, ello contradice la elección de ABC . ■

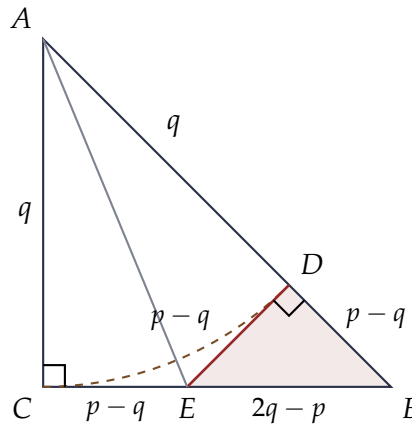


FIGURA 1.7. La demostración de Apostol. Si el triángulo ABC tuviera lados enteros, el triángulo sombreado BDE , semejante a él y estrictamente menor, también los tendría.

Fuente: Elaboración propia.

La construcción de Apostol es, literalmente, la tercera demostración dibujada: el triángulo BDE tiene catetos $p - q$ e hipotenusa $2q - p$, que son el denominador y el numerador de la nueva fracción. Y es, al mismo tiempo, una descripción de la antifairesis del lado y la diagonal.

Llamemos $s' = d - s$ y $d' = 2s - d$ al lado y la diagonal del cuadrado menor que la construcción pone de manifiesto, y observemos que $s = s' + d'$. Al restar el lado s de la diagonal d , este cabe una vez y queda el resto $d - s = s'$. Al restar ahora s' del lado $s = d' + s'$, este cabe dos veces, porque $s' < d' < 2s'$, y queda el resto $d' - s'$. Pero el par $(s', d' - s')$ está, respecto del cuadrado menor, exactamente en la misma situación en que el par $(s, d - s)$ estaba respecto del cuadrado mayor: a partir del segundo paso, la sustracción recíproca del cuadrado grande reproduce la del pequeño, a escala $\sqrt{2} - 1$, y los cocientes se repiten indefinidamente. En el lenguaje de las fracciones continuas que el capítulo 3 desarrollará, $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$. Por el teorema 1.7, la no terminación prueba de nuevo la inconmensurabilidad.

1.6.6 Quinta demostración: los cuadrados de Tennenbaum

La última demostración, atribuida al matemático Stanley Tennenbaum y difundida en la segunda mitad del siglo XX, es quizá la más visual de todas, y tiene el encanto de no requerir más que la comparación de áreas de cuadrados, en el más puro estilo de la geometría griega.

Demostración de Tennenbaum. Supongamos que $p^2 = 2q^2$ con p, q enteros positivos y p mínimo. Dibujemos un cuadrado de lado p y coloquemos en dos esquinas opuestas dos cuadrados de lado q (figura 1.8). Como $p^2 = 2q^2$, el área de los dos cuadrados de lado q es igual a la del cuadrado grande; por tanto, el área que cubren dos veces, que es un cuadrado central de lado $2q - p$, debe ser igual al área que no cubren, que está formada por dos cuadrados de lado $p - q$ en las otras dos esquinas. Así,

$$(2q - p)^2 = 2(p - q)^2,$$

con $2q - p$ y $p - q$ enteros positivos y $2q - p < p$, lo que contradice la minimalidad de p . ■

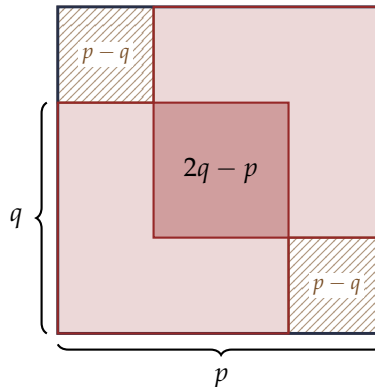


FIGURA 1.8. La demostración de Tennenbaum. Dos cuadrados de lado q colocados en esquinas opuestas de un cuadrado de lado p se superponen en un cuadrado central de lado $2q - p$ y dejan sin cubrir dos cuadrados de lado $p - q$. Si $p^2 = 2q^2$, el área doblemente cubierta es igual al área descubierta.

Fuente: Elaboración propia.

1.6.7 Lo que cada demostración enseña

Las cinco demostraciones establecen el mismo teorema, pero no explican lo mismo, y la diferencia es a la vez matemática, histórica y didáctica. La demostración por paridad es la más cercana a las fuentes y la más económica en recursos, pero es también la más frágil: veremos en la sección 1.9 que la aritmética de pares e impares, aun refinada, deja de funcionar para $\sqrt{17}$, y que esa fragilidad explica quizá por qué Teodoro se detuvo allí. La demostración por factorización es la más general y la más moderna, y muestra que la irracionalidad de las raíces cuadradas es un fenómeno aritmético; pero descansa en un teorema, el de la factorización única, cuya evidencia es solo aparente y cuya demostración fue tardía. Las demostraciones por descenso, en su forma algebraica, geométrica o de áreas, son las más reveladoras desde el punto de vista estructural: muestran que un eventual par de enteros (p, q) con $p^2 = 2q^2$ engendraría otro menor, y así sin fin, y ponen de manifiesto que la inconmensurabilidad está ligada a la autosemejanza de la figura. Son, además, las que conectan con la antifairesis y, a través de ella, con toda la historia posterior de las fracciones continuas y de la aproximación.

EN EL AULA: VARIAS DEMOSTRACIONES DE UN MISMO TEOREMA

La investigación sobre la demostración en la enseñanza distingue entre las demostraciones que solo prueban y las que además explican por qué el resultado es verdadero. Presentar a los estudiantes, o a los futuros docentes, dos o tres demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, y pedirles que las comparen, es una actividad de gran valor formativo: obliga a identificar qué propiedad de los números se utiliza en cada caso, a reconocer cuál se generaliza a $\sqrt{3}$ o a $\sqrt{17}$, y a advertir que la «misma» verdad puede tener raíces distintas. La demostración de Tennenbaum, en particular, puede comprenderse sin álgebra y suele producir en el aula el tipo de asombro que Aristóteles consideraba el origen de la filosofía. Conviene prepararse, además, para una reacción frecuente: la sospecha de que la reducción al absurdo es un truco, porque «parte de algo falso». No es una objeción ingenua; es la misma incomodidad que llevó a muchos matemáticos a buscar demostraciones directas y constructivas, y merece discutirse con respeto en lugar de despacharse con un «así se hace».

1.7 Los números laterales y diagonales

La identidad que sostiene el descenso permite, recorrida en sentido inverso, fabricar aproximaciones de $\sqrt{2}$ cada vez mejores. Teón de Esmirna, en el siglo II de nuestra era, y Proclo, en su comentario a la *República*, atribuyen a los pitagóricos el estudio de los *números laterales y diagonales*, y Proclo añade que la regla que los genera se demostraba geoméricamente mediante la proposición II.10 de los *Elementos* (Heath, 1921; Knorr, 1975). La regla es sencilla: partiendo de un lado y una diagonal iguales a la unidad, el nuevo lado es la suma del lado y la diagonal anteriores, y la nueva diagonal es la suma del doble del lado y la diagonal anteriores.

Proposición 1.10 (Números laterales y diagonales). Sean $a_1 = d_1 = 1$ y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + d_n$ y $d_{n+1} = 2a_n + d_n$. Entonces:

$$(1) \quad d_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n \text{ para todo } n \geq 1;$$

(II) las fracciones d_n/a_n son alternadamente menores y mayores que $\sqrt{2}$;

(III) $\left| \frac{d_n}{a_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2a_n^2}$, y en consecuencia $d_n/a_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Demostración. (i) Para $n = 1$ se tiene $1 - 2 = -1$, y si la igualdad vale para n ,

$$d_{n+1}^2 - 2a_{n+1}^2 = (2a_n + d_n)^2 - 2(a_n + d_n)^2 = 2a_n^2 - d_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

(ii) Por (i), $(d_n/a_n)^2 - 2 = (-1)^n/a_n^2$, que es negativo para n impar y positivo para n par. (iii) Por inducción inmediata, $d_n \geq a_n$, de modo que $\frac{d_n}{a_n} + \sqrt{2} \geq 1 + \sqrt{2} > 2$ y

$$\left| \frac{d_n}{a_n} - \sqrt{2} \right| = \frac{|d_n^2 - 2a_n^2|}{a_n^2 \left(\frac{d_n}{a_n} + \sqrt{2} \right)} < \frac{1}{2a_n^2}.$$

Como $a_n \geq n$, la diferencia tiende a cero. ■

Los primeros cocientes son

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots$$

y en el octavo lugar reconocemos el valor de los *Śulbasūtras*. El tercero, $\frac{7}{5}$, aparece en Platón, quien en la *República* (546c), en el oscuro pasaje del «número nupcial», habla de la «diagonal racional de cinco», es decir, del número 7, cuyo cuadrado difiere en una unidad del doble de $5^2 = 25$; el adjetivo «racional» sugiere que Platón distinguía expresamente la diagonal racional aproximada, 7, de la diagonal verdadera, $\sqrt{50}$, que no lo es.

Proposición 1.11. Si se aplica a la fracción d_n/a_n el procedimiento de la media de la sección 1.1, $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$, se obtiene exactamente d_{2n}/a_{2n} .

Demostración. Por las recurrencias, el par (d_n, a_n) corresponde al número

$$d_n + a_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n,$$

como se comprueba por inducción observando que

$$(d_n + a_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = (d_n + 2a_n) + (d_n + a_n)\sqrt{2}.$$

En consecuencia, $(d_n + a_n\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^{2n}$, es decir, $d_{2n} = d_n^2 + 2a_n^2$ y $a_{2n} = 2a_nd_n$. Por otra parte,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d_n}{a_n} + \frac{2a_n}{d_n} \right) = \frac{d_n^2 + 2a_n^2}{2a_nd_n} = \frac{d_{2n}}{a_{2n}}. \quad \blacksquare$$

La proposición explica por qué el procedimiento babilónico y la regla de Baudhāyana desembocan en los mismos valores que la tradición pitagórica: el procedimiento de la media recorre la sucesión de los números laterales y diagonales duplicando el índice en cada paso, de $\frac{3}{2}$ a $\frac{17}{12}$ y de $\frac{17}{12}$ a $\frac{577}{408}$. La coincidencia entre tradiciones independientes muestra con elocuencia que la mejor aproximación y la prueba de imposibilidad son dos caras de una misma estructura: la ecuación $d^2 - 2a^2 = \pm 1$, que siglos después recibiría el nombre de ecuación de Pell y que los matemáticos indios estudiarían con extraordinaria profundidad, tiene infinitas soluciones enteras precisamente porque la ecuación $d^2 - 2a^2 = 0$ no tiene ninguna solución entera no nula.

1.8 El pentágono, Hipaso y la sección en extrema y media razón

1.8.1 La hipótesis de von Fritz y su crítica

Las fuentes antiguas asocian a Hipaso de Metaponto, un pitagórico del siglo V a. C. del que casi nada se sabe con certeza, con episodios de divulgación de saberes matemáticos. En un artículo que ha resultado muy influyente, Kurt von Fritz sostuvo en 1945 que Hipaso fue el descubridor de la inconmensurabilidad y que el objeto en que la descubrió no fue el cuadrado sino el pentágono regular y su estrella inscrita, el pentagrama, que según la tradición servía a los pitagóricos como signo de reconocimiento (von Fritz, 1945). La hipótesis es atractiva por razones matemáticas, porque en el pentágono la antifairesis de la diagonal y el lado se hace visible de manera casi inmediata, y por razones históricas, porque el interés pitagórico por el dodecaedro, cuyas caras son pentágonos, está bien atestiguado.

Las objeciones, sin embargo, son de peso. En primer lugar, la cronología: Knorr observa que, aunque autores muy tardíos atribuyen el descubrimiento a los pitagóricos de comienzos del siglo V, o incluso al propio Pitágoras, «la evidencia tomada de los presocráticos desaconseja una datación anterior a mediados del siglo V» (Knorr, 1983, p. 42; traducción propia). En segundo lugar, el testimonio: los autores del siglo IV, Platón y Aristóteles, que son los únicos cercanos a los hechos, toman siempre el lado y la diagonal del cuadrado como el paradigma de la inconmensurabilidad y nunca el pentágono. En tercer lugar, y decisivamente, la conexión misma entre Hipaso y la inconmensurabilidad carece de apoyo documental. Huffman lo formula sin ambigüedad: los estudiosos modernos han intentado combinar la historia de la divulgación del dodecaedro con la del descubrimiento de lo irracional, pero «esto es pura especulación, puesto que ninguna fuente antigua relaciona a Hipaso con el descubrimiento de lo irracional, ni ninguna fuente vincula el descubrimiento de lo irracional con el dodecaedro» (Huffman, 2024b, sección 3.4; traducción propia).

Mi propia valoración es que la hipótesis de von Fritz no puede descartarse, pero tampoco afirmarse, y que la presentación, muy frecuente en la divulgación y en los libros de texto, del pentagrama como «el lugar del descubrimiento» y de Hipaso como «su descubridor» convierte una conjetura ingeniosa en un hecho que las fuentes no autorizan. Lo que sí puede sostenerse con seguridad es que la estructura del pentágono ofrece la ilustración más elocuente de la antifairesis infinita, y por eso merece un examen detallado.

1.8.2 La geometría del pentágono

Lema 1.12. *En un pentágono regular de lado s y diagonal d se verifica*

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}, \quad \text{es decir,} \quad d^2 = s d + s^2.$$

Demostración. Cada ángulo interior del pentágono regular mide 108° . En el triángulo isósceles ABE , con $AB = AE = s$ y ángulo de 108° en A , los ángulos de la base miden 36° ; por la misma razón, en el triángulo ABC , $\angle BAC = 36^\circ$. Sea P la intersección de AC y BE (figura 1.9). En el triángulo APE se tiene $\angle PAE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ y $\angle AEP = 36^\circ$, luego $\angle APE = 72^\circ$, el triángulo es isósceles y $EP = EA = s$. El triángulo PAB tiene ángulos de 36° en A y en B y de 108° en P , de modo que es semejante al triángulo AEB , y la correspondencia $P \mapsto A$, $A \mapsto E$,

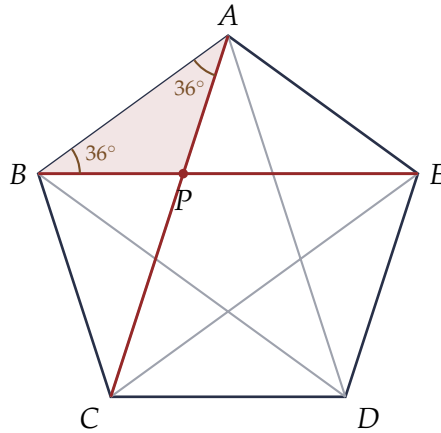


FIGURA 1.9. El pentágono regular $ABCDE$ con sus diagonales. Los ángulos señalados miden 36° , de modo que el triángulo ABP es isósceles; el triángulo APE también lo es, con $EP = EA$.

Fuente: Elaboración propia.

$B \mapsto B$ da $PB/AB = AB/EB$, es decir, $PB = s^2/d$. Finalmente, $d = BE = BP + PE = s^2/d + s$, y multiplicando por d se obtiene la igualdad del enunciado. ■

El lema dice que la diagonal está dividida por otra diagonal en *extrema y media razón*, según la expresión que empleará Euclides en la definición 3 del Libro VI: el segmento total $BE = d$ es a la parte mayor $PE = s$ como la parte mayor es a la menor $PB = d - s$. La consecuencia para la antifairesis es inmediata. Al restar el lado de la diagonal queda $d - s < s$, y el par $(s, d - s)$ guarda la misma razón que el par (d, s) : la sustracción recíproca reproduce en cada paso la razón inicial, con todos los cocientes iguales a 1. Geométricamente, el pentágono que forman las diagonales en el interior de la estrella es un nuevo pentágono regular, invertido y semejante al primero en la razón $1/\varphi^2$, en el que puede trazarse otra estrella, y así indefinidamente (figura 1.10).

Teorema 1.13. El número $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular, es irracional. En consecuencia, la diagonal y el lado del pentágono regular son incommensurables.

Demostración. Por el lema, $\varphi = d/s$ satisface $\varphi^2 = \varphi + 1$, es decir, $\varphi = 1 + 1/\varphi$, y como $\varphi > 0$ se obtiene el valor del enunciado. Como $1 < \varphi < 2$, supongamos que $\varphi = p/q$ con p, q enteros positivos y q mínimo. Entonces $1/\varphi = \varphi - 1 = (p - q)/q$, de donde $\varphi = q/(p - q)$, y como $q < p < 2q$ el nuevo denominador cumple $0 < p - q < q$, en contradicción con la minimalidad de q . ■

Si en lugar de razonar por descenso se recorre la antifairesis hacia arriba, como hicimos con los números laterales y diagonales, se obtiene la sucesión de aproximaciones $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$, cuyos términos son cocientes de números consecutivos de la sucesión que Leonardo de Pisa haría célebre en 1202; la identidad $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = \pm 1$, análoga a la de la proposición 1.10, muestra que se acercan a φ sin alcanzarlo nunca. Como todos los cocientes de su antifairesis son iguales a 1, el menor valor posible, φ es, en un sentido que el capítulo 3 precisará, el

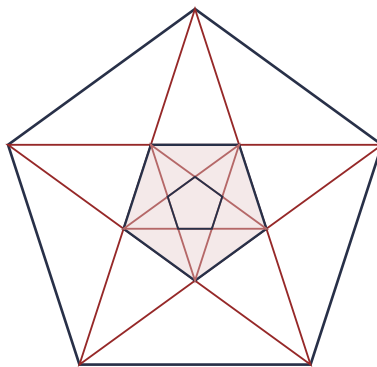


FIGURA 1.10. La antifairesis del pentágono. Las diagonales del pentágono exterior forman una estrella cuyo interior es un nuevo pentágono regular, invertido y semejante al primero en la razón $1/\varphi^2$; en él puede trazarse otra estrella, y así indefinidamente, de modo que la sucesión de restos de la sustracción recíproca no se agota nunca.

Fuente: Elaboración propia.

número que peor se deja aproximar por fracciones: la figura en que tradicionalmente se sitúa el descubrimiento es también la que encierra el irracional «más irracional».

NOTA HISTÓRICA: EL NÚMERO DE ORO Y SUS LEYENDAS

El nombre de «número de oro» o «divina proporción» y el símbolo φ son muy posteriores a la Antigüedad: la expresión *divina proportione* procede del tratado de Luca Pacioli de 1509, y el símbolo se introdujo a comienzos del siglo XX. Conviene advertir que buena parte de las afirmaciones que circulan sobre la presencia de esta razón en la pirámide de Keops, en el Partenón, en la *Gioconda*, en el cuerpo humano o en las sonatas de Mozart carece de sustento documental y descansa en mediciones seleccionadas a conveniencia, como mostró con detalle Markowsky (1992) para los casos arquitectónicos y pictóricos y, para el de la música, Livio (2002). Lo que sí es históricamente firme es su papel en la geometría griega: la división en extrema y media razón aparece en los Libros II, VI y XIII de los *Elementos* y es indispensable para construir el pentágono, el icosaedro y el dodecaedro regulares.

EN EL AULA: EL NÚMERO DE ORO COMO PUERTA DE ENTRADA

El trabajo de graduación de 2012 recomendaba empezar el estudio de los irracionales en secundaria por el número de oro, porque aparece en situaciones cercanas al estudiante, como el arte, la arquitectura, la naturaleza o la música (Chinchilla et al., 2012). La recomendación sigue pareciéndome buena, pero con una condición que entonces no formulamos: hay que separar lo que está demostrado de lo que se repite sin fundamento. Lo demostrado es mucho y es muy atractivo. Con regla y compás se construye un rectángulo cuyos lados están en la razón φ (figura 1.11): se parte de un cuadrado de lado 2, se toma el punto medio M de un lado y, con centro en M y radio $MC = \sqrt{5}$, se lleva el arco hasta la prolongación de ese lado, que queda de longitud $1 + \sqrt{5}$. Si a ese rectángulo se le quita el cuadrado construido sobre su lado menor, queda otro rectángulo semejante al primero, y así indefinidamente, que es

la antifairesis del pentágono vista desde otro ángulo; los arcos de cuarto de circunferencia trazados en los cuadrados sucesivos dan la conocida espiral, que se parece mucho a una espiral logarítmica aunque no lo es exactamente. En la naturaleza hay además un caso bien estudiado: la disposición de las semillas en el girasol o de las escamas en la piña, cuyas espirales se cuentan con números consecutivos de Fibonacci, tiene una explicación física que relaciona el crecimiento de la planta con el ángulo áureo (Douady y Couder, 1992). Lo que no está demostrado son las afirmaciones sobre el Partenón, la *Gioconda*, el cuerpo humano, la música de Mozart o la pirámide de Keops, que suelen apoyarse en rectángulos dibujados a conveniencia sobre una fotografía, como el de la figura 1.12; Markowsky (1992) y Livio (2002) muestran con detalle que las medidas no las sostienen. En lugar de esconder esas afirmaciones, propongo usarlas: pedir a los estudiantes que midan en su propio cuerpo las razones que se les atribuyen, que calculen el promedio y la dispersión del grupo y que decidan si el resultado es 1,618 o, más bien, un valor que cambia bastante de una persona a otra y según dónde se tome cada medida. La actividad enseña a la vez qué es una razón, qué es una aproximación y qué significa comprobar una afirmación, y deja al número de oro en el lugar que le corresponde, que es suficientemente interesante sin necesidad de leyendas.

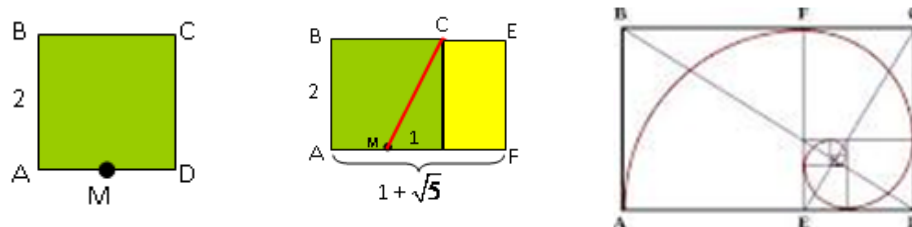


FIGURA 1.11. Construcción del rectángulo áureo a partir de un cuadrado de lado 2 y del punto medio M de su base, y espiral formada por arcos de cuarto de circunferencia en la sucesión de cuadrados que se obtiene al aplicar la antifairesis al rectángulo.

Fuente: Elaboración propia.

1.9 Teodoro de Cirene y el enigma del diecisiete

1.9.1 El testimonio del *Teeteto*

El pasaje del *Teeteto* que conocemos como la «lección de Teodoro» es el testimonio más valioso que poseemos sobre la investigación de los irracionales en la generación posterior al descubrimiento. El diálogo, compuesto por Platón hacia 369 a. C., poco después de la muerte de Teeteto, finge una conversación de 399 a. C. en la que el joven Teeteto relata a Sócrates una lección de su maestro, el geómetra Teodoro de Cirene (Platón, 1988).



FIGURA 1.12. Uno de los muchos rectángulos «áureos» que circulan dibujados sobre fotografías del Partenón. La posición de los rectángulos es arbitraria, y las medidas del edificio no confirman la razón φ (Markowsky, 1992).

Fuente: Tomada de internet.

PLATÓN, *Teeteto* 147D–148B (TRADUCCIÓN PROPIA)

Teodoro nos trazaba figuras acerca de las potencias, mostrándonos que la de tres pies y la de cinco no son conmensurables en longitud con la de un pie, y así, tomándolas una por una, llegó hasta la de diecisiete pies; allí, no sé por qué, se detuvo. Se nos ocurrió entonces, puesto que las potencias parecían ser infinitas en número, intentar reunir las bajo un solo nombre con el que pudiéramos designarlas a todas. [...] Dividimos todos los números en dos clases: al que puede resultar de multiplicar un número igual por otro igual lo comparamos con la figura del cuadrado y lo llamamos cuadrado y equilátero; [...] al que no puede, lo llamamos oblongo. Las líneas que forman como cuadrado el número equilátero las definimos como longitud, y las que forman el oblongo, como potencias, porque no son conmensurables con aquellas en longitud, pero sí en las superficies que pueden formar.

El texto contiene tres informaciones distintas que conviene separar. La primera es que Teodoro demostraba la inconmensurabilidad *caso por caso*, lo que indica que no disponía de un argumento general. La segunda es que comenzaba por 3, lo que sugiere que el caso de 2 se consideraba ya conocido, y que se detuvo en 17, por una razón que Teeteto dice no conocer; la expresión griega, «hasta la de diecisiete pies», no precisa si ese último caso quedó incluido o si la demostración se detuvo justo antes de él, y la ambigüedad ha alimentado la discusión. La tercera es que Teeteto y su compañero, el joven Sócrates, formularon la distinción general entre números cuadrados y oblongos y el teorema correspondiente, que Euclides conservará como proposición X.9.

1.9.2 Tres explicaciones de la detención

¿Por qué se detuvo Teodoro en diecisiete? El problema ha fascinado a los historiadores desde el siglo XIX y ha dado lugar a reconstrucciones de naturaleza muy distinta, que es instructivo comparar porque cada una presupone una idea diferente de cómo razonaban los geómetras griegos.

La espiral. La primera explicación, puramente geométrica, observa que la espiral formada por triángulos rectángulos sucesivos de cateto unitario (figura 1.13) completa casi una vuelta al llegar a $\sqrt{17}$ y se superpondría a sí misma con el triángulo siguiente. Es una conjetura ingeniosa y muy difundida en los libros de texto, pero no tiene ningún apoyo textual, supone una construcción que ninguna fuente menciona y no explica por qué la superposición habría de impedir una demostración.

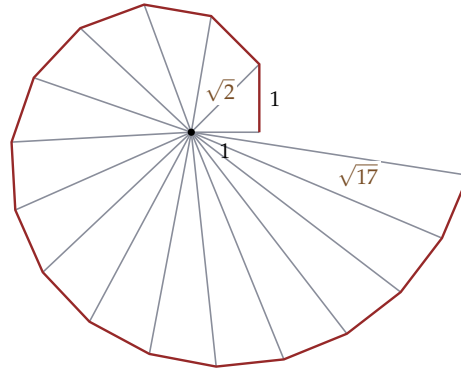


FIGURA 1.13. La llamada espiral de Teodoro: cada triángulo rectángulo tiene un cateto de longitud 1 y el otro igual a la hipotenusa del anterior, de modo que las hipotenusas miden $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{17}$. Si se dibuja un triángulo más, la figura se superpone a sí misma.

Fuente: Elaboración propia.

La antifairesis. La segunda explicación, defendida por Zeuthen a comienzos del siglo XX y retomada por Fowler (1999), supone que Teodoro demostraba la inconmensurabilidad mediante la sustracción recíproca, mostrando en cada caso, como hicimos para el cuadrado y el pentágono, que la sucesión de cocientes se vuelve periódica y, por tanto, no termina. La tabla 1.1 recoge los desarrollos correspondientes, que he calculado para todos los valores no cuadrados de n entre 2 y 17.

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
2	$[1; \overline{2}]$	7	$[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$	12	$[3; \overline{2, 6}]$
3	$[1; \overline{1, 2}]$	8	$[2; \overline{1, 4}]$	13	$[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$
5	$[2; \overline{4}]$	10	$[3; \overline{6}]$	14	$[3; \overline{1, 2, 1, 6}]$
6	$[2; \overline{2, 4}]$	11	$[3; \overline{3, 6}]$	15	$[3; \overline{1, 6}]$
		17	$[4; \overline{8}]$		

TABLA 1.1. Desarrollos antifairéticos (fracciones continuas) de $\sqrt{n}$ para los valores no cuadrados de n entre 2 y 17; la barra indica el período. Los períodos más largos corresponden a 7 y 13, no a 17.

Fuente: Elaboración propia.

La tabla muestra, sin embargo, una dificultad seria para esta reconstrucción: el caso de 17 no es en absoluto más difícil que los anteriores, pues su período tiene longitud uno, igual que los de 2, 5 y 10, mientras que los casos laboriosos serían 7 y 13. Si Teodoro hubiera procedido por

antifairesis, no se ve por qué habría de detenerse precisamente en diecisiete, y sí se ve por qué podría haberse detenido antes.

La paridad. La tercera explicación, propuesta por Knorr (1975), supone que Teodoro razonaba con argumentos de paridad, del mismo tipo que la primera demostración de la sección 1.6, la que conocía Aristóteles, y que esos argumentos, que funcionan con facilidad para $3, 5, 6, \dots, 15$, fracasan exactamente en 17. Podemos formular la idea con precisión.

Teorema 1.14 (El método de paridad y su límite). *Sea n un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, y supongamos que $x^2 = ny^2$ con x, y enteros positivos primos entre sí.*

- (I) *Si $n = 2m$ con m impar, se llega a una contradicción considerando solo la paridad de x e y .*
- (II) *Si n es impar, entonces x e y son ambos impares, y la contradicción se obtiene con el lema 1.2 siempre que $n \not\equiv 1 \pmod{8}$.*
- (III) *Si $n \equiv 1 \pmod{8}$, ningún argumento basado exclusivamente en la divisibilidad por potencias de 2 conduce a una contradicción.*

Entre 2 y 17, el único valor no cuadrado con $n \equiv 1 \pmod{8}$ es precisamente $n = 17$.

Demostración. (i) Si $n = 2m$ con m impar, entonces x^2 es par y $x = 2x'$; sustituyendo, $2x'^2 = my^2$, de modo que my^2 es par y, siendo m impar, y es par, en contra de que x e y sean primos entre sí. Los casos $n = 8$ y $n = 12$ se reducen a $n = 2$ y $n = 3$ observando que x ha de ser par y extrayendo el factor 4.

(ii) Si n es impar e y fuera par, $x^2 = ny^2$ sería par y x también, lo cual es imposible; luego y es impar, y entonces $x^2 = ny^2$ es impar y x es impar. Por el lema 1.2, $x^2 \equiv 1$ e $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$, y la igualdad $x^2 = ny^2$ exige $n \equiv 1 \pmod{8}$. Para $n = 3, 5, 7, 11, 13, 15$, que son congruentes con 3, 5 o 7 módulo 8, esto es falso, y se obtiene la contradicción.

(iii) Si $n \equiv 1 \pmod{8}$, la paridad solo informa de que x e y son impares, y el lema 1.2 de que $x^2 \equiv ny^2 \equiv 1 \pmod{8}$, lo cual es consistente. Más aún, un resultado clásico de la teoría de números establece que todo impar congruente con 1 módulo 8 es un cuadrado módulo cualquier potencia de 2; por tanto, para cada k existen impares x, y con $x^2 \equiv ny^2 \pmod{2^k}$, y ningún refinamiento de la aritmética de pares e impares puede producir la contradicción. Hace falta un argumento de otra naturaleza, como el descenso del teorema 1.15 o la consideración de un primo impar: por ejemplo, módulo 17 la igualdad $x^2 = 17y^2$ obliga a que 17 divida a x , y entonces 17 divide a y . ■

La reconstrucción de Knorr tiene, a mi juicio, tres méritos que la hacen preferible a las otras. Explica a la vez el método y su límite, puesto que el límite resulta ser una propiedad aritmética del número diecisiete y no una circunstancia accidental del dibujo. Es coherente con el testimonio de Aristóteles, que presenta la prueba de la diagonal como un argumento sobre pares e impares, y con lo que sabemos de la aritmética pitagórica de los números figurados, en la que el lema 1.2 se expresa de manera natural. Y da sentido al pasaje de Platón, que presenta a Teeteto emprendiendo la búsqueda de un argumento general precisamente cuando el método de su maestro se agota. No es, desde luego, una certeza, y el problema seguirá abierto mientras no aparezcan nuevas fuentes; pero me parece la mejor hipótesis disponible, y tiene además la virtud

didáctica de mostrar que el límite de un método de demostración puede ser tan instructivo como el propio método.

1.10 Teeteto y la teoría general

1.10.1 El teorema de Teeteto

El programa de Teeteto se cumplió. La proposición X.9 de los *Elementos*, que un escolio antiguo le atribuye, establece que los cuadrados construidos sobre segmentos conmensurables en longitud guardan entre sí la razón de un número cuadrado a otro, y recíprocamente (Euclides, 1991–1996; Heath, 1956). La demostración euclidiana se apoya en la teoría de los números del Libro VIII; presentamos en su lugar una prueba por descenso que generaliza la tercera demostración de la sección 1.6 y que no requiere la factorización en primos, lo cual la acerca, al menos en espíritu, a los recursos de la época.

Teorema 1.15 (Teeteto). *Si el entero positivo n no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.*

Demostración. Sea k el entero con $k^2 < n < (k+1)^2$, de modo que $k < \sqrt{n} < k+1$. Supongamos que $\sqrt{n} = p/q$ con p, q enteros positivos y q mínimo, y definamos $q' = p - kq$ y $p' = nq - kp$, que son enteros. Se tiene $q' = q(\sqrt{n} - k)$, luego $0 < q' < q$, y

$$\sqrt{n} q' = \sqrt{n} p - k\sqrt{n} q = nq - kp = p',$$

donde hemos usado $\sqrt{n} p = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} q = nq$ y $\sqrt{n} q = p$. Así $\sqrt{n} = p'/q'$ con $0 < q' < q$, en contra de la minimalidad de q . ■

Corolario 1.16 (*Elementos* X.9, forma moderna). *Dos segmentos de longitudes $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, con a, b enteros positivos, son conmensurables en longitud si y solo si ab es un cuadrado perfecto; es decir, si y solo si sus cuadrados están en la razón de un número cuadrado a un número cuadrado.*

Demostración. El cociente $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{ab}/b$ es racional si y solo si lo es $\sqrt{ab}$, lo que por el teorema ocurre exactamente cuando ab es un cuadrado perfecto. Y $ab = c^2$ equivale a $a/b = c^2/b^2$. ■

1.10.2 Una generalización moderna

El teorema de Teeteto admite una generalización que los griegos no formularon, pero que muestra hasta qué punto la irracionalidad es la regla y no la excepción entre las raíces de números enteros. Su fundamento es un criterio que Descartes enunció en el libro III de *La Géométrie* y que hoy se enseña en los cursos de álgebra elemental.

Proposición 1.17 (Criterio de las raíces racionales). *Si la fracción irreducible p/q , con $q > 0$, es raíz del polinomio $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$ de coeficientes enteros, entonces p divide a a_0 y q divide a a_m .*

Demostración. Multiplicando la igualdad $a_m(p/q)^m + \dots + a_0 = 0$ por q^m se obtiene

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} q + \dots + a_1 p q^{m-1} + a_0 q^m = 0.$$

Todos los términos salvo el último son múltiplos de p , luego p divide a $a_0 q^m$; como p y q son primos entre sí, p divide a a_0 . Del mismo modo, todos los términos salvo el primero son múltiplos de q , luego q divide a $a_m p^m$ y, por tanto, a a_m . ■

Corolario 1.18. Sean $k \geq 2$ y $N \geq 1$ enteros. El número $\sqrt[k]{N}$ es racional si y solo si N es la potencia k -ésima de un entero. En particular, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[5]{7}$ son irracionales.

Demostración. $\sqrt[k]{N}$ es raíz de $x^k - N$, cuyo coeficiente principal es 1. Si $\sqrt[k]{N} = p/q$ irreducible, la proposición 1.17 da $q \mid 1$, es decir, $q = 1$, y $\sqrt[k]{N} = p$ es entero, con $N = p^k$. ■

El corolario tiene un interés que va más allá de su simplicidad: el número $\sqrt[3]{2}$ es la arista de un cubo de volumen doble que el del cubo unidad, y su irracionalidad es el primer paso hacia la imposibilidad de duplicar el cubo con regla y compás, uno de los tres problemas clásicos que los contemporáneos de Teodoro y Teeteto estaban estudiando en esos mismos años y cuya solución definitiva, como veremos en el capítulo 3, solo llegaría en 1837.

1.10.3 La herencia de Teeteto

La importancia de Teeteto no se agota en este resultado. El comentario de Papo de Alejandría al Libro X, escrito en el siglo IV de nuestra era y conservado solo en una traducción árabe, le atribuye la distinción entre las potencias conmensurables en longitud y las conmensurables solo en cuadrado, y además la clasificación de las rectas irracionales según las medias geométrica, aritmética y armónica, que constituye el núcleo del Libro X (Thomson y Junge, 1930). Knorr concluye que hacia el año 400 a. C. se habían reconocido diversas construcciones que dan lugar a rectas inconmensurables, gracias a los trabajos de Teodoro de Cirene y de Arquitas de Tarento, y que el resultado general que las incorporaba era conocido, y quizá enunciado por primera vez, por Teeteto de Atenas a comienzos del siglo IV (Knorr, 1983, pp. 42–43). Con Teeteto, la inconmensurabilidad deja de ser una curiosidad asociada a unas pocas figuras y se convierte en el objeto de una teoría, y la matemática griega adquiere la conciencia de que los irracionales no son accidentes aislados sino una familia infinita y estructurada de magnitudes.

1.11 Las leyendas: el secreto, el naufragio y el castigo

Ninguna exposición de este tema puede ignorar las leyendas que lo rodean, aunque conviene examinarlas como lo que son: testimonios tardíos cuyo valor histórico reside más en lo que revelan sobre quienes las transmitieron que en lo que dicen sobre los hechos. La más difundida procede de Jámblico, filósofo neoplatónico del siglo IV de nuestra era, quien relata en su *Vida pitagórica* dos versiones distintas. En una, Hipaso pereció en el mar por haber divulgado la construcción del dodecaedro inscrito en la esfera; Huffman la describe como «el aspecto más romántico de la tradición relativa a Hipaso», según el cual este «se ahogó en el mar como castigo por la impiedad de hacer público y dar un diagrama del dodecaedro, una figura con doce caras, cada una con forma de pentágono regular» (Huffman, 2024b, sección 3.4, citando *Vida pitagórica* 88; traducción propia). En otra, que no nombra a Hipaso, quien reveló la naturaleza de lo conmensurable y lo inconmensurable a quienes no eran dignos de ella fue objeto de tal aversión que los pitagóricos le erigieron una tumba como si hubiera muerto (Jámblico, 2003).

El comentario de Papo al Libro X ofrece todavía una tercera versión, alegórica: quien divulgó la existencia de lo irracional pereció en un naufragio, y la historia significaría que el alma que revela lo que carece de forma y de razón queda a la deriva en el mar de lo desemejante (Thomson y Junge, 1930).

Burkert mostró que estas narraciones pertenecen a un género, el de la sabiduría secreta y su profanación, que la literatura neopitagórica cultivó con predilección, y que la tradición es incoherente incluso en lo esencial: unas versiones hablan del dodecaedro, otras de lo inconmensurable, otras de la divulgación de la matemática en general, y ninguna procede de una fuente cercana a los hechos (Burkert, 1972). Huffman añade un matiz interesante: la tradición sobre Hipaso sugiere que ya en el siglo V existía un debate dentro del pitagorismo sobre si Pitágoras había sido sobre todo el fundador de unas reglas de vida o también el maestro de una enseñanza matemática y científica (Huffman, 2024b, sección 3.4), de modo que la historia del castigo podría ser, en su origen, un eco de ese conflicto interno más que el recuerdo de un descubrimiento. La frase que se lee todavía en algunos libros de texto, según la cual los pitagóricos «ejecutaron» a Hipaso por haber descubierto los irracionales, carece de todo fundamento documental.

EN EL AULA: LA LEYENDA COMO OCASIÓN

La leyenda de Hipaso no debe simplemente descartarse en el aula, porque ofrece una ocasión privilegiada para mostrar a los estudiantes cómo trabaja un historiador y por qué no toda afirmación sobre el pasado tiene el mismo valor. Una actividad sencilla consiste en presentar las tres versiones (la de Jámblico sobre el dodecaedro, la de la tumba simbólica, que procede también de Jámblico, y la alegoría de Papo), pedir a los estudiantes que identifiquen qué tienen en común y en qué difieren, y preguntarles qué tipo de documento haría falta para decidir cuál es verdadera. Lo que no debe hacerse es presentar la leyenda como un hecho.

Los estudiantes suelen preferir la versión dramática, y es comprensible: una historia con un castigo se recuerda mejor que una discusión sobre fuentes. No se trata de quitarles el gusto por el relato, sino de ayudarles a disfrutarlo sabiendo qué es.

1.12 ¿Hubo realmente una crisis?

1.12.1 La tesis de la crisis y su crítica

En muchos manuales y, sobre todo, en la divulgación, el descubrimiento de la inconmensurabilidad aparece como un acontecimiento dramático que habría provocado la primera «crisis de fundamentos» de la matemática: la doctrina de que todo es número se habría derrumbado, las demostraciones basadas en proporciones habrían quedado invalidadas, y los matemáticos griegos, escandalizados, habrían abandonado la aritmética para refugiarse en la geometría. La expresión, sin embargo, no procede de las fuentes antiguas sino del debate sobre los fundamentos de comienzos del siglo XX, y fue aplicada retrospectivamente a la Antigüedad por Hasse y Scholz (1928) en un ensayo escrito, no por casualidad, en plena controversia entre formalistas e intuicionistas.

La historiografía de las últimas décadas ha sometido esa imagen a una crítica severa. Burkert mostró el carácter tardío de buena parte de lo que se atribuye a los primeros pitagóricos (Burkert, 1972), y Huffman, como hemos visto, que la fórmula «todo es número» es una síntesis de Aristóteles y no una cita pitagórica (Huffman, 2024b). Freudenthal (1966) se preguntó abiertamente si hubo alguna vez una crisis de fundamentos en la Antigüedad y respondió que los documentos no permiten afirmarlo. Knorr (1975) reconstruyó con minucioso detalle la evolución de la teoría de las magnitudes inconmensurables desde el siglo V hasta Euclides y concluyó que se trató de un desarrollo gradual, técnico y acumulativo. Fowler (1999), por su parte, propuso que la matemática de la Academia se organizaba en torno a la antifairesis y no en torno a la razón entre números, de modo que la inconmensurabilidad habría sido menos un escándalo que un fenómeno natural del algoritmo.

1.12.2 El testimonio de las *Leyes*

Hay, sin embargo, un texto que obliga a matizar la posición crítica, y que me parece insuficientemente aprovechado en la discusión. En el Libro VII de las *Leyes* (819d–820c), obra de la vejez de Platón, el Extranjero de Atenas se lamenta ante sus interlocutores de que la mayoría de los griegos ignora que ciertas longitudes, anchuras y profundidades no son conmensurables entre sí, y confiesa que cuando lo supo, ya tarde, quedó asombrado y le pareció que aquella ignorancia no era propia de hombres sino de una piara de cerdos, y que se avergonzó no solo por sí mismo sino por todos los griegos (Platón, 1999). El pasaje no describe una crisis entre los matemáticos, que para entonces disponían ya de la teoría de Teeteto y probablemente de la de Eudoxo; describe, en cambio, la distancia entre lo que sabían los especialistas y lo que creía el hombre culto, y la convicción platónica de que esa distancia era un defecto grave de la educación.

1.12.3 Una posición

Mi propia posición, que ofrezco con la cautela que imponen fuentes tan fragmentarias, es que conviene distinguir tres planos. En el plano técnico, la evidencia favorece claramente la lectura de Knorr y de Fowler: los geómetras asimilaron la inconmensurabilidad con notable rapidez y la convirtieron en objeto de una teoría refinada, sin que conozcamos ningún testimonio contemporáneo de desconcierto entre ellos. En el plano cultural, el pasaje de las *Leyes* muestra que el descubrimiento sí produjo una conmoción, aunque más tardía y más difusa de lo que sugiere la leyenda, en la medida en que obligaba a abandonar una intuición, la de que todo puede medirse, profundamente arraigada en el sentido común; y es significativo que Platón viera en esa conmoción un problema educativo. En el plano conceptual, en fin, me parece difícil negar que el descubrimiento obligó a revisar la relación entre número y magnitud, y que esa revisión se prolongó durante más de dos mil años, porque la solución griega consistió precisamente en mantener separados ambos dominios. Si hubo una crisis, no fue un derrumbe súbito sino una tensión persistente, y es esa tensión la que da unidad a la historia que se narra en los capítulos siguientes: el de Eudoxo, que la administró con extraordinaria sutileza sin resolverla; el de los algebristas indios, árabes y renacentistas, que la fueron disolviendo en la práctica del cálculo; y el de Dedekind y Cantor, que finalmente la resolvieron construyendo, a partir de los números racionales, un continuo numérico capaz de medir cualquier magnitud.

NOTA HISTÓRICA: LO QUE LAS FUENTES PERMITEN AFIRMAR

Con un grado razonable de certeza puede sostenerse que hacia el final del siglo V a. C. se conocía una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado; que Teodoro de Cirene demostró la irracionalidad de $\sqrt{n}$ para los valores no cuadrados de n desde 3 hasta 15 o 17, según se lea el pasaje del *Teeteto*; que Teeteto elaboró una teoría general cuyos resultados se conservan en el Libro X de los *Elementos*; y que en la vejez de Platón la inconmensurabilidad se consideraba un conocimiento que todo hombre educado debía poseer. La atribución del descubrimiento a Hipaso, la elección del pentágono como figura originaria, la existencia de una prohibición de divulgarlo y la fórmula «todo es número» como cita de Pitágoras pertenecen, en cambio, al terreno de la conjetura, de la síntesis posterior o de la leyenda (Burkert, 1972; Fowler, 1999; Huffman, 2024b; Knorr, 1975, 1983).

1.13 Por qué esta historia importa en la enseñanza

1.13.1 La historia de la matemática como recurso: el estado de la cuestión

La idea de que la historia de la matemática puede enriquecer su enseñanza no es nueva, pero en las últimas dos décadas ha pasado de ser una convicción de algunos entusiastas a constituir un campo de investigación con marcos teóricos, estudios empíricos y una comunidad internacional consolidada. Chorlay, Clark y Tzanakis, en una revisión reciente del campo publicada en *ZDM*, recogen la formulación con que el estudio internacional promovido por el ICMI caracterizó el aporte de la historia: aprender matemáticas «no es solo el proceso por el cual el aprendiz se familiariza y se vuelve competente en el manejo de los símbolos y la sintaxis lógica de las teorías y en la acumulación de nuevos resultados presentados como productos acabados. Abarca también el conocimiento de las motivaciones implícitas, las acciones de construcción de sentido y los procesos reflexivos de los matemáticos que apuntan a la construcción de significado» (Chorlay et al., 2022, sección 2, citando a Fauvel y van Maanen, 2000; traducción propia).

Jankvist propuso una clasificación que se ha vuelto de uso común para ordenar la discusión: los argumentos en favor de la historia pueden entenderla como una *herramienta* para aprender matemáticas o como un *objetivo* en sí mismo, el de aprender algo sobre la matemática como actividad humana; y las maneras de incorporarla pueden ser la *iluminación* mediante notas y episodios, los *módulos* dedicados a un tema histórico, o los enfoques *basados en la historia*, en los que el desarrollo histórico orienta la secuencia de enseñanza (Jankvist, 2009). Kjeldsen y Blomhøj fueron más allá de la motivación y sostuvieron que la historia ofrece una estrategia privilegiada para hacer visibles las reglas metadiscursivas de la matemática, es decir, las normas implícitas sobre qué cuenta como definición, como demostración o como objeto legítimo, y para convertirlas en objeto de reflexión explícita de los estudiantes (Kjeldsen y Blomhøj, 2012). En el ámbito hispanoamericano, Anacona subraya que los estudios históricos sobre el desarrollo de un concepto evidencian «elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica», que no solo permiten una mejor comprensión del concepto sino que revelan aspectos de la actividad matemática que «merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas educativas» (Anacona, 2003, resumen). En Costa Rica, los programas de estudio de matemáticas

vigentes desde 2012 incorporan el uso de la historia de las matemáticas como uno de sus ejes de desarrollo curricular (Ministerio de Educación Pública, 2012), lo que convierte la cuestión en un asunto de la práctica docente cotidiana.

Ninguno de estos autores ignora las dificultades. Chorlay, Clark y Tzanakis insisten en que «para que cualquier integración de la historia y la epistemología en la educación matemática sea siquiera posible, se presupone necesariamente una formación adecuada del profesorado, inicial y continua, en este ámbito» (Chorlay et al., 2022, sección 3.2; traducción propia), y ese es precisamente el propósito de un libro como este.

1.13.2 Lo que muestra la investigación sobre los irracionales

El caso de los números irracionales es particularmente elocuente, porque la investigación ha documentado con notable consistencia que su comprensión es frágil no solo entre los estudiantes sino también entre quienes han de enseñarlos. El estudio pionero de Arcavi, Bruckheimer y Ben-Zvi, realizado con profesores de secundaria en servicio, encontró que alrededor del 55 % de ellos creía que las fracciones decimales habían precedido históricamente a los irracionales, y que la mayoría concebía el concepto como dependiente de los decimales y desvinculado de la geometría; a partir de ese diagnóstico diseñaron un curso de historia de los irracionales que comenzaba, precisamente, con los pitagóricos y la inconmensurabilidad (Arcavi et al., 1987). Fischbein, Jehiam y Cohen, con estudiantes de secundaria y futuros profesores, partieron de la hipótesis de que el irracional choca con intuiciones primarias y la vieron refutada; en la síntesis de Voskoglou y Kosyvas, encontraron que «la matemática escolar no se ocupa en general de enseñar sistemáticamente la estructura jerárquica de las distintas clases de números» y que, «contrariamente a su hipótesis inicial, el concepto de número irracional no encuentra en general una dificultad intuitiva particular en la mente de los estudiantes» (Fischbein et al., 1995; Voskoglou y Kosyvas, 2012, pp. 303–304; traducción propia). La dificultad, en otras palabras, no sería intuitiva sino curricular.

Los trabajos posteriores han precisado dónde reside esa dificultad. Sirotic y Zazkis constataron, con futuros docentes, que la mayoría podía recitar la definición de número irracional pero tenía serias dificultades para decidir si un número dado lo era sin disponer de su expansión decimal, o para ubicar números como $\sqrt{5}$ sobre la recta numérica (Sirotic y Zazkis, 2007a,b). Rizos y Adam, con estudiantes de primer año de la carrera de matemática, encontraron que «el criterio fundamental con el que los estudiantes universitarios griegos distinguen los números racionales de los irracionales es la cantidad de cifras decimales y la existencia de algún patrón, si lo hay» (Rizos y Adam, 2022, p. 12; traducción propia). Voskoglou y Kosyvas documentaron que «los errores más frecuentes fueron la identificación del símbolo de fracción con los números racionales y del símbolo de raíz con los irracionales» (Voskoglou y Kosyvas, 2012, p. 307; traducción propia). Crespo observó en estudiantes del profesorado concepciones propias del infinito potencial aristotélico (Crespo, 2009); y Reina, Wilhelmi y Lasa, al analizar textos de secundaria a la luz de la evolución histórica del concepto, encontraron «una introducción reduccionista basada en la aproximación» (Reina et al., 2012, p. 90).

Me parece significativo que el denominador común de todas estas dificultades sea la identificación de la irracionalidad con una propiedad de la escritura decimal, y que la historia narrada en este capítulo ofrezca exactamente el contrapeso que falta. Para los griegos, la irracionalidad

no era una propiedad de ninguna escritura, sino una relación entre magnitudes: la imposibilidad de encontrar una medida común. Esa concepción, que precede en dos mil años a las fracciones decimales, tiene sobre la definición decimal tres ventajas didácticas decisivas: es comprensible sin recurrir al infinito actual, se apoya en una figura que el estudiante puede construir y manipular, y admite demostraciones completas al alcance de un estudiante de secundaria.

1.13.3 Una propuesta de secuencia

A partir de lo anterior, y sin pretender prescribir una única manera de enseñar, propongo una secuencia de cuatro momentos para introducir los irracionales en el tercer ciclo o en la formación inicial de docentes, cada uno de los cuales se apoya en una sección de este capítulo.

Momento	Actividad central	Secciones
1. El problema	Duplicar el cuadrado con papel cuadriculado, siguiendo el <i>Menón</i> ; conjeturar la medida de la diagonal.	1.5
2. La aproximación	Mejorar la medida con el procedimiento babilónico o la disección de Baudhāyana; observar que siempre queda un «hueco».	1.1, 1.2, 1.7
3. La imposibilidad	Comparar dos demostraciones (paridad y Tennenbaum); discutir qué se ha probado y qué no.	1.6
4. La generalización	Explorar $\sqrt{3}, \dots, \sqrt{17}$ con la espiral y la paridad; descubrir el límite del método; enunciar el teorema de Teeteto.	1.9, 1.10

TABLA 1.2. Una secuencia de cuatro momentos para introducir la inconmensurabilidad a partir de la historia.

Fuente: Elaboración propia.

La secuencia tiene la virtud de invertir el orden habitual de los libros de texto, que comienzan por la definición decimal y terminan, si acaso, con una nota histórica: aquí la historia no es un adorno final sino el esqueleto de la enseñanza, en el sentido de los enfoques «basados en la historia» de Jankvist, y la caracterización decimal, que el capítulo 3 demostrará rigurosamente, llega al final como una consecuencia y no al principio como una definición.

Síntesis del capítulo

IDEAS PRINCIPALES

1. Las tradiciones mesopotámica e india obtuvieron aproximaciones excelentes de $\sqrt{2}$ mediante procedimientos geométricos de completar cuadrados, sin plantearse la existencia de un valor exacto.

2. Para los griegos, el número era una pluralidad de unidades; la inconmensurabilidad es la inexistencia de una medida común entre dos magnitudes, y equivale a la no terminación de la sustracción recíproca.
3. La inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado admite demostraciones por paridad, por factorización y por descenso; estas últimas revelan su vínculo con la autosemejanza de la figura y con la aproximación.
4. El pentágono ofrece la ilustración más elocuente de la antifairesis infinita, pero su papel en el descubrimiento es conjetural.
5. La reconstrucción de Knorr explica la detención de Teodoro en 17 por el límite de los argumentos de paridad; Teeteto dio la teoría general.
6. Las leyendas sobre Hipaso son tardías e incoherentes, y la noción de «crisis de fundamentos» es una proyección del siglo XX; lo que el descubrimiento inauguró fue una tensión duradera entre número y magnitud.
7. La investigación didáctica muestra que las dificultades con los irracionales proceden de identificarlos con su escritura decimal; la concepción griega ofrece un punto de partida alternativo y fecundo.

Ejercicios

Ejercicios matemáticos

Ejercicio 1.1. Realice la antifairesis de los segmentos de longitudes 1 y $\sqrt{3}$, justificando cada paso con una figura, y demuestre que la sucesión de cocientes es $[1; 1, 2, 1, 2, \dots]$. Deduzca que ambos segmentos son inconmensurables.

Ejercicio 1.2. Aplique el teorema 1.14 para demostrar, solo con argumentos de paridad y el lema 1.2, que $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{15}$ son irracionales. Encuentre después enteros impares x, y , distintos de ± 1 , con $x^2 \equiv 17y^2 \pmod{64}$.

Ejercicio 1.3. Demuestre la irracionalidad de $\sqrt{17}$ mediante el descenso del teorema 1.15, calculando explícitamente los enteros p' y q' en función de p y q .

Ejercicio 1.4. Calcule los diez primeros números laterales y diagonales y verifique numéricamente la proposición 1.11. ¿Cuántas aplicaciones del procedimiento de la media, a partir de $\frac{3}{2}$, se necesitan para obtener $\sqrt{2}$ con veinte cifras decimales correctas?

Ejercicio 1.5. Verifique la reconstrucción de Datta calculando el área exacta del cuadrado de lado $\frac{577}{408}$. ¿Es la regla de Baudhāyana una aproximación por exceso o por defecto?

Ejercicio 1.6. Demuestre que los números de Fibonacci satisfacen $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ y deduzca que $F_{n+1}/F_n \rightarrow \varphi$.

Ejercicio 1.7. Adapte la demostración de Tennenbaum para probar que $\sqrt{3}$ es irracional, reemplazando los cuadrados por triángulos equiláteros. *Sugerencia:* tres triángulos equiláteros de lado q en las esquinas de uno de lado p con $p^2 = 3q^2$.

Ejercicio 1.8. Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional, primero directamente y después observando que es raíz del polinomio $x^4 - 10x^2 + 1$ y aplicando la proposición 1.17.

Ejercicios históricos y didácticos

Ejercicio 1.9. Lea el pasaje del *Teeteto* (147d–148b) y redacte una breve argumentación, de una página, en la que compare las tres explicaciones de la detención de Teodoro y justifique cuál le parece más convincente.

Ejercicio 1.10. Busque en dos libros de texto de secundaria la presentación de los números irracionales y analícela con los criterios de la sección 1.13: ¿se define la irracionalidad por la escritura decimal o por la medida? ¿Se incluye alguna demostración? ¿Cómo se presenta la historia?

Ejercicio 1.11. Diseñe, a partir de la tabla 1.2, una sesión de noventa minutos para el primer momento de la secuencia, especificando la consigna, los materiales, las preguntas que formulará el docente y las respuestas previsibles de los estudiantes.

Ejercicio 1.12. Clasifique las actividades propuestas en los recuadros *En el aula* de este capítulo según las categorías de Jankvist (iluminación, módulo, enfoque basado en la historia) y según si la historia funciona en ellas como herramienta o como objetivo.

Lecturas recomendadas

Knorr (1975)

La reconstrucción más completa de la historia de los inconmensurables desde el siglo V hasta Euclides; es el origen de la hipótesis sobre Teodoro defendida en este capítulo. Su artículo de 1983 ofrece una síntesis más accesible.

Fowler (1999)

Una reconstrucción alternativa de la matemática de la Academia basada en la antifairesis; imprescindible para comprender el papel de la sustracción recíproca.

Burkert (1972)

El estudio clásico sobre la tradición pitagórica, que separa críticamente lo antiguo de lo tardío.

Huffman (2024b)

Una síntesis actualizada, rigurosa y de acceso libre sobre el pitagorismo y el estado de las fuentes.

Fowler y Robson (1998)

El estudio de referencia sobre YBC 7289 y las aproximaciones paleobabilónicas de raíces cuadradas.

Heath (1921)

La historia clásica de la matemática griega; sigue siendo una fuente de consulta indispensable para los textos.

Chorlay et al. (2022)

Una revisión reciente del campo de la historia en la educación matemática, con abundante bibliografía.

Sirotic y Zazkis (2007a)

El estudio empírico más citado sobre la comprensión de los irracionales por parte de futuros docentes.

El tratamiento geométrico en la Antigüedad: Eudoxo y el Libro V

Se dice que unas magnitudes están en la misma razón, la primera respecto de la segunda y la tercera respecto de la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y de la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, los primeros equimúltiplos a la vez exceden, son iguales o son menores que los segundos, tomados en el orden correspondiente.

Euclides, Elementos, Libro V, definición 5

Si el descubrimiento de la inconmensurabilidad no provocó entre los geómetras griegos el derrumbe que la leyenda le atribuye, sí dejó planteado un problema técnico de enorme alcance, cuya solución constituye, a mi juicio, uno de los logros intelectuales más sutiles de toda la Antigüedad. Buena parte de la geometría del siglo V a. C. descansaba en la noción de proporción, y esa noción, tal como la habían heredado los matemáticos de tradición pitagórica, suponía que las magnitudes comparadas admitían una medida común; el teorema que hoy atribuimos a Tales, la semejanza de triángulos, la comparación de áreas y, en general, todo razonamiento que afirmara que « A es a B como C es a D » quedaba, en rigor, demostrado solo para el caso conmensurable. El capítulo anterior terminó con una constatación: la inconmensurabilidad inauguró una tensión duradera entre el número y la magnitud. Este capítulo examina cómo la matemática griega administró esa tensión sin resolverla del todo, y cómo, al hacerlo, produjo algunas de las ideas que veintidós siglos más tarde servirían para construir los números reales.

El protagonista de esta historia es Eudoxo de Cnido, un matemático del que no se conserva ni una sola línea y cuya obra, sin embargo, reconocemos con bastante seguridad en dos de los libros más admirados de los *Elementos* de Euclides: el Libro V, que contiene la teoría general de la proporción entre magnitudes, y el Libro XII, que aplica el llamado método de exhaustión a la medida de figuras curvilíneas. Seguiremos sus ideas desde su antecedente inmediato, una teoría de la proporción basada en la sustracción recíproca de la que solo conservamos huellas, hasta su culminación en la obra de Arquímedes, y nos detendremos en el Libro X, la gran clasificación euclidiana de las rectas irracionales. Dos cuestiones historiográficas acompañarán la exposición y ocuparán su tramo final: la de si Eudoxo anticipó la teoría moderna del número real, que tantas veces se ha respondido con más entusiasmo que cuidado, y la de si es legítimo leer la geometría griega como un álgebra disfrazada. El capítulo termina, como el anterior, preguntándose qué puede aprender de todo ello quien enseña hoy razones, proporciones y límites.

MAPA DEL CAPÍTULO	
2.1–2.2	El problema de las proporciones sin medida común y la primera respuesta: la teoría antifairética.
2.3	Eudoxo de Cnido: los testimonios y lo que puede afirmarse de su obra.
2.4–2.5	Las definiciones del Libro V, sus consecuencias y su aplicación a la semejanza (VI.1 y VI.2).
2.6	Los supuestos implícitos de la teoría: el axioma de Arquímedes y la cuarta proporcional.
2.7–2.8	El método de exhaución (XII.2) y su desarrollo en Arquímedes: el círculo y la parábola.
2.9	El Libro X: una clasificación de los irracionales.
2.10–2.11	Dos debates: ¿anticipó Eudoxo a Dedekind? ¿Hubo un álgebra geométrica griega?
2.12	Razón, proporción y límite en la enseñanza: lo que dice la investigación.

2.1 El problema: proporciones sin medida común

2.1.1 La proporción entre números

La teoría de las proporciones numéricas que Euclides expone en el Libro VII de los *Elementos*, y que muy probablemente recoge una tradición anterior de cuño pitagórico, define la proporcionalidad de cuatro números mediante la noción de *parte*: cuatro números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto (VII, def. 20). En lenguaje moderno, y con la salvedad de que para Euclides un número es siempre una pluralidad de unidades, $a : b = c : d$ significa que existen enteros positivos m y n tales que $na = mb$ y $nc = md$, es decir, que ambas razones se expresan mediante la misma fracción m/n (Heath, 1956; Oller Marcén y Gairín, 2013). La definición es impecable para los números y, por extensión inmediata, para las magnitudes conmensurables, porque dos magnitudes que admiten una medida común E se comportan, respecto de ella, exactamente como dos números: si $A = pE$ y $B = qE$, la razón de A a B es la razón de p a q . Pero la definición pierde todo sentido cuando A y B carecen de medida común, porque entonces no existe ningún par de enteros que exprese la relación entre ellas, y esto es precisamente lo que la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal había establecido (teorema 1.9).

2.1.2 Un teorema sin demostración

Consideremos el teorema fundamental de la semejanza: si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos, los divide en segmentos proporcionales. La demostración que puede reconstruirse para la época anterior a Eudoxo, con cierta verosimilitud y sin apoyo textual directo, procedía por conteo. Si los segmentos AD y DB en que la paralela divide el lado AB tienen una medida común U , contenida p veces en el primero y q veces en el segundo, basta trazar paralelas a BC por los puntos de división para que el lado AC quede dividido en $p + q$ partes que, por el teorema de las paralelas equidistantes, son iguales entre sí; de ellas, p quedan en AE y q en EC , y la proporción $AD : DB = AE : EC$ se sigue de que ambas razones son la razón de p a q (figura 2.1).

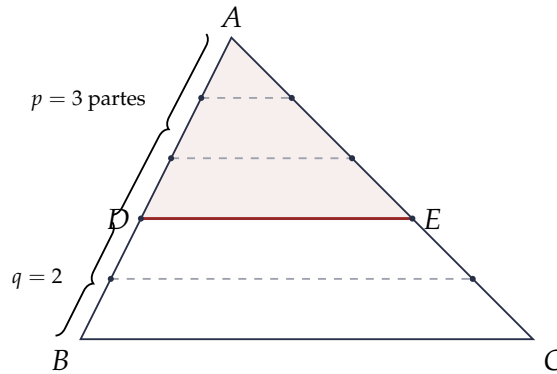


FIGURA 2.1. La demostración por conteo del teorema de la paralela, válida solo en el caso conmensurable: si AD y DB contienen p y q veces una medida común, las paralelas trazadas por los puntos de división cortan AC en $p + q$ partes iguales, y ambas razones son la razón de p a q .

Fuente: Elaboración propia.

El argumento es convincente, elemental y enseñable, y es probablemente el que muchos estudiantes siguen encontrando hoy en sus libros de texto. Pero si AD y DB son inconmensurables no hay partes iguales que contar, y el argumento se desvanece sin dejar nada en su lugar. El descubrimiento de la inconmensurabilidad no refutaba el teorema, cuya verdad nadie ponía en duda, sino que dejaba sin demostración una parte sustancial de la geometría conocida (González Urbaneja, 2008; Heath, 1921; Knorr, 1975); y es en este sentido técnico, y no en el sentido dramático de la leyenda examinada en la sección 1.12, en el que me parece legítimo hablar de un problema de fundamentos. Conviene subrayar la naturaleza del problema, porque de ella depende la de su solución: no se trataba de encontrar un nuevo número capaz de medir la diagonal, empresa que los griegos nunca se propusieron, sino de dar un sentido preciso a la frase « A es a B como C es a D » que no dependiera de la existencia de una medida común.

Antes de seguir, una advertencia que valdrá para todo el capítulo. Para no fatigar al lector escribiremos a menudo las razones con notación moderna, como $A : B$ o incluso A/B , y hablaremos de fracciones que «quedan por debajo» o «por encima» de una razón. Pero en la teoría que vamos a estudiar una razón no es un número, ni puede sumarse con otra, ni ocupar un lugar en una recta numérica: es una relación entre dos magnitudes de la misma especie, y lo único que la teoría sabe hacer con ella es compararla con otras (véase la nota de la sección 1.3). Cada vez que la notación sugiera algo más, el lector hará bien en recordar que se trata de una traducción, cómoda pero anacrónica, del pensamiento eudoxiano.

2.2 Una primera respuesta: la proporción antifairética

2.2.1 El testimonio de Aristóteles

Antes de Eudoxo existió, con toda probabilidad, una teoría de las proporciones basada en la sustracción recíproca que estudiamos en la sección 1.4. El testimonio principal es un pasaje de los *Tópicos* (VIII.3, 158b29–35) en el que Aristóteles, a propósito de las tesis difíciles de refutar por falta de una buena definición, observa que ciertas proposiciones geométricas, difíciles de

demostrar cuando no se ha dado la definición adecuada, se vuelven evidentes una vez dada; su ejemplo es el teorema de que la recta paralela a un lado de un paralelogramo corta de la misma manera el lado y el área, y la razón que ofrece es que el lado y el área tienen «la misma antanaíresis», término que la mayoría de los intérpretes identifican con la *antifairesis* euclidiana (Fowler, 1999; Heath, 1921). En su artículo para la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Mendell resume el estado de la cuestión con prudencia: muchos estudiosos han sostenido que ese método de prueba representa una teoría temprana de la proporción, según la cual dos razones son la misma si tienen la misma sustracción recíproca, aunque existe un amplio desacuerdo sobre cuándo y cómo se utilizó como definición de «misma razón» (Mendell, 2004, suplemento «Aristotle and Greek Mathematics»).

Definición 2.1 (Proporción antifairética). Dados dos pares de magnitudes homogéneas (A, B) y (C, D) , se dice que *tienen la misma antanaíresis* si, al aplicar a cada par la sustracción recíproca, las sucesiones de cocientes $(q_0, q_1, q_2, \dots)$ coinciden término a término, incluida, en su caso, su terminación.

En términos modernos, la definición afirma que dos razones son iguales cuando tienen el mismo desarrollo en fracción continua. Tiene la virtud, decisiva en su contexto, de aplicarse por igual a magnitudes conmensurables e inconmensurables: en el primer caso las dos sucesiones son finitas y coinciden, en el segundo son infinitas y coinciden. Y tiene además un sentido geométrico muy intuitivo, que la figura 2.2 ilustra: si se aplica la antifairesis a los lados de dos rectángulos semejantes, retirando en cada paso del rectángulo el mayor número posible de cuadrados construidos sobre el lado menor, ambos rectángulos se descomponen exactamente en la misma sucesión de cuadrados, a escalas distintas.

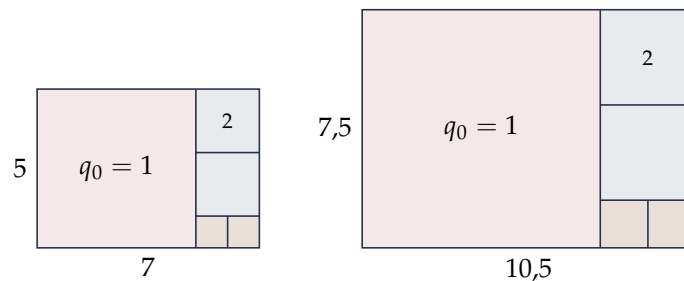


FIGURA 2.2. Dos rectángulos semejantes, de lados 7×5 y $10,5 \times 7,5$, sometidos a la antifairesis: ambos se descomponen en un cuadrado grande, dos cuadrados medianos y dos pequeños, es decir, en la sucesión de cocientes $(1, 2, 2)$. La razón de sus lados es la misma porque su antanaíresis es la misma.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.2 Virtudes y límites de la teoría

La reconstrucción más completa de una matemática organizada en torno a esta noción es la de Fowler (1999), quien sostuvo que la teoría antifairética de la razón no fue un episodio efímero sino el marco natural de la matemática de la Academia, y que en ese marco la inconmensurabilidad aparecía menos como un escándalo que como un fenómeno natural del algoritmo,

el de los desarrollos que no terminan. Knorr (1975), por su parte, reconstruyó las técnicas con las que los geómetras de la generación de Teodoro y Teeteto habrían podido demostrar, con esta definición, algunos de los teoremas de la semejanza. Ambas reconstrucciones coinciden en lo esencial, que es también lo que el pasaje de los *Tópicos* sugiere: la definición antifairética permite, en principio, fundamentar la teoría de las proporciones sin distinguir entre el caso conmensurable y el inconmensurable.

Pero la teoría tenía también un defecto grave. Oller Marcén y Gairín lo señalan con precisión al observar que, aunque trabajos como los de Fowler muestran que esta definición permite construir toda la teoría de proporciones, «las dificultades en el manejo superan con mucho las potencialidades de la definición» (Oller Marcén y Gairín, 2013, sección 2.1). Demostrar con ella la *alternancia* de las proporciones, es decir, que si $A : B = C : D$ entonces $A : C = B : D$, exige comparar dos sucesiones de cocientes cuya relación con las dos primeras no es en absoluto evidente, y en el caso inconmensurable ninguna de ellas puede conocerse completa. Un segundo pasaje de Aristóteles resulta aquí revelador. En los *Analíticos segundos* (I.5, 74a17–25), al discutir la diferencia entre una demostración que vale para cada caso y una que vale universalmente, señala que la alternancia de las proporciones se demostraba en otro tiempo por separado para los números, las líneas, los sólidos y los tiempos, mientras que «ahora» se demuestra de manera universal, para las magnitudes en general (Aristóteles, 1988). La lectura más extendida, que Mendell recoge, entiende que ese «ahora» alude a una teoría nueva que sustituyó a la antifairética y que no es otra que la de Eudoxo (Mendell, 2004). La teoría antifairética era, por así decir, una teoría correcta pero impracticable, y esa es con toda probabilidad la razón por la cual fue reemplazada.

Observación 2.2. La definición antifairética presupone, sin decirlo, que la sustracción recíproca de dos magnitudes homogéneas produce siempre una sucesión bien definida de cocientes finitos, lo cual exige que la menor de dos magnitudes, sumada a sí misma un número suficiente de veces, llegue a superar a la mayor. Es el mismo principio cuya ausencia en los *Elementos* señalamos en la observación 1.8 y que, bajo el nombre de axioma de Arquímedes, reaparecerá en la sección 2.6. Las dos teorías griegas de la proporción comparten, pues, el mismo supuesto tácito.

2.3 Eudoxo de Cnido

2.3.1 Lo que dicen los testimonios

La fuente biográfica más extensa sobre Eudoxo es la breve vida que le dedica Diógenes Laercio en el libro VIII de sus *Vidas de los filósofos ilustres*, compuesta más de cinco siglos después de su muerte a partir de autores intermedios como Calímaco, Soción y Apolodoro. Según ese relato, «Eudoxo de Cnido, hijo de Esquines, fue astrónomo, geómetra, médico y legislador. Aprendió la geometría de Arquitas y la medicina de Filistión el siciliano, como cuenta Calímaco en sus *Tablas*. Soción, en sus *Sucesiones de los filósofos*, dice que fue también discípulo de Platón» (Diógenes Laercio, 1925, VIII.86, p. 401; traducción propia a partir de la versión inglesa de Hicks). El mismo texto refiere un viaje a Egipto, la fundación de una escuela en Cícico, en la Propóntide, y un regreso a Atenas acompañado de sus propios discípulos; y añade, citando a Apolodoro, que Eudoxo «floreció hacia la Olimpiada 103» y «murió en su quincuagésimo tercer año» (Diógenes

Laercio, 1925, VIII.90, p. 405), así como que su fama era tal que se le llamaba *Endoxos*, «ilustre», en lugar de *Eudoxos* (Diógenes Laercio, 1925, VIII.91, p. 407).

La Olimpiada 103 corresponde a los años 368–365 a. C., y de esa indicación, combinada con la edad a la que murió, procede la cronología tradicional, que sitúa su vida entre el 408 y el 355 a. C. aproximadamente, y que sigue siendo la que adoptan muchas obras de referencia (Heath, 1921; O'Connor y Robertson, 1999). Una parte de la historiografía del siglo XX, a partir de un estudio de Santillana (1940), ha propuesto en cambio rebajar esas fechas unos veinte años, situando su nacimiento hacia el 390 y su muerte hacia el 338 a. C., cronología que adoptan, por ejemplo, las entradas biográficas recientes de historia de la astronomía (Keyser, 2007). La diferencia no es anecdótica para nuestra historia, porque de ella depende que Eudoxo pueda considerarse contemporáneo o sucesor de Teeteto, y por tanto que su teoría de la proporción deba entenderse como una respuesta a los problemas que la teoría de Teeteto había dejado abiertos; la mayoría de los historiadores de la matemática, a mi juicio con buenas razones, lo sitúan en la generación inmediatamente posterior (Knorr, 1975, 1983).

Además de matemático, Eudoxo fue el autor del primer modelo geométrico del movimiento de los planetas, el sistema de esferas homocéntricas que Aristóteles adoptaría y modificaría en el libro Λ de la *Metafísica*, y de una descripción de las constelaciones que, a través del poema de Arato, se convirtió en uno de los textos astronómicos más leídos de la Antigüedad. Ninguna de sus obras se ha conservado, y lo que sabemos de su matemática procede exclusivamente de testimonios indirectos (Boyer y Merzbach, 2011; Heath, 1921).

2.3.2 Los testimonios matemáticos

Tres de esos testimonios son decisivos. El primero es un escolio anónimo al Libro V de los *Elementos*, que Heath atribuye con reservas a Proclo, según el cual «algunos dicen» que ese libro, que contiene la teoría general de la proporción aplicable por igual a la geometría, a la aritmética, a la música y a toda ciencia matemática, es descubrimiento de Eudoxo (Heath, 1956, vol. 2, introducción al Libro V). El segundo es el resumen de la historia de la geometría que Proclo incluye en su comentario al Libro I y que, como vimos en el capítulo anterior, se remonta en parte a la historia perdida de Eudemo: allí se dice que Eudoxo aumentó el número de los teoremas generales, añadió a las tres medias conocidas otras tres y desarrolló, aplicando el método del análisis, los teoremas relativos a «la sección», expresión que muchos intérpretes entienden referida a la sección en extrema y media razón (Heath, 1921). El tercero, el más preciso y el más fiable por proceder de un matemático de primer orden apenas un siglo posterior, es el de Arquímedes, quien en el prefacio a *Sobre la esfera y el cilindro* y en el del *Método* atribuye a Eudoxo las primeras demostraciones de que todo cono es la tercera parte del cilindro de igual base y altura, y toda pirámide la tercera parte del prisma, resultados que, según el *Método*, Demócrito había enunciado sin demostración (Heath, 1897, 1912).

De estos testimonios, y de un examen interno de los *Elementos*, la historiografía ha extraído un consenso razonablemente firme. Knorr lo sintetiza al presentar a Eudoxo como el geómetra más distinguido de la generación posterior a Teeteto, conocido sobre todo «por su invención de un método de límites para la medida rigurosa de figuras curvilíneas planas y sólidas, base del Libro XII de los *Elementos*, y por haber elaborado una técnica general de proporciones igualmente válida para magnitudes conmensurables e inconmensurables, base del Libro V» (Knorr, 1983,

pp. 45–46; traducción propia). Conviene tener presente, con todo, que la atribución del Libro V tal como lo leemos es una inferencia y no un dato: Euclides pudo reelaborar, completar o reordenar el material eudoxiano, y la reconstrucción de Knorr (1975) sugiere, precisamente, que los *Elementos* integran bajo una forma unificada resultados procedentes de etapas y autores distintos. Cuando en lo sucesivo hablemos de «la teoría de Eudoxo» lo haremos, por tanto, en el sentido convencional de la teoría conservada en el Libro V y atribuida por la tradición a Eudoxo.

NOTA HISTÓRICA: UNA CONFUSIÓN FRECUENTE

Algunos textos de divulgación, e incluso ciertos trabajos didácticos, sitúan la teoría eudoxiana de las proporciones en el Libro X de los *Elementos*. Se trata de una confusión: el Libro X contiene la clasificación de las rectas irracionales, tradicionalmente asociada a Teeteto, mientras que la teoría general de las razones entre magnitudes, sea cual sea su naturaleza, ocupa el Libro V, y su aplicación a la geometría plana, el Libro VI. El método de exhaustión, por su parte, se funda en la proposición X.1, pero se aplica en el Libro XII. La distribución de los materiales eudoxianos a lo largo de tres libros distintos de los *Elementos* es, por sí misma, una muestra de la amplitud de su obra.

2.4 Las definiciones del Libro V

2.4.1 Definir la igualdad sin definir el objeto

La idea central de la teoría de Eudoxo, y a mi juicio su rasgo más genial, consiste en renunciar a decir qué *es* una razón y definir, en cambio, cuándo dos razones son iguales y cuándo una es mayor que otra. El recuadro siguiente reproduce las definiciones pertinentes del Libro V, que traduzco a partir de la versión inglesa de Heath procurando conservar la estructura, a veces trabajosa, de las frases originales.

EUCLIDES, *Elementos*, LIBRO V, DEFINICIONES 3–7 (TRADUCCIÓN PROPIA A PARTIR DE HEATH)

3. Una razón es una cierta relación, respecto del tamaño, entre dos magnitudes de la misma especie.
4. Se dice que tienen razón entre sí las magnitudes que, al ser multiplicadas, pueden excederse una a otra.
5. Se dice que unas magnitudes están en la misma razón, la primera respecto de la segunda y la tercera respecto de la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y de la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, los primeros equimúltiplos a la vez exceden, son iguales o son menores que los segundos, tomados en el orden correspondiente.
6. Llámense proporcionales las magnitudes que tienen la misma razón.
7. Cuando, de los equimúltiplos, el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, se dice que la primera tiene con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.

La definición 3 es deliberadamente vaga y no desempeña ningún papel en las demostraciones: dice apenas que una razón es una relación de tamaño entre magnitudes homogéneas. La palabra griega que traducimos por «razón» es *lógos*, que significa también «palabra» o «cuenta»; de ahí

que lo inconmensurable se llamara *álogos*, lo que no tiene razón o no se puede decir. Todo el peso lógico recae en las definiciones 4, 5 y 7. En palabras de Oller Marcén y Gairín, Eudoxo dio con una solución satisfactoria «que pasó por dejar indefinido el concepto de razón y definir únicamente aquello que importaba desde un punto de vista puramente geométrico; es decir, definir lo que significa ‘guardar la misma razón’ (V, Def. 5) y ‘guardar una razón mayor’ (V, Def. 7)», definiciones que «tienen la virtud de que son válidas para cualquier tipo de magnitudes, conmensurables o inconmensurables, dejando de lado la necesidad de calcular la sucesión definida por la *antifairesis*» (Oller Marcén y Gairín, 2013, sección 2.1).

En lo que sigue, las letras $A, B, C, \dots$ designan magnitudes, que pueden sumarse y compararse cuando son de la misma especie (segmentos con segmentos, áreas con áreas, sólidos con sólidos), y m, n, p, q designan enteros positivos; nA denota la magnitud $A + A + \dots + A$ con n sumandos, que Euclides llama un *múltiplo* de A , y dos magnitudes mA y mC se llaman *equimúltiplos* de A y C . Con estas convenciones, las definiciones admiten la siguiente formulación.

Definición 2.3 (*Elementos* V, def. 4). Dos magnitudes homogéneas A y B tienen razón entre sí cuando cada una de ellas, multiplicada convenientemente, puede exceder a la otra; es decir, cuando existen enteros positivos m y n tales que $mA > B$ y $nB > A$.

Definición 2.4 (*Elementos* V, def. 5: misma razón). Sean A, B magnitudes homogéneas que tienen razón, y C, D otras magnitudes homogéneas entre sí, no necesariamente de la misma especie que A y B , que también tienen razón. Se dice que A es a B como C es a D , y se escribe $A : B = C : D$, si para todo par de enteros positivos m, n se cumple

$$mA > nB \iff mC > nD, \quad mA = nB \iff mC = nD, \quad mA < nB \iff mC < nD.$$

Definición 2.5 (*Elementos* V, def. 7: razón mayor). Se dice que A tiene con B una razón mayor que la que tiene C con D , y se escribe $A : B > C : D$, si existen enteros positivos m, n tales que $mA > nB$ pero $mC \leq nD$.

2.4.2 Cómo leer la definición 5

La definición 5 merece una lectura detenida, porque en ella se concentra toda la teoría. Afirmar que $A : B = C : D$ equivale a decir que, para cada fracción n/m , la magnitud A es mayor, igual o menor que $\frac{n}{m}B$ exactamente cuando C es mayor, igual o menor que $\frac{n}{m}D$; dicho de otro modo, dos razones son iguales cuando ninguna fracción las separa, cuando cada número racional queda del mismo lado de ambas. La definición no exige que las magnitudes tengan medida común, no presupone que las razones sean números y, sin embargo, captura con exactitud la idea de que dos razones representan «la misma cantidad». Involucra, además, una infinidad de condiciones, una por cada par (m, n) , lo cual la hace inaplicable por verificación directa y obliga a razonar sobre múltiplos arbitrarios, como veremos en la demostración de VI.1. Es precisamente este carácter infinitario, que la vuelve impracticable para el cálculo y extraordinariamente eficaz para la demostración, lo que la distingue de todo lo que la precedió.

La definición 7, en cambio, se verifica con un solo par de enteros, y esa asimetría tiene una consecuencia práctica que conviene ilustrar: para probar que dos razones son *distintas* basta exhibir una fracción que las separe, mientras que para probar que son *iguales* hay que razonar sobre todas las fracciones a la vez.

Ejemplo 2.6. Sean d y s la diagonal y el lado de un cuadrado, y comparemos la razón $d : s$ con las razones numéricas $7 : 5$ y $17 : 12$, en las que los números se interpretan como segmentos múltiplos de una misma unidad. Con $m = 5$ y $n = 7$ se tiene $5d > 7s$, pues $(5d)^2 = 50s^2 > 49s^2 = (7s)^2$, mientras que $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$; por la definición 2.5, $d : s > 7 : 5$. Con $m = 70$ y $n = 99$ se tiene $70 \cdot 17 = 1190 > 1188 = 99 \cdot 12$, mientras que $70d < 99s$, pues $(70d)^2 = 9800s^2 < 9801s^2 = (99s)^2$; luego $17 : 12 > d : s$. Las fracciones $\frac{7}{5}$ y $\frac{17}{12}$, que ya encontramos como aproximaciones de la diagonal en las secciones 1.2 y 1.7, quedan así a uno y otro lado de la razón $d : s$, sin que ninguna aritmética de fracciones haya intervenido: solo se han comparado cuadrados de segmentos.

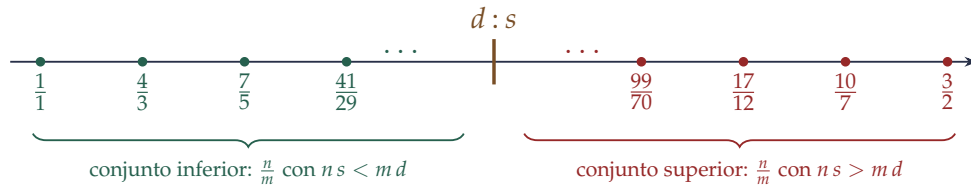


FIGURA 2.3. La razón $d : s$ entre la diagonal d y el lado s de un cuadrado divide las fracciones positivas en dos clases: las que quedan por debajo (en verde) y las que quedan por encima (en rojo). Las fracciones se han dispuesto en su orden, pero no a escala: $\frac{41}{29}$ y $\frac{99}{70}$ distan de $d : s$ menos de una milésima. Ninguna fracción coincide con ella, y la definición 5 de Eudoxo afirma, en esencia, que otra razón es igual a esta si y solo si produce exactamente la misma partición.

Fuente: Elaboración propia.

2.4.3 Por qué no basta un número finito de comprobaciones

El carácter infinitario de la definición 5 no es un exceso de celo, y un ejemplo lo muestra con claridad. Supongamos que quisiéramos decidir si dos razones son iguales comprobando las condiciones de la definición solo para algunos pares (m, n) , digamos para todos los pares con $m, n \leq 1000$. Cada comprobación coloca una fracción n/m a un lado u otro de la razón, y un número finito de comprobaciones solo sitúa la razón dentro de un intervalo entre dos fracciones vecinas (figura 2.4). Cualquier otra razón que caiga en ese mismo intervalo superará exactamente las mismas pruebas.

Proposición 2.7. Sea $A : B$ una razón que no es igual a ninguna razón entre números, como la de la diagonal al lado del cuadrado, y sea F un conjunto finito de pares de enteros positivos (m, n) . Existen infinitas razones numéricas $p : q$, todas distintas de $A : B$, que se comportan exactamente como $A : B$ frente a todos los pares de F : para cada $(m, n) \in F$, $mA > nB$ si y solo si $mp > nq$, y $mA < nB$ si y solo si $mp < nq$.

Demostración. Ninguna fracción n/m con $(m, n) \in F$ coincide con la razón, porque esta no es numérica; las fracciones de F quedan, pues, repartidas en dos grupos, las que están por debajo y las que están por encima. Sea a la mayor de las primeras y b la menor de las segundas (si uno de los grupos es vacío, se toma $a = 0$ o se prescinde de b). Toda fracción p/q estrictamente comprendida entre a y b queda del mismo lado que la razón respecto de cada fracción de F , y

por tanto supera las mismas pruebas; y entre a y b hay infinitas fracciones, todas distintas de $A : B$. ■

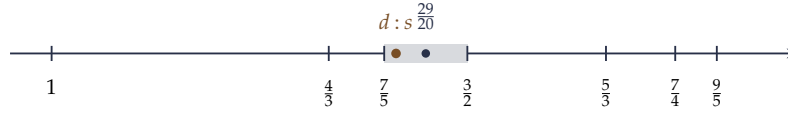


FIGURA 2.4. Con las pruebas correspondientes a las fracciones marcadas, la razón $d : s$ entre la diagonal y el lado solo queda localizada entre $\frac{7}{5}$ y $\frac{3}{2}$. La fracción $\frac{29}{20}$, que está en el mismo intervalo, supera todas esas pruebas y, sin embargo, es otra razón. Solo la totalidad de las comparaciones, una por cada fracción, distingue a $d : s$ de todas las demás.

Fuente: Elaboración propia.

La proposición explica por qué Eudoxo necesitó cuantificar sobre *todos* los pares (m, n) : ninguna colección finita de comparaciones, por grande que sea, determina una razón incommensurable. Solo el conjunto completo de las fracciones que quedan por debajo, junto con el de las que quedan por encima, la identifica sin ambigüedad. Esa totalidad es exactamente lo que Dedekind tomará como objeto en 1872: la cortadura de la sección 4.3 no es otra cosa que la partición completa de las fracciones, considerada de una vez y convertida en número. Eudoxo la usaba como criterio para comparar; Dedekind la convirtió en la cosa misma.

Conviene subrayar lo que las definiciones *no* dicen. Oller Marcén y Gairín lo expresan con claridad: «Lo que parece quedar claro, a la luz de la primera de estas dos definiciones es que la razón no es, en modo alguno, un número. Este carácter no numérico de las razones en los *Elementos* está reforzado por el hecho de que apenas se da un tratamiento sistemático a las operaciones entre razones; además nunca se habla de igualdad de razones, sino de ‘guardar la misma razón’ o de ‘guardar una razón mayor’» (Oller Marcén y Gairín, 2013, sección 2.1). Esta observación, que retomaremos en la sección 2.10, es la clave para entender tanto el alcance como el límite de la teoría.

2.4.4 Primeras consecuencias

La primera comprobación que cabe exigir a la nueva definición es que no contradiga la antigua en el terreno donde esta era válida.

Proposición 2.8. Si $A = pE$, $B = qE$, $C = pF$ y $D = qF$ para ciertas magnitudes E, F y enteros positivos p, q , entonces $A : B = C : D$ en el sentido de la definición 2.4.

Demostración. Para enteros positivos m, n se tiene $mA = mpE$ y $nB = nqE$, de modo que $mA > nB$ si y solo si $mp > nq$, y análogamente con las otras dos alternativas. Las mismas equivalencias valen para $mC = mpF$ y $nD = nqF$. ■

Las proposiciones del Libro V desarrollan, a partir de estas definiciones, una verdadera álgebra de las proporciones: la transitividad (V.11), la alternancia (V.16), la composición y la separación (V.17 y V.18), la igualdad *ex aequali* (V.22), entre otras. Presentamos tres, porque ilustran el estilo del razonamiento eudoxiano y el papel que en él desempeña, a menudo de manera tácita, la posibilidad de que un múltiplo de una magnitud supere a otra.

Proposición 2.9 (*Elementos* V.11). Si $A : B = C : D$ y $C : D = E : F$, entonces $A : B = E : F$.

Demostración. Para cada par (m, n) , la alternativa que se cumple entre mA y nB es la misma que entre mC y nD , y esta es la misma que entre mE y nF . ■

Proposición 2.10 (*Elementos* V.9). Si $A : C = B : C$, entonces $A = B$.

Demostración. Supongamos que $A > B$. Si todo par de magnitudes homogéneas tiene razón, existe n con $n(A - B) > C$. Sea $m \geq 0$ el mayor entero tal que $mC \leq nB$, que existe por la misma razón. Entonces $nB < (m + 1)C$ y $nA = nB + n(A - B) > mC + C = (m + 1)C$, de modo que el par $(n, m + 1)$ satisface $nA > (m + 1)C$ y $nB < (m + 1)C$, contra la definición 2.4. El caso $A < B$ es análogo. ■

Proposición 2.11 (*Elementos* V.15 y V.16, alternancia). Para todo entero $k \geq 1$ se tiene $kA : kB = A : B$. Si además A, B, C, D son de la misma especie y $A : B = C : D$, entonces $A : C = B : D$.

Demostración. La primera afirmación es inmediata, porque $m(kA) > n(kB)$ equivale a $k(mA) > k(nB)$, que equivale a $mA > nB$, y lo mismo con las otras alternativas. Para la alternancia, supongamos que $A : C \neq B : D$. Entonces existe algún par (m, n) para el cual las alternativas de la definición 2.4 difieren, y un examen de los casos posibles muestra que entonces una de las dos razones es mayor que la otra en el sentido de la definición 2.5; por simetría podemos suponer $A : C > B : D$, es decir, que existen m, n con $mA > nC$ y $mB \leq nD$. Por la primera parte y por V.11, $mA : mB = A : B = C : D = nC : nD$. Ahora bien, de $mA > nC$ se deduce, por V.14, que $mB > nD$, pues si cuatro magnitudes de la misma especie son proporcionales y la primera es mayor que la tercera, la segunda es mayor que la cuarta. Esto contradice $mB \leq nD$. ■

La alternancia es exactamente el teorema que, según el pasaje de los *Analíticos segundos* citado en la sección 2.2, se demostraba antes por separado para cada especie de magnitud y ahora se demuestra «universalmente». La demostración que acabamos de ver no depende en absoluto de que las magnitudes sean números, líneas, sólidos o tiempos: solo usa que pueden sumarse, compararse y multiplicarse por enteros. Esta generalidad, que Aristóteles celebraba como un modelo de demostración científica, es uno de los logros más duraderos de la teoría.

2.4.5 Eudoxo en lenguaje de conjuntos

La observación de que la definición 5 compara una razón con todas las fracciones admite una formulación muy precisa, que la figura 2.3 anticipaba y que será el puente con el capítulo 4.

Definición 2.12. Dadas dos magnitudes homogéneas A, B que tienen razón, llamamos *conjunto inferior* de la razón $A : B$ al conjunto de números racionales positivos

$$\mathcal{L}(A : B) = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+ : nB < mA \right\},$$

es decir, al conjunto de las fracciones $\frac{n}{m}$ para las cuales $\frac{n}{m}B < A$.

Teorema 2.13. Supongamos que todo par de magnitudes homogéneas tiene razón. Entonces $A : B = C : D$ en el sentido de Eudoxo si y solo si $\mathcal{L}(A : B) = \mathcal{L}(C : D)$.

Demostración. La condición $nB < mA$ no depende del representante de la fracción n/m , porque equivale a $knB < kmA$. Si las razones son iguales, entonces $nB < mA$ si y solo si $nD < mC$, y los conjuntos coinciden. Recíprocamente, supongamos que coinciden y fijemos (m, n) . Por hipótesis, $mA > nB$ si y solo si $mC > nD$; resta ver que $mA = nB$ si y solo si $mC = nD$. Supongamos que $mA = nB$ pero $mC \neq nD$. No puede ser $mC > nD$, pues n/m estaría en un conjunto y no en el otro; luego $mC < nD$, y existe k con $k(nD - mC) > D$, es decir, $kmC < (kn - 1)D$. Por otra parte, $kmA = knB > (kn - 1)B$, de modo que $(kn - 1)/(km)$ pertenece a $\mathcal{L}(A : B)$ pero no a $\mathcal{L}(C : D)$, lo cual es absurdo. El caso simétrico es igual, y la tercera alternativa queda determinada por las otras dos. ■

El teorema muestra que, en la teoría de Eudoxo, una razón queda completamente determinada por el conjunto de fracciones que son menores que ella. Veintidós siglos después, Richard Dedekind *definirá* un número real precisamente como un objeto determinado por un conjunto de esa clase; la diferencia entre ambos gestos, que no es pequeña, será examinada en la sección 2.10.

2.5 Una demostración eudoxiana: las proposiciones VI.1 y VI.2

La primera proposición del Libro VI es el ejemplo canónico de cómo se aplica la definición 5 a la geometría, y su demostración ha sido admirada por generaciones de matemáticos como modelo de rigor. Establece que los triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

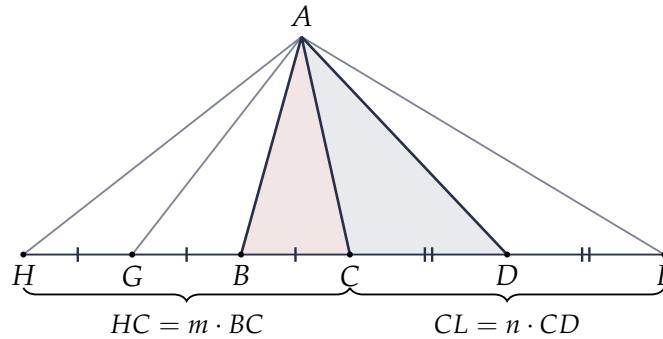


FIGURA 2.5. Demostración de *Elementos* VI.1 con $m = 3$ y $n = 2$: los triángulos AHC y ACL son, respectivamente, m veces el triángulo ABC y n veces el triángulo ACD , y se comparan entre sí exactamente como sus bases HC y CL . Las marcas simples señalan los tres segmentos iguales a BC , y las dobles, los dos iguales a CD : los múltiplos se construyen copiando la base, sin medirla.

Fuente: Elaboración propia.

Teorema 2.14 (*Elementos* VI.1). *Si los triángulos ABC y ACD tienen el vértice común A y sus bases BC y CD están sobre una misma recta, entonces $\triangle ABC : \triangle ACD = BC : CD$.*

Demostración. Utilizaremos dos resultados del Libro I: los triángulos con bases iguales situadas sobre una misma recta y con vértice común tienen áreas iguales (I.38), y, como consecuencia, de dos triángulos con vértice común y bases sobre la misma recta es mayor el que tiene mayor base.

Sean m y n enteros positivos arbitrarios. Sobre la prolongación de CB , más allá de B , tomamos $m - 1$ segmentos consecutivos iguales a BC , con extremo H , de modo que $HC = m \cdot BC$; análogamente, sobre la prolongación de CD tomamos $n - 1$ segmentos iguales a CD , con extremo L , de modo que $CL = n \cdot CD$ (figura 2.5). Por I.38, $\triangle AHC = m \cdot \triangle ABC$ y $\triangle ACL = n \cdot \triangle ACD$. Por la consecuencia citada, $\triangle AHC > \triangle ACL$ si y solo si $HC > CL$, y lo mismo con la igualdad y la desigualdad contraria. Sustituyendo, para todo par (m, n) ,

$$m \cdot \triangle ABC \gtrless n \cdot \triangle ACD \iff m \cdot BC \gtrless n \cdot CD,$$

con el mismo signo en ambos lados. Por la definición 2.4, $\triangle ABC : \triangle ACD = BC : CD$. ■

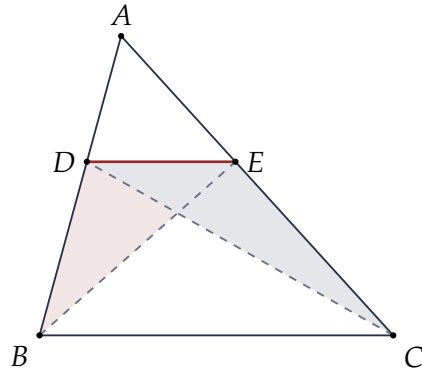


FIGURA 2.6. La demostración de VI.2. Los triángulos BDE y CED , sombreados, tienen la base común DE y están entre las mismas paralelas DE y BC , por lo que son iguales; comparados ambos con el triángulo ADE mediante VI.1, dan la proporción buscada.

Fuente: Elaboración propia.

Teorema 2.15 (*Elementos* VI.2, teorema de Tales). *Si una recta paralela al lado BC del triángulo ABC corta a los lados AB y AC en D y E , entonces $BD : DA = CE : EA$.*

Demostración. Tracemos BE y CD (figura 2.6). Los triángulos BDE y CED tienen la misma base DE y están entre las mismas paralelas DE y BC , luego son iguales (I.37). Por consiguiente, las razones que guardan con el triángulo ADE son iguales (V.7). Pero, por VI.1, $\triangle BDE : \triangle ADE = BD : DA$, pues ambos triángulos tienen el vértice común E y sus bases sobre la recta AB ; y del mismo modo $\triangle CED : \triangle ADE = CE : EA$. Por V.11, $BD : DA = CE : EA$. ■

La belleza de estas demostraciones reside en que nunca se pregunta si los segmentos involucrados son conmensurables: el argumento funciona igualmente en ambos casos, porque la definición de Eudoxo reduce la comparación de dos razones a la comparación de infinitos pares de múltiplos, y la geometría permite construir esos múltiplos de manera uniforme. Comparada con la demostración por conteo de la figura 2.1, la de VI.2 no cuenta nada: sustituye la aritmética de las partes por la comparación de áreas. A partir de VI.1 y VI.2, Euclides reconstruye toda la teoría de la semejanza con plena validez para magnitudes inconmensurables, y el problema técnico planteado por el descubrimiento de la inconmensurabilidad queda resuelto en el terreno en el que se había planteado.

EN EL AULA: DOS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE TALES

La comparación entre la demostración por conteo y la demostración eudoxiana del teorema de Tales es, a mi juicio, una de las actividades más ricas que la historia ofrece a la formación de profesores. La primera es la que cabe en un aula de secundaria y la que suele aparecer en los libros de texto, a menudo sin advertir que solo vale para segmentos conmensurables; la segunda muestra cómo se demuestra un teorema cuando no se dispone de números para todas las longitudes. Pedir a los futuros docentes que identifiquen en qué paso exacto falla la primera cuando los segmentos son inconmensurables, y qué hace la segunda para evitarlo, los obliga a examinar un supuesto, el de que toda longitud es medible con fracciones, que sus propios estudiantes asumirán con toda naturalidad.

Mi experiencia es que muchos docentes en servicio sienten cierta inquietud al descubrir que la demostración que llevan años enseñando tiene un hueco. Es una reacción sana, y conviene decirles que el hueco no invalida lo que hacen en el aula, donde la demostración por conteo sigue siendo un buen punto de partida; lo que cambia es que ahora saben qué están dejando fuera y pueden decidir con conocimiento de causa cuándo mencionarlo.

2.6 Los supuestos implícitos: la «mancha en el sol de Euclides»

2.6.1 El axioma de Arquímedes

Una teoría tan cuidadosamente construida invita a examinar con igual cuidado lo que da por supuesto, y ese examen, que la tradición no emprendió durante dos milenios, fue realizado a fines del siglo XIX por David Hilbert en el contexto de su axiomatización de la geometría. Giovannini ha estudiado los manuscritos de las lecciones de Hilbert y ha mostrado que este identificó en la teoría euclidiana una omisión precisa, que formuló con una imagen memorable: «Existe un [sic] mancha en el sol de Euclides, puesto que él omitió la formulación de aquel axioma [i.e., el axioma de Arquímedes]» (Giovannini, 2015, p. 31, citando las lecciones de Hilbert de 1924/25).

La observación es exacta. La definición V.4 dice cuándo dos magnitudes *tienen razón*, pero Euclides no afirma en ningún lugar, como principio, que *todo* par de magnitudes homogéneas la tenga; y sin embargo usa ese hecho, de manera tácita, en demostraciones como la de V.8 y, sobre todo, en el lema X.1, sobre el que descansan tanto la prueba de la inconmensurabilidad por antifairesis (teorema 1.7) como el método de exhaustión. En nuestra exposición lo hemos hecho explícito en las demostraciones de V.9 y del teorema 2.13.

Definición 2.16 (Axioma de Eudoxo–Arquímedes). Para cualesquiera magnitudes homogéneas $A, B > 0$ existe un entero positivo n tal que $nA > B$.

El nombre del axioma es, por cierto, doblemente injusto. Arquímedes lo enuncia entre los supuestos de *Sobre la esfera y el cilindro*, y en el prefacio de la *Cuadratura de la parábola* declara expresamente que no es suyo: para la demostración, escribe, se ha supuesto el lema según el cual el exceso por el que la mayor de dos áreas desiguales supera a la menor puede, sumado a sí mismo, llegar a exceder cualquier área finita dada, y «los geómetras anteriores también han usado este lema», pues mediante él demostraron que los círculos están entre sí en la razón

duplicada de sus diámetros, que las esferas lo están en la razón triplicada, y que toda pirámide es la tercera parte del prisma de igual base y altura (Heath, 1897, *Cuadratura de la parábola*, prefacio; traducción propia a partir de Heath). Los resultados que Arquímedes enumera son, precisamente, los del Libro XII, que la tradición atribuye a Eudoxo; y el contenido del lema está implícito en la definición V.4, que la misma tradición le atribuye. Es muy probable, por tanto, que el «axioma de Arquímedes» sea en realidad de Eudoxo.

Este es el mismo principio que señalamos en la observación 1.8 del capítulo 1, a propósito de la sustracción recíproca, y conviene insistir en lo que está en juego. El axioma no es un tecnicismo que complete una demostración aislada: es la garantía de que no existen magnitudes infinitamente pequeñas respecto de otras de su misma especie. Si existieran, dos razones distintas podrían dar exactamente el mismo resultado en todas las comparaciones de la definición 5, y la teoría de Eudoxo dejaría de distinguir lo que debe distinguir; el ejercicio 2.5 construye un ejemplo concreto. La antifairesis del capítulo 1, la definición 5 y el método de exhaustión descansan, así, en la misma exclusión de lo infinitamente pequeño.

2.6.2 Hilbert y la pureza del método

Hilbert mismo, al advertir que Euclides no lo postulaba, se preguntó si el axioma era realmente necesario para la teoría de las proporciones, y la respuesta que dio es uno de los resultados más interesantes de sus *Grundlagen der Geometrie* de 1899 (Hilbert, 1899). Según los manuscritos que analiza Giovannini, Hilbert distinguía dos exigencias distintas: que «para poder interpretar una proporción entre segmentos siempre como una relación numérica se requiere de un nuevo axioma», y que, incluso introducido este, «se debe probar explícitamente que los nuevos números introducidos obedecen las mismas leyes de operaciones que la de aquellos ya conocidos» (Giovannini, 2015, p. 29). Su estrategia consistió en evitar ambas dificultades definiendo directamente, a partir del teorema de Pascal, una multiplicación de segmentos que satisface las leyes de un cuerpo ordenado; con ella, «el objetivo de Hilbert era mostrar que, partiendo de su definición de multiplicación de segmentos lineales, era posible obtener la noción de proporcionalidad y de triángulos semejantes, y evitar además la introducción de aquel axioma de continuidad» (Giovannini, 2015, p. 35).

El resultado de Hilbert tiene una consecuencia notable que conviene formular con precisión: la teoría de la semejanza no necesita el axioma de Arquímedes, pero la teoría eudoxiana de la razón sí lo necesita, porque sin él la definición 5 deja de caracterizar la igualdad de razones (véase el ejercicio 2.5). Eudoxo y Hilbert resolvieron, por tanto, problemas distintos: el primero quiso comparar razones cualesquiera, y para ello necesitaba excluir los infinitésimos; el segundo quiso fundamentar la geometría elemental con la mayor economía de supuestos, y para ello podía prescindir de la comparación de razones. Giovannini muestra que la motivación de Hilbert fue la «pureza del método», que en su caso se impuso «no ya en la demostración de tal o cual teorema en particular, sino en la construcción axiomática misma de la teoría» (Giovannini, 2015, p. 22).

2.6.3 La cuarta proporcional

Hay un segundo supuesto tácito, de naturaleza distinta, que aparecerá en la demostración de XII.2: la existencia de la *cuarta proporcional*, es decir, el principio según el cual, dadas tres

magnitudes A, B, C con A y B homogéneas, existe siempre una magnitud D , homogénea con C , tal que $A : B = C : D$. Para segmentos, Euclides la construye en VI.12 con regla y compás; para áreas y volúmenes, en cambio, la da por supuesta sin construcción alguna. Este principio es una forma de completitud, porque afirma que el dominio de las magnitudes contiene todas las que las razones requieren, y está emparentado con la propiedad que, según Dedekind, faltaba en la teoría griega. Los dos supuestos implícitos, el arquimedianos y el de existencia, son lógicamente independientes, y confundirlos ha oscurecido, en mi opinión, muchas discusiones sobre la relación entre Eudoxo y la teoría moderna del número real.

2.7 El método de exhaustión

2.7.1 El lema fundamental

La teoría de las proporciones permitía comparar magnitudes rectilíneas; para las figuras curvilíneas se necesitaba además un procedimiento que permitiera aproximarlas mediante figuras rectilíneas con la precisión deseada, y razonar luego sin recurrir a ningún paso al límite, noción que la matemática griega evitó siempre de manera explícita. Ese procedimiento, que los historiadores llaman *método de exhaustión* (el término, que sugiere un agotamiento de la figura, procede de Grégoire de Saint-Vincent, en el siglo XVII, y no de las fuentes griegas), descansa en el lema que Euclides demuestra como primera proposición del Libro X.

Lema 2.17 (*Elementos X.1*). Sean A y B dos magnitudes homogéneas. Si de A se sustrae una parte mayor que su mitad, del resto otra parte mayor que su mitad, y así sucesivamente, se llegará a un resto menor que B .

Demostración. Sean $r_0 = A$ y r_k el resto después de la k -ésima sustracción, de modo que $r_{k+1} < \frac{1}{2}r_k$ y, por inducción, $2^k r_k < A$ para todo $k \geq 1$. Por el axioma 2.16 existe N con $NB > A$, y como $2^N \geq N$, también $2^N B > A > 2^N r_N$, de donde $r_N < B$. ■

La demostración de Euclides es esencialmente la misma, aunque procede de manera más geométrica: multiplica B hasta superar a A y compara, paso a paso, las sucesivas mitades de ese múltiplo con los sucesivos restos de A . El lema expresa, en lenguaje moderno, que la sucesión de los restos puede hacerse menor que cualquier magnitud dada; pero Euclides no dice que «tienda a cero», ni menciona ningún proceso infinito: afirma que, para cada B dado de antemano, un número finito de pasos basta. Esta formulación, que evita cuidadosamente el infinito actual, es la que permite al método de exhaustión funcionar como una técnica de demostración rigurosa y no como un argumento heurístico.

2.7.2 Los círculos son como los cuadrados de sus diámetros

El resultado más famoso obtenido con este método es la proposición XII.2, según la cual los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros; en lenguaje moderno, el área del círculo es proporcional al cuadrado del radio, lo que equivale a la existencia de una constante π tal que el área es πr^2 . Es importante advertir que el teorema afirma la *existencia* de esa constante, es decir, que la razón entre el círculo y el cuadrado de su radio no depende del círculo, pero no dice nada sobre su valor, y que la razón entre la circunferencia y el diámetro, que es el otro

significado de π , ni siquiera aparece en los *Elementos*. Establecer que ambas constantes coinciden y acotar su valor será la tarea de Arquímedes.

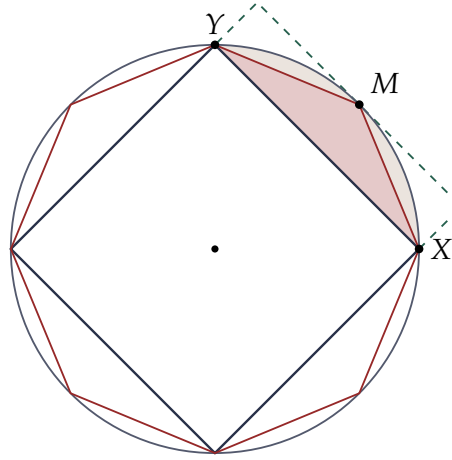


FIGURA 2.7. El paso del cuadrado inscrito al octógono inscrito. Sobre el lado XY se levanta el triángulo XMY , con M en el punto medio del arco; el triángulo es la mitad del rectángulo (en trazo discontinuo) limitado por XY y por la tangente en M , rectángulo que contiene al segmento circular. Por tanto, el triángulo es mayor que la mitad del segmento, y al duplicar el número de lados se sustrae de la diferencia entre el círculo y el polígono más de su mitad.

Fuente: Elaboración propia.

Lema 2.18. Sea P_k el polígono regular de $4 \cdot 2^k$ lados inscrito en un círculo de área S . Entonces $S - P_{k+1} < \frac{1}{2}(S - P_k)$. En consecuencia, para toda magnitud $\varepsilon > 0$ existe un polígono regular inscrito P tal que $S - P < \varepsilon$.

Demostración. La diferencia $S - P_k$ está formada por segmentos circulares, uno sobre cada lado de P_k . Si sobre el lado XY de uno de ellos se levanta el triángulo isósceles XMY , con M el punto medio del arco, dicho triángulo es la mitad del rectángulo de base XY que tiene por lado opuesto la tangente en M , y ese rectángulo contiene al segmento circular; por tanto, el triángulo es mayor que la mitad del segmento (figura 2.7). Al pasar de P_k a P_{k+1} se añaden precisamente esos triángulos, de modo que se sustrae de cada segmento más de su mitad. La segunda afirmación se sigue del lema 2.17. ■

Teorema 2.19 (*Elementos* XII.2). Si S_1 y S_2 son las áreas de dos círculos de diámetros d_1 y d_2 , entonces $S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2$.

Demostración. Siguiendo a Euclides, suponemos que para tres magnitudes dadas existe siempre una cuarta proporcional; sea T el área tal que $d_1^2 : d_2^2 = S_1 : T$. Debemos probar que $T = S_2$, y para ello descartamos las otras dos posibilidades, esquema que se conoce como *doble reducción al absurdo*.

Si $T < S_2$, el lema 2.18 proporciona un polígono regular P_2 inscrito en el segundo círculo con $S_2 - P_2 < S_2 - T$, es decir, $P_2 > T$. Inscribimos en el primer círculo un polígono P_1 semejante a P_2 . Por XII.1, que establece que los polígonos semejantes inscritos en círculos son como los

cuadrados de los diámetros, $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 = S_1 : T$, y alternando (V.16), $P_1 : S_1 = P_2 : T$. Pero $P_1 < S_1$, y entonces, por V.14, $P_2 < T$, en contradicción con lo obtenido.

Si $T > S_2$, invirtiendo la proporción, $d_2^2 : d_1^2 = T : S_1$; sea U la cuarta proporcional con $T : S_1 = S_2 : U$. Alternando, $T : S_2 = S_1 : U$, y como $T > S_2$, se tiene $U < S_1$ por V.14; además, por V.11, $d_2^2 : d_1^2 = S_2 : U$. Estamos en la situación del caso anterior con los papeles de los círculos intercambiados, que acabamos de mostrar imposible. Luego $T = S_2$. ■

2.7.3 Rigor sin límites

La doble reducción al absurdo merece un comentario. En lenguaje moderno diríamos que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos y que, como la razón P_1 / P_2 es constante, también lo es la razón de los límites. El argumento griego llega a la misma conclusión sin nombrar el límite, reemplazando la noción de convergencia por la de aproximación arbitraria (lema 2.18) y la de igualdad de límites por la imposibilidad de las dos desigualdades. Medina, siguiendo a Sierpinski, lo formula con exactitud desde la didáctica: en la concepción geométrica de Eudoxo y Euclides, «el paso al límite no es una operación matemática, sino que está oculta en el método de exhaución» (Medina, 2001; Sierpinski, 1987). Es, en rigor, una demostración impecable, pero tiene un precio: exige conocer de antemano el resultado que se quiere probar, porque la doble reducción al absurdo verifica una igualdad pero no la descubre. Con el mismo esquema, y con mayor dificultad técnica, Euclides demuestra en el Libro XII que las pirámides de igual altura son como sus bases (XII.5), que toda pirámide es la tercera parte del prisma de igual base y altura (XII.7, corolario), que el cono es la tercera parte del cilindro (XII.10) y que las esferas son como los cubos de sus diámetros (XII.18), es decir, precisamente los resultados que Arquímedes atribuía a Eudoxo.

¿Por qué tanta cautela? La respuesta tiene que ver con el infinito. Aristóteles distinguía entre un infinito *en potencia*, el de un proceso que siempre puede continuarse, y un infinito *en acto*, el de una totalidad infinita dada de una vez, y solo admitía el primero (Mendell, 2004). El método de exhaución respeta esa distinción con escrúpulo: nunca dice que el polígono «se convierte» en el círculo después de infinitos pasos, ni que el círculo sea un polígono de infinitos lados, sino que, dada cualquier magnitud, un número finito de pasos basta para quedar por debajo de ella. Es fácil ver en ello una timidez; me parece más exacto ver una forma de honestidad intelectual, la de no afirmar más de lo que se puede demostrar. Veintidós siglos después, Kronecker opondrá a las construcciones de Dedekind y Cantor una desconfianza muy parecida hacia las totalidades infinitas (sección 4.9), y los estudiantes que se resisten a aceptar que $0,999 \dots$ sea igual a 1 están, sin saberlo, del lado de Aristóteles.

2.8 Arquímedes: el círculo y la parábola

2.8.1 La medida del círculo

Las civilizaciones anteriores habían utilizado valores prácticos de la razón entre el círculo y el cuadrado de su diámetro: el papiro Rhind, hacia 1650 a. C., toma como área del círculo la del cuadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ del diámetro, lo que equivale a $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16$ (Boyer y Merzbach, 2011; Eves, 1969), y una tablilla de Susa publicada por Bruins y Rutten (1961) establece que el

perímetro del hexágono inscrito es $0;57,36$ de la circunferencia, lo que da $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ (Beckmann, 1971). Pero si Eudoxo demostró que la razón entre el círculo y el cuadrado del diámetro es constante, fue Arquímedes, en la segunda mitad del siglo III a. C., quien dio el primer método riguroso para acotarla. El breve tratado *Sobre la medida del círculo*, que nos ha llegado en un estado incompleto y probablemente reelaborado, contiene tres proposiciones: la primera establece que el círculo es igual al triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la circunferencia rectificada, lo cual identifica las dos constantes que hoy designamos con la misma letra; la tercera, que la circunferencia es menor que el triple del diámetro más una séptima parte, y mayor que el triple más diez setenta y unavas partes (Heath, 1897). En notación moderna,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \quad \text{es decir,} \quad 3,1408\dots < \pi < 3,1428\dots$$

Lo que hace de esta proposición un documento excepcional para nuestra historia no es tanto el resultado como el procedimiento, que combina la geometría eudoxiana con un cálculo de raíces irracionales de una precisión asombrosa y en el que Arquímedes nunca confunde las aproximaciones con los valores exactos.

2.8.2 El lema de la bisectriz

El procedimiento parte de un hexágono regular circunscrito y duplica sucesivamente el número de lados hasta llegar a noventa y seis, y en cada paso necesita calcular la razón entre el radio y el semilado del nuevo polígono a partir de la del anterior. La herramienta es una consecuencia de VI.3.

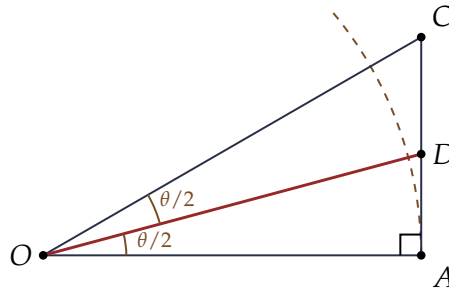


FIGURA 2.8. El lema de la bisectriz de Arquímedes. OA es el radio, AC el semilado del polígono circunscrito de ángulo central 2θ , y OD la bisectriz del ángulo AOC ; AD es el semilado del polígono con el doble de lados.

Fuente: Elaboración propia.

Lema 2.20. En el triángulo OAC , rectángulo en A , sea OD la bisectriz del ángulo en O (figura 2.8). Entonces

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC}.$$

Demostración. Por VI.3, la bisectriz divide el lado opuesto en la razón de los lados adyacentes: $CD : DA = OC : OA$. Componiendo (V.18), $CA : DA = OC + OA : OA$, y alternando e invirtiendo, $OA : AD = OA + OC : AC$, que es la igualdad del enunciado. En lenguaje trigonométrico, si $\theta = \angle AOC$, el lema dice que $\cot \frac{\theta}{2} = \cot \theta + \csc \theta$. ■

2.8.3 El cálculo de Arquímedes

Para el hexágono circunscrito, el ángulo AOC mide 30° , de modo que $OC = 2 AC$ y $OA = \sqrt{3} AC$. Arquímedes toma entonces $AC = 153$ y utiliza, sin explicar cómo la obtuvo, la acotación

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

de la que para la cota superior de π solo necesita la parte izquierda: $OA > 265$ y $OC = 306$. Aplica luego el lema 2.20 cuatro veces; en cada paso obtiene una cota inferior del nuevo radio OA sumando los dos términos, y una cota inferior de la nueva hipotenusa OC extrayendo una raíz cuadrada por defecto. La tabla 2.1 reproduce sus cifras, que he verificado una por una.

Lados	$OA : AC$ (cota inferior)	$OC^2 : AC^2$	$OC : AC$ (cota inferior)
6	265 : 153	—	306 : 153
12	571 : 153	349 450 : 23 409	$591\frac{1}{8} : 153$
24	$1162\frac{1}{8} : 153$	$1\,373\,943\frac{33}{64} : 23\,409$	$1172\frac{1}{8} : 153$
48	$2334\frac{1}{4} : 153$	$5\,472\,132\frac{1}{16} : 23\,409$	$2339\frac{1}{4} : 153$
96	$4673\frac{1}{2} : 153$	—	—

TABLA 2.1. El cálculo de Arquímedes para los polígonos circunscritos. En cada fila, la segunda columna es la suma de la segunda y la cuarta de la fila anterior (lema 2.20), y la cuarta es una cota inferior de la raíz cuadrada de la tercera. Los valores exactos de $153 \cot(180^\circ/n)$ son 265,004; 571,004; 1162,150; 2334,329 y 4673,667, todos mayores que las cotas de Arquímedes, como debe ser.

Fuente: Elaboración propia.

En el polígono de 96 lados, el semilado es a lo sumo $153/4673\frac{1}{2}$ del radio, de modo que el perímetro es a lo sumo $96 \cdot 2 \cdot 153 = 29\,376$ partes cuando el diámetro mide $2 \cdot 4673\frac{1}{2} = 9347$ de esas mismas partes, es decir, la razón del perímetro al diámetro es a lo sumo la de 14 688 a $4673\frac{1}{2}$; como la circunferencia es menor que el perímetro de cualquier polígono circunscrito,

$$\pi < \frac{14\,688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{7}.$$

El cálculo para los polígonos inscritos es análogo, utiliza la cota $\sqrt{3} < 1351/780$ y conduce a $\pi > 6336/2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}$.

Observación 2.21. Las dos fracciones con que Arquímedes acota $\sqrt{3}$ no son arbitrarias: se verifica $265^2 - 3 \cdot 153^2 = -2$ y $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$, de modo que ambas proceden de soluciones de ecuaciones del tipo $x^2 - 3y^2 = k$ con $|k|$ pequeño, y ambas son reducidas del desarrollo $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ de la tabla 1.1, cuya sucesión de reducidas es

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \dots$$

Nada en el texto conservado explica cómo las obtuvo, y la cuestión ha dado lugar a numerosas reconstrucciones; lo que sí muestra la coincidencia es que Arquímedes dominaba una técnica de aproximación de irracionales cuadráticos equivalente, en sus resultados, a la de los números laterales y diagonales de la sección 1.7, y que la aplicaba con plena conciencia de la dirección del error.

La medida del círculo ilustra con extraordinaria nitidez la actitud griega ante los irracionales. Arquímedes no afirma nunca que π sea $\frac{22}{7}$, ni siquiera que *valga aproximadamente* tanto, sino que la circunferencia es menor que el triple del diámetro más una séptima parte; cada aproximación va acompañada de su sentido, y el valor exacto queda fuera del alcance del cálculo pero no fuera del alcance de la demostración. Esta distinción, que la divulgación suele borrar al atribuir a Arquímedes «el valor $22/7$ », es precisamente la que los estudiantes deberían aprender a hacer.

2.8.4 La cuadratura de la parábola

La *Cuadratura de la parábola* ofrece el ejemplo más acabado del método de exhaustión en manos de Arquímedes, y tiene para nosotros un interés adicional: en ella aparece, por primera vez en la historia, la suma de una serie geométrica infinita, presentada, como no podía ser de otro modo, sin nombrar el infinito. El teorema establece que todo segmento de parábola es igual a los cuatro tercios del triángulo que tiene su misma base y su misma altura. Arquímedes ofrece dos demostraciones, una mecánica y otra puramente geométrica; presentamos la segunda en lenguaje moderno.

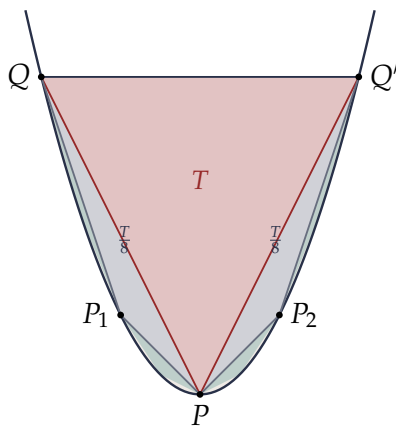


FIGURA 2.9. La cuadratura de la parábola. Sobre la cuerda QQ' se inscribe el triángulo QPQ' , de área T , cuyo vértice P es el punto de la parábola en que la tangente es paralela a la cuerda; sobre las cuerdas QP y PQ' se inscriben dos triángulos cuya suma es $T/4$; sobre las cuatro cuerdas resultantes, cuatro triángulos (en verde) cuya suma es $T/16$, y así sucesivamente.

Fuente: Elaboración propia.

Lema 2.22. Sean Q , P y Q' puntos de la parábola $y = x^2$ con abscisas a , $\frac{a+b}{2}$ y b , y sea $h = b - a$. Entonces el triángulo QPQ' tiene área $h^3/8$, y los dos triángulos contruidos del mismo modo sobre las cuerdas QP y PQ' tienen, juntos, área $\frac{1}{4} \cdot h^3/8$.

Demostración. Para tres puntos de la parábola con abscisas $x_1 < x_2 < x_3$, el área del triángulo que determinan es $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$, como se comprueba desarrollando el determinante de sus coordenadas. Con x_2 en el punto medio se obtiene $\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot h = h^3/8$. Cada una de las cuerdas QP y PQ' tiene proyección $h/2$, de modo que cada triángulo nuevo tiene área $(h/2)^3/8 = \frac{1}{8} \cdot h^3/8$, y los dos juntos, $\frac{1}{4} \cdot h^3/8$. ■

La propiedad que el lema expresa en coordenadas es la que Arquímedes demuestra geoméricamente en las proposiciones 21 y 22 de su tratado: en cada etapa, los triángulos nuevos suman la cuarta parte de los de la etapa anterior. Si llamamos T al área del primer triángulo, el polígono inscrito después de n etapas tiene área

$$T_n = T \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} \right),$$

y la clave del argumento es una identidad finita, que Arquímedes demuestra en la proposición 23 y que se comprueba por inducción:

$$T_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^n} = \frac{4}{3} T.$$

Teorema 2.23 (Arquímedes, *Cuadratura de la parábola*, prop. 24). *El área S del segmento de parábola limitado por la cuerda QQ' es igual a $\frac{4}{3} T$, donde T es el área del triángulo inscrito QPQ' .*

Demostración. Cada triángulo inscrito en un segmento de parábola es la mitad del paralelogramo limitado por su cuerda, por la tangente paralela a ella y por las dos paralelas al eje trazadas por los extremos de la cuerda, y ese paralelogramo contiene al segmento; por tanto, cada etapa sustrae de lo que resta del segmento más de su mitad, y por el lema 2.17 la diferencia $S - T_n$ puede hacerse menor que cualquier área dada. Supongamos que $S > \frac{4}{3} T$. Tomemos n con $S - T_n < S - \frac{4}{3} T$; entonces $T_n > \frac{4}{3} T$, lo que contradice la identidad anterior, según la cual $T_n < \frac{4}{3} T$. Supongamos ahora que $S < \frac{4}{3} T$. Por el axioma 2.16 existe n con $\frac{1}{3} \cdot T/4^n < \frac{4}{3} T - S$, y la identidad da entonces $T_n = \frac{4}{3} T - \frac{1}{3} \cdot T/4^n > S$, lo cual es imposible porque el polígono T_n está inscrito en el segmento. Luego $S = \frac{4}{3} T$. ■

El lector moderno reconocerá en el teorema la suma de la serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{4}{3}$ y, en la parábola $y = x^2$, la integral $\int_a^b ((\text{cuerda}) - x^2) dx = h^3/6 = \frac{4}{3} \cdot h^3/8$. Arquímedes no escribe ni lo uno ni lo otro: no suma infinitos términos, sino que prueba que el área no puede ser ni mayor ni menor que $\frac{4}{3} T$, y la finitud de cada paso es la garantía del rigor.

NOTA HISTÓRICA: EL PALIMPSESTO DEL *Método*

La doble reducción al absurdo verifica resultados, pero no enseña a descubrirlos, y durante siglos los lectores de Arquímedes se preguntaron cómo había llegado a sus teoremas. La respuesta apareció en 1906, cuando Johan Ludvig Heiberg identificó en un palimpsesto conservado en Constantinopla, un libro de oraciones del siglo XIII escrito sobre pergaminos raspados, una copia del siglo X de varias obras de Arquímedes, entre ellas el *Método relativo a los teoremas mecánicos*, dirigido a Eratóstenes, que se creía perdido. En él Arquímedes expone el procedimiento heurístico, mecánico e infinitesimal, con que había descubierto sus resultados, entre ellos la cuadratura de la parábola, equilibrando en una palanca imaginaria las figuras descompuestas en infinitas «líneas»; y advierte expresamente que ese procedimiento no constituye una demostración, que debe darse después por la vía geométrica (Heath, 1912; Stillwell, 2010). En el mismo prefacio recuerda que Demócrito había enunciado sin demostración que el cono y la pirámide son la tercera parte del cilindro y del prisma, y que fue Eudoxo quien primero lo demostró. El palimpsesto, desaparecido

durante buena parte del siglo XX, reapareció en 1998 y fue estudiado con técnicas de imagen multiespectral a comienzos del siglo XXI.

2.9 El Libro X: una teoría de los irracionales

El Libro X es el más extenso de los *Elementos*, con 115 proposiciones en la edición de Heiberg, y también el que más desconcierto ha producido entre los lectores modernos. Knorr abre su estudio con una constatación que cualquier lector compartirá: «para el lector moderno, el Libro Décimo de Euclides es con mucho la parte más intimidante de los *Elementos*, en virtud de su enorme extensión y de la oscuridad de sus técnicas y de sus motivos» (Knorr, 1983, p. 41; traducción propia); el título de su artículo recoge una antigua expresión francesa que lo llamaba «la cruz de los matemáticos».

2.9.1 El vocabulario de Euclides

El objeto del libro es clasificar ciertas rectas que resultan de combinar, mediante sumas, restas y extracciones de raíces cuadradas, segmentos conmensurables o inconmensurables con una recta dada que se toma como referencia, llamada *recta expresable* (*rhētē*, literalmente «decible»). Euclides llama *expresables* a las rectas conmensurables con ella, en longitud o solo en cuadrado, y *sin razón* (*álogoi*, las que no se pueden decir mediante una razón con la recta de referencia) a las demás; conviene advertir que este uso no coincide con el nuestro, porque una recta de longitud $\sqrt{2}$, conmensurable en cuadrado con la unidad, es «expresable» para Euclides. Tomando la recta de referencia como unidad, la especie más simple es la *medial* (X.21), lado de un cuadrado igual al rectángulo formado por dos rectas expresables conmensurables solo en cuadrado, como $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. A continuación Euclides define seis especies obtenidas por adición y seis obtenidas por sustracción, que junto con la medial completan las trece especies de irracionales del libro (tabla 2.2).

<i>Medial</i> (X.21)	
<i>Por adición</i>	<i>Por sustracción</i>
Binomial (X.36), p. ej. $1 + \sqrt{2}$	Apótoma (X.73), p. ej. $\sqrt{2} - 1$
Primera bimedial (X.37)	Primera apótoma de una medial (X.74)
Segunda bimedial (X.38)	Segunda apótoma de una medial (X.75)
Mayor (X.39)	Menor (X.76)
Lado de un área expresable más una medial (X.40)	La que produce con un área expresable un todo medial (X.77)
Lado de la suma de dos mediales (X.41)	La que produce con un área medial un todo medial (X.78)

TABLA 2.2. Las trece especies de rectas irracionales del Libro X. Cada especie por sustracción corresponde a la especie por adición de la misma fila, y la proposición X.111 y el resumen que la sigue establecen que las trece son distintas entre sí.

Fuente: Elaboración propia.

El resultado central del libro es que estas especies son distintas entre sí y que cada recta pertenece a lo sumo a una de ellas, lo que exige demostrar, entre otras cosas, que una binomial se descompone en sus dos términos de una sola manera (X.42). El caso más sencillo de esta unicidad admite una formulación moderna muy breve.

Teorema 2.24 (*Elementos* X.42, caso particular en forma moderna). Si a, c son racionales, b, d racionales positivos que no son cuadrados de racionales y $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Demostración. Si $a \neq c$, entonces $\sqrt{b} = (c - a) + \sqrt{d}$ con $c - a \neq 0$ racional; elevando al cuadrado, $b = (c - a)^2 + d + 2(c - a)\sqrt{d}$, de donde $\sqrt{d} = \frac{b - d - (c - a)^2}{2(c - a)}$ sería racional, contra la hipótesis. Luego $a = c$, y en consecuencia $\sqrt{b} = \sqrt{d}$ y $b = d$. ■

2.9.2 ¿Para qué servía el Libro X?

La pregunta por la finalidad del Libro X no tiene una respuesta evidente. Una parte de la respuesta se encuentra en el Libro XIII, donde Euclides construye los cinco poliedros regulares inscritos en una esfera y clasifica sus aristas: la del icosaedro resulta ser una *menor* y la del dodecaedro una *apótoma*, lo cual solo tiene sentido si esas especies han sido definidas y distinguidas previamente. Knorr sostiene que el libro incorpora un tratado sobre las rectas irracionales compuesto poco antes de Euclides y construido a partir de problemas geométricos concretos, y es muy severo con su forma: «dicho simplemente, el Libro X es un desastre pedagógico» (Knorr, 1983, p. 59; traducción propia), porque las ideas matemáticas esenciales quedan sofocadas por el detalle y la motivación geométrica queda lejos del lector.

A mi juicio, la importancia del Libro X para nuestra historia es doble. Por un lado, muestra que hacia el año 300 a. C. la matemática griega había pasado de la mera constatación de que existen magnitudes inconmensurables a una teoría sistemática de ellas, con un grado de elaboración que no volvería a alcanzarse hasta la Edad Media islámica. Por otro, revela el límite de esa teoría con una claridad que el propio libro no advierte: al no disponer de un concepto de número capaz de abarcar tales magnitudes, Euclides debe tratarlas como especies geométricas, cada una con su nombre, y el sistema resulta por fuerza cerrado, porque solo contempla los irracionales que pueden construirse con regla y compás mediante una o dos extracciones de raíces cuadradas. Un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$, o la circunferencia rectificada, quedan fuera de toda clasificación. Cuando los algebristas árabes y latinos traten estas mismas expresiones como objetos de cálculo, el Libro X se convertirá, según la interpretación de Rashed, en el punto de partida de una aritmetización de lo irracional (Rashed, 1994), proceso que será el tema del capítulo 3.

2.10 ¿Anticipó Eudoxo a Dedekind?

2.10.1 Una pregunta con historia

La semejanza entre la definición 5 del Libro V y la teoría de las cortaduras con que Dedekind construyó en 1872 los números reales es tan notoria que la pregunta de si Eudoxo anticipó a Dedekind se formuló casi en el mismo momento en que la teoría moderna vio la luz. Fue Rudolf

Lipschitz quien, en la correspondencia que mantuvo con Dedekind en 1876, sostuvo que las cortaduras no añadían nada esencial a la definición euclidiana; Dedekind admitió de buen grado el parentesco, pero insistió en una diferencia que consideraba decisiva: Euclides nunca afirma que a cada cortadura de los racionales corresponda una razón entre magnitudes, es decir, nunca postula la completitud del dominio de las magnitudes, y precisamente esa completitud es el contenido del axioma de continuidad del propio Dedekind (Ferreirós, 2007; Stein, 1990). En la historiografía posterior, la pregunta ha recibido respuestas muy distintas. La biografía de Eudoxo de la colección MacTutor, por ejemplo, recoge sin reservas el juicio de que es difícil exagerar la importancia de la teoría, «pues equivale a una definición rigurosa del número real» (O'Connor y Robertson, 1999, traducción propia). Reck, en su exposición de los fundamentos dedekindianos, adopta una posición mucho más matizada: la teoría de Eudoxo proporciona un criterio contextual para la igualdad de razones, pero no define las razones mismas, de modo que estas no se conciben como objetos independientes (Reck, 2025, sección 2.1).

Guacaneme ha resumido la paradoja histórica que subyace a este debate con una fórmula feliz: el tratamiento euclidiano de la proporción, construido «sin recurrir a los valores numéricos de sus medidas», resultó ser, andando el tiempo, un esquema decisivo para la constitución de los números reales, de modo que «los historiadores de las Matemáticas han discutido la relación entre estas teorías» y, conjetura el autor, «el estudio de sus posturas puede traer beneficios a la educación del profesor de Matemáticas» (Guacaneme, 2012, p. 113).

2.10.2 Una respuesta matizada

La cuestión admite, en mi opinión, una respuesta que conviene formular con cuidado. El teorema 2.13 muestra que la definición eudoxiana de igualdad de razones es lógicamente equivalente a la igualdad de los conjuntos inferiores de racionales, y en este sentido la estructura de la idea es la misma: en ambos casos una magnitud continua queda caracterizada por el modo en que separa las fracciones. Pero hay al menos cuatro diferencias de fondo.

1. *Dadas o construidas.* En la teoría griega las razones están dadas por las magnitudes, y la definición solo sirve para compararlas; en la moderna, los números se construyen a partir de los racionales, y la pregunta de si cada cortadura determina un número deja de ser un supuesto sobre el mundo geométrico para convertirse en una definición.
2. *Completitud.* Euclides supone tácitamente la existencia de la cuarta proporcional, pero nunca afirma, ni necesita afirmar, que a cada partición de las fracciones corresponda una razón; Dedekind hace de esa correspondencia el núcleo de su teoría.
3. *Operaciones.* Las razones griegas no forman un sistema cerrado bajo operaciones aritméticas: Euclides define la composición de razones, que corresponde a su producto, pero no su suma, y nunca trata una razón como una magnitud susceptible de ser, a su vez, término de otra razón; la razón, en suma, no es un número.
4. *Homogeneidad.* La teoría de Eudoxo exige magnitudes homogéneas y no concibe una unidad universal; el número real moderno es una entidad abstracta, independiente de toda especie de magnitud.

Como ha argumentado Stein (1990), la teoría de Eudoxo puede leerse como una teoría de los números reales positivos *en potencia*; pero esa potencia solo se actualizó cuando la matemática del siglo XIX tuvo razones, y herramientas, para dar el paso de la magnitud al número. Afirmar que Eudoxo «definió los números reales» es, a mi juicio, proyectar sobre su teoría una pregunta que él no se hizo; afirmar que su teoría no tiene nada que ver con la de Dedekind es ignorar que el propio Dedekind reconoció en ella el antecedente más próximo de la suya. El capítulo siguiente narra cómo se preparó, a lo largo de dieciocho siglos de cálculo, el paso que separa ambas posiciones.

2.11 ¿Hubo un álgebra geométrica griega?

A lo largo de este capítulo hemos traducido sistemáticamente las proposiciones griegas al lenguaje del álgebra moderna: hemos escrito $mA > nB$ donde Euclides describe múltiplos de segmentos, $\sqrt{3}$ donde Arquímedes habla de la razón entre dos rectas, y $h^3/8$ donde el texto compara triángulos inscritos en una parábola. Esa traducción es útil y, para el lector moderno, casi inevitable; pero plantea un problema historiográfico que ha dividido a los especialistas durante medio siglo y que un libro como este no puede eludir.

Desde fines del siglo XIX, buena parte de la historiografía interpretó la matemática griega, y en particular el Libro II de los *Elementos*, como un álgebra expresada en lenguaje geométrico: las proposiciones sobre rectángulos y cuadrados serían identidades algebraicas «disfrazadas», y el disfraz se habría impuesto, precisamente, por la necesidad de tratar con magnitudes inconmensurables que no podían expresarse mediante números. Corry recuerda que esta visión fue promovida por estudiosos tan prominentes como Paul Tannery, Hieronymus Georg Zeuthen, Thomas Little Heath y Otto Neugebauer, y que el Libro II se convirtió en el foco central de su elaboración (Corry, 2013, n. 1). En 1975, Sabetai Unguru publicó un artículo de título provocador, *Sobre la necesidad de reescribir la historia de la matemática griega*, en el que calificaba esa lectura de anacrónica: atribuir a los griegos un álgebra que no escribieron era, a su juicio, leer los textos antiguos con los ojos de un matemático moderno y no con los de un historiador (Unguru, 1975). El artículo provocó respuestas inmediatas y muy duras de matemáticos de la talla de van der Waerden, Freudenthal y Weil, y el debate subsiguiente, reunido en buena parte en la antología de Christianidis (2004), se convirtió, en palabras de Sialaros y Christianidis, en «posiblemente el tema más controvertido de las últimas décadas en el campo de la matemática griega» (Sialaros y Christianidis, 2016, p. 129; traducción propia).

La posición de Unguru acabó siendo mayoritaria entre los historiadores. Grattan-Guinness lo constataba en 1996: durante un siglo, más o menos, buena parte de la matemática griega se ha interpretado «como álgebra bajo disfraz geométrico y aritmético», pero en los últimos veinticinco años algunos historiadores han planteado objeciones a esta interpretación, «al considerarla engañosa y anacrónica, e incluso errónea» (Grattan-Guinness, 1996, p. 355; traducción propia). El consenso, sin embargo, no es unánime. Blåsjö (2016) ha sostenido en fechas recientes que la hipótesis del álgebra geométrica, que «fue en otro tiempo la interpretación aceptada de la matemática griega» y que «en las últimas décadas se ha convertido en anatema para muchos», debería restablecerse como una hipótesis histórica viable (Blåsjö, 2016, p. 325; traducción propia); y Sialaros y Christianidis, desde otra perspectiva, proponen que los orígenes del razonamiento

algebraico deberían buscarse «en la práctica de resolución de problemas, más que en la tradición de demostración de teoremas» (Sialaros y Christianidis, 2016, p. 129; traducción propia).

Mi posición, que ha orientado la escritura de este capítulo, es la siguiente. Traducir un teorema griego al lenguaje moderno es legítimo, y a menudo indispensable, siempre que la traducción se presente como tal y no como una descripción de lo que el autor antiguo pensaba; y la historia de la inconmensurabilidad ofrece un argumento especialmente fuerte a favor de esa cautela. Si los griegos hubieran dispuesto de un álgebra de los números reales, aunque fuera disfrazada, la teoría de Eudoxo habría sido innecesaria; es precisamente porque las razones entre magnitudes no eran números por lo que hizo falta una teoría como la del Libro V, y es precisamente porque esa teoría no las convertía en números por lo que el camino hasta Dedekind fue tan largo. En este punto, al menos, la lectura «algebraica» no solo es anacrónica: borra el problema mismo que este libro intenta contar.

2.12 Por qué esta historia importa en la enseñanza

2.12.1 Razón y proporción: un campo central y problemático

La razón, la proporción y la proporcionalidad son, junto con el número racional, los conceptos de la matemática escolar sobre los que más investigación didáctica se ha acumulado. En su estado del arte, Obando, Vasco y Arboleda subrayan que el razonamiento proporcional «se ha posicionado como un campo privilegiado para las investigaciones en virtud de su lugar central en las matemáticas que se enseñan en la escuela, en tanto pone en relación ámbitos conceptuales necesarios para la comprensión y modelación de múltiples situaciones de las matemáticas, las ciencias naturales y sociales y de la vida diaria» (Obando et al., 2014, p. 72). Las dificultades de los estudiantes están bien documentadas. Fernández y Llinares, en un estudio con estudiantes de primaria y secundaria, identifican dos tendencias simétricas: el «uso abusivo de métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales» y, al mismo tiempo, el uso abusivo de métodos multiplicativos en situaciones de estructura aditiva, y concluyen que la enseñanza debe centrarse en «el análisis de las relaciones entre las cantidades de las situaciones como un objetivo explícito» (Fernández y Llinares, 2012, pp. 130 y 139).

La historia que este capítulo ha contado ilumina esas dificultades desde un ángulo inesperado. La escuela suele presentar la proporción como una igualdad entre fracciones, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, es decir, en el marco numérico que para los griegos solo valía en el caso conmensurable; la teoría de Eudoxo muestra que la proporción es, en su raíz, una relación entre *relaciones de tamaño*, anterior a toda medida, y que puede definirse sin fracciones. Guacaneme lo expresa al caracterizar el Libro V como un esquema para la formulación de relaciones entre magnitudes «sin interesar si estas eran o no conmensurables y, en consecuencia, sin recurrir a los valores numéricos de sus medidas para establecer tanto las razones entre magnitudes, como la proporción entre razones» (Guacaneme, 2012, p. 113). Que un futuro profesor conozca esa otra forma de pensar la proporción no implica que deba enseñarla a sus estudiantes, pero sí le permite reconocer que la identificación entre razón y fracción, que él da por natural, es una conquista histórica y no un punto de partida.

2.12.2 El límite y sus obstáculos

El método de exhaustión ocupa un lugar singular en la historia del concepto de límite, y la investigación didáctica lo ha advertido. Desde el trabajo clásico de Tall y Vinner sabemos que la *imagen conceptual* que un estudiante tiene de una noción, definida como «la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados», puede divergir de la *definición conceptual*, «una forma de palabras usada para especificar ese concepto»; y entre las imágenes que estos autores documentan figura una muy reveladora, según la cual una sucesión «se acerca a s cuando n se hace grande, pero no alcanza realmente s hasta el infinito» (Tall y Vinner, 1981, traducción propia). Sierpinski (1987) mostró que la noción de límite tropieza con obstáculos epistemológicos, en el sentido de Brousseau, que tienen correlatos en su propia historia, y un estudio latinoamericano reciente con estudiantes de ingeniería confirma que «el desarrollo y naturaleza propia del concepto acarrea obstáculos epistemológicos y conflictos con las distintas representaciones de este» (Morante et al., 2022, pp. 249–250).

La exhaustión ofrece, frente a esas imágenes dinámicas del límite, una alternativa históricamente anterior y conceptualmente más próxima a la definición moderna. El argumento de XII.2 no dice que los polígonos «se acercan» al círculo, sino que, dada cualquier magnitud, existe un polígono cuya diferencia con el círculo es menor que ella; y la doble reducción al absurdo es, en su estructura lógica, la misma que se emplea para demostrar la unicidad del límite con la definición ε - δ . Medina, en su estudio de las concepciones históricas del límite, plantea precisamente la pregunta didáctica que de ahí se desprende: «¿Es posible acercar a la comprensión del concepto a partir de la definición formal ε - δ ?» (Medina, 2001). Mi impresión es que el camino que va del lema X.1 a la cuadratura de la parábola ofrece un recorrido intermedio especialmente valioso: permite trabajar la idea de aproximación arbitraria con objetos geométricos visibles antes de formalizarla con desigualdades entre números.

2.12.3 La historia en la formación del profesorado

Todo lo anterior apunta, más que al aula de secundaria, a la formación de quienes enseñarán en ella. Furinghetti sostuvo, en un trabajo muy citado, que los futuros profesores necesitan «un contexto que les permita mirar los temas que enseñarán de una manera diferente», y que la historia puede proporcionarlo (Furinghetti, 2007, p. 131; traducción propia); y Jankvist, Clark y Mosvold, al analizar programas de formación de formadores, señalan el potencial del uso de la historia, «y en particular del material de fuentes históricas», tanto en la formación de profesores como en la de sus formadores (Jankvist et al., 2020, p. 311; traducción propia). Conviene, con todo, no exagerar la evidencia disponible. Clark advertía que, al menos en los Estados Unidos, pocos esfuerzos de investigación, «si es que alguno», habían estudiado cómo contribuye la historia de la matemática al conocimiento matemático para la enseñanza (Clark, 2012, p. 67; traducción propia); y el propio Guacaneme concluye su análisis invitando a «la comunidad de formadores de profesores a investigar empíricamente las bondades y limitaciones de incorporar el estudio de aspectos históricos en sus propuestas curriculares» (Guacaneme, 2012, p. 130).

A esas advertencias añadiría una observación del mismo Guacaneme que me parece especialmente pertinente para la teoría de Eudoxo: el estudio de una matemática de otra época ofrecería, en sus palabras, «la oportunidad al profesor para reflexionar en torno a si el estudio

de una teoría no siempre implica, como actividad matemática, la enculturación en una tradición exógena al individuo que realiza el estudio» (Guacaneme, 2012, p. 128). Leer el Libro V obliga al lector moderno, que lleva los números reales incorporados como un hábito, a pensar sin ellos; y esa experiencia de extrañamiento es, quizá, la mejor preparación para comprender a un estudiante que todavía no los tiene.

EN EL AULA: UNA SECUENCIA PARA LA FORMACIÓN DOCENTE

La secuencia que propongo para un curso de formación inicial de profesores consta de tres momentos. En el primero, los participantes comparan las dos demostraciones del teorema de Tales (figuras 2.1 y 2.6) y localizan el paso en que falla la primera ante segmentos inconmensurables. En el segundo, aplican la definición 5 a casos concretos, como en el ejemplo 2.6, y construyen la partición de las fracciones determinada por la razón entre la diagonal y el lado, con lo que anticipan, sin nombrarla, la idea de cortadura. En el tercero, reproducen con papel cuadriculado o con un programa de geometría dinámica las primeras etapas de la cuadratura de la parábola, calculan las áreas T , $T + \frac{T}{4}$, $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16}$, ... y discuten por qué Arquímedes no puede, ni necesita, «llegar» a $\frac{4}{3}T$. En los tres momentos la historia funciona, en la terminología de Jankvist examinada en la sección 1.13, a la vez como herramienta para comprender un contenido y como objetivo en sí misma.

En el tercer momento suele aparecer una objeción muy natural: «si nunca llega, entonces el área no es $\frac{4}{3}T$ ». Es la objeción de los contemporáneos de Zenón y la de muchos estudiantes de cálculo, y lo mejor que puede hacer el formador es tomarla en serio: la doble reducción al absurdo de Arquímedes es, precisamente, una respuesta a esa objeción que no necesita afirmar que el proceso termine.

Síntesis del capítulo

IDEAS PRINCIPALES

1. La inconmensurabilidad dejó sin demostración las proposiciones sobre proporciones y semejanza cuya prueba descansaba en la existencia de una medida común; el problema era técnico antes que filosófico.
2. Una primera teoría, probablemente anterior a Eudoxo, definía la igualdad de razones mediante la igualdad de las sucesiones de la sustracción recíproca; era correcta, pero difícil de manejar.
3. La teoría del Libro V, atribuida a Eudoxo, define cuándo dos razones son iguales sin definir qué es una razón: dos razones son iguales cuando ninguna fracción las separa. Con ella la semejanza queda demostrada con plena generalidad (VI.1 y VI.2).
4. La teoría descansa en dos supuestos que Euclides no enuncia: el axioma de Eudoxo–Arquímedes y la existencia de la cuarta proporcional.
5. El método de exhaustión, fundado en X.1, demuestra resultados sobre figuras curvilíneas sin recurrir al límite, mediante aproximación arbitraria y doble reducción al absurdo; Arquímedes lo llevó a su máxima expresión en la medida del círculo y la cuadratura de la parábola.
6. El Libro X clasifica trece especies de rectas irracionales y muestra a la vez la potencia y el límite de un tratamiento puramente geométrico de lo irracional.
7. La teoría de Eudoxo contiene la estructura de la cortadura de Dedekind, pero no su contenido esencial: las razones no son números, y la completitud no se afirma. Leerla como álgebra disfrazada borra precisamente esa diferencia.

Ejercicios

Ejercicios matemáticos

Ejercicio 2.1. Demuestre, usando únicamente la definición 2.4, la propiedad de inversión: si $A : B = C : D$, entonces $B : A = D : C$.

Ejercicio 2.2. Complete el «examen de los casos» de la demostración de la proposición 2.11: muestre que si para algún par (m, n) las alternativas de la definición 2.4 difieren entre $A : C$ y $B : D$, entonces una de las dos razones es mayor que la otra en el sentido de la definición 2.5.

Ejercicio 2.3. Usando la definición 2.5 y el método del ejemplo 2.6, decida la posición de la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado respecto de $\frac{41}{29}$ y de $\frac{99}{70}$. Explique por qué ninguna fracción puede coincidir con ella.

Ejercicio 2.4. Demuestre que si $A : B > C : D$ en el sentido de la definición 2.5, entonces $\mathcal{L}(C : D) \subsetneq \mathcal{L}(A : B)$. ¿Vale el recíproco?

Ejercicio 2.5. Considere «segmentos» de la forma $a + b\varepsilon$ con a, b reales, $a > 0$ o bien $a = 0 < b$, sumados componente a componente y ordenados lexicográficamente, donde ε representa un infinitésimo positivo. (a) Muestre que ε y 1 no tienen razón en el sentido de la definición V.4. (b) Muestre que los pares $(1, 1 + \varepsilon)$ y $(1, 1 + 2\varepsilon)$ satisfacen las condiciones de la definición 2.4, aunque $1 + \varepsilon \neq 1 + 2\varepsilon$. (c) La proposición V.9 afirma también que si $A : B = A : C$, entonces $B = C$. Identifique el paso de la demostración de la proposición 2.10, adaptada a esta forma, que falla en este sistema, y relaciónelo con el axioma 2.16.

Ejercicio 2.6. Demuestre por inducción la identidad $T_n + \frac{1}{3} \cdot T/4^n = \frac{4}{3}T$ de la sección 2.8, y verifique con el lema 2.22 que para la parábola $y = x^2$ y la cuerda de extremos $x = -2$ y $x = 2$ el segmento tiene área $\frac{32}{3}$.

Ejercicio 2.7. Complete el cálculo de Arquímedes para los polígonos inscritos: partiendo de un hexágono inscrito y de la cota $\sqrt{3} < 1351/780$, obtenga la acotación $\pi > 3\frac{10}{71}$.

Ejercicio 2.8. Verifique que $\frac{265}{153}$ y $\frac{1351}{780}$ son reducidas del desarrollo de $\sqrt{3}$ en fracción continua, que la primera es menor y la segunda mayor que $\sqrt{3}$, y compruebe que $\frac{1351}{780}$ se obtiene de $\frac{265}{153}$ mediante tres pasos de la recurrencia de las reducidas.

Ejercicio 2.9. Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional y que no puede escribirse en la forma $a + \sqrt{b}$ con a, b racionales.

Ejercicios históricos y didácticos

Ejercicio 2.10. Redacte, para un curso de formación docente, una comparación argumentada entre la demostración del teorema de Tales por conteo de partes iguales y la demostración eudoxiana de VI.2. ¿Qué gana y qué pierde el estudiante con cada una?

Ejercicio 2.11. Examine cómo se presenta la proporcionalidad en dos libros de texto de secundaria de su país. ¿Se define la proporción como igualdad de fracciones? ¿Se advierte en algún momento la existencia de razones que no son racionales, por ejemplo entre la diagonal y el lado del cuadrado?

Ejercicio 2.12. Lea el resumen del debate sobre el álgebra geométrica presentado en la sección 2.11 y escriba una página en la que defienda o critique el uso de la notación algebraica moderna para exponer la proposición VI.1 en un aula de secundaria.

Lecturas recomendadas

Heath (1956)

La traducción comentada de los *Elementos*, cuyas notas a los Libros V, X y XII siguen siendo una referencia indispensable.

González Urbaneja (2008)

Una exposición clara y bien documentada, en español, de la teoría de la proporción y del método de exhaución.

Stein (1990)

El análisis filosófico más fino de la relación entre la teoría de Eudoxo y la de Dedekind.

Oller Marcén y Gairín (2013)

La génesis histórica de la razón y la proporción, con atención a su aritmetización posterior; útil para la formación docente.

Giovannini (2015)

Sobre la lectura que Hilbert hizo de la teoría euclidiana y el papel del axioma de Arquímedes.

Guacaneme (2012)

Una reflexión latinoamericana sobre el valor de la teoría euclidiana de la proporción para el conocimiento del profesor.

Sialaros y Christianidis (2016)

Una puesta al día del debate sobre el álgebra geométrica.

La evolución hacia el concepto aritmético y analítico

Que no hay números absurdos, irracionales, irregulares, inexplicables o sordos.

Simon Stevin, L'Arithmétique (1585)

La teoría de Eudoxo resolvía el problema lógico de las proporciones a costa de mantener separados dos mundos: el de los números, que se cuentan, y el de las magnitudes, que se miden. Durante los diecinueve siglos que separan a Euclides de Descartes esa separación fue erosionándose lentamente, no tanto por obra de una reflexión teórica como por la presión del cálculo. Los astrónomos, los agrimensores, los algebristas y los mercaderes necesitaban operar con raíces cuadradas y cúbicas, con longitudes de circunferencias y con razones inconmensurables, y al hacerlo las trataban, de hecho, como si fueran números, aunque no siempre estuvieran dispuestos a concederles ese nombre. La tesis de Stevin que sirve de epígrafe a este capítulo, formulada con la contundencia de quien zanja una disputa, resume el punto de llegada de ese largo proceso; pero conviene advertir desde ahora que Stevin afirmó que los irracionales son números sin disponer de ninguna definición que le permitiera demostrarlo, y que esa afirmación, aceptada en la práctica por casi todos sus sucesores, esperaría todavía casi tres siglos su justificación.

Este capítulo sigue ese proceso en sus principales escenarios: la Alejandría helenística y romana, donde el cálculo aproximado convivió con el ideal demostrativo de los *Elementos*; la India, donde el tratamiento de las ecuaciones cuadráticas alcanzó una profundidad sin paralelo; China, con su tradición algorítmica; el mundo islámico, donde el Libro X se convirtió en materia de álgebra y la razón empezó a tratarse como número; la Europa medieval y renacentista, donde Campano, Fibonacci, Oresme, Bombelli y Stevin prepararon, cada uno a su modo, la aritmetización; y el siglo XVII, con Descartes y Newton. Dedicamos luego un espacio considerable a la teoría de las fracciones continuas, que es la forma moderna de la antifairesis y proporciona la caracterización más fina de los irracionales por la calidad de sus aproximaciones, y terminamos con las primeras demostraciones de irracionalidad de las constantes del análisis y con el teorema de Wantzel, cuya recepción, como veremos, dice tanto sobre la matemática del siglo XIX como el teorema mismo. La sección final examina lo que la investigación didáctica ha documentado sobre la comprensión de los decimales infinitos, que son, para la mayoría de los estudiantes, la única puerta de entrada a los irracionales.

MAPA DEL CAPÍTULO

3.1	El cálculo alejandrino: el método de Herón y la extracción de raíces de Teón.
3.2–3.3	La India y China: la ecuación de Pell, las series de Kerala y la aproximación de π .
3.4	El mundo islámico: los números sordos y la razón como número.
3.5–3.6	De Campano a Stevin: la denominación de las razones, las cúbicas y los decimales.
3.7–3.8	Descartes, Newton y los procesos infinitos del siglo XVII.
3.9	Las fracciones continuas: la antifairesis hecha aritmética.
3.10–3.11	La irracionalidad de e y de π ; Wantzel y los problemas clásicos.
3.12	Los decimales infinitos en el aula: lo que dice la investigación.

3.1 Herón, Teón y el cálculo alejandrino**3.1.1 El método de Herón**

En la matemática alejandrina de los siglos que siguen a Euclides convivieron dos tradiciones. Una, la de Arquímedes y Apolonio, prolongaba el ideal demostrativo de los *Elementos*; la otra, representada por la astronomía de Hiparco y Ptolomeo y por la geometría métrica de Herón, se interesaba sobre todo por obtener resultados numéricos, y para ello no dudaba en tratar las magnitudes irracionales mediante aproximaciones expresadas en fracciones. Ya vimos en el capítulo anterior que el propio Arquímedes, en la *Medida del círculo*, manejaba aproximaciones de $\sqrt{3}$ con una precisión asombrosa (observación 2.21); pero en su obra el cálculo estaba subordinado a la demostración, mientras que en la de Herón, cuya actividad se sitúa hacia el siglo I de nuestra era, el cálculo es el fin. El Libro I de su *Métrica* ofrece el ejemplo más claro de esa actitud: al calcular el área de un triángulo de lados 7, 8 y 9 mediante la fórmula que hoy lleva su nombre, obtiene $\sqrt{720}$ y explica cómo aproximarla (Heath, 1921).

HERÓN, Métrica I.8 (PARÁFRASIS A PARTIR DE LA VERSIÓN DE HEATH)

Como 720 no tiene lado racional, tomaremos su lado con una diferencia muy pequeña. Puesto que el cuadrado más próximo es 729, cuyo lado es 27, dividimos 720 entre 27 y resulta $26\frac{2}{3}$; sumamos 27 y resulta $53\frac{2}{3}$; tomamos la mitad, que es $26\frac{5}{6}$. Este será el lado aproximado de 720, pues $26\frac{5}{6}$ multiplicado por sí mismo da $720\frac{1}{36}$, y la diferencia es $\frac{1}{36}$. Si queremos que la diferencia sea menor, pondremos $720\frac{1}{36}$ en lugar de 729 y, procediendo del mismo modo, hallaremos una diferencia mucho menor.

El procedimiento consiste en tomar una aproximación x de $\sqrt{a}$, observar que a/x es otra aproximación situada del otro lado de la raíz, y reemplazar ambas por su media aritmética. Es, como vimos en la sección 1.1, el mismo procedimiento que Fowler y Robson reconstruyeron para los escribas paleobabilónicos, y admite una justificación geométrica que Herón pudo conocer a través de la proposición II.5 de los *Elementos*: el cuadrado construido sobre la media de dos segmentos excede al rectángulo que forman en el cuadrado construido sobre su semidiferencia (figura 3.1). El texto contiene además una observación preciosa: el método puede iterarse

indefinidamente, y cada paso reduce el error. Aplicado una segunda vez, en efecto, da $\frac{51841}{1932}$, que difiere de $\sqrt{720}$ en menos de cinco milmillonésimas.

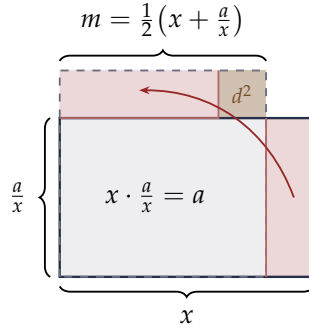


FIGURA 3.1. La justificación geométrica del método de Herón (*Elementos* II.5). El rectángulo de lados x y a/x tiene área a ; si se traslada la franja que sobresale del cuadrado de lado m , igual a la media de los lados, falta únicamente el cuadradito de lado $d = \frac{1}{2}(x - \frac{a}{x})$. Por tanto $m^2 = a + d^2$, y m aproxima $\sqrt{a}$ por exceso con un error del orden de d^2 .

Fuente: Elaboración propia.

Teorema 3.1 (Convergencia del método de Herón). Sea $a > 0$ y sea $x_0 > 0$ arbitrario. Definamos $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$. Entonces $x_n \geq \sqrt{a}$ para todo $n \geq 1$, la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es decreciente y

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

En particular, $x_n \rightarrow \sqrt{a}$, y el número de cifras correctas aproximadamente se duplica en cada paso. Si a y x_0 son racionales, todos los x_n son racionales.

Demostración. La identidad se obtiene de un cálculo directo,

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2\sqrt{a}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geq 0,$$

lo que prueba de paso que $x_n \geq \sqrt{a}$ para $n \geq 1$. Para tales n se tiene $a/x_n \leq x_n$, de modo que $x_{n+1} \leq x_n$. Además,

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2} \cdot \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n} \leq \frac{x_n - \sqrt{a}}{2},$$

de donde $0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq (x_1 - \sqrt{a})/2^{n-1} \rightarrow 0$. La afirmación sobre las cifras se sigue de la identidad, pues si el error de x_n es del orden de 10^{-k} , el de x_{n+1} es del orden de 10^{-2k} ; la última afirmación es evidente. ■

La observación final del teorema tiene una consecuencia que Herón no podía formular pero que resultará central en el capítulo 4. Con $a = 2$ y $x_0 = 1$, el método produce la sucesión de números racionales

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{665857}{470832}, \quad \dots,$$

que, como demostramos en la proposición 1.11, recorre los números laterales y diagonales duplicando el índice. Sus términos se acercan entre sí tanto como se quiera y, sin embargo, no se acercan a ningún número racional: en el mundo de los racionales, la sucesión de Herón «debería» converger y no tiene hacia dónde hacerlo. Cantor convertirá precisamente esta clase de sucesiones en la definición del número real.

3.1.2 Teón y la extracción sexagesimal

La astronomía helenística, por su parte, necesitaba tablas de cuerdas, es decir, de lo que hoy llamaríamos senos, y esas tablas exigían extraer raíces con varias cifras sexagesimales. Teón de Alejandría, en su comentario al *Almagesto* de Ptolomeo, en el siglo IV, describe un procedimiento geométrico para extraer la raíz cuadrada de un número sexagesimal cifra por cifra, basado también en el Libro II de los *Elementos*, y lo ilustra con $\sqrt{4500} \approx 67;4,55$, valor cuyo cuadrado difiere de 4500 en poco más de una centésima (Heath, 1921). El procedimiento de Teón es, en su estructura, el mismo que se enseñaba en las escuelas hasta hace pocas décadas para extraer raíces decimales: se busca el mayor cuadrado contenido en el número, se resta, y el resto se reparte en un gnomon cuyo ancho da la cifra siguiente. Ni Herón ni Teón pretenden nunca haber hallado la raíz exacta, pero ambos tratan su aproximación como un número con el que se puede seguir calculando, y en esa práctica cotidiana, más que en ninguna teoría, empezó a disolverse la frontera entre número y magnitud.

3.2 La India: de las *karaṇī* a la ecuación de Pell

3.2.1 Las raíces como objetos de cálculo

Mientras la geometría griega mantenía sus reservas frente a los irracionales, la tradición matemática india los manejó con una libertad que hoy nos parece casi moderna, sin que ello implique que se planteara la cuestión de su naturaleza. Los astrónomos indios operaban con raíces cuadradas no exactas, a las que llamaban *karaṇī*, término que en los *Śulbasūtras* designaba ya la cuerda que produce un cuadrado de área dada, y Brahmagupta, en el *Brāhmasphuṭasiddhānta* (628), formuló reglas para sumarlas y multiplicarlas equivalentes a las identidades

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

reglas que tratan las raíces como objetos algebraicos sometidos a leyes propias (Plofker, 2009). Āryabhaṭa, en el año 499, dio para la razón entre la circunferencia y el diámetro el valor $62\,832/20\,000 = 3,1416$ y lo calificó de *āsanna*, «próximo», término que algunos historiadores han interpretado, quizá con excesivo entusiasmo, como un reconocimiento de la irracionalidad de π ; me parece más prudente leerlo como una indicación de que el valor es aproximado, lo cual es compatible con la creencia en un valor racional exacto que simplemente no se conoce (Beckmann, 1971; Plofker, 2009).

3.2.2 La composición de Brahmagupta

La contribución india más profunda a nuestra historia no se refiere, sin embargo, a las raíces como tales sino a la ecuación que las gobierna. Brahmagupta estudió la ecuación $x^2 - Ny^2 = 1$,

hoy llamada, por un error de atribución de Euler, ecuación de Pell, y descubrió una regla de *composición* (*bhāvanā*) que permite combinar soluciones de ecuaciones de este tipo para obtener otras nuevas.

Proposición 3.2 (Identidad de Brahmagupta). *Para enteros cualesquiera a, b, c, d, N se verifica*

$$(a^2 - Nb^2)(c^2 - Nd^2) = (ac + Nbd)^2 - N(ad + bc)^2.$$

En consecuencia, si $a^2 - Nb^2 = k$ y $c^2 - Nd^2 = l$, entonces $(ac + Nbd)^2 - N(ad + bc)^2 = kl$.

Demostración. Basta desarrollar ambos miembros: los términos cruzados $2Nabcd$ se cancelan en el segundo, y queda $a^2c^2 + N^2b^2d^2 - Na^2d^2 - Nb^2c^2$ en ambos. En términos modernos, la identidad expresa que la norma $u^2 - Nv^2$ del número $u + v\sqrt{N}$ es multiplicativa, porque $(a + b\sqrt{N})(c + d\sqrt{N}) = (ac + Nbd) + (ad + bc)\sqrt{N}$. ■

La tabla 3.1 muestra el efecto de la composición para $N = 2$. Componiendo repetidamente con la solución $(1, 1)$ de $x^2 - 2y^2 = -1$ se obtienen exactamente los números laterales y diagonales de la proposición 1.10, con el signo alternado que allí observábamos; componiendo una solución consigo misma se salta directamente a la de índice doble, que es lo que hace el método de Herón. La ecuación que Arquímedes, los pitagóricos y los sacerdotes védicos habían rozado sin formularla adquiere en Brahmagupta estatuto de objeto de estudio, y la aproximación de los irracionales cuadráticos deja de ser una habilidad para convertirse en una teoría.

n	x_n	y_n	$x_n^2 - 2y_n^2$	x_n/y_n	Obtenida como
1	1	1	-1	1	—
2	3	2	1	1,5	$(1, 1) * (1, 1)$
3	7	5	-1	1,4	$(3, 2) * (1, 1)$
4	17	12	1	1,4166...	$(3, 2) * (3, 2)$
5	41	29	-1	1,4137...	$(17, 12) * (1, 1)$
6	99	70	1	1,41428...	$(7, 5) * (7, 5)$
8	577	408	1	1,4142156...	$(17, 12) * (17, 12)$

TABLA 3.1. La composición de Brahmagupta para $N = 2$, definida por la regla $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Las soluciones son los coeficientes de $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, es decir, los números diagonales y laterales del capítulo 1; el valor de $\sqrt{2}$ es 1,41421356...

Fuente: Elaboración propia.

Bhāskara II, en el *Bījagaṇita* (1150), completó el programa con el método cíclico (*cakravālā*), un algoritmo que, a partir de una solución de $x^2 - Ny^2 = k$ con k pequeño, produce soluciones con k cada vez más favorable hasta alcanzar $k = 1$. Su ejemplo más célebre es $N = 61$, para el cual obtiene la solución mínima

$$x = 1\,766\,319\,049, \quad y = 226\,153\,980,$$

que Fermat propondría como desafío a los matemáticos europeos cinco siglos después sin que estos sospecharan que el problema estaba resuelto (Katz, 2009; Plofker, 2009). Que x/y aproxime

$\sqrt{61}$ con unas dieciocho cifras decimales correctas es una consecuencia inmediata de la identidad $x^2 - 61y^2 = 1$, pues $x/y - \sqrt{61} = 1/(y(x + y\sqrt{61}))$, y muestra hasta qué punto la tradición india había penetrado la estructura aritmética de los irracionales cuadráticos sin necesitar, ni pretender, una teoría de su naturaleza.

3.2.3 Mādhava y las series infinitas

La escuela de Kerala, fundada por Mādhava de Saṅgamagrāma (c. 1340–1425), dio un paso todavía más audaz al expresar π como suma de una serie infinita. La serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

que en Europa se atribuye a Leibniz (1674) y a Gregory, aparece en los textos de la escuela junto con términos de corrección que aceleran notablemente la convergencia, y fue utilizada para obtener π con once cifras decimales (Plofker, 2009). La importancia conceptual de estos resultados es considerable: por primera vez un número irracional era representado como el resultado de un proceso infinito de sumas racionales, y el infinito, que la matemática griega había mantenido cuidadosamente fuera de sus demostraciones, se convertía en una herramienta de cálculo de extraordinaria precisión. Conviene, con todo, no leer en ello más de lo que dicen los textos: los matemáticos de Kerala justificaban sus series con argumentos geométricos e inductivos muy ingeniosos, pero no se preguntaron por la naturaleza del número que la serie representaba.

3.3 China: el algoritmo y la aproximación

La tradición matemática china se organizó en torno a colecciones de problemas resueltos mediante algoritmos, de las cuales la más influyente es el *Jiuzhang suanshu* o *Nueve capítulos sobre el arte matemático*, compilado hacia el siglo I de nuestra era (Chemla y Guo, 2004). Su cuarto capítulo describe procedimientos para extraer raíces cuadradas y cúbicas cifra por cifra, esencialmente equivalentes a los que se enseñaban en las escuelas hasta no hace mucho, y el comentario de Liu Hui (263) añade una observación de gran interés: cuando la raíz no es exacta, el cálculo puede proseguirse con fracciones decimales tan pequeñas como se quiera, de modo que, aunque no se obtenga el valor exacto, la diferencia puede hacerse despreciable (Martzloff, 1997). Liu Hui distingue así con nitidez entre el valor exacto, que el algoritmo no alcanza, y la aproximación, que puede hacerse tan buena como se desee, y en esa distinción se reconoce la misma actitud que Arquímedes mostraba ante π .

El mismo Liu Hui perfeccionó un método de polígonos inscritos que le permitió obtener $\pi \approx 3,1416$ a partir de un polígono de 3072 lados, y dos siglos más tarde Zu Chongzhi (429–500) estableció que $3,141\,592\,6 < \pi < 3,141\,592\,7$ y propuso dos aproximaciones: la «burda», $22/7$, y la «precisa» (*miliü*), $355/113$ (Martzloff, 1997). Esta última merece un comentario, porque ilustra un fenómeno que la teoría de las fracciones continuas explicará con exactitud en la sección 3.9: el error de $355/113$ es de apenas $2,7 \cdot 10^{-7}$, y ninguna fracción con denominador menor que 16 604 aproxima mejor a π , como he comprobado por cálculo directo. Zu Chongzhi había encontrado, sin disponer de la teoría que lo explica, una de las mejores aproximaciones racionales de un número irracional, y su valor no fue igualado en Europa hasta el siglo XVI.

3.4 El mundo islámico: los números sordos y la razón como número

3.4.1 El álgebra de los irracionales

La tradición matemática en lengua árabe, que floreció entre los siglos IX y XV desde Bagdad hasta al-Ándalus, heredó a la vez la geometría griega, que tradujo y comentó con extraordinario cuidado, y las técnicas de cálculo indias, que adaptó y sistematizó. De ese encuentro nació el álgebra como disciplina autónoma y, con ella, una actitud nueva hacia los irracionales (Berggren, 2016; Rashed, 1994).

En el tratado de álgebra de al-Jwārizmī, compuesto hacia el año 830, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas se expresan mediante raíces que muchas veces no son exactas, y el autor enseña a operar con ellas sin detenerse en su naturaleza. La terminología de la época distinguía entre los números cuya raíz podía «expresarse» y aquellos cuya raíz era *aṣamm*, es decir, «sorda» o «muda», término que parece calcar el griego *álogos* en su doble sentido de «sin razón» y «sin palabra». Cuando Gerardo de Cremona tradujo al latín la obra de al-Jwārizmī en el siglo XII, vertió *aṣamm* por *surdus*, y así llegó a las lenguas europeas la expresión «número sordo», que Fibonacci empleó en 1202 y que se mantuvo en los manuales hasta el siglo XIX (Smith, 1925). La metáfora es elocuente: el número sordo no es el que carece de existencia, sino el que no puede decirse, el que se resiste a ser nombrado mediante una razón entre enteros.

Más significativa que el nombre fue la práctica. Abū Kāmil, en Egipto, a finales del siglo IX, admitía como coeficientes y como soluciones de ecuaciones cantidades como $\sqrt{10}$ o $\sqrt{\sqrt{5}}$, y las sometía a las mismas operaciones que a los enteros; al-Karājī, hacia el año 1000, desarrolló una aritmética de expresiones con radicales que Rashed ha descrito como una aritmetización del Libro X, en la que las especies geométricas de Euclides, que examinamos en la sección 2.9, se convierten en objetos algebraicos (Rashed, 1994); y al-Samaw'al, en el siglo XII, extendió a las raíces el uso de aproximaciones que, según el mismo Rashed, anticipan las fracciones decimales. En este proceso, el Libro X cambia de naturaleza: deja de ser una clasificación de rectas para convertirse en un repertorio de reglas de cálculo con expresiones irracionales.

3.4.2 Al-Jayyām: las razones como números

La contribución teórica más audaz se debe a 'Umar al-Jayyām (1048–1131), más conocido en Occidente como poeta. En su *Comentario a las dificultades de las premisas del libro de Euclides*, de 1077, al-Jayyām discutió la relación entre la definición de proporción basada en la antifairesis y la de Eudoxo, que estudiamos en las secciones 2.2 y 2.4, demostró que ambas son equivalentes, y fue más allá: para poder componer razones, identificó cada razón con una magnitud tomada respecto de una unidad. Oller Marcén y Gairín describen el paso con precisión: «Ahora, como u es la unidad, al-Khayyam considera g como un número que representa la razón $a : b$; es decir, identifica en cierto modo las razones con números y así puede identificar la composición de razones con la multiplicación numérica» (Oller Marcén y Gairín, 2013, p. 331). La cautela del «en cierto modo» es importante: al-Jayyām no define una aritmética de las razones ni estudia sus propiedades de orden, y su identificación es instrumental antes que ontológica.

NOTA HISTÓRICA: EL ALCANCE DE LA PROPUESTA DE AL-JAYYĀM

Conviene no exagerar la modernidad de al-Jayyām. Su propuesta de tratar las razones como números no fue acompañada de una definición de las operaciones aritméticas entre ellas ni de un análisis de sus propiedades de orden y continuidad, y no parece haber tenido una influencia directa en Europa. Sin embargo, marca el primer momento documentado en que un matemático propone explícitamente ampliar el concepto de número para incluir las magnitudes inconmensurables, y en este sentido anticipa en seis siglos la definición de Newton que comentaremos más adelante (Rashed y Vahabzadeh, 2000). Obsérvese, además, que el paso de al-Jayyām consiste exactamente en hacer lo que la teoría de Eudoxo se había negado a hacer: tratar una razón como una magnitud susceptible de entrar, a su vez, en nuevas razones y operaciones (sección 2.10).

3.5 La Europa medieval: Campano, Fibonacci y Oresme

3.5.1 Campano y la denominación de las razones

La Europa latina recibió los *Elementos* a través de las traducciones del árabe del siglo XII, y la versión más influyente fue la de Campano de Novara, redactada hacia 1260 y convertida en 1482 en la primera edición impresa de Euclides. Campano introdujo, en sus comentarios al Libro V, una práctica que acabaría por imponerse: asociar a cada razón racional un *denominador*, es decir, el número que expresa cuántas veces o qué parte de la segunda magnitud contiene la primera. Oller Marcén y Gairín concluyen: «Se observa, pues, una práctica parecida a la actual. Se asocia la razón con un número racional y la igualdad o la relación de orden entre razones con los respectivos conceptos numéricos» (Oller Marcén y Gairín, 2013, pp. 332–333). Campano sabía, desde luego, que las razones irracionales no tienen denominador, y en ese punto su teoría se detiene; pero al convertir la razón racional en número preparó el terreno para la pregunta de si las irracionales también podían serlo.

3.5.2 Fibonacci y la ecuación de Juan de Palermo

Leonardo de Pisa, Fibonacci, difundió en Europa el álgebra árabe y la numeración indoarábica con su *Liber abbaci* de 1202. En un opúsculo posterior, el *Flos* (hacia 1225), resolvió un problema que le había propuesto Juan de Palermo en presencia del emperador Federico II: hallar una raíz de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Fibonacci demostró que la solución no podía ser un número entero ni una fracción, ni tampoco ninguna de las especies de irracionales clasificadas en el Libro X, y dio, sin explicar cómo la obtuvo, la aproximación sexagesimal $1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$, cuyo error es inferior a $4 \cdot 10^{-11}$, según he comprobado (Boyer y Merzbach, 2011; Katz, 2009). El episodio constituye, hasta donde sabemos, la primera demostración de que un número algebraico escapa a la clasificación euclidiana: la teoría griega de los irracionales, que parecía completa, se revelaba insuficiente para dar cuenta de las raíces de una ecuación cúbica muy sencilla.

Proposición 3.3. *La ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ tiene una única raíz real, que es irracional y está comprendida entre 1 y 2.*

Demostración. El polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ tiene derivada $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$, cuyo discriminante $16 - 120$ es negativo, de modo que f es estrictamente creciente y tiene una única raíz real; como $f(1) = -7 < 0 < f(2) = 16$, esta se encuentra entre 1 y 2. Por el criterio de las raíces racionales (proposición 1.17), una raíz racional tendría que ser un entero divisor de 20, y ningún entero está estrictamente entre 1 y 2. ■

3.5.3 Oresme: la mayoría de las razones son irracionales

Uno de los episodios más sorprendentes de esta historia, y de los menos conocidos en la enseñanza, se debe a Nicole Oresme (c. 1320–1382), obispo de Lisieux y uno de los pensadores más originales del siglo XIV. En su tratado *De proportionibus proportionum*, Oresme desarrolló una teoría de las «razones de razones», es decir, de los exponentes a los que hay que elevar una razón para obtener otra, y descubrió que la mayoría de ellas son irracionales: la razón doble no es ninguna potencia racional de la razón triple, por ejemplo, porque $2^p = 3^q$ es imposible para enteros positivos. Mediante un recuento de casos, mostró que entre las razones de razones que pueden formarse a partir de las razones racionales usuales, las irracionales son mucho más numerosas que las racionales, y extrajo de ello una conclusión de alcance cosmológico: si se toman al azar dos movimientos celestes desconocidos, es probable que su razón sea irracional, de modo que los ciclos celestes no se repiten exactamente y la astrología que pretende predecir el futuro a partir de conjunciones periódicas carece de fundamento (Grant, 1966).

En lenguaje moderno, la observación de Oresme equivale a afirmar que $\log_3 2$ es irracional, y su demostración es inmediata: si $\log_3 2 = p/q$ con p, q enteros positivos, entonces $2^q = 3^p$, lo cual es imposible porque el primer miembro es par y el segundo impar. La idea de que lo irracional es más frecuente que lo racional, formulada en términos probabilísticos y con una intención polémica muy precisa, anticipa en cinco siglos, aunque sin ninguno de sus instrumentos, el resultado de Cantor que se estudiará en el capítulo 4. Me parece un ejemplo excelente de cómo una intuición profunda puede aparecer mucho antes de que existan las herramientas para formularla con rigor, y de cómo la historia de las matemáticas, leída con atención, desmiente la imagen de un progreso lineal.

3.6 El Renacimiento: ¿son números los irracionales?

3.6.1 El álgebra de las cúbicas

El siglo XVI fue testigo de una expansión extraordinaria del álgebra, con la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado por Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari, y esas fórmulas, llenas de radicales anidados, obligaron a los algebristas a convivir con los irracionales de manera cotidiana. El *Ars magna* de Cardano (1545) presenta la solución de la cúbica mediante expresiones como

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10},$$

que es solución de la ecuación $x^3 + 6x = 20$ y que, sorprendentemente, es igual a 2, porque $\sqrt{108} \pm 10 = (\sqrt{3} \pm 1)^3$. El fenómeno inverso, el llamado *casus irreducibilis*, era todavía más inquietante: cuando la cúbica tiene tres raíces reales, la fórmula exige extraer raíces cuadradas de números negativos, y Rafael Bombelli, en su *Álgebra* de 1572, tuvo que inventar reglas de cálculo para esas cantidades «sofísticas» a fin de recuperar las raíces reales (Bombelli, 1572; Kline, 1972). Bombelli, además, aproximó $\sqrt{13}$ mediante un procedimiento que equivale al desarrollo en fracción continua, de modo que en su obra conviven la aceptación práctica de los irracionales, la primera aparición de los números complejos y un germen de la teoría que estudiaremos en la sección 3.9.

3.6.2 Stifel: números en la geometría, no en la aritmética

Las actitudes teóricas, sin embargo, siguieron siendo ambivalentes, y ninguna lo es tanto como la de Michael Stifel. En su *Arithmetica integra* de 1544, Stifel reconocía que los irracionales son indispensables en geometría, donde demuestran lo que los racionales no pueden demostrar, y que esa eficacia obliga a considerarlos números; pero añadía que otras razones obligan a negarlo, porque un número irracional nunca puede conocerse con exactitud, y concluía que, del mismo modo que un número infinito no es un número, tampoco el irracional es un verdadero número, sino algo que permanece oculto en una especie de niebla de lo infinito (Kline, 1972). Rommevaux-Tani ha mostrado que esta ambivalencia se inscribe en un esfuerzo por articular la clasificación euclidiana de las líneas irracionales del Libro X con una aritmética de los números irracionales, proyecto de aritmética general que Stifel y, después de él, Stevin compartieron, aunque con lecturas del Libro X que presentan tanto semejanzas como diferencias (Rommevaux-Tani, 2014). La «niebla de lo infinito» de Stifel es, en el fondo, la misma dificultad que encuentran hoy nuestros estudiantes cuando se les dice que $\sqrt{2}$ «tiene infinitas cifras», y volveremos sobre ella en la sección 3.12.

3.6.3 Stevin: no hay números sordos

La posición opuesta fue defendida con vigor por Simon Stevin, ingeniero y matemático flamenco, en *L'Arithmétique* de 1585, que enuncia entre sus tesis la que sirve de epígrafe a este capítulo: «qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irreguliers, inexplicables, ou sords» (citado en Rommevaux-Tani, 2014, p. 191). Stevin sostiene, en la misma obra, que la unidad es un número, contra toda la tradición griega, y que la raíz de cualquier número es también número (Stevin, 1585; Kline, 1972). Malet ha mostrado que esta tesis no es una proclama aislada sino una consecuencia de un proceso más amplio, en el que los editores renacentistas de Euclides fueron identificando números y medidas: «que “cualquier raíz, sea la que fuere, es número” es también una consecuencia de identificar números y medidas: puesto que, por ejemplo, $\sqrt{8}$ es parte de 8, debe tener la misma naturaleza, y ser por tanto un número» (Malet, 2006, sección 7; traducción propia). El contraste con Euclides es nítido, pues, como recuerda el mismo autor, «los *Elementos* de Euclides no contienen ningún equivalente de la noción de “longitud” de un segmento, ni hay medidas para los objetos geométricos en general» (Malet, 2006, sección 2; traducción propia). Malet concluye que el llamado humanismo matemático, tal como se manifiesta en las ediciones renacentistas de los *Elementos*, no fue tanto la reconstrucción filológica fiel de la letra y el sentido

de la obra de Euclides cuanto la construcción de un Euclides nuevo, adaptado a las necesidades de los matemáticos del Renacimiento (Malet, 2006, conclusiones).

En 1585, el mismo año de *L'Arithmétique*, Stevin publicó *De Thiende* (*La Disme*, en su versión francesa), un breve folleto que difundió en Europa el uso de las fracciones decimales y que, al proporcionar una notación uniforme para todos los números, hizo posible concebir las expansiones decimales infinitas como representaciones de cantidades. Stevin no disponía de una teoría que justificara su posición, pero su intuición resultaría acertada. El siguiente teorema, que formula la distinción moderna entre racionales e irracionales en términos de su notación decimal, es también el que con mayor frecuencia se enseña en la educación secundaria, casi siempre sin demostración, y es el que el capítulo 1 anunció que demostraríamos aquí.

Teorema 3.4. *Un número real positivo es racional si y solo si su expansión decimal es finita o periódica a partir de cierta cifra.*

Demostración. Supongamos que $x = p/q$ con p, q enteros positivos. La expansión decimal de x se obtiene por el algoritmo de la división: en cada paso se multiplica el resto por diez, se divide entre q , se anota el cociente como nueva cifra y se conserva el nuevo resto, que es un entero entre 0 y $q - 1$. Si algún resto es 0, la expansión es finita. En caso contrario, como solo hay $q - 1$ restos posibles, a lo sumo después de q pasos algún resto se repite, y a partir de ese momento el algoritmo reproduce exactamente la misma secuencia de cifras y de restos; la longitud del período es, por tanto, a lo sumo $q - 1$. Recíprocamente, si la expansión es finita, x es evidentemente racional; si es periódica a partir de cierta cifra, podemos escribir $x = (N + y)/10^k$ con N entero e $y = 0.\overline{c_1c_2 \dots c_r}$, y si c es el entero formado por las cifras del período,

$$y = \frac{c}{10^r} + \frac{c}{10^{2r}} + \dots = \frac{c}{10^r} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-r}} = \frac{c}{10^r - 1},$$

que es racional. ■

Observación 3.5. El teorema 3.4 caracteriza a los irracionales, pero no los *define*: presupone que ya sabemos qué es un número real y qué significa una suma infinita como la que aparece al final de la demostración. Buena parte de las dificultades didácticas que analizaremos en la sección 3.12 proceden de presentar esta caracterización como si fuera una definición, lo que invierte el orden lógico y deja sin respuesta la pregunta de por qué habrían de existir números con expansiones no periódicas. Hay, además, un problema práctico que la investigación ha documentado: una fracción como $53/83$ tiene un período de 41 cifras, invisible en cualquier calculadora, y quien ha identificado la irracionalidad con la apariencia de la expansión la clasificará como irracional. La cota del período que da la demostración muestra que esto no es un accidente: el período de p/q puede llegar a tener $q - 1$ cifras, como ocurre con $1/7$ y con $1/17$, cuyos períodos tienen 6 y 16 cifras; el de $53/83$, con sus 41 cifras, alcanza la mitad de esa cota.

3.7 Descartes y Newton: el número como razón

3.7.1 La aritmética de los segmentos

El paso decisivo hacia la unificación de número y magnitud se dio en el siglo XVII, con la geometría analítica. En las primeras páginas de *La Géométrie* (1637), Descartes mostró que, una

vez elegido arbitrariamente un segmento como unidad, las operaciones aritméticas pueden realizarse con segmentos y producen segmentos: el producto de dos longitudes deja de ser un área, como en la tradición griega, y pasa a ser otra longitud (Descartes, 1637). Con ello desaparecía el principal obstáculo para tratar a las magnitudes como números, que era la heterogeneidad de sus dimensiones; el precio, que Descartes pagó sin advertirlo como tal, fue la elección de una unidad arbitraria, algo que la teoría de Eudoxo, construida sobre magnitudes homogéneas, nunca había necesitado. Las dos construcciones fundamentales, la del producto y la de la raíz cuadrada, son de una sencillez admirable (figura 3.2).

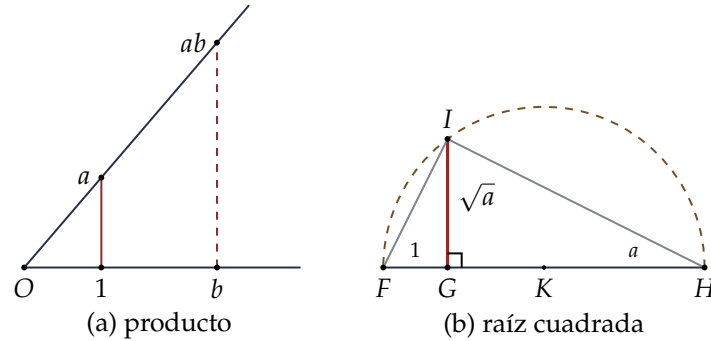


FIGURA 3.2. Las construcciones de Descartes. (a) Si sobre un lado de un ángulo se toman $O1 = 1$ y $Ob = b$, y sobre el otro $Oa = a$, la paralela a la recta $1a$ trazada por b determina un segmento de longitud ab . (b) Si $FG = 1$ y $GH = a$, y se traza la semicircunferencia de diámetro FH con centro en su punto medio K , la perpendicular GI mide $\sqrt{a}$.

Fuente: Elaboración propia.

Proposición 3.6 (Descartes, *La Géométrie*, libro I). *Dado un segmento unidad y segmentos de longitudes $a, b > 0$, pueden construirse con regla y compás segmentos de longitudes $a + b$, $|a - b|$, ab , a/b y $\sqrt{a}$.*

Demostración. La suma y la diferencia son inmediatas. Para el producto y el cociente se emplea el teorema de Tales (VI.2, teorema 2.15): con la notación de la figura 3.2(a), la paralela a la recta que une 1 con a trazada por b corta al segundo lado en un punto cuya distancia x al vértice cumple $x : a = b : 1$, es decir, $x = ab$; intercambiando los papeles de 1 y b se obtiene a/b . Para la raíz, con la notación de la figura 3.2(b), el ángulo FIH está inscrito en una semicircunferencia y es recto, de modo que los triángulos FGI e IGH son semejantes y $FG : GI = GI : GH$; es decir, $GI^2 = FG \cdot GH = a$. ■

Conviene detenerse un momento en la demostración del producto, porque en ella se condensa todo el camino recorrido desde el capítulo anterior. La proporción $x : a = b : 1$ es una proporción eudoxiana entre segmentos, válida con independencia de que sean conmensurables; Descartes la lee como una ecuación numérica, $x/a = b/1$, y define con ella la multiplicación. Lo que para Euclides era una relación entre cuatro magnitudes se ha convertido en una operación entre números, y lo que hace posible esa conversión es la unidad, el segmento que la geometría griega nunca había necesitado distinguir.

3.7.2 Newton: el número como razón abstracta

Medio siglo después, Newton dio a esta concepción su formulación más nítida. En la *Arithmetica universalis*, publicada en 1707 a partir de sus lecciones en Cambridge, escribió que por número no ha de entenderse tanto una multitud de unidades cuanto la razón abstracta de una cantidad cualquiera a otra cantidad del mismo género que se toma por unidad, y distinguió tres clases de números: los enteros, cuando la unidad mide a la cantidad; los fraccionarios, cuando la mide una parte submúltipla de la unidad; y los sordos, cuando la unidad es inconmensurable con la cantidad (Newton, 1707). Con la definición de Newton, los irracionales quedaban admitidos como números de pleno derecho, y culminaba el proceso iniciado por al-Jayyām; pero la definición descansaba sobre la noción de cantidad geométrica, y la pregunta de qué es una razón entre cantidades inconmensurables quedaba tan abierta como en tiempos de Eudoxo. Newton, en rigor, no había definido el número irracional: había trasladado la dificultad de la aritmética a la geometría, y la definición solo era tan clara como lo fuera la noción de «cantidad continua» que suponía.

RECUADRO: DEL MÉTODO DE HERÓN AL DE NEWTON-RAPHSON

El nombre de Newton aparece también, en otro sentido, en la historia del cálculo de irracionales. En un manuscrito de 1669, *De analysi*, que no se publicó hasta 1711, Newton explicó cómo aproximar la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ corrigiendo una primera estimación mediante una ecuación lineal que desprecia las potencias altas del error. Joseph Raphson publicó en 1690 una versión más simple del procedimiento, y Thomas Simpson le dio en 1740 la forma que hoy se enseña en los cursos de cálculo: si x_n es una aproximación de una raíz de f , la siguiente es el punto donde la tangente a la gráfica en $(x_n, f(x_n))$ corta al eje horizontal,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Con $f(x) = x^2 - a$ la fórmula da $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, que es exactamente el método de Herón (teorema 3.1). Dicho de otra manera, el procedimiento que usaban los escribas babilónicos para $\sqrt{2}$ es un caso particular del método de Newton, y la duplicación de cifras correctas en cada paso que observábamos allí es la *convergencia cuadrática* que caracteriza al método en general.

Con $f(x) = x^3 - a$ se obtiene la fórmula para raíces cúbicas que el trabajo de 2012 presentaba como extensión del método de Herón,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

Aquel trabajo justificaba la fórmula suponiendo que la sucesión tiene límite L y deduciendo de ahí que $L^3 = a$. El razonamiento muestra cuál tiene que ser el límite, pero no que exista, y ese es justamente el tipo de paso que Bolzano y Cauchy daban por supuesto y que el capítulo 4 examina. La demostración completa no es difícil.

Proposición 3.7. Sean $a > 0$, $c = \sqrt[3]{a}$ y $x_0 > 0$ cualquiera, y sea $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + a/x_n^2)$. Entonces $x_n \geq c$ para $n \geq 1$, la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es decreciente, converge a c y satisface

$$x_{n+1} - c = \frac{(x_n - c)^2 (2x_n + c)}{3x_n^2}.$$

Demostración. La identidad se comprueba desarrollando: $3x_n^2(x_{n+1} - c) = 2x_n^3 - 3cx_n^2 + c^3$, y el segundo miembro es igual a $(x_n - c)^2(2x_n + c)$. Como el lado derecho de la identidad es mayor o igual que cero, $x_{n+1} \geq c$ para todo $n \geq 0$. Para $n \geq 1$ se tiene entonces $x_n^3 \geq a$, y $x_{n+1} - x_n = (a - x_n^3)/(3x_n^2) \leq 0$. Una sucesión decreciente y acotada inferiormente converge; si L es su límite, $L \geq c > 0$ y, pasando al límite en la recurrencia, $3L^3 = 2L^3 + a$, es decir, $L = c$. ■

Obsérvese que el paso «una sucesión decreciente y acotada inferiormente converge» es la propiedad de completitud de los números reales: en los racionales es falso, como muestra la propia sucesión con $a = 2$ y $x_0 = 1$, formada por fracciones que no convergen a ninguna fracción. Los primeros términos son

$$1, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{91}{72} = 1,2638\dots, \quad \frac{1126819}{894348} = 1,259933\dots,$$

y el término siguiente, x_4 , ya difiere de $\sqrt[3]{2} = 1,2599210\dots$ en menos de $2 \cdot 10^{-10}$. Frente a la bisección, que en cada paso gana una cifra binaria, el método de Newton duplica aproximadamente las cifras correctas; a cambio, necesita una buena aproximación inicial y la derivada de la función, y puede fallar si la tangente es casi horizontal. La hoja de cálculo es el mejor laboratorio para comparar ambos métodos en el aula.

3.8 Los procesos infinitos: productos, fracciones y series

El siglo y medio que va de Viète a Euler conoció una auténtica explosión de representaciones infinitas de los números irracionales, que cambió de raíz la manera de pensarlos. Por primera vez en Europa, un número como π dejó de ser solo la razón entre dos magnitudes geométricas para convertirse también en el resultado de un proceso aritmético indefinido.

Teorema 3.8 (Viète, 1593). *Se verifica*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Demostración. Aplicando n veces la identidad $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ se obtiene

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}.$$

Con $x = \pi/2$ y haciendo tender n a infinito, como $2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, resulta $\prod_{k \geq 1} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}$. Finalmente, $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y la fórmula del ángulo mitad, $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta}$, da los factores sucesivos. ■

Viète obtuvo su producto a partir de la comparación de las áreas de los polígonos regulares inscritos de 4, 8, 16, ... lados, es decir, prolongando indefinidamente el procedimiento de Euclides y de Arquímedes que estudiamos en las secciones 2.7 y 2.8, y su fórmula es la primera expresión exacta de π mediante un proceso infinito en la matemática europea (Kline, 1972). La diferencia con los griegos es instructiva: donde Euclides demostraba que el polígono puede acercarse al círculo tanto como se quiera y se detenía ahí, Viète escribe el resultado de continuar el proceso indefinidamente como si fuera una expresión acabada. John Wallis, en su *Arithmetica infinitorum* de 1656, obtuvo el producto

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots,$$

cuyos factores son todos racionales, y William Brouncker lo transformó en la fracción continua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \cdots}}},$$

mientras que Gregory y Leibniz redescubrían en la década de 1670 la serie que los matemáticos de Kerala conocían desde hacía tres siglos. Ninguna de estas fórmulas decía nada sobre la racionalidad de π , y de hecho todas son compatibles, en principio, con un valor racional; pero todas ellas acostumbraron a los matemáticos a concebir un número como el término de un proceso infinito de operaciones racionales, y esa costumbre es la que Cantor convertirá en definición. La pregunta de si esos procesos «convergen», y hacia qué, quedaba sin plantear, porque se daba por supuesto que el número hacia el que se dirigían existía de antemano; ese supuesto es exactamente el que el siglo XIX pondrá en cuestión.

3.9 Las fracciones continuas: la antifairesis hecha aritmética

La antifairesis de los griegos, aplicada a un número real positivo x , produce una sucesión de cocientes que hoy llamamos su desarrollo en *fracción continua*. La teoría moderna de estos desarrollos, cuyos gérmenes se encuentran en Bombelli, Cataldi, Wallis y Huygens, fue iniciada sistemáticamente por Euler en 1737 y completada por Lagrange en 1770; proporciona la caracterización más fina de los números irracionales de que disponemos, y constituye el puente natural entre la aritmética griega y la teoría moderna de la aproximación (Hardy y Wright, 2008; Khinchin, 1964).

3.9.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 3.9. Dado un número real x , sea $x_0 = x$ y, mientras x_n no sea entero, $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ y $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$; si x_n es entero, se pone $a_n = x_n$ y el proceso se detiene. La sucesión

$[a_0; a_1, a_2, \dots]$ se llama *desarrollo en fracción continua* de x , y los números x_n , sus *cocientes completos*. Los números racionales

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

se llaman sus *reducidas* o *convergentes*.

Cada paso del algoritmo es exactamente un paso de la antifairesis del capítulo 1 (sección 1.4): si x es la razón entre dos segmentos, a_n es el número de veces que el menor cabe en el mayor en la etapa n , y $x_n - a_n$ es la razón entre el resto y el segmento menor. Los cocientes a_n con $n \geq 1$ son enteros positivos, y la tabla 1.1 del capítulo 1 recogía los desarrollos de $\sqrt{n}$ para $n \leq 17$.

Proposición 3.10. *Las reducidas satisfacen, con $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0, q_0 = 1$, las recurrencias*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

y la identidad $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$. En particular, p_n y q_n son primos entre sí, los q_n crecen estrictamente para $n \geq 1$, y, mientras el desarrollo no termine,

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}, \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (q_n x_{n+1} + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Demostración. Las recurrencias se prueban por inducción observando que $[a_0; \dots, a_n, y]$ se obtiene de $[a_0; \dots, a_n]$ reemplazando a_n por $a_n + 1/y$; la misma observación, con $y = x_{n+1}$, da la expresión de x . La identidad de determinantes se sigue de las recurrencias,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}),$$

y para $n = 0$ vale $a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. De ella se deduce que todo divisor común de p_n y q_n divide a 1. Finalmente,

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n (q_n x_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n (q_n x_{n+1} + q_{n-1})},$$

y como $x_{n+1} > a_{n+1}$ se tiene $q_n x_{n+1} + q_{n-1} > q_{n+1}$. ■

La fórmula del error muestra, además, que las reducidas son alternadamente menores y mayores que x , como ocurría con los números laterales y diagonales, y que su calidad depende del tamaño del cociente siguiente: una reducida seguida de un cociente grande es excepcionalmente buena. Esto explica el hallazgo de Zu Chongzhi, porque

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots],$$

y la reducida $\frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1]$ va seguida del cociente 292, de modo que su error es inferior a $1/(113 \cdot 33102) \approx 2,7 \cdot 10^{-7}$. Las reducidas de π son 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, ... y en ellas reconocemos los valores de Arquímedes y de Zu Chongzhi. Del mismo modo, las reducidas de $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ incluyen las dos fracciones con que Arquímedes acotaba $\sqrt{3}$ (observación 2.21), y las de $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ son exactamente los cocientes de los números diagonales y laterales.

3.9.2 La caracterización de los irracionales

Teorema 3.11. *Un número real es racional si y solo si su desarrollo en fracción continua es finito.*

Demostración. Si $x = p/q$, el algoritmo de la definición 3.9 es exactamente el algoritmo de Euclides aplicado a p y q , cuyos restos son enteros estrictamente decrecientes, y por tanto termina. Recíprocamente, una fracción continua finita es evidentemente un número racional. ■

El teorema es la versión aritmética de la proposición X.2 de Euclides (teorema 1.7): la antifairesis de dos magnitudes termina si y solo si son conmensurables. Pero la teoría de las fracciones continuas permite ir mucho más lejos, porque caracteriza a los irracionales por la calidad de sus aproximaciones racionales. El punto de partida es un resultado de Dirichlet, de 1842, cuya demostración es un modelo de economía.

Teorema 3.12 (Dirichlet, 1842). *Sea x un número real y $N \geq 1$ un entero. Existen enteros p y q , con $1 \leq q \leq N$, tales que $|qx - p| < 1/N$. En consecuencia, si x es irracional existen infinitas fracciones p/q con $|x - p/q| < 1/q^2$.*

Demostración. Consideremos los $N + 1$ números $\{kx\} = kx - \lfloor kx \rfloor$, para $k = 0, 1, \dots, N$, todos en el intervalo $[0, 1)$, y dividamos este intervalo en los N subintervalos $[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N})$. Por el principio del palomar, dos de esos números, digamos los correspondientes a $k_1 < k_2$, caen en el mismo subintervalo, de modo que $|\{k_2x\} - \{k_1x\}| < 1/N$. Con $q = k_2 - k_1$ y $p = \lfloor k_2x \rfloor - \lfloor k_1x \rfloor$ se obtiene $|qx - p| < 1/N$ y $1 \leq q \leq N$. Dividiendo por q , $|x - p/q| < 1/(qN) \leq 1/q^2$. Si x es irracional, $|qx - p| > 0$ para toda fracción, y tomando N tan grande que $1/N$ sea menor que $|qx - p|$ para las fracciones ya obtenidas se consigue una nueva, distinta de todas ellas; el proceso no termina. ■

Teorema 3.13 (Criterio de irracionalidad por aproximación). *Un número real x es irracional si y solo si existen infinitas fracciones p/q , con $q \geq 1$, tales que*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Demostración. Si x es irracional, el teorema 3.12 proporciona infinitas fracciones como las del enunciado; también las proporcionan las reducidas, por la proposición 3.10. Recíprocamente, si $x = a/b$ con $b \geq 1$ y $p/q \neq x$, entonces $|x - p/q| = |aq - bp|/(bq) \geq 1/(bq)$, porque $aq - bp$ es un entero no nulo; si además $|x - p/q| < 1/q^2$, resulta $1/(bq) < 1/q^2$, es decir, $q < b$. Solo hay un número finito de denominadores $q < b$, y para cada uno solo un número finito de numeradores p cumplen la desigualdad; luego las fracciones son finitas. ■

El criterio tiene un interés conceptual que va más allá de su utilidad técnica: dice que los racionales se reconocen porque *repelen* a las demás fracciones, que no pueden acercárseles demasiado sin coincidir con ellos, mientras que los irracionales se dejan rodear por fracciones cada vez más próximas. Es, en cierto sentido, la expresión cuantitativa de la antigua intuición de que lo inconmensurable no puede medirse exactamente pero sí aproximarse indefinidamente, y ofrece además un método de demostración de irracionalidad que no depende de ninguna propiedad algebraica del número, sino solo de la calidad de sus aproximaciones; es, de hecho,

en una forma refinada, el principio que subyace a la demostración de Apéry de la irracionalidad de $\zeta(3)$ en 1979 (Apéry, 1979).

3.9.3 El número de oro, el más irracional

La constante 1 del numerador puede mejorarse. Hurwitz demostró en 1891 que todo número irracional x admite infinitas fracciones p/q con $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$, y que la constante $\sqrt{5}$ no puede sustituirse por ninguna mayor (Hurwitz, 1891). La segunda afirmación es la que da sentido preciso a la observación del capítulo 1 (sección 1.8) según la cual el número de oro es el que peor se deja aproximar por fracciones, y su demostración es suficientemente breve como para incluirla.

Teorema 3.14. Sea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y sea $c > \sqrt{5}$. Solo existe un número finito de fracciones p/q , con $q \geq 1$, tales que $|\varphi - p/q| < 1/(cq^2)$.

Demostración. Sea p/q una de esas fracciones y escribamos $p/q = \varphi + \delta/q^2$, con $|\delta| < 1/c$. Como φ y $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de $t^2 - t - 1$ y ninguna es racional, el entero

$$p^2 - pq - q^2 = q^2 \left(\frac{p}{q} - \varphi \right) \left(\frac{p}{q} - \psi \right)$$

no es nulo, y por tanto su valor absoluto es al menos 1. Pero

$$p^2 - pq - q^2 = q^2 \cdot \frac{\delta}{q^2} \cdot \left(\frac{\delta}{q^2} + \varphi - \psi \right) = \delta \left(\sqrt{5} + \frac{\delta}{q^2} \right),$$

de modo que $1 \leq |\delta|(\sqrt{5} + |\delta|/q^2) < \frac{1}{c}(\sqrt{5} + \frac{1}{cq^2})$, es decir, $c - \sqrt{5} < \frac{1}{cq^2}$, o bien $q^2 < \frac{1}{c(c-\sqrt{5})}$. Los denominadores posibles están, pues, acotados, y para cada denominador solo hay un número finito de numeradores que satisfagan la desigualdad. ■

La figura 3.3 muestra el fenómeno de manera gráfica. Si se multiplica el error de cada reducida por el cuadrado de su denominador, la cantidad resultante oscila, con signos alternados, en torno a $\pm 1/(2\sqrt{2}) \approx \pm 0,354$ para $\sqrt{2}$ y en torno a $\pm 1/\sqrt{5} \approx \pm 0,447$ para φ : las aproximaciones de φ son sistemáticamente peores que las de $\sqrt{2}$, y ninguna constante mayor que $\sqrt{5}$ en el denominador permite capturar infinitas de ellas. Que los cocientes de la antifairesis del pentágono sean todos iguales a 1, el menor valor posible, es la razón última de este comportamiento: en el lenguaje de la sección anterior, ninguna reducida de φ va seguida de un cociente grande que la haga excepcionalmente buena.

3.9.4 Los irracionales cuadráticos

La tabla 1.1 del capítulo 1 mostraba que los desarrollos de $\sqrt{n}$ son periódicos. El fenómeno es general, y caracteriza exactamente a los irracionales que satisfacen una ecuación de segundo grado.

Teorema 3.15 (Euler, 1737; Lagrange, 1770). Un número real irracional x tiene un desarrollo en fracción continua periódico a partir de cierto término si y solo si es raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros.

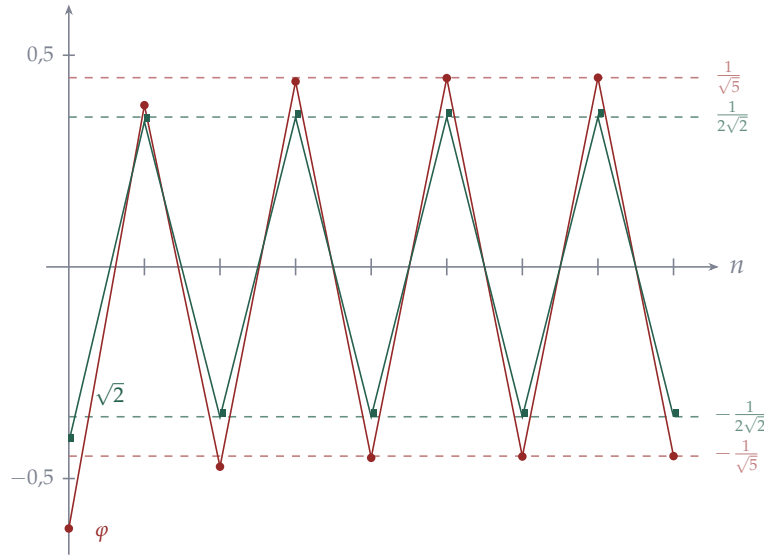


FIGURA 3.3. El error normalizado $q_n^2 \left(\frac{p_n}{q_n} - x \right)$ de las reducidas de $x = \sqrt{2}$ (en verde) y de $x = \varphi$ (en rojo). Ambos alternan de signo, como predice la proposición 3.10, y se estabilizan en torno a $\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ y $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, respectivamente. Los valores se han calculado con las reducidas exactas.

Fuente: Elaboración propia.

Demostración de la implicación de Euler. Supongamos primero que el desarrollo es puramente periódico, $x = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_{k-1}}]$. Entonces $x_k = x$, y por la proposición 3.10,

$$x = \frac{p_{k-1}x + p_{k-2}}{q_{k-1}x + q_{k-2}}, \quad \text{es decir,} \quad q_{k-1}x^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})x - p_{k-2} = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros y $q_{k-1} \neq 0$. Si el desarrollo es periódico solo a partir de cierto término, $x = [a_0; \dots, a_{m-1}, y]$ con y puramente periódico, entonces $x = (py + p')/(qy + q')$ con enteros p, p', q, q' y $pq' - p'q = \pm 1$, de modo que $y = (q'x - p')/(p - qx)$; sustituyendo en la ecuación cuadrática de y y multiplicando por $(p - qx)^2$ se obtiene una ecuación cuadrática con coeficientes enteros para x , cuyo coeficiente principal no puede anularse porque x es irracional. ■

El recíproco, que Lagrange demostró en 1770, es más delicado: requiere probar que los cocientes completos x_n del algoritmo satisfacen ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes están acotados, de modo que solo pueden tomar un número finito de valores y alguno debe repetirse; remitimos a Hardy y Wright (2008) para los detalles. Juntas, las dos implicaciones ofrecen una clasificación completa de un tipo de irracionales mediante una propiedad de su antifairesis, y cierran, en un lenguaje que Teodoro no podía imaginar, el programa que él había iniciado caso por caso (sección 1.9). Explican también por qué la teoría de los números laterales y diagonales, la composición de Brahmagupta y el método cíclico de Bhāskara funcionaban: todos ellos exploraban, sin saberlo, la periodicidad de la fracción continua de un irracional cuadrático.

3.10 Las primeras demostraciones modernas de irracionalidad

El cálculo infinitesimal, desarrollado por Newton y Leibniz en el último tercio del siglo XVII, puso en circulación una multitud de números definidos como límites de series y de productos infinitos, y con ellos una pregunta nueva: ¿son racionales esos números? Para los irracionales cuadráticos la respuesta era conocida desde la Antigüedad; para las constantes del análisis, en particular e y π , hubo que esperar al siglo XVIII, y las primeras demostraciones utilizaron precisamente las fracciones continuas.

3.10.1 El número e

La prehistoria de e , ligada a los logaritmos de Napier (1614) y al problema del interés compuesto que Jacob Bernoulli planteó en 1683, ha sido narrada con detalle por Maor (1994). Euler, que fijó la notación e y demostró que $e = \sum_{k \geq 0} 1/k!$, obtuvo en su memoria *De fractionibus continuis dissertatio*, presentada en 1737 y publicada en 1744, el desarrollo

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots],$$

cuyos cocientes siguen el patrón $1, 2k, 1$ y, por tanto, no terminan nunca; por el teorema 3.11, e es irracional, y como el desarrollo no es periódico, el teorema 3.15 muestra además que e no es un irracional cuadrático (Euler, 1744). La demostración más breve y conocida de la irracionalidad, independiente de las fracciones continuas, es la que se atribuye a Fourier, de 1815 (Aigner y Ziegler, 2018).

Teorema 3.16 (Euler, 1737; demostración de Fourier). *El número $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es irracional.*

Demostración. Supongamos que $e = p/q$ con p, q enteros positivos. Como $2 < e < 3$, e no es entero y podemos suponer $q \geq 2$. El número

$$x = q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) = (q-1)! p - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$$

es entero. Por otra parte,

$$x = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^j} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2},$$

y $x > 0$. Así, x sería un entero estrictamente comprendido entre 0 y 1. ■

La demostración de Fourier merece una observación que la relaciona con el criterio del teorema 3.13. Las sumas parciales $s_q = \sum_{k \leq q} 1/k!$ son fracciones de denominador $q!$ que aproximan a e con un error menor que $1/(q!q)$, es decir, anormalmente bien para su denominador; y es precisamente esa calidad de aproximación, incompatible con la «repulsión» que ejercen los racionales, la que la demostración explota.

3.10.2 El número π

La primera demostración de que π es irracional se debe a Johann Heinrich Lambert, quien la presentó a la Academia de Berlín en 1761 en una memoria publicada en 1768. Lambert obtuvo para la tangente el desarrollo

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

y demostró, mediante un análisis minucioso de la convergencia, que si x es un racional no nulo, entonces $\tan x$ es irracional; como $\tan(\pi/4) = 1$ es racional, $\pi/4$ no puede serlo (Lambert, 1768). Legendre completó el resultado en 1794, en la nota IV de sus *Éléments de géométrie*, al probar que también π^2 es irracional, y conjeturó ya entonces que π no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales (Legendre, 1794); sobre la historia paralela del cálculo de sus cifras pueden consultarse Beckmann (1971) y Rodríguez del Río (2006). La demostración que presentamos, mucho más breve, se debe a Ivan Niven, quien la publicó en 1947 en una sola página; sustituye las fracciones continuas por una integral cuidadosamente elegida y conserva el mismo esquema lógico que la de Fourier: si el número fuera racional, cierta cantidad tendría que ser un entero estrictamente comprendido entre 0 y 1 (Niven, 1947).

Lema 3.17. Sean a, b enteros positivos y $n \geq 1$. El polinomio $f(x) = x^n(a - bx)^n/n!$ satisface: (i) $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \geq 0$; (ii) $f(\frac{a}{b} - x) = f(x)$, y en consecuencia $f^{(k)}(\frac{a}{b}) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \geq 0$.

Demostración. Desarrollando $(a - bx)^n$, $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n c_j x^j$ con $c_j \in \mathbb{Z}$. Entonces $f^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ o $k > 2n$, y $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z}$ si $n \leq k \leq 2n$. Para (ii),

$$f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!};$$

derivando k veces, $(-1)^k f^{(k)}(\frac{a}{b} - x) = f^{(k)}(x)$, y en $x = 0$ se obtiene $f^{(k)}(\frac{a}{b}) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema 3.18 (Lambert, 1761; demostración de Niven). *El número π es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\pi = a/b$ con a, b enteros positivos, sea f el polinomio del lema 3.17 y definamos $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$. Por el lema, $F(0)$ y $F(\pi)$ son enteros, y como $f^{(2n+2)} = 0$, se tiene $F'' + F = f$. En consecuencia,

$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x) = f(x) \sin x, \quad \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Para $0 < x < \pi$ se tiene $0 < a - bx < a$, de modo que $0 < f(x) < \pi^n a^n/n!$, y como $0 < \sin x \leq 1$,

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}.$$

Como $c^n/n! \rightarrow 0$ para cualquier constante c , puede elegirse n con $\pi(\pi a)^n/n! < 1$, y la integral sería un entero estrictamente comprendido entre 0 y 1. ■

NOTA HISTÓRICA: LA DEMOSTRACIÓN DEL TRABAJO DE 2012

El trabajo de graduación del que procede este libro incluía una demostración de la irracionalidad de π^2 basada en el polinomio $x^n(1-x)^n/n!$, que es la variante de la prueba de Niven popularizada por Spivak en su texto de cálculo (Chinchilla et al., 2012). Esa versión tiene la ventaja de probar un resultado más fuerte, el de Legendre, pero exige un manejo más delicado de las potencias de π ; aquí hemos preferido la versión original de Niven, que es más corta y cuya estructura coincide con la de la prueba para e . Para un panorama completo de las técnicas de demostración de irracionalidad, el texto clásico sigue siendo Niven (1956).

3.11 Wantzel y el fin de dos problemas clásicos

3.11.1 Los problemas y su traducción algebraica

Los tres problemas clásicos de la geometría griega —la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo—, que el trabajo de graduación de 2012 estudiaba con detalle (Chinchilla, 2017; Chinchilla et al., 2012), se relacionan de manera directa con nuestro tema: los tres exigen construir con regla y compás un segmento cuya longitud es un número irracional de cierto tipo, y la imposibilidad de hacerlo solo pudo demostrarse cuando se comprendió qué clase de irracionales pueden construirse con esos instrumentos. La proposición 3.6 muestra que la regla y el compás permiten sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas; la pregunta es si permiten algo más. La respuesta la dio en 1837 Pierre Laurent Wantzel (1814–1848), un joven ingeniero de la Escuela Politécnica de París, en un artículo de apenas siete páginas (Wantzel, 1837).

Definición 3.19. Un número real x es *construible* si, partiendo de dos puntos del plano a distancia 1, puede construirse con regla sin marcas y compás un segmento de longitud $|x|$, mediante un número finito de intersecciones entre rectas que pasan por dos puntos ya construidos y circunferencias con centro en un punto construido y radio igual a la distancia entre dos puntos construidos.

Teorema 3.20. *El conjunto de los números construibles es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y es cerrado bajo la extracción de raíces cuadradas de sus elementos positivos. Además, si x es construible, existe una cadena finita de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m \subset \mathbb{R}$, en la que cada $K_{i+1} = K_i(\sqrt{w_i}) = \{u + v\sqrt{w_i} : u, v \in K_i\}$ para cierto $w_i \in K_i$ positivo, tal que $x \in K_m$.*

Demostración. La primera parte es la proposición 3.6. Para la segunda, fijemos coordenadas en las que los puntos iniciales sean $(0,0)$ y $(1,0)$; un número es construible si y solo si es coordenada de algún punto construible. Supongamos que todos los puntos construidos hasta cierto momento tienen coordenadas en un cuerpo K . Una recta que pasa por dos de ellos tiene una ecuación $\alpha x + \beta y = \gamma$ con coeficientes en K , y una circunferencia con centro en uno de

ellos y radio igual a la distancia entre otros dos, una ecuación $x^2 + y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$ con coeficientes en K . La intersección de dos rectas tiene coordenadas en K ; la de una recta con una circunferencia se obtiene resolviendo una ecuación de segundo grado con coeficientes en K , cuyas soluciones están en $K(\sqrt{w})$ con $w \in K$; y la de dos circunferencias se reduce al caso anterior restando sus ecuaciones, lo que produce la ecuación de una recta. Por inducción sobre el número de pasos se obtiene la cadena del enunciado. ■

El teorema tiene una lectura histórica que conviene hacer explícita. Los números construibles son exactamente los que pueden obtenerse a partir de la unidad mediante un número finito de operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas, es decir, una generalización sin límite fijo de las rectas irracionales del Libro X, que solo admitían una o dos extracciones sucesivas (sección 2.9). La clasificación de Euclides era, en este sentido, un fragmento de la teoría de los números construibles; y lo que Fibonacci había descubierto al mostrar que la raíz de la ecuación de Juan de Palermo escapa a esa clasificación (proposición 3.3) era, en el fondo, un caso particular del lema siguiente.

Lema 3.21 (Wantzel). *Si una ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ con coeficientes racionales tiene alguna raíz construible, entonces tiene alguna raíz racional.*

Demostración. La demostración sigue la presentación de Courant y Robbins (2002). Entre todas las raíces construibles y todas las cadenas del teorema 3.20 que las contienen, elijamos una raíz x_1 y una cadena de longitud m mínima. Si $m = 0$, la raíz es racional. Si $m \geq 1$, escribamos $x_1 = u + v\sqrt{w}$ con $u, v, w \in K_{m-1}$; por la minimalidad, $v \neq 0$ y $\sqrt{w} \notin K_{m-1}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene $A + B\sqrt{w} = 0$ con $A, B \in K_{m-1}$, lo que obliga a $A = B = 0$; pero entonces también $x_2 = u - v\sqrt{w} \neq x_1$ es raíz, pues al sustituirla se obtiene $A - B\sqrt{w} = 0$, y por las relaciones de Cardano–Vieta la tercera raíz es $x_3 = -p - x_1 - x_2 = -p - 2u \in K_{m-1}$, raíz construible contenida en una cadena de longitud $m - 1$, en contra de la elección de m . ■

Teorema 3.22 (Wantzel, 1837). (I) *El número $\sqrt[3]{2}$ no es construible; en consecuencia, es imposible duplicar el cubo con regla y compás.*

(II) *El número $\cos 20^\circ$ no es construible; en consecuencia, es imposible trisecar el ángulo de 60° con regla y compás, y no existe un método general de trisección con esos instrumentos.*

Demostración. (i) Duplicar un cubo de arista 1 equivale a construir $\sqrt[3]{2}$, raíz de $x^3 - 2 = 0$. Por el criterio de las raíces racionales (proposición 1.17), una raíz racional tendría que ser uno de los enteros $\pm 1, \pm 2$, y ninguno satisface la ecuación; por el lema 3.21, ninguna raíz es construible.

(ii) De $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ con $\theta = 20^\circ$, el número $c = \cos 20^\circ$ satisface $8c^3 - 6c - 1 = 0$, y con $y = 2c$, $y^3 - 3y - 1 = 0$, cuyas posibles raíces racionales serían ± 1 , y ninguna lo es. Luego $2\cos 20^\circ$ no es construible, ni lo es $\cos 20^\circ$; como construir el ángulo de 20° permitiría construir su coseno, el ángulo de 60° , que sí es construible, no puede trisecarse. ■

La irracionalidad de $\sqrt[3]{2}$, que obtuvimos en el corolario 1.18 del capítulo 1, no bastaba para este resultado: $\sqrt{2}$ también es irracional y, sin embargo, es construible. Lo que el teorema de Wantzel establece es que $\sqrt[3]{2}$ es irracional *de una manera distinta*, que no puede alcanzarse con raíces cuadradas. La historia de los irracionales deja aquí de ser la historia de una sola frontera,

la que separa lo conmensurable de lo inconmensurable, y empieza a ser la de una jerarquía de fronteras sucesivas, cuyo último escalón, el de los números trascendentes, se examinará en el capítulo 4.

3.11.2 Un teorema olvidado

La historia de este teorema tiene un epílogo que me parece muy instructivo. Hoy se reconoce a Wantzel en todos los tratados de historia de la matemática; pero, como ha mostrado Lützen, «su demostración apenas fue advertida por sus contemporáneos y durante el siglo siguiente su nombre quedó casi completamente olvidado» (Lützen, 2009, p. 374; traducción propia). Gauss había demostrado en 1796 que el heptadecágono regular es construible y había afirmado en las *Disquisitiones arithmeticae* (1801) que un polígono regular de n lados, con n primo, solo es construible si es de la forma $2^{2^k} + 1$, sin publicar la demostración de esta condición necesaria; Wantzel la dio en el mismo artículo de 1837, y Lützen subraya que su prueba es mucho más sencilla que las demostraciones constructivas de las *Disquisitiones* (Lützen, 2009).

¿Por qué, entonces, el olvido? La respuesta de Lützen es de naturaleza epistemológica: durante el siglo XVIII, «la matemática era una empresa constructiva que consistía en hallar soluciones a problemas, y esta visión de la matemática seguía siendo compartida por la mayoría de los contemporáneos de Wantzel» (Lützen, 2009, sección 7; traducción propia). En ese paradigma, escribe, «un resultado de imposibilidad como el demostrado por Wantzel no se consideraba un resultado importante dentro de la matemática, sino más bien un metarresultado acerca de la matemática, en este caso acerca de la impotencia de un método particular de construcción» (Lützen, 2009, p. 391; traducción propia). Solo a fines del siglo XIX los teoremas de imposibilidad adquirieron rango central, y Lützen encuentra un testimonio de ese cambio en la célebre conferencia de Hilbert de 1900 sobre los problemas de la matemática, donde la demostración de la imposibilidad de ciertas soluciones aparece como una forma legítima, y aun preeminente, de responder a un problema (Lützen, 2009).

El episodio ilumina retrospectivamente toda nuestra historia. La inconmensurabilidad de la diagonal fue, en sentido estricto, el primer teorema de imposibilidad de la matemática, y la matemática griega supo reconocer su importancia; los veinte siglos siguientes, dominados por el cálculo y la construcción, tendieron a convertir esas imposibilidades en simples dificultades prácticas, y solo cuando la matemática del siglo XIX volvió a interrogarse por sus fundamentos recuperó la conciencia de que demostrar que algo no puede hacerse es una forma genuina de conocimiento. No me parece casual que esa recuperación sea contemporánea de la construcción de los números reales.

NOTA HISTÓRICA: LOS MÉTODOS GRIEGOS DE TRISECCIÓN Y DUPLICACIÓN

El teorema de Wantzel no desacredita las soluciones que los griegos encontraron para estos problemas, sino que explica por qué tuvieron que recurrir a instrumentos distintos de la regla y el compás: la cuadratriz de Hipias, la conchoide de Nicomedes, las cónicas de Menecmo o la regla marcada de Arquímedes permiten resolver ecuaciones de tercer grado y, con ellas, duplicar el cubo o trisecar cualquier ángulo (Heath, 1921; Knorr, 1986); el trabajo de graduación de 2012 estudiaba con detalle la cuadratriz y la construcción de $\sqrt[3]{2}$ con regla

marcada (Chinchilla, 2017; Chinchilla et al., 2012). El tercer problema, la cuadratura del círculo, exige construir $\sqrt{\pi}$, y su imposibilidad requiere un resultado mucho más fuerte que la irracionalidad de π : que π no sea raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Lo demostró Lindemann en 1882, y volveremos sobre ello en el capítulo 4.

3.12 Los decimales infinitos en el aula

3.12.1 Cómo llegan los irracionales a la escuela

La historia que este capítulo ha recorrido termina, en la práctica escolar, en un solo punto: la representación decimal. En la mayoría de los sistemas educativos, los irracionales se presentan a los estudiantes como los números cuya expansión decimal es infinita y no periódica, es decir, mediante la caracterización del teorema 3.4 convertida en definición. González-Martín, en un análisis institucional de catorce libros de texto de secundaria, lo documenta con precisión: «la noción de número irracional se introduce, en general, basándose en la representación decimal de los números y [...] la necesidad matemática para la construcción de los reales no es clara en estos libros» (González-Martín, 2020, p. 7). La definición más frecuente, presente en nueve de los catorce libros, establece que, «entre los números escritos en notación decimal, los que se escriben con una notación infinita y no periódica se llaman irracionales» (González-Martín, 2020, p. 14); y aunque algunos libros ofrecen también otra definición, «a pesar de que las definiciones [...] son matemáticamente equivalentes, ninguno de los libros presenta un argumento para establecer esta equivalencia» (González-Martín, 2020, p. 15). El autor concluye que la necesidad de introducir estos nuevos números «no se discute explícitamente y no se presentan dentro de un contexto significativo o con respecto a su utilidad como herramienta matemática» (González-Martín, 2020, pp. 21–22).

Saiz, Gorostegui y Vilotta, desde la formación docente en Argentina, identifican el problema de fondo en la confusión entre el número y su escritura: «La confusión entre número decimal y expresión decimal revela una confusión más amplia entre el número y su representación» (Saiz et al., 2011, p. 148). Y observan un hecho que Stifel habría reconocido de inmediato: «para algunos números, no es posible escribir la totalidad de sus cifras ni conocer todas y cada una de ellas» (Saiz et al., 2011, p. 138). La historia que hemos contado permite precisar esa observación. Durante veinte siglos, los irracionales se conocieron por construcciones, por razones entre magnitudes, por ecuaciones o por procesos de aproximación; la expansión decimal es una llegada tardía, de fines del siglo XVI, y es, entre todas las representaciones, la menos transparente respecto de la irracionalidad, porque la propiedad que la define, la ausencia de período, no puede verificarse inspeccionando ningún número finito de cifras.

3.12.2 Lo que muestran los estudiantes y los futuros profesores

Las consecuencias de esa opción curricular han sido documentadas con insistencia. Zazkis y Sirotic presentaron a 46 futuros profesores de matemáticas de secundaria el número $M = 53/83$, acompañado de la indicación de que la calculadora muestra 0,63855421687, y preguntaron si M era racional o irracional (Zazkis y Sirotic, 2004, pp. 4-498–4-499). En otra de las preguntas del mismo cuestionario, más del 40 % de los participantes, informan las autoras, no reconoció

una representación decimal no periódica como representación de un número irracional, y, en cuanto a M , algunos de los que lo clasificaron como irracional lo justificaron diciendo que «no podemos ver un decimal periódico» (Zazkis y Sirotic, 2004, pp. 4-500–4-501; traducción propia). Sus resultados indican, concluyen, una tendencia a apoyarse en la calculadora y una preferencia por la representación decimal frente a la fracción común (Zazkis y Sirotic, 2004, p. 4-497). El ejemplo es exactamente el de la observación 3.5: el período de $53/83$, de 41 cifras, excede con mucho la capacidad de la pantalla, y la única manera segura de decidir es la que la escritura en forma de fracción hace evidente.

La otra cara del problema es la dificultad para aceptar que una expansión infinita representa un número completo. En un estudio ya clásico, Tall y Schwarzenberger preguntaron a estudiantes que ingresaban a la universidad si $0,999\dots$ era igual a uno o «un poco menor», y encontraron que la mayoría pensaba que era menor; uno de ellos respondió que era «apenas menos que uno, pero es lo más cerca que se puede llegar a uno sin decir realmente que es uno» (Tall y Schwarzenberger, 1978, traducción propia). Weller, Arnon y Dubinsky confirman, tres décadas después, que estudiantes de todos los niveles, incluidos futuros maestros, tienen considerables dificultades para comprender la relación entre un número racional y su expansión decimal, «incluida la idea de que $0,\overline{9} = 1$ » (Weller et al., 2009, p. 5; traducción propia). La dificultad es, en el fondo, la misma que separa a Viète de Euclides: el estudiante concibe la expansión como un proceso que nunca termina, a la manera de la exhaustión, mientras que la matemática le pide concebirla como un objeto acabado, a la manera de Viète; y ninguna de las dos concepciones se entiende sin la noción de límite que el capítulo 4 hará explícita.

3.12.3 Otras puertas de entrada

Si la representación decimal es la puerta más estrecha hacia los irracionales, la historia sugiere otras más anchas. Las construcciones con regla y compás de la sección 3.7 muestran números irracionales como longitudes concretas, sin necesidad de ninguna expansión; las fracciones continuas los caracterizan por un proceso finito en cada paso, en el que la irracionalidad se manifiesta como no terminación de un algoritmo que el estudiante puede ejecutar a mano; y el método de Herón hace visible, con una hoja de cálculo, cómo una sucesión de fracciones puede acercarse a un número sin alcanzarlo nunca. Chorlay, Clark y Tzanakis resumen el sentido de estas propuestas al afirmar que aprender matemáticas no es solo familiarizarse con los símbolos y la sintaxis lógica de las teorías y acumular resultados presentados como productos acabados, sino también «familiarizarse con las motivaciones implícitas, las acciones de construcción de sentido y los procesos reflexivos de los matemáticos» (Chorlay et al., 2022, traducción propia). En el caso de los irracionales, esas motivaciones son, precisamente, las que la historia de este capítulo ha puesto de manifiesto: la necesidad de calcular, la necesidad de nombrar y la necesidad de demostrar que ciertas cosas no pueden hacerse.

EN EL AULA: TRES REPRESENTACIONES DE UN MISMO NÚMERO

Una actividad que he visto funcionar bien con futuros profesores consiste en estudiar un mismo número irracional, $\sqrt{2}$, mediante tres representaciones históricas sucesivas y comparar lo que cada una permite saber. Primero, la construcción geométrica: la diagonal

del cuadrado unidad, o la construcción de Descartes (figura 3.2), que da el número completo sin ninguna aproximación. Segundo, el algoritmo: el método de Herón en una hoja de cálculo y la antifairesis del cuadrado con papel, que producen las fracciones $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$ y muestran que el proceso no termina. Tercero, la expansión decimal, obtenida con la calculadora, que no permite decidir nada sobre la irracionalidad. La pregunta final, qué representación *demuestra* que $\sqrt{2}$ es irracional, conduce a reconocer que ninguna lo hace por sí sola, y que la demostración del capítulo 1 es un tipo de conocimiento distinto de todas ellas. El caso de $53/83$ puede servir de contraejemplo para la tercera representación. Es frecuente que alguien en el grupo sostenga que $\sqrt{2}$ «no es un número de verdad», porque nunca puede escribirse completo. Stifel pensaba lo mismo en 1544. Vale la pena agradecer la objeción y usarla: obliga al grupo a decir qué entiende por número, que es exactamente la pregunta que el capítulo 4 intenta responder, y muestra que una duda así no es señal de torpeza, sino de que se está pensando en serio.

3.13 En el umbral del rigor

A comienzos del siglo XIX, la situación de los números irracionales era paradójica. Nadie dudaba ya de su legitimidad: los algebristas los manejaban con soltura, los analistas los definían como límites de series y de fracciones continuas, y se había demostrado que constantes tan importantes como e y π pertenecían a esa clase. Y, sin embargo, nadie había dicho con precisión qué es un número irracional. Todas las definiciones disponibles remitían a algo previo: la de Newton a la magnitud geométrica, las de las series y las fracciones continuas a la noción de límite, que a su vez presuponía la existencia del número al que se tiende. La tesis de Stevin estaba aceptada, pero no justificada; la «niebla de lo infinito» de Stifel se había vuelto productiva, pero no se había disipado. El capítulo siguiente narra cómo la matemática del siglo XIX rompió ese círculo.

Síntesis del capítulo

IDEAS PRINCIPALES

1. Entre Euclides y Descartes, los irracionales se incorporaron a la práctica matemática por la vía del cálculo antes que por la de la teoría: Herón, Teón, los astrónomos indios y los algebristas árabes operaron con ellos como con números sin preguntarse qué eran.
2. La tradición india convirtió la aproximación de los irracionales cuadráticos en una teoría algebraica, la de la ecuación $x^2 - Ny^2 = 1$, y la escuela de Kerala representó π mediante series infinitas.
3. En el mundo islámico, el Libro X se transformó en un álgebra de radicales, y al-Jayyām propuso tratar las razones como números; el término latino *surdus* procede de esa tradición.
4. El Renacimiento heredó una actitud ambivalente, que Stifel expresa con claridad; Stevin afirmó que no hay números sordos y difundió los decimales, pero sin una teoría que justificara su tesis.
5. Descartes y Newton unificaron número y magnitud mediante la elección de una unidad; la definición newtoniana del número como razón admitía los irracionales, pero trasladaba la dificultad a la noción de cantidad continua.
6. Las fracciones continuas, forma aritmética de la antifairesis, caracterizan a los racionales por la finitud del desarrollo, a los irracionales cuadráticos por su periodicidad y a todos los irracionales por la calidad de sus aproximaciones; el número de oro es el peor aproximable.
7. Euler, Fourier, Lambert y Niven demostraron la irracionalidad de e y de π ; Wantzel mostró en 1837 que no todos los irracionales algebraicos son construibles, y el olvido de su resultado revela el lugar marginal que la época concedía a los teoremas de imposibilidad.
8. La escuela introduce los irracionales por la representación decimal, que históricamente es la más tardía y, respecto de la irracionalidad, la menos transparente; la investigación documenta las dificultades que de ello se derivan.

Ejercicios

Ejercicios matemáticos

Ejercicio 3.1. Aplique el método de Herón con $a = 720$ y $x_0 = 27$ y compruebe que $x_1 = 26\frac{5}{6}$ y $x_2 = \frac{51841}{1932}$. Estime el error de x_2 con la identidad del teorema 3.1 y compárelo con el valor exacto.

Ejercicio 3.2. Utilice la identidad de Brahmagupta con $N = 3$, partiendo de $(2, 1)$, para generar soluciones de $x^2 - 3y^2 = 1$, y verifique que entre las fracciones x/y obtenidas aparece la cota superior de Arquímedes, $\frac{1351}{780}$.

Ejercicio 3.3. Demuestre que $\log_3 2$ y $\log_{10} 2$ son irracionales. ¿Qué tiene que ver el segundo resultado con el hecho de que ninguna potencia de 2 sea una potencia de 10?

Ejercicio 3.4. Encuentre el período de la expansión decimal de $1/7$, de $1/17$ y de $53/83$, y relacione su longitud con los restos del algoritmo de la división. Demuestre que la longitud del período de $1/q$, si q es primo con 10, es el menor entero $r \geq 1$ tal que q divide a $10^r - 1$.

Ejercicio 3.5. Demuestre, usando la fórmula de la suma de una serie geométrica que aparece en la demostración del teorema 3.4, que $0,999 \dots = 1$, y explique por qué esta igualdad no contradice la unicidad de la expansión decimal «propia» de un número.

Ejercicio 3.6. Calcule las primeras reducidas de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y φ mediante las recurrencias de la proposición 3.10 y compárelas con los números laterales y diagonales, con las fracciones de Arquímedes y con los cocientes de Fibonacci.

Ejercicio 3.7. Demuestre que la fracción continua periódica $[1; \overline{2, 1}] = [1; 2, 1, 2, 1, \dots]$ es raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y halle su valor. Haga lo mismo con $[4; \overline{1, 1, 1, 4}]$ y relacione el resultado con el desarrollo de $\sqrt{7}$ que figura en la tabla 1.1.

Ejercicio 3.8. Adapte la demostración del teorema 3.14 para probar que, si $c > 2\sqrt{2}$, solo hay un número finito de fracciones p/q con $|\sqrt{2} - p/q| < 1/(cq^2)$. Compare con la figura 3.3.

Ejercicio 3.9. Demuestre, adaptando la prueba de Fourier, que $e^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k / k!$ es irracional, y deduzca de nuevo la irracionalidad de e .

Ejercicio 3.10. Demuestre que el heptágono regular no es construible con regla y compás, sabiendo que $2 \cos(2\pi/7)$ es raíz de $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

Ejercicios históricos y didácticos

Ejercicio 3.11. Compare la posición de Stifel y la de Stevin sobre la naturaleza de los números irracionales. ¿Qué argumentos de cada uno reconoce en las respuestas de sus estudiantes cuando se les pregunta si $\sqrt{2}$ «es un número»?

Ejercicio 3.12. Revise la definición de número irracional en dos libros de texto de secundaria de su país a la luz del análisis de González-Martín presentado en la sección 3.12. ¿Se justifica en ellos la equivalencia entre las distintas definiciones? ¿Se presenta alguna necesidad matemática para introducir los irracionales?

Ejercicio 3.13. Diseñe una tarea, inspirada en el ejemplo de $53/83$ de Zazkis y Sirotic, que obligue a los estudiantes a distinguir entre la apariencia de una expansión decimal en la calculadora y la naturaleza racional o irracional del número. Anticipe las respuestas que espera y el modo de discutirlos.

Lecturas recomendadas

Rashed (1994)

El estudio de referencia sobre el álgebra árabe y la aritmetización de los irracionales.

Plofker (2009)

Una síntesis rigurosa y actualizada de la matemática india, incluidas la ecuación de Pell y las series de Kerala.

Malet (2006)

Sobre la identificación renacentista de números y medidas que desemboca en Stevin.

Hardy y Wright (2008)

El texto clásico de teoría de números, con una exposición completa de las fracciones continuas y de la aproximación diofántica.

Niven (1956)

Las técnicas de demostración de irracionalidad, expuestas por el autor de la prueba más breve de la irracionalidad de π .

Lützen (2009)

Un análisis ejemplar de cómo cambia la importancia de un teorema de imposibilidad.

González-Martín (2020)

Un análisis institucional, en español, de cómo los libros de texto introducen los números reales.

La formalización rigurosa moderna

Cada vez que se presenta una cortadura que no es producida por ningún número racional, creamos un número nuevo, un número irracional, que consideramos completamente definido por esa cortadura.

Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872), § 4

Hacia 1870 la situación que describimos al final del capítulo anterior había dejado de ser tolerable. La aritmetización del análisis, emprendida por Cauchy y llevada adelante con implacable rigor por Weierstrass en sus lecciones de Berlín, había reducido las nociones de límite, continuidad, derivada e integral a enunciados sobre desigualdades entre números; pero los números mismos, y en particular los irracionales, seguían sin definirse. En el breve lapso de cuatro años, entre 1869 y 1872, cinco matemáticos propusieron de manera independiente construcciones rigurosas de los números reales a partir de los racionales: Charles Méray, Karl Weierstrass —cuyas lecciones difundió su discípulo Kossak—, Eduard Heine, Georg Cantor y Richard Dedekind (Boyer y Merzbach, 2011; Ferreirós, 2007). La coincidencia no es un accidente: indica que el problema había madurado y que las herramientas para resolverlo, una teoría de conjuntos incipiente y el lenguaje de los ε y los δ , estaban disponibles.

Este capítulo presenta las dos construcciones que se impusieron, la de Dedekind y la de Cantor, con sus demostraciones fundamentales, y las pone en relación con la historia que hemos contado: con la definición 5 del Libro V, que la cortadura prolonga y a la vez transforma, y con las sucesiones de aproximaciones de Herón y de los números laterales y diagonales, que la construcción de Cantor convierte en definición. Examina después la relación entre ambos autores a la luz de la investigación de Ferreirós, que obliga a corregir una atribución muy difundida; discute la axiomatización de Hilbert y el teorema de unicidad que cierra la cuestión de qué es un número real; y presenta los resultados de Liouville, Hermite, Lindemann y Cantor que revelaron la verdadera extensión del mundo irracional y resolvieron el último de los problemas clásicos. Termina, como los capítulos anteriores, con lo que la investigación didáctica ha documentado sobre la comprensión de la completitud y del infinito actual, y con una reflexión sobre los límites de lo que puede decirse de los números reales.

MAPA DEL CAPÍTULO

4.1–4.2	El círculo de Cauchy y el problema que Dedekind se propuso resolver.
4.3	La continuidad de la recta y las cortaduras de Dedekind.
4.4	Las sucesiones fundamentales de Cantor.
4.5	Dedekind y Cantor: una colaboración menos armoniosa de lo que se cree.
4.6	La axiomatización y la unicidad de los números reales.
4.7–4.8	Números algebraicos y trascendentes; la numerabilidad y la cuadratura del círculo.
4.9	El cierre epistemológico y sus límites.
4.10	Continuidad, completitud e infinito en la enseñanza.

4.1 El círculo de Cauchy

La definición de número irracional que circulaba a comienzos del siglo XIX puede leerse en los preliminares del *Cours d'analyse* de Cauchy (1821), el texto que inauguró la exigencia moderna de rigor en el análisis.

CAUCHY, *Cours d'analyse* (1821), PRELIMINARES, P. 4 (TRADUCCIÓN PROPIA)

Cuando los valores atribuidos sucesivamente a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él tan poco como se quiera, este último se llama el límite de todos los demás. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de las diversas fracciones que proporcionan valores cada vez más aproximados de él.

La definición es circular, y la circularidad es instructiva (Cauchy, 1821). Para que el número irracional sea el límite de ciertas fracciones, es preciso que exista previamente como «valor fijo» al que las fracciones se aproximan; pero si existe previamente, ¿qué es? Cauchy daba por supuesto el continuo numérico, heredado de la intuición geométrica, y definía el irracional como un punto de ese continuo; su definición era, en el fondo, la de Newton, trasladada del lenguaje de las razones al de los límites. Cuatro años antes, Bernard Bolzano se había encontrado con la misma dificultad desde el lado opuesto. En su *Rein analytischer Beweis* de 1817, que se proponía demostrar sin apelar a la geometría que una función continua que toma valores de signos opuestos se anula en algún punto, Bolzano necesitó el principio según el cual toda sucesión cuyos términos se acercan indefinidamente entre sí converge a un número, y trató de demostrarlo sin conseguirlo plenamente, porque carecía de una definición de número real que le permitiera construir el límite (Bolzano, 1817). Cauchy adoptó el mismo principio en 1821 como si fuera evidente.

La brecha que Eudoxo había dejado abierta al presuponer la existencia de la cuarta proporcional (sección 2.6) reaparecía, veintidós siglos después, en el corazón mismo del análisis. Bolzano y Cauchy habían formulado con precisión la propiedad que el continuo numérico debe tener, la completitud, pero no habían demostrado que exista un sistema de números que la posea, y todas las demostraciones del análisis que dependían de ella, desde el teorema de los valores intermedios hasta la existencia de la integral, quedaban suspendidas de ese supuesto. El lector recordará, además, que la sucesión de Herón para $\sqrt{2}$ (sección 3.1) es exactamente una

sucesión de racionales cuyos términos se acercan indefinidamente entre sí sin acercarse a ningún racional: en el dominio de los racionales, el principio de Bolzano y Cauchy es falso, y solo puede ser verdadero en un dominio más amplio cuya existencia nadie había garantizado.

4.2 El problema de Dedekind

Richard Dedekind (1831–1916), discípulo de Gauss y amigo de Riemann en Gotinga, relata en el prefacio de su opúsculo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuidad y números irracionales*), fechado en marzo de 1872, que cuando, recién nombrado profesor en el Politécnico de Zúrich en 1858, tuvo que enseñar por primera vez los elementos del cálculo diferencial, se vio obligado a recurrir a la evidencia geométrica para explicar que una magnitud que crece constantemente, pero no más allá de cierto límite, debe tender a un valor límite; y que sintió entonces con toda intensidad la falta de una fundamentación verdaderamente aritmética. La solución, dice, la encontró el 24 de noviembre de 1858, y tardó catorce años en publicarla (Dedekind, 1872, 1998). Me parece significativo, y lo subrayo para los lectores que enseñan, que la construcción más influyente de los números reales naciera de la incomodidad de un profesor ante lo que no podía explicar a sus estudiantes.

La precisión de su diagnóstico se aprecia en la observación con que cierra el § 6 de la obra, después de haber definido las operaciones con las cortaduras.

DEDEKIND, *Continuidad y números irracionales* (1872), § 6 (TRADUCCIÓN PROPIA)

[...] y de esta manera se llega a demostraciones efectivas de proposiciones como, por ejemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, que, hasta donde yo sé, nunca han sido demostradas.

La observación no es una *boutade*. Si $\sqrt{2}$ se define como «el número cuyo cuadrado es 2», hay que probar primero que tal número existe y es único; si se define como el límite de una sucesión de racionales, hay que saber de antemano que el límite existe; y si se define geoméricamente como la longitud de la diagonal del cuadrado unidad, entonces la igualdad $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ requiere una teoría de la multiplicación de longitudes que nadie había formulado con rigor, pues la de Descartes (proposición 3.6) suponía la existencia de las longitudes que multiplicaba y la validez de la teoría de la semejanza para magnitudes arbitrarias. Dedekind se propuso construir los números reales exclusivamente a partir de los racionales, de modo que todas sus propiedades, incluida la continuidad, fueran consecuencias demostrables y no supuestos.

4.3 La continuidad de la recta y las cortaduras

4.3.1 La esencia de la continuidad

El punto de partida de Dedekind es una comparación entre los números racionales y los puntos de una recta. Cada número racional a divide a los racionales en dos clases, la de los menores que a y la de los mayores, y lo mismo hace cada punto p con los puntos de la recta. Pero hay una diferencia esencial: la recta contiene infinitos puntos que no corresponden a ningún racional, como el extremo del segmento que resulta de llevar sobre ella la diagonal del cuadrado

unidad. La recta es completa, sin lagunas, continua; los racionales, aunque densos, no lo son. ¿En qué consiste exactamente esa continuidad? La respuesta de Dedekind es de una sencillez desarmante.

DEDEKIND (1872), § 3 (TRADUCCIÓN PROPIA)

Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases de tal modo que todo punto de la primera clase está a la izquierda de todo punto de la segunda, entonces existe un único punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos trozos.

Dedekind advierte que este principio no puede demostrarse, porque expresa una propiedad que atribuimos a la recta, y que lo que sí puede hacerse es construir un dominio numérico que la posea. Giovannini subraya la fuerza excepcional de este principio: «Éste es además un principio de continuidad muy fuerte, puesto que por sí solo basta para garantizar la completa coordinatización de los puntos de la línea con los números reales» (Giovannini, 2013, p. 149). La estrategia de Dedekind consiste en convertir la propiedad en definición: allí donde los racionales tienen una laguna, el número irracional *es* la laguna misma, o más exactamente la partición de los racionales que la laguna determina.

Definición 4.1 (Cortadura). Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A_1, A_2) de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tales que

- (I) $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset, A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
- (II) todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2 .

Si A_1 tiene un elemento máximo o A_2 tiene un elemento mínimo, se dice que la cortadura es *producida* por ese número racional. En caso contrario, la cortadura define un número nuevo, *irracional*.

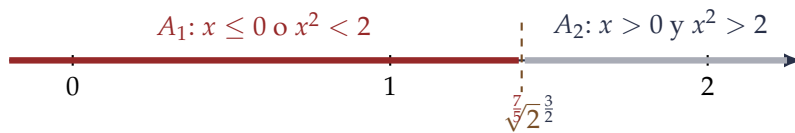


FIGURA 4.1. La cortadura que define $\sqrt{2}$. Ningún racional la produce: la clase inferior no tiene máximo y la superior no tiene mínimo. El «lugar» señalado con línea discontinua no está ocupado por ningún número racional; es la misma partición de las fracciones que la figura 2.3 del capítulo 2 asociaba a la razón entre la diagonal y el lado.

Fuente: Elaboración propia.

Teorema 4.2 (Dedekind). Sean $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 > 2\}$ y $A_1 = \mathbb{Q} \setminus A_2$. Entonces (A_1, A_2) es una cortadura que no es producida por ningún número racional.

Demostración. Ambas clases son no vacías ($0 \in A_1, 2 \in A_2$) y complementarias. Si $a \in A_1$ y $b \in A_2$, o bien $a \leq 0 < b$, o bien $a > 0$ y $a^2 \leq 2 < b^2$, de donde $a < b$. Por el teorema 1.9, ningún

racional satisface $x^2 = 2$, de modo que $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ o } x^2 < 2\}$. Para cada racional $x > 0$ sea

$$y = x - \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \frac{2x + 2}{x + 2}, \quad \text{que satisface} \quad y^2 - 2 = \frac{2(x^2 - 2)}{(x + 2)^2}.$$

Si $x \in A_1$ con $x > 0$, entonces $x^2 < 2$, de modo que $y > x$ e $y^2 < 2$: el racional y está en A_1 y es mayor que x ; como los elementos no positivos de A_1 son menores que $1 \in A_1$, la clase A_1 no tiene máximo. Si $x \in A_2$, entonces $y < x$, $y > 0$ e $y^2 > 2$, de modo que A_2 no tiene mínimo. ■

Dedekind demuestra en su opúsculo el resultado más general de que la misma construcción, con 2 reemplazado por cualquier entero positivo D que no sea un cuadrado perfecto, da una cortadura no producida por ningún racional. La función $x \mapsto (2x + 2)/(x + 2)$ empleada en la demostración está emparentada con la recurrencia de los números laterales y diagonales de la proposición 1.10: si $x = d_n/a_n$, entonces $y = (2d_n + 2a_n)/(d_n + 2a_n) = 2a_{n+1}/d_{n+1}$, que es otra aproximación de $\sqrt{2}$ construida con el par siguiente. La vieja aritmética pitagórica reaparece así, veinticuatro siglos después, en el centro de la construcción moderna.

4.3.2 Los números reales como conjuntos de racionales

Para desarrollar la aritmética de las cortaduras resulta cómodo, siguiendo la presentación clásica de Rudin (1976), identificar cada cortadura con su clase inferior, después de convenir en qué hacer con el máximo cuando existe.

Definición 4.3. Un *número real* es un subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisface: (i) $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$; (ii) si $p \in \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$ con $q < p$, entonces $q \in \alpha$; (iii) α no tiene elemento máximo. Designamos por $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales y escribimos $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subseteq \beta$. Cada racional r se identifica con el real $r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$.

La relación $\subseteq$ es un orden total en $\mathbb{R}$: si $\alpha \not\subseteq \beta$, existe $p \in \alpha \setminus \beta$, y entonces todo $q \in \beta$ satisface $q < p$, pues de lo contrario p estaría en β por (ii), de modo que $\beta \subseteq \alpha$. El teorema 4.2 dice precisamente que $\alpha_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ o } x^2 < 2\}$ es un número real que no es de la forma r^* .

La comparación con el capítulo 2 es aquí inevitable, y conviene hacerla con precisión. El teorema 2.13 mostraba que, en la teoría de Eudoxo, dos razones son iguales si y solo si tienen el mismo conjunto inferior de fracciones; la definición 4.3 toma ese mismo conjunto inferior, pero no como un modo de *comparar* razones dadas de antemano por las magnitudes, sino como el objeto mismo que se define. La estructura lógica es idéntica; el estatuto ontológico es el opuesto. Dedekind lo sabía. En la correspondencia que mantuvo en 1876 con Rudolf Lipschitz, quien sostenía que las cortaduras no añadían nada esencial a Euclides, admitió el parentesco, pero insistió en que Euclides nunca afirma que a cada cortadura corresponda una razón, es decir, nunca postula la completitud del dominio de las magnitudes, que es justamente lo que su teoría demuestra para los números que construye (Ferreirós, 2007; Stein, 1990).

Teorema 4.4 (Propiedad del supremo). *Todo subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una cota superior mínima, o supremo, en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\gamma = \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$. Como $S \neq \emptyset$, $\gamma \neq \emptyset$; si β es una cota superior de S , entonces $\gamma \subseteq \beta \neq \mathbb{Q}$. Si $p \in \gamma$ y $q < p$, entonces $p \in \alpha$ para algún $\alpha \in S$ y $q \in \alpha \subseteq \gamma$. Si $p \in \gamma$, entonces $p \in \alpha$ para algún $\alpha \in S$, y como α no tiene máximo existe $r \in \alpha \subseteq \gamma$ con $r > p$. Así $\gamma \in \mathbb{R}$. Es evidente que $\alpha \subseteq \gamma$ para todo $\alpha \in S$, y si δ es otra cota superior, $\alpha \subseteq \delta$ para todo $\alpha \in S$ implica $\gamma \subseteq \delta$. ■

Corolario 4.5 (Las cortaduras de $\mathbb{R}$ no crean números nuevos). Si $\mathbb{R} = B_1 \cup B_2$ con B_1, B_2 no vacíos, disjuntos, y todo elemento de B_1 menor que todo elemento de B_2 , existe un único real γ tal que $\beta \leq \gamma$ para todo $\beta \in B_1$ y $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B_2$.

Demostración. B_1 es no vacío y está acotado por cualquier elemento de B_2 ; su supremo γ es cota superior de B_1 y, por ser la menor, es menor o igual que todo elemento de B_2 . Para la unicidad, supongamos que $\gamma < \gamma'$ tienen ambos la propiedad. Como $\gamma \subsetneq \gamma'$ y γ' no tiene máximo, existen racionales $p < p'$ en $\gamma' \setminus \gamma$, y el real $\delta = p'^*$ satisface $\gamma \subseteq p^* \subsetneq \delta \subsetneq \gamma'$, es decir, $\gamma < \delta < \gamma'$. Si $\delta \in B_1$, entonces $\delta \leq \gamma$; si $\delta \in B_2$, entonces $\gamma' \leq \delta$. Ambas conclusiones son absurdas. ■

La propiedad del supremo es la versión moderna del principio de continuidad de Dedekind, y el corolario dice que el proceso de completar los racionales mediante cortaduras no necesita repetirse: la recta numérica así construida ya no tiene lagunas. La construcción no termina aquí, desde luego, porque es preciso definir las operaciones y verificar que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. La suma se define por $\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$, y la verificación de los axiomas es un ejercicio rutinario, aunque laborioso, que puede verse en Rudin (1976). El producto de dos reales positivos se define mediante $\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0\} \cup \{pq : p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\}$ y se extiende a los demás casos por la regla de los signos. Con estas definiciones podemos, por fin, responder a la inquietud de Dedekind.

Proposición 4.6. El número real $\alpha_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ o } x^2 < 2\}$ satisface $\alpha_2 \cdot \alpha_2 = 2^*$. En otras palabras, $\sqrt{2}$ existe en $\mathbb{R}$.

Demostración. Por definición, $\alpha_2 \cdot \alpha_2$ está formado por los racionales no positivos y por los productos pq con $p, q \in \alpha_2$ positivos. Si $0 < p \leq q$ y $q^2 < 2$, entonces $pq \leq q^2 < 2$; luego $\alpha_2 \cdot \alpha_2 \subseteq 2^*$. Recíprocamente, sea $r \in \mathbb{Q}$ con $0 < r < 2$. Basta encontrar $p \in \alpha_2$ positivo con $p^2 > r$, pues entonces $q = r/p$ satisface $0 < q < p$, $q^2 < p^2 < 2$ y $pq = r$. Por la proposición 1.10, las fracciones d_n/a_n con n impar satisfacen $2 - (d_n/a_n)^2 = 1/a_n^2$, que tiende a cero; basta elegir n impar con $1/a_n^2 < 2 - r$ y $p = d_n/a_n$. Por tanto $2^* \subseteq \alpha_2 \cdot \alpha_2$. ■

La igualdad $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ se demuestra de manera análoga (ejercicio 4.2). Lo importante es que, por primera vez en la historia, la existencia de $\sqrt{2}$ no se postula ni se toma de la geometría, sino que se demuestra a partir de los racionales, y estos, a su vez, pueden construirse a partir de los enteros y de los naturales, con lo cual todo el edificio de los números reales descansa sobre la aritmética de los números naturales. Obsérvese, además, que en la demostración anterior intervienen las fracciones de los números laterales y diagonales: la construcción moderna no prescinde de las aproximaciones antiguas, sino que las utiliza como herramienta para demostrar que el objeto construido tiene la propiedad buscada.

4.4 Las sucesiones fundamentales de Cantor

Georg Cantor (1845–1918) llegó a la cuestión de los números irracionales por un camino muy distinto. En 1870 había demostrado que si una serie trigonométrica converge a cero en todo punto de un intervalo, entonces todos sus coeficientes son nulos, y en los años siguientes intentó extender el resultado permitiendo que la convergencia fallara en ciertos conjuntos excepcionales de puntos. Para describir esos conjuntos, que podían ser infinitos y de estructura muy complicada, necesitaba una teoría precisa de los puntos de la recta y, por tanto, de los números reales. El artículo de 1872 en que presenta su construcción es, formalmente, un trabajo sobre series trigonométricas, y en él aparece por primera vez la noción de conjunto derivado, germen de la teoría de conjuntos (Cantor, 1872; Ferreirós, 2007). La idea de Cantor, compartida con Méray, que la había publicado en 1869, y con Heine (Heine, 1872), consiste en definir los números reales a partir de las sucesiones de racionales que «deberían» converger, como la sucesión de Herón.

Definición 4.7. Una sucesión (r_n) de números racionales es *fundamental* (o *de Cauchy*) si para todo racional $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $|r_m - r_n| < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$. Dos sucesiones fundamentales (r_n) y (s_n) son *equivalentes*, $(r_n) \sim (s_n)$, si para todo racional $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|r_n - s_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

La relación $\sim$ es de equivalencia, y en la versión moderna de la construcción un número real se define como una clase de equivalencia de sucesiones fundamentales. La suma y el producto se definen término a término, $[(r_n)] + [(s_n)] = [(r_n + s_n)]$ y $[(r_n)] \cdot [(s_n)] = [(r_n s_n)]$, y se comprueba que no dependen de los representantes elegidos; un real es positivo si alguno de sus representantes es, a partir de cierto término, mayor que un racional positivo fijo. Cada racional r se identifica con la clase de la sucesión constante $(r, r, r, \dots)$. La definición evita el círculo de Cauchy de manera elegante: no dice que el irracional sea el límite de la sucesión, lo cual presupondría su existencia, sino que *es* la sucesión, o mejor, la clase de todas las sucesiones que se comportan como ella.

Teorema 4.8. La sucesión de Herón $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2/x_n)$ es una sucesión fundamental de números racionales que no converge a ningún número racional. El número real que define satisface $[(x_n)]^2 = 2$.

Demostración. Todos los x_n son racionales y, por el teorema 3.1, la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es decreciente, está acotada inferiormente por 1 y satisface $x_n^2 \geq 2$. La identidad

$$x_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \right)^2,$$

junto con $x_n \geq 1$, da $0 \leq x_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{4}(x_n^2 - 2)^2$, de modo que $x_n^2 - 2 \rightarrow 0$. Como $x_m + x_n \geq 2$,

$$|x_m - x_n| = \frac{|x_m^2 - x_n^2|}{x_m + x_n} \leq \frac{1}{2}(|x_m^2 - 2| + |x_n^2 - 2|),$$

que se hace menor que cualquier $\varepsilon > 0$ para m, n suficientemente grandes. Si convergiera a un racional r , sería $r^2 = 2$, en contradicción con el teorema 1.9. Finalmente, el cuadrado de la clase de (x_n) es la clase de (x_n^2) , equivalente a la sucesión constante $(2, 2, \dots)$. ■

Teorema 4.9 (Complejitud de Cauchy). *Toda sucesión fundamental de números reales converge a un número real.*

Esbozo de demostración. Sea (ξ_n) una sucesión fundamental de números reales. Como los racionales son densos en los reales construidos, pues cada real es límite de su propia sucesión de racionales, para cada n podemos elegir un racional q_n con $|\xi_n - q_n| < 1/n$. La desigualdad triangular muestra que (q_n) es una sucesión fundamental de racionales, que define un número real ξ , y un nuevo uso de la desigualdad triangular prueba que $\xi_n \rightarrow \xi$. El proceso de completar no necesita repetirse: al aplicar la construcción de Cantor a los reales ya construidos no se obtienen números nuevos. ■

El teorema 4.8 cierra un arco que atraviesa todo este libro. La sucesión $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \dots$ aparece en la tablilla YBC 7289 bajo la forma de su cuarto término truncado en la tercera posición sexagesimal, pues $\frac{577}{408} = 1;24,51,10,35\dots$, en los *Śulbasūtras* bajo la forma exacta de ese mismo término, en el método de Herón como un procedimiento iterativo y en la composición de Brahmagupta como una ley algebraica; durante casi cuatro mil años fue una herramienta para aproximar un número cuya existencia se daba por descontada. Cantor la convierte en el número mismo.

4.5 Dedekind y Cantor: una colaboración menos armoniosa de lo que se cree

Dedekind y Cantor se conocieron en 1872, en Suiza, durante unas vacaciones, y mantuvieron desde entonces una correspondencia que la historiografía ha presentado a menudo como una colaboración amistosa y fecunda en la que se habría gestado la teoría de conjuntos. Ferreirós, que ha estudiado a fondo esas cartas y las notas que Dedekind tomó sobre ellas, ofrece una imagen bastante distinta: «para resumir, tanto Cantor como Dedekind hicieron contribuciones importantes al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la visión conjuntista de los objetos matemáticos, pero, contrariamente a la opinión comúnmente aceptada, no disfrutaron de una colaboración intensa» (Ferreirós, 1993, p. 356; traducción propia).

El episodio central afecta directamente a nuestra historia. El 29 de noviembre de 1873, Cantor escribió a Dedekind preguntándole si el conjunto de los números reales puede ponerse en correspondencia biunívoca con el de los números naturales. Según Ferreirós, «Dedekind respondió que no era capaz de resolverlo, pero al mismo tiempo enunció y demostró el teorema de la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos» (Ferreirós, 1993, pp. 348–349; traducción propia). Dedekind respondió en una carta, hoy perdida, de fines de noviembre o comienzos de diciembre; Cantor le envió el 7 de diciembre la demostración de que los reales no son numerables, y Dedekind volvió a escribirle, también en una carta perdida, el 8 de diciembre; en 1874 Cantor publicó un artículo que contenía ambos resultados (Cantor, 1874). Dedekind anotó más tarde, con evidente disgusto, que «al poco tiempo, este teorema y su demostración fueron reproducidos casi literalmente, incluido el uso del término técnico “altura” [*Höhe*], en el artículo de Cantor» (Ferreirós, 1993, p. 349, citando las notas de Dedekind; traducción propia), sin que, según él, se reconociera su procedencia. Ferreirós considera que la tensión creada por

esa publicación fue la causa inicial de que la relación entre ambos no llegara nunca a ser una colaboración sostenida.

El episodio obliga a corregir una atribución muy difundida: la numerabilidad de los números algebraicos, con su ingenioso recurso a la altura de un polinomio, es un resultado de Dedekind, publicado por Cantor; lo genuinamente cantoriano de 1874 es la no numerabilidad de los reales. Me parece importante insistir en ello no por un prurito de justicia póstuma, sino porque la historia real, con sus tensiones y sus apropiaciones, es más instructiva que la leyenda de una armonía sin fisuras, y porque muestra que las ideas decisivas de la teoría de conjuntos surgieron de un diálogo, aunque fuera un diálogo difícil.

NOTA HISTÓRICA: DOS CONSTRUCCIONES, DOS ESTILOS

Aunque su relación personal fuera irregular, Dedekind y Cantor conocían y respetaban la construcción del otro. Sus enfoques reflejan sensibilidades distintas, que la tabla 4.1 resume. La cortadura de Dedekind es una construcción de orden: define un real por su posición respecto de todos los racionales a la vez, y conecta directamente con la definición 5 del Libro V. La sucesión de Cantor es una construcción métrica: define un real como el destino de un proceso de aproximación, y conecta con la práctica secular de los calculistas, desde los escribas de YBC 7289 hasta Herón y Brahmagupta. La primera es más económica en su punto de partida; la segunda se generaliza sin esfuerzo a cualquier espacio métrico y está en el origen de la noción moderna de completación (Ferreirós, 2007).

	<i>Dedekind (1872)</i>	<i>Cantor (1872)</i>
Un real es...	una partición de $\mathbb{Q}$ en dos clases	una clase de sucesiones fundamentales de racionales
Idea rectora	el orden: la posición respecto de todas las fracciones	la métrica: el destino de un proceso de aproximación
Antecedente histórico	la definición 5 de Eudoxo (capítulo 2)	Herón, los números laterales, las fracciones continuas (capítulos 1 y 3)
Completitud	propiedad del supremo	convergencia de las sucesiones fundamentales
Generalización	conjuntos ordenados	espacios métricos (completación)

TABLA 4.1. Las dos construcciones de los números reales que se impusieron a partir de 1872.

Fuente: Elaboración propia.

4.6 Un único continuo: la axiomatización

Si dos construcciones tan distintas producen sendos sistemas de números reales, cabe preguntarse si son el mismo sistema. La respuesta es afirmativa, y se expresa mejor en el lenguaje axiomático que Hilbert propuso en 1900 en su nota *Über den Zahlbegriff*, donde caracterizó a

los números reales como un cuerpo ordenado arquimediano que no admite ninguna extensión que conserve esas propiedades, mediante un *axioma de completitud* (*Vollständigkeitsaxiom*) que incorporó poco después a la axiomatización de la geometría publicada en 1899, primero en la traducción francesa de 1900 y luego en la segunda edición alemana de 1903 (Hilbert, 1899, 1900; Giovannini, 2013). Giovannini ha mostrado que ese axioma tiene una naturaleza peculiar: «En resumen, el axioma de completitud postula de un modo indirecto la continuidad de los objetos geométricos, o de acuerdo a su versión lineal, la continuidad de la línea» (Giovannini, 2013, p. 145), pues, a diferencia del principio de Dedekind, no afirma directamente la existencia de puntos nuevos sino la imposibilidad de ampliar el sistema. Y muestra también que el axioma de Arquímedes desempeñaba en el sistema de Hilbert una función que ya conocemos por el capítulo 2, pues «permite fundamentar el proceso de medición —por ello también es conocido como axioma de la medida—, dando lugar a la introducción de números» (Giovannini, 2013, p. 143). En la formulación actual, más usual, se habla de cuerpo ordenado completo.

Definición 4.10. Un *cuerpo ordenado completo* es un cuerpo $\mathbb{K}$ dotado de un orden total compatible con la suma y el producto (si $x < y$ entonces $x + z < y + z$, y si además $z > 0$ entonces $xz < yz$) en el que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Teorema 4.11. *Todo cuerpo ordenado completo es arquimediano: para todos $x, y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $nx > y$. En consecuencia, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{K}$.*

Demostración. Si fuera $nx \leq y$ para todo n , el conjunto $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ tendría un supremo s ; entonces $s - x$ no sería cota superior, de modo que $nx > s - x$ para algún n , es decir, $(n + 1)x > s$, lo cual es absurdo. Para la densidad, dados $a < b$ en $\mathbb{K}$, se elige n con $n(b - a) > 1$ y luego el menor entero m con $m > na$; entonces $a < m/n < b$. ■

Este sencillo teorema tiene un significado histórico que conviene subrayar: el axioma de Arquímedes, cuya omisión Hilbert reprochaba a Euclides (sección 2.6), resulta ser una *consecuencia* de la completitud. En la teoría de Eudoxo había que postularlo, aunque fuera de manera tácita, porque no se postulaba la completitud; en la teoría moderna, que postula la completitud, se obtiene gratuitamente.

Teorema 4.12 (Unicidad de los números reales). *Dos cuerpos ordenados completos son isomorfos, y el isomorfismo, que conserva la suma, el producto y el orden, es único.*

Esbozo de demostración. Todo cuerpo ordenado contiene una copia de $\mathbb{Q}$, generada por el elemento unidad. Sean $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}'$ cuerpos ordenados completos, y para $x \in \mathbb{K}$ definamos $\Phi(x) = \sup_{\mathbb{K}'} \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$. El conjunto es no vacío y acotado en $\mathbb{K}'$ por el teorema 4.11, y la densidad de $\mathbb{Q}$ en ambos cuerpos permite comprobar que Φ es creciente, que $\Phi(r) = r$ para todo racional r , que es biyectiva y que conserva la suma y el producto. La unicidad se sigue de que cualquier isomorfismo de cuerpos ordenados fija los racionales y conserva los supremos. ■

La definición de Φ merece una observación: asigna a cada x el supremo del conjunto de los racionales menores que él, es decir, identifica cada número real con su conjunto inferior de racionales, exactamente como hacía la definición 5 de Eudoxo con las razones. El teorema 4.12

tiene, además, un significado epistemológico que me parece la verdadera culminación de esta historia. Las cortaduras de Dedekind y las sucesiones de Cantor no son dos definiciones rivales de «lo que realmente es» un número real, sino dos modelos de una misma estructura, caracterizada unívocamente por sus propiedades. La magnitud y el número, que Eudoxo había mantenido separados, quedan reunidos en un único objeto, el cuerpo ordenado completo, del que la recta geométrica es solo una representación entre otras posibles.

Corolario 4.13. *Entre dos números reales distintos cualesquiera hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales.*

Demostración. Sean $a < b$. Por el teorema 4.11 hay un racional en (a, b) y, aplicando de nuevo el teorema a los subintervalos que ese racional determina, infinitos. Para los irracionales, elijamos dos racionales $r < s$ en (a, b) ; el número $r + (s - r)/\sqrt{2}$ está en $(r, s) \subset (a, b)$ y es irracional, pues si fuera racional también lo sería $\sqrt{2} = (s - r)/(t - r)$ con t racional. Repitiendo el argumento en subintervalos disjuntos se obtienen infinitos. ■

4.7 Números algebraicos y trascendentes

4.7.1 Una jerarquía de irracionales

El corolario 4.13 podría sugerir que racionales e irracionales están «igualmente repartidos» en la recta. Los trabajos de Liouville y de Cantor mostraron que la realidad es muy distinta, y con ello transformaron por completo la imagen que la matemática tenía de los irracionales.

Un número real se llama *algebraico* si es raíz de algún polinomio no nulo con coeficientes enteros, y *trascendente* en caso contrario. Todo racional es algebraico, y también lo son $\sqrt{2}$, φ , $\sqrt[3]{2}$, $\cos 20^\circ$ y todos los números construibles del capítulo anterior. Se obtiene así una jerarquía de fronteras sucesivas, cuya existencia el capítulo 3 anunciaba: los racionales; los irracionales cuadráticos, caracterizados por la periodicidad de su fracción continua (teorema 3.15); los construibles, que pueden alcanzarse con raíces cuadradas iteradas (teorema 3.20); los algebraicos en general, que incluyen a $\sqrt[3]{2}$; y, más allá de todos ellos, los trascendentes. La existencia de números trascendentes fue establecida por primera vez por Joseph Liouville en 1844, mediante un criterio de aproximación que publicó en forma definitiva en 1851 (Liouville, 1851), y que constituye una notable prolongación del criterio del teorema 3.13.

Teorema 4.14 (Liouville, 1844). *Sea α un número real algebraico irracional, raíz de un polinomio P con coeficientes enteros, irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y de grado $n \geq 2$. Existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n} \text{ para todo racional } p/q \text{ con } q > 0.$$

Demostración. Sea $M = \max\{|P'(t)| : |t - \alpha| \leq 1\}$, positivo porque P' no es idénticamente nulo, y sea $c = \min\{1, 1/M\}$. Si $|\alpha - p/q| > 1$, la desigualdad es inmediata. En caso contrario, $P(p/q) \neq 0$, pues un polinomio irreducible de grado $n \geq 2$ no tiene raíces racionales, y $q^n P(p/q)$ es un entero no nulo, de modo que $|P(p/q)| \geq 1/q^n$. Por el teorema del valor medio existe ξ entre α y p/q con

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) - P(\alpha) \right| = |P'(\xi)| \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|,$$

de donde $|\alpha - p/q| \geq 1/(Mq^n) \geq c/q^n$. ■

El teorema dice que los números algebraicos irracionales no pueden aproximarse *demasiado bien* por racionales: todo irracional admite aproximaciones con error menor que $1/q^2$ (teorema 3.12), pero un algebraico de grado n no admite aproximaciones con error mucho menor que $1/q^n$. Un número que admita aproximaciones racionales extraordinariamente buenas no puede, por tanto, ser algebraico. Es la misma idea que el capítulo anterior expresaba al decir que los racionales «repelen» a las demás fracciones, llevada un escalón más arriba: los algebraicos de grado n también repelen, aunque con menos fuerza.

Corolario 4.15 (El número de Liouville). *El número*

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\ldots$$

es trascendente.

Demostración. La expansión decimal de L tiene unos en las posiciones $1!, 2!, 3!, \dots$ y ceros en las demás; como los bloques de ceros son cada vez más largos, no es periódica, y L es irracional por el teorema 3.4. Si L fuese algebraico, sería raíz de un polinomio irreducible de grado $n \geq 2$, y el teorema 4.14 daría una constante $c > 0$. Para cada N , sea $p_N/q_N = \sum_{k=1}^N 10^{-k!}$, con $q_N = 10^{N!}$. Entonces

$$0 < L - \frac{p_N}{q_N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} 10^{-k!} < 2 \cdot 10^{-(N+1)!} = \frac{2}{q_N^{N+1}},$$

y la desigualdad de Liouville exigiría $q_N^{N+1-n} < 2/c$ para todo N , lo cual es imposible. ■

4.7.2 Hermite, Lindemann y la cuadratura del círculo

Liouville había construido trascendentes «a propósito»; la cuestión de si las constantes naturales del análisis lo eran resultó mucho más difícil. Charles Hermite demostró en 1873 que e es trascendente (Hermite, 1873), y Ferdinand von Lindemann, adaptando sus métodos, probó en 1882 que también lo es π (Lindemann, 1882), confirmando la conjetura que Legendre había formulado casi un siglo antes (sección 3.10). Weierstrass generalizó el resultado en 1885 en el teorema que hoy lleva el nombre de ambos: si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son números algebraicos distintos, los números $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son linealmente independientes sobre los algebraicos. De él se sigue, por ejemplo, que e^α es trascendente para todo algebraico $\alpha \neq 0$ y que $\ln \alpha$ lo es para todo algebraico $\alpha \neq 0, 1$. Las demostraciones exceden el alcance de este libro, aunque conviene señalar que conservan el esquema lógico de las de Fourier y Niven que vimos en el capítulo anterior: si el número fuera algebraico, cierta expresión sería un entero no nulo y, al mismo tiempo, menor que uno en valor absoluto. La consecuencia geométrica es inmediata y cierra el último de los tres problemas clásicos.

Corolario 4.16 (Imposibilidad de la cuadratura del círculo). *Es imposible construir con regla y compás un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.*

Demostración. Para un círculo de radio 1 habría que construir $\sqrt{\pi}$. Si fuese construible, también lo sería su cuadrado π , y por el teorema 3.20 π pertenecería a una cadena finita de extensiones

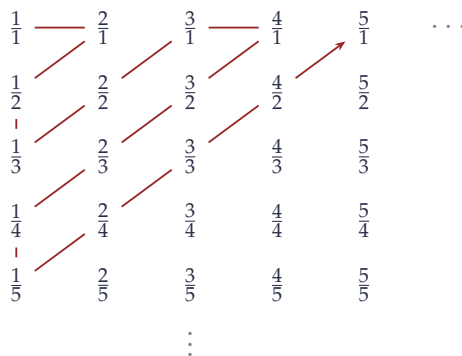
cuadráticas de $\mathbb{Q}$; pero todo elemento de tal cadena es algebraico, porque K_m es un espacio vectorial de dimensión finita 2^m sobre $\mathbb{Q}$, de modo que para cada $x \in K_m$ las potencias $1, x, x^2, \dots, x^{2^m}$ son linealmente dependientes sobre $\mathbb{Q}$, y esa dependencia es una ecuación polinómica no trivial con coeficientes racionales. Esto contradice el teorema de Lindemann. ■

Con este corolario se cierra una historia de más de dos milenios. La cuadratura del círculo, planteada en la Atenas del siglo V a. C. y perseguida por generaciones de geómetras profesionales y aficionados, resultó imposible no por falta de ingenio sino por una propiedad aritmética del número π , que solo pudo formularse cuando se dispuso de una teoría de los números reales y de una clasificación de los irracionales más fina que la de Euclides. Y conviene advertir la distancia que separa este resultado del de Lambert: la irracionalidad de π , demostrada en 1761, no bastaba, porque $\sqrt{2}$ también es irracional y, sin embargo, es construible; hacía falta saber que π escapa a toda ecuación algebraica.

4.8 La numerabilidad: los irracionales son mayoría

4.8.1 Los racionales y los algebraicos se pueden contar

La noción de conjunto numerable, es decir, de conjunto cuyos elementos pueden disponerse en una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ que los agote a todos, parece a primera vista una trivialidad; pero permitió a Cantor formular con precisión una pregunta que nadie antes había planteado: ¿hay, en algún sentido, «más» números reales que racionales? La primera sorpresa es que los racionales, pese a ser densos en la recta, son numerables (figura 4.2).



Demostración. A cada polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ con coeficientes enteros y $a_n \neq 0$ le asignamos su *altura* $h(P) = n + |a_n| + \cdots + |a_0|$, que es un entero positivo. Para cada h hay solo un número finito de polinomios de altura h , porque el grado y todos los coeficientes están acotados por h , y cada uno tiene a lo sumo $n \leq h$ raíces reales. El conjunto de los números algebraicos es, por tanto, una unión numerable de conjuntos finitos, y puede enumerarse listando primero las raíces de los polinomios de altura 1, luego las de altura 2, y así sucesivamente, omitiendo las repeticiones. ■

4.8.2 Los reales no se pueden contar

Teorema 4.18 (Cantor, 1874). *El conjunto de los números reales de cualquier intervalo $[a, b]$ con $a < b$ no es numerable.*

Demostración por intervalos encajados. Sea $x_1, x_2, \dots$ una sucesión cualquiera de números reales; mostraremos que algún punto de $[a, b]$ no figura en ella. Dividamos $[a, b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud; al menos uno de ellos no contiene a x_1 , y lo llamamos I_1 . Dividamos I_1 en tres intervalos cerrados iguales y elijamos uno, I_2 , que no contenga a x_2 , y así sucesivamente. Obtenemos intervalos cerrados encajados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ cuyas longitudes tienden a cero y tales que $x_n \notin I_n$. Por la completitud de $\mathbb{R}$, los extremos izquierdos forman una sucesión creciente y acotada cuyo supremo ξ pertenece a todos los I_n . Entonces $\xi \neq x_n$ para todo n , porque $\xi \in I_n$ y $x_n \notin I_n$. ■

La demostración que presentamos simplifica la de 1874, que usaba intervalos definidos por los dos primeros términos de la sucesión que caen en cada intervalo, pero conserva su idea esencial: la completitud, es decir, la existencia del punto común a todos los intervalos, es lo que impide que una sucesión agote la recta. La misma demostración, aplicada a los racionales, fracasa exactamente en el último paso, porque el punto común a los intervalos puede no ser racional; la no numerabilidad de los reales es, en este sentido, la otra cara de su completitud. En 1891, Cantor dio una segunda demostración, el célebre argumento diagonal, que prescinde de los intervalos y se apoya en la representación de los números mediante sucesiones de cifras (Cantor, 1891).

Demostración diagonal, para el intervalo $(0, 1)$. Supongamos que la sucesión $x_1, x_2, \dots$ contiene todos los números reales del intervalo $(0, 1)$ y escribamos $x_k = 0, d_{k1}d_{k2}d_{k3} \dots$, eligiendo para los números que admiten dos expansiones la que no termina en nueves. Definamos $y = 0, e_1 e_2 \dots$ con $e_k = 5$ si $d_{kk} \neq 5$ y $e_k = 4$ si $d_{kk} = 5$. La expansión de y no contiene nueves ni ceros, de modo que es la única de un número de $(0, 1)$, y difiere de la de cada x_k en la cifra k -ésima. Luego y no figura en la lista. ■

Corolario 4.19. *Existen números trascendentes, y el conjunto de los números trascendentes no es numerable. En particular, los números irracionales no son numerables, mientras que los racionales sí lo son.*

Demostración. Si los trascendentes formaran un conjunto numerable, $\mathbb{R}$ sería la unión de dos conjuntos numerables y sería numerable, en contra del teorema 4.18. El mismo argumento se aplica a los irracionales, pues los racionales forman un subconjunto de los algebraicos. ■

La demostración cantoriana de la existencia de trascendentes es de una naturaleza completamente distinta de la de Liouville: no exhibe ningún número concreto, sino que muestra que los algebraicos son «demasiado pocos» para llenar la recta. El siguiente resultado precisa esa intuición en el lenguaje de la medida, que se desarrolló pocos años después.

Teorema 4.20. *Todo subconjunto numerable $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ de $\mathbb{R}$ tiene medida nula: para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos que cubre A y cuya suma de longitudes es menor que ε .*

Demostración. Basta cubrir cada a_k con un intervalo de longitud $\varepsilon/2^{k+1}$; la suma de las longitudes es $\varepsilon \sum_{k \geq 1} 2^{-k-1} = \varepsilon/2 < \varepsilon$. ■

Los racionales y los algebraicos, siendo numerables, forman conjuntos de medida nula, de modo que un número elegido «al azar» en un intervalo es, con probabilidad uno, irracional y trascendente. La intuición probabilística de Oresme, que en el siglo XIV sostenía que es más probable que una razón desconocida sea irracional que racional (sección 3.5), recibe aquí su formulación rigurosa. El orden de la historia queda así invertido: lo que para los pitagóricos era la excepción inquietante resulta ser la regla, y los números racionales, que durante siglos se consideraron los únicos verdaderos, aparecen como una delgada red, densa pero de medida nula, tendida sobre un continuo inmensamente más vasto.

4.9 El cierre epistemológico y sus límites

4.9.1 La objeción de Kronecker

La construcción de los números reales no fue aceptada por todos. Leopold Kronecker, colega de Weierstrass en Berlín y uno de los grandes aritméticos del siglo, rechazó las definiciones de Dedekind y Cantor porque se apoyaban en totalidades infinitas actuales, como el conjunto de todos los racionales menores que un número o la clase de todas las sucesiones equivalentes a una dada, que en su opinión no son objetos legítimos de la matemática. Según el testimonio de su biógrafo Heinrich Weber, Kronecker afirmó en una conferencia pronunciada en Berlín en 1886 que «los números enteros los hizo el buen Dios; todo lo demás es obra del hombre» (Weber, 1893), y sostuvo que toda la matemática debía reducirse, en última instancia, a enunciados sobre números naturales verificables en un número finito de pasos. La frase suele citarse como una *boutade*, pero expresaba una posición filosófica coherente, que Brouwer retomaría en el siglo XX con su intuicionismo y que sigue viva en las matemáticas constructivas.

La objeción de Kronecker no invalida la construcción de los números reales, que la inmensa mayoría de los matemáticos acepta, pero pone de manifiesto su precio. Los números reales de Dedekind y Cantor son objetos definidos mediante el infinito actual, y la teoría que los describe es consistente si lo es la teoría de conjuntos en que se formula; la «niebla de lo infinito» de Stifel (sección 3.6) no ha desaparecido, sino que ha sido domesticada mediante axiomas. Hay en ello una simetría que me parece digna de nota: Eudoxo evitó el infinito actual renunciando a definir las razones, y la matemática moderna definió los números reales aceptándolo.

4.9.2 Lo que podemos nombrar

Hay una consecuencia de la teoría de Cantor que me parece especialmente adecuada para cerrar este libro, porque devuelve la historia a su punto de partida. En 1936 Alan Turing definió los *números computables* como aquellos cuyas cifras decimales pueden ser producidas, una tras otra, por un procedimiento mecánico finito (Turing, 1936). Todos los números que aparecen en este libro son computables: $\sqrt{2}$, φ , e , π y el número de Liouville pueden calcularse con tanta precisión como se quiera mediante algoritmos que caben en una página. Pero los algoritmos pueden describirse mediante textos finitos en un alfabeto finito, de modo que forman un conjunto numerable, y por el teorema 4.18 la inmensa mayoría de los números reales no son computables.

La conclusión es vertiginosa. Los números que los escribas de YBC 7289 aproximaban, los que Teodoro demostraba irracionales caso por caso, los que Arquímedes acotaba y Euler desarrollaba en fracciones continuas, forman un conjunto de medida nula dentro de un continuo cuyos elementos, casi todos, no pueden ser nombrados, calculados ni descritos individualmente por ningún procedimiento finito. La inconmensurabilidad griega reveló que no todo puede medirse con números enteros; la teoría moderna revela que casi nada de lo que existe en la recta puede alcanzarse con los recursos finitos del lenguaje. La fórmula «todo es número», que el capítulo 1 atribuyó con cautela a la síntesis aristotélica del pitagorismo, se ha cumplido en cierto sentido, porque la recta está hecha enteramente de números; pero se ha cumplido de un modo que habría estremecido a los pitagóricos, porque casi todos esos números son, en un sentido mucho más profundo que el de la leyenda de Hipaso, inefables.

4.9.3 Lo que todavía no sabemos

La teoría de los números irracionales y trascendentes dista de estar cerrada. En 1900, Hilbert incluyó entre sus célebres problemas la pregunta de si $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente, y la respuesta afirmativa, dada en 1934 por Gelfond y en 1935 por Schneider en un teorema que establece la trascendencia de α^β para α algebraico distinto de 0 y 1 y β algebraico irracional, fue uno de los grandes logros de la teoría de números del siglo XX. Roger Apéry demostró en 1978, en una conferencia que dejó atónitos a sus oyentes, que $\zeta(3) = \sum_{k \geq 1} 1/k^3$ es irracional (Apéry, 1979; van der Poorten, 1979). Pero, hasta donde alcanza mi conocimiento, no se sabe todavía si $e + \pi$ o $e \cdot \pi$ son irracionales, aunque es fácil probar que al menos uno de los dos es trascendente (ejercicio 4.8); y la irracionalidad de la constante de Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n)$ sigue siendo un problema abierto, lo mismo que la de $\zeta(5)$. Veinticinco siglos después de que se demostrara la inconmensurabilidad de la diagonal, la pregunta de si un número dado puede escribirse como cociente de dos enteros sigue siendo, en muchos casos, extraordinariamente difícil, y esa persistencia es quizá el mejor testimonio de la profundidad del problema que los geómetras griegos encontraron al trazar la diagonal de un cuadrado.

4.10 Continuidad, completitud e infinito en la enseñanza

4.10.1 Una propiedad que casi nunca se enseña

Si el capítulo 3 mostró que la escuela introduce los irracionales por su representación decimal, la investigación sobre la enseñanza universitaria muestra que la propiedad que los justifica, la completitud, rara vez se convierte en objeto de estudio explícito. Bergé, en un estudio longitudinal de cuatro cursos consecutivos de una licenciatura en matemática, analizó los problemas y ejercicios propuestos a los estudiantes y concluyó que la completitud aparece sobre todo a través de unos pocos teoremas del análisis, que la contienen sin nombrarla: «La completitud permanece encapsulada en estos tres teoremas. Los alumnos pueden avanzar en las prácticas sin aludir a la completitud porque prevalecen estos resultados, que son vistos como muy potentes» (Bergé, 2006). El fenómeno reproduce, en el aula universitaria, la situación de Bolzano y de Cauchy antes de 1872: la propiedad se usa sin que su necesidad se haya hecho visible.

Durand-Guerrier ha propuesto una explicación de esa invisibilidad que me parece especialmente pertinente para este libro. El continuo, escribe, es uno de los conceptos matemáticos más difíciles para los estudiantes universitarios, y su hipótesis es que, entre las dificultades que enfrentan, «la evidencia gráfica proporcionada por la recta numérica fomenta la idea de una dicotomía entre lo discreto y lo continuo, ocultando la propiedad de densidad en sí misma, es decir, la densidad intrínseca respecto del orden en un conjunto totalmente ordenado» (Durand-Guerrier, 2016, p. 338; traducción propia). Dicho de otro modo, la recta dibujada en la pizarra es a la vez el mejor apoyo intuitivo para los números reales y el principal obstáculo para distinguir entre un conjunto denso, como el de los racionales, y un conjunto completo, como el de los reales; y esa distinción es exactamente la que Dedekind tuvo que formular en el § 3 de su opúsculo. La autora expone por ello la construcción de Dedekind, que se apoya en la idea intuitiva de la recta continua, como referencia epistemológica, y a partir de ella propone una situación didáctica, basada en un problema de punto fijo, destinada a hacer explícitas las relaciones entre lo discreto, la densidad y la continuidad, es decir, lo que la imagen oculta (Durand-Guerrier, 2016).

Las concepciones de los estudiantes confirman ese diagnóstico. Montoro y Ferrero, en un estudio con más de trescientos estudiantes argentinos de secundaria y de distintas carreras universitarias, identificaron un abanico de ideas sobre los números reales que va desde una concepción de los reales identificados con los decimales finitos y una discretitud explícita, frecuente en la secundaria, pasando por «una visión de los reales identificados con los racionales y como infinitos-potencialmente densos, principalmente en ingresantes a carreras científicas», hasta la «comprensión del orden, la densidad y propiedad del supremo en los reales, en estudiantes avanzados de Matemática» (Montoro y Ferrero, 2022, p. 61). Los autores subrayan, además, que «es notable también la diversidad de ideas con las que pueden operar las y los estudiantes de un mismo grupo educativo, aún frente a una misma definición explicitada por el docente» (Montoro y Ferrero, 2022, pp. 86–87). La confusión entre densidad y continuidad no es, por tanto, un error aislado, sino una etapa por la que atraviesa la mayoría de los estudiantes y en la que muchos permanecen.

4.10.2 El infinito actual como obstáculo

La segunda gran dificultad es la que Kronecker convirtió en objeción: las construcciones de Dedekind y de Cantor exigen aceptar totalidades infinitas acabadas. Mena-Lorca y sus

colaboradores, que interrogaron a estudiantes de pedagogía, profesores de primaria y secundaria de Chile, estudiantes de maestría de Chile y Colombia y profesores universitarios de Argentina, caracterizan el infinito actual como un obstáculo epistemológico en el sentido de Brousseau (Brousseau, 1983), cuyas marcas son la persistencia y la resistencia, y advierten que «estos obstáculos con frecuencia no son advertidos por el docente, bien sea porque ha reemplazado oportunamente sus propias concepciones (semánticas) por otras de carácter teórico —superando así el obstáculo, sin reparar explícitamente en ello—, o porque no ha logrado aun hacer esa substitución» (Mena-Lorca et al., 2015, p. 329). Arrigo y D'Amore, en un estudio clásico con estudiantes preuniversitarios cuyo título recoge la frase con que Cantor comunicó a Dedekind uno de sus resultados, *lo veo, pero no lo creo*, analizaron precisamente «los límites en la comprensión y aceptación que los estudiantes preuniversitarios muestran ante el uso del infinito actual, en particular [...] en relación al famoso teorema de Georg Cantor» (Arrigo y D'Amore, 1999, p. 5). Y Montoro, Scheuer y Pérez Echeverría, al pedir a estudiantes argentinos de distintos niveles que compararan la abundancia de conjuntos infinitos de números, encontraron un gradiente de concepciones que comienza en lo que llaman «*horror infiniti*», presente sobre todo en los estudiantes con menor formación matemática, y en el que «la concepción más compleja, la infinitista, sólo fue explicitada por estudiantes universitarios» (Montoro et al., 2016).

Me parece que la historia que este libro ha contado ofrece aquí un recurso que la enseñanza rara vez aprovecha. El «horror al infinito» de los estudiantes no es una torpeza, sino la actitud que la matemática griega adoptó deliberadamente y que le permitió construir, con Eudoxo y Arquímedes, algunas de sus teorías más rigurosas; y la aceptación del infinito actual no fue una conquista inmediata, sino una decisión discutida, que Kronecker rechazó y que la matemática constructiva sigue cuestionando. Presentar esa tensión como parte del contenido, y no como un error que el estudiante debe superar en silencio, es probablemente la mejor manera de respetar la dificultad real del concepto. Tsamir ha mostrado, en esa dirección, que una actividad diseñada para que los futuros profesores reflexionen sobre sus propias respuestas contradictorias al comparar conjuntos infinitos, y adopten la correspondencia biunívoca como único criterio, conduce a la gran mayoría de los participantes a advertir que producir reacciones contradictorias ante una misma tarea matemática es problemático (Tsamir, 2001).

4.10.3 La historia como lente

Bergé y Sessa, en un trabajo que me parece el antecedente más directo de este libro en la literatura didáctica latinoamericana, presentaron «un análisis histórico-epistemológico de la noción de completitud del conjunto de números reales», en el que ligan «problemas y preguntas de determinados períodos históricos, con el estado de conocimiento y las herramientas disponibles en esos momentos y con las diferentes conceptualizaciones producidas», con el propósito explícito de extraer conclusiones útiles para la enseñanza (Bergé y Sessa, 2003, resumen). Su título, *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos*, describe con exactitud el arco que va de la definición 5 de Eudoxo al principio de continuidad de Dedekind. Y Fregueiro y Bergé han diseñado y evaluado recientemente una propuesta de enseñanza que introduce la completitud «vía la convergencia de las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente», es decir, por un camino más próximo al de Cantor y al de la sucesión de Herón que al del supremo (Fregueiro y Bergé, 2024, p. 1).

La tabla 4.2 propone, como hipótesis de trabajo y no como tesis demostrada, una correspondencia entre las dificultades que la investigación citada en los cuatro capítulos ha documentado y los episodios de esta historia. No sostengo que el aprendizaje individual deba recorrer las etapas de la historia, tesis que ha sido criticada con buenos argumentos; sostengo que el conocimiento de esas etapas permite al docente reconocer en los errores de sus estudiantes obstáculos genuinos, que la humanidad tardó siglos en superar, y no simples descuidos.

Dificultad documentada	Episodio histórico análogo	Capítulo
El irracional se identifica con su expansión decimal infinita	La «niebla de lo infinito» de Stifel; la circularidad de Cauchy	3 y 4
Las cifras de un irracional son «muchas pero finitas»	El infinito potencial; el cálculo aproximativo babilónico	1 y 3
El símbolo de raíz indica irracionalidad	Las especies del Libro X y los números «sor-dos»	2 y 3
La razón se concibe solo como fracción	La teoría numérica de la proporción anterior a Eudoxo	2
La densidad de $\mathbb{Q}$ parece llenar la recta	La continuidad de Dedekind; la numerabilidad de Cantor	4
El infinito actual se rechaza o se evita	El rigor griego sin infinito; la objeción de Kroecker	2 y 4
La aproximación basta para «la vida real»	Herón frente a Arquímedes; el olvido de Watzel	2 y 3

TABLA 4.2. Correspondencias entre dificultades documentadas por la investigación didáctica y episodios de la historia de los irracionales.

Fuente: Elaboración propia.

EN EL AULA: CONSTRUIR $\sqrt{2}$ TRES VECES

Para un curso de formación de profesores o de introducción al análisis, propongo una secuencia breve que recorre las tres respuestas a la pregunta de qué es $\sqrt{2}$. En la primera sesión, los participantes comparan la definición 5 de Eudoxo con la cortadura de Dedekind y reconstruyen, con la figura 2.3 y la figura 4.1, la partición de las fracciones que ambas determinan; la discusión se centra en la diferencia entre comparar razones dadas y definir un número nuevo. En la segunda, calculan con una hoja de cálculo la sucesión de Herón, verifican numéricamente que es fundamental y discuten por qué no converge en $\mathbb{Q}$, lo que conduce a la construcción de Cantor. En la tercera, demuestran la proposición 4.6 y discuten qué ha ganado la matemática con la construcción y qué ha tenido que aceptar para conseguirlo. En términos de Jankvist (sección 1.13), la historia funciona aquí como herramienta para comprender la completitud y, a la vez, como objetivo: comprender que la definición de número real es una decisión con historia.

Conviene que el formador sepa de antemano dónde tropezarán los participantes, porque las dos construcciones, aunque equivalentes desde el punto de vista lógico, no despiertan las

mismas resistencias. La cortadura obliga a aceptar que un número *es* un par de conjuntos, y esa idea choca de frente con la imagen que casi todos los futuros profesores se han formado del número real a lo largo de su escolaridad, la de una cantidad, un punto de la recta o una expresión decimal; es el desajuste entre imagen y definición del concepto que describieron Tall y Vinner (1981), y que en el caso de los irracionales Sirotic y Zazkis (2007a) documentaron precisamente con futuros docentes de secundaria, cuyas respuestas formales y cuyas intuiciones no siempre concordaban. A ese desajuste se suma, en la primera sesión, la confusión entre densidad y continuidad que hemos visto al comienzo de esta sección: quien piensa que entre dos racionales siempre hay otro y que, por tanto, los racionales ya «llenan» la recta no encuentra el hueco que la cortadura de $\sqrt{2}$ pretende señalar, y la construcción le parece una complicación innecesaria de algo evidente (Durand-Guerrier, 2016; Montoro y Ferrero, 2022). Y la propia definición de la clase inferior A_1 como un conjunto acabado de infinitos racionales exige el infinito actual que, según Mena-Lorca et al. (2015), se comporta como un obstáculo epistemológico persistente, con frecuencia inadvertido incluso por el docente que lo ha superado.

La construcción de Cantor plantea dificultades de otra índole. La sucesión de Herón es fácil de calcular y de ver, y precisamente por eso invita a pensar el límite como el final de un proceso y no como un objeto, que es la concepción dinámica, de infinito potencial, que la investigación ha encontrado una y otra vez en los estudiantes (Tall y Schwarzenberger, 1978); y el paso siguiente, identificar el número con una *clase* de sucesiones equivalentes, añade una segunda abstracción sobre la primera, que muchos participantes viven como un juego formal sin contenido. Me parece útil hacer explícita, en ese momento, la trampa en que cayó Cauchy, porque los participantes tienden a reproducirla: para decir que la sucesión converge necesitan un límite, y ese límite es justamente el número que todavía no existe en $\mathbb{Q}$. Reconocer esa circularidad, y ver cómo Cantor la evita definiendo el número a partir de la sucesión y no al revés, suele ser el momento en que la construcción deja de parecer arbitraria.

Por eso propongo que, antes de cualquier definición, cada participante escriba qué es para él $\sqrt{2}$ y por qué $0,999\dots$ es o no es igual a 1, y que esas respuestas se guarden y se releen al final de cada sesión. El ejercicio no busca exhibir errores, sino que cada futuro profesor reconozca en su propia respuesta inicial uno de los obstáculos que la historia de este capítulo ha recorrido, y que anticipe así, con conocimiento de causa, las respuestas que oírán en sus futuras aulas (Brousseau, 1983).

En la segunda sesión es probable que alguien defienda que la sucesión de Herón «se acerca, pero nunca llega», o que $0,999\dots$ es un poco menor que 1. No son errores que haya que corregir deprisa: son las dudas de Bolzano y de Cauchy, y reconocerlo ayuda a que el estudiante vea en su dificultad una pregunta legítima, que a la matemática le costó siglos contestar, y no una prueba de que no sirve para esto.

Síntesis del capítulo

IDEAS PRINCIPALES

1. A comienzos del siglo XIX, el número irracional se definía como límite de fracciones, lo que suponía su existencia; Bolzano y Cauchy formularon la completitud sin poder garantizarla.
2. Dedekind (1872) definió los números reales como cortaduras de los racionales, convirtiendo en definición la estructura lógica de la definición 5 de Eudoxo, y demostró a partir de ella la propiedad del supremo y la existencia de $\sqrt{2}$.
3. Cantor (1872), como Méray y Heine, definió los reales mediante sucesiones fundamentales de racionales, convirtiendo en objeto las sucesiones de aproximaciones que la historia había acumulado desde YBC 7289 hasta Herón.
4. La relación entre Dedekind y Cantor fue menos armoniosa de lo que suele decirse: la numerabilidad de los algebraicos es de Dedekind, y la no numerabilidad de los reales, de Cantor.
5. Todo cuerpo ordenado completo es arquimediano y todos son isomorfos: las distintas construcciones son modelos de una única estructura, en la que número y magnitud quedan reunidos.
6. Liouville probó la existencia de trascendentes; Hermite y Lindemann, la trascendencia de e y de π , con lo que la cuadratura del círculo resultó imposible.
7. Los racionales y los algebraicos son numerables y de medida nula; los irracionales, y en particular los trascendentes, son la inmensa mayoría de los números reales, y casi ninguno puede ser nombrado ni calculado.
8. La investigación didáctica muestra que la completitud permanece implícita en la enseñanza, que la recta numérica oculta la diferencia entre densidad y continuidad, y que el infinito actual es un obstáculo persistente, también entre los docentes.

Ejercicios

Ejercicios matemáticos

Ejercicio 4.1. Demuestre que si D es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ o } x^2 < D\}$ es un número real en el sentido de la definición 4.3 que no es de la forma r^* .

Ejercicio 4.2. Demuestre, usando cortaduras, que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, respondiendo así a la observación de Dedekind.

Ejercicio 4.3. Demuestre que si (r_n) y (s_n) son sucesiones fundamentales equivalentes y (t_n) es otra sucesión fundamental, entonces $(r_n t_n) \sim (s_n t_n)$. ¿Por qué es necesario que las sucesiones sean fundamentales?

Ejercicio 4.4. Demuestre que las sucesiones de reducidas de $\sqrt{2}$, (p_n/q_n) , y de Herón, (x_n) , son sucesiones fundamentales equivalentes, y que por tanto definen el mismo número real.

Ejercicio 4.5. Demuestre que en un cuerpo ordenado arquimediano, dos razones a/b y c/d de elementos positivos son iguales si y solo si tienen el mismo conjunto de fracciones n/m con $nb < ma$. Compare con el teorema 2.13.

Ejercicio 4.6. Utilice el teorema 4.14 para demostrar que $\sum_{k \geq 1} 2^{-k!}$ es trascendente.

Ejercicio 4.7. Demuestre que el conjunto de los números construibles es numerable, y deduzca de nuevo que existen números reales no construibles.

Ejercicio 4.8. Demuestre que si $e + \pi$ y $e\pi$ fueran ambos algebraicos, también lo serían e y π , y deduzca que al menos uno de los dos números $e + \pi$, $e\pi$ es trascendente.

Ejercicios históricos y didácticos

Ejercicio 4.9. Compare, en un ensayo breve, la demostración de Cantor de 1874 con la diagonal de 1891: ¿qué propiedad de los números reales utiliza cada una? ¿Cuál de ellas considera más adecuada para un curso de formación docente, y por qué?

Ejercicio 4.10. Redacte una respuesta a Lipschitz en la que defienda, con argumentos matemáticos, que la cortadura de Dedekind añade algo esencial a la definición 5 del Libro V. Utilice las cuatro diferencias señaladas en la sección 2.10.

Ejercicio 4.11. Elija una fila de la tabla 4.2 y diseñe una actividad para estudiantes de secundaria o de formación docente que haga explícita la dificultad y el episodio histórico correspondiente. Indique qué respuestas espera y cómo las discutiría.

Lecturas recomendadas

Dedekind (1998)

La edición española, a cargo de Ferreirós, de *Continuidad y números irracionales* y de otros escritos de Dedekind sobre los fundamentos.

Ferreirós (2007)

La historia de referencia de la teoría de conjuntos y de su papel en la matemática moderna.

Ferreirós (1993)

El estudio que obliga a revisar la relación entre Dedekind y Cantor.

Rudin (1976)

La exposición clásica de la construcción de los reales mediante cortaduras.

Giovannini (2013)

Sobre la completitud y la continuidad en la axiomatización de Hilbert.

Bergé y Sessa (2003)

Un análisis histórico-epistemológico de la completitud escrito desde la didáctica.

Mena-Lorca et al. (2015)

Sobre el infinito actual como obstáculo epistemológico, también entre los docentes.

Los tres problemas clásicos: construcciones con regla, compás y algo más

Construir en el templo de Apolo un altar semejante al existente, pero que fuese el doble de grande.

Respuesta atribuida al oráculo de Delos

Este apéndice recoge, revisado y ampliado, el material sobre los problemas clásicos que ocupaba el centro del trabajo de graduación de 2012 del que nació este libro (Chinchilla, 2017; Chinchilla et al., 2012). Aquel trabajo se preguntaba de qué manera la búsqueda de soluciones a ciertos problemas geométricos había hecho avanzar el concepto de número irracional, y la respuesta pasaba por tres problemas que los griegos plantearon en el siglo V a. C. y que nadie resolvió con las herramientas que ellos mismos se habían impuesto: duplicar el cubo, trisecar un ángulo cualquiera y cuadrar el círculo. En los capítulos 3 y 4 vimos por qué esas tres construcciones son imposibles con regla y compás (teorema 3.22 y corolario 4.16). Aquí nos ocupamos de la otra mitad de la historia, la que suele quedar fuera de los libros: cómo los resolvieron de todos modos, con qué instrumentos y a qué precio. Las figuras proceden de aquel trabajo y fueron elaboradas con GeoGebra; las he conservado porque funcionan muy bien en el aula, donde casi todas estas construcciones pueden repetirse con papel, regla, compás y un poco de paciencia.

A.1 Las reglas del juego

Los tres problemas tienen algo en común: son sencillos de enunciar y cualquier estudiante entiende qué se pide. Duplicar un cubo es construir la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del de un cubo dado; trisecar un ángulo es dividirlo en tres partes iguales; cuadrar un círculo es construir un cuadrado de la misma área. La dificultad no está en el enunciado, sino en una restricción que los griegos asumieron como parte del problema: la construcción debía hacerse con una regla sin marcas, que solo sirve para trazar la recta que pasa por dos puntos, y con un compás, que solo sirve para trazar la circunferencia de centro y radio dados. La tradición atribuye esa exigencia a la influencia de Platón, para quien la recta y la circunferencia eran las figuras perfectas, aunque los testimonios son tardíos y probablemente simplifican una práctica más variada (Heath, 1921; Knorr, 1986).

La restricción no era caprichosa. Con regla y compás se puede dividir un segmento en cualquier número de partes iguales, bisecar cualquier ángulo, construir el cuadrado de área igual a la de un polígono dado y, como mostró Descartes, sumar, restar, multiplicar, dividir y

extraer raíces cuadradas (proposición 3.6). Era natural preguntarse si se podía ir un poco más lejos: si se biseca cualquier ángulo, ¿por qué no trisecarlo?; si se duplica un cuadrado trazando su diagonal, ¿por qué no un cubo? La respuesta, que tardó más de veinte siglos en llegar, es que esos pasos, que parecen pequeños, obligan a salir del terreno de las raíces cuadradas. Mientras tanto, los geómetras hicieron lo que hace cualquier persona razonable ante un problema que no sale con las herramientas disponibles: cambiaron de herramienta.

A.2 La duplicación del cubo

A.2.1 El problema de Delos

Según el relato de Eratóstenes, que conservan Teón de Esmirna y Eutocio, los habitantes de Delos, afligidos por una peste, recibieron del oráculo la orden de duplicar el altar cúbico de Apolo; en la carta que transmite Eutocio aparece además el error ingenuo de duplicar la arista, con lo que el volumen queda multiplicado por ocho, y una versión posterior, muy difundida, sitúa el episodio en la Atenas de la peste y atribuye ese error a los constructores del altar (Heath, 1921). Ese error es, dicho sea de paso, el mismo que cometen muchos estudiantes cuando se les pide duplicar el volumen de un cubo, y vale la pena discutirlo en clase antes de cualquier otra cosa. Si la arista original mide a , la nueva arista x debe cumplir $x^3 = 2a^3$, es decir, $x = a\sqrt[3]{2}$. El problema consiste, pues, en construir un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$ a partir de un segmento unidad.

A.2.2 La reducción de Hipócrates

El primer avance real lo hizo Hipócrates de Quíos, en la segunda mitad del siglo V a. C., al transformar el problema en otro: encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados. Si entre s y $2s$ se intercalan x e y de modo que

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s},$$

entonces $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$. Despejando $y = x^2/s$ en la primera igualdad y sustituyendo en la segunda se obtiene $x^4/s^2 = 2sx$, es decir, $x^3 = 2s^3$, y el segmento x es la arista buscada. Hipócrates no resolvió el problema, pero lo tradujo a un lenguaje, el de las proporciones, en el que los geómetras griegos se sentían en casa. Menecmo, discípulo de Eudoxo, encontró poco después las dos medias proporcionales como intersección de dos curvas nuevas, que hoy llamamos parábola e hipérbola; es muy posible que las secciones cónicas nacieran, precisamente, de este problema (Heath, 1921; Knorr, 1986).

A.2.3 Una construcción con regla marcada

Otra salida consistió en permitir una marca en la regla. Con una regla que tiene señalados dos puntos a distancia 1, se puede hacer algo que la regla euclidiana no permite: deslizarla, apoyada en un punto fijo, hasta que los dos puntos marcados queden sobre dos rectas dadas. Este movimiento, que los griegos llamaban *neusis* o inserción, basta para construir $\sqrt[3]{2}$. La construcción que sigue aparece en muchos textos sin una atribución precisa; el trabajo de 2012 la presentaba junto a la figura de Tartaglia, pero no he podido documentar que sea suya.

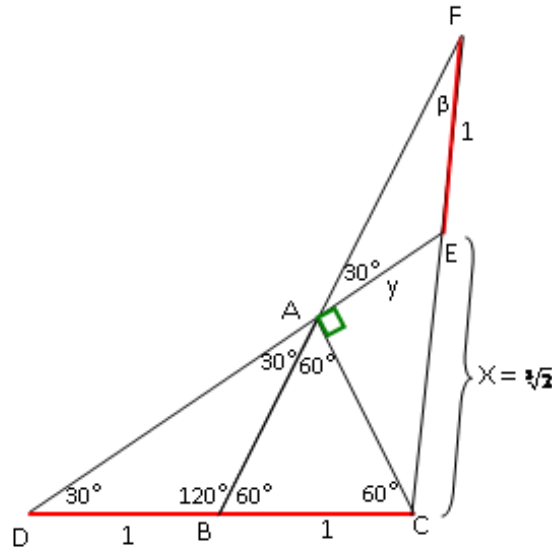


FIGURA A.1. Construcción de $\sqrt[3]{2}$ con regla marcada. El triángulo ABC es equilátero de lado 1 y $DB = 1$. Se desliza la regla, apoyada en C , hasta que el segmento FE comprendido entre la prolongación de BA y la de DA mida 1. Entonces $EC = \sqrt[3]{2}$.

Fuente: Elaboración propia.

Proposición A.1. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 1 y sea D el punto de la prolongación de CB tal que $DB = 1$. Si una recta que pasa por C corta a la prolongación de DA en E y a la prolongación de BA en F de modo que $FE = 1$, entonces $EC = \sqrt[3]{2}$.

Demostración. Como $BD = BC = BA = 1$, el punto A está en la circunferencia de diámetro DC , así que el ángulo DAC es recto (*Elementos* III.31), y también lo es su suplementario CAE . Llamemos $x = EC$, $y = AE$ y β al ángulo AFE . En el triángulo rectángulo CAE , por el teorema de Pitágoras,

$$y^2 + 1 = x^2. \quad (1)$$

El ángulo ADB mide 30° , porque el triángulo ABD es isósceles con ángulo de 120° en B ; en consecuencia, en el triángulo FAE el ángulo en A , opuesto por el vértice al ángulo BAD , mide 30° . La ley de los senos en ese triángulo da $\frac{\sin 30^\circ}{1} = \frac{\sin \beta}{y}$, es decir, $\sin \beta = y/2$. En el triángulo FBC , cuyo ángulo en B mide 60° y cuyo lado FC mide $1 + x$, la misma ley da $\frac{\sin \beta}{1} = \frac{\sin 60^\circ}{1+x}$. Igualando,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{1+x}. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y multiplicando por $(1+x)^2$ queda $3 + (1+x)^2 = x^2(1+x)^2$, que se simplifica en

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0, \quad \text{es decir,} \quad (x+2)(x^3 - 2) = 0.$$

Como $x > 0$, resulta $x^3 = 2$. ■

Una pregunta que los estudiantes suelen hacer, y con razón, es cómo sabemos que existe una posición de la regla en la que FE mide exactamente 1. La respuesta es un argumento de continuidad: si la recta gira alrededor de C , la longitud FE varía de manera continua desde valores muy pequeños hasta valores tan grandes como se quiera, y por el teorema de los valores intermedios toma el valor 1 en alguna posición. Es un detalle que los griegos no se planteaban y que, como vimos en el capítulo 4, solo pudo justificarse cuando se dispuso de una teoría de los números reales. He comprobado numéricamente la construcción: en la posición en que $FE = 1$, la distancia EC coincide con $\sqrt[3]{2} = 1,259\,921 \dots$ en todas las cifras calculadas.

A.3 La trisección del ángulo

A.3.1 La cuadratriz de Hipias

Hipias de Elis, sofista contemporáneo de Sócrates, imaginó hacia el año 420 a. C. una curva generada por dos movimientos simultáneos. En un cuadrado $OABC$, el lado OC gira alrededor de O con velocidad uniforme hasta coincidir con OA , mientras el lado CB desciende paralelamente a sí mismo, también con velocidad uniforme, hasta coincidir con OA ; ambos movimientos empiezan y terminan a la vez. La curva que describe el punto de intersección de la recta que gira y la recta que desciende se llama *cuadratriz*, porque Dinóstrato la usó más tarde para cuadrar el círculo (Heath, 1921). La figura A.2 muestra cómo se puede dibujar punto por punto: se divide el arco del cuadrante en 2^n partes iguales por bisecciones sucesivas, se divide el lado vertical en el mismo número de partes, y se marcan las intersecciones de cada radio con la paralela correspondiente.

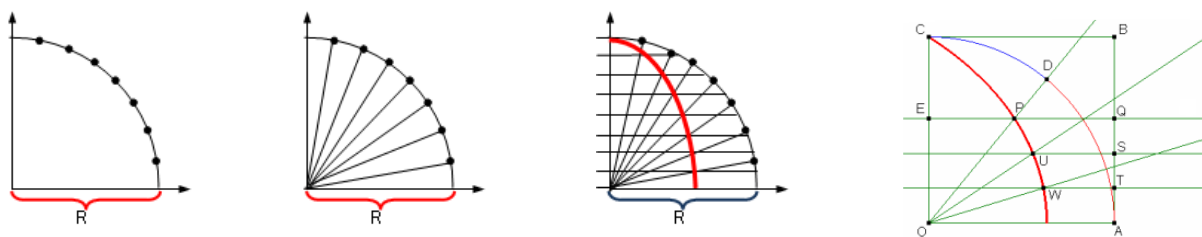


FIGURA A.2. La cuadratriz de Hipias. De izquierda a derecha: división del arco en ocho partes iguales, trazado de los radios, curva obtenida al unir las intersecciones de los radios con las paralelas y uso de la curva para trisecar el ángulo AOD .

Fuente: Elaboración propia.

La propiedad que define la curva es que, para cada punto P de la cuadratriz, el ángulo AOP es proporcional a la altura de P sobre OA : si el cuadrado tiene lado R y P está a altura h , entonces $\angle AOP = \frac{h}{R} \cdot 90^\circ$. Con eso la trisección es inmediata. Dado el ángulo AOD , sea P el punto en que el lado OD corta a la cuadratriz y sea Q el punto de AB a la misma altura que P . Se divide AQ en tres partes iguales, lo que sí puede hacerse con regla y compás; por el primer punto de división, T , se traza la paralela a OA , que corta a la cuadratriz en W . Como la altura de W es la tercera parte de la de P , el ángulo AOW es la tercera parte del ángulo AOD . Del mismo modo se divide un ángulo en cualquier número de partes iguales. El precio está en la curva misma: no puede trazarse completa con regla y compás, porque exige sincronizar un giro con

una traslación, y los griegos, empezando por Esporo según el testimonio de Papo, ya criticaron que su construcción presupone lo que se quiere obtener.

A.3.2 Dos inserciones: Papo y Arquímedes

Con la regla marcada la trisección es mucho más sencilla. Papo de Alejandría recoge en el libro IV de su *Colección* (proposición 32) una construcción que la tradición remonta a los geómetras antiguos (Heath, 1921).

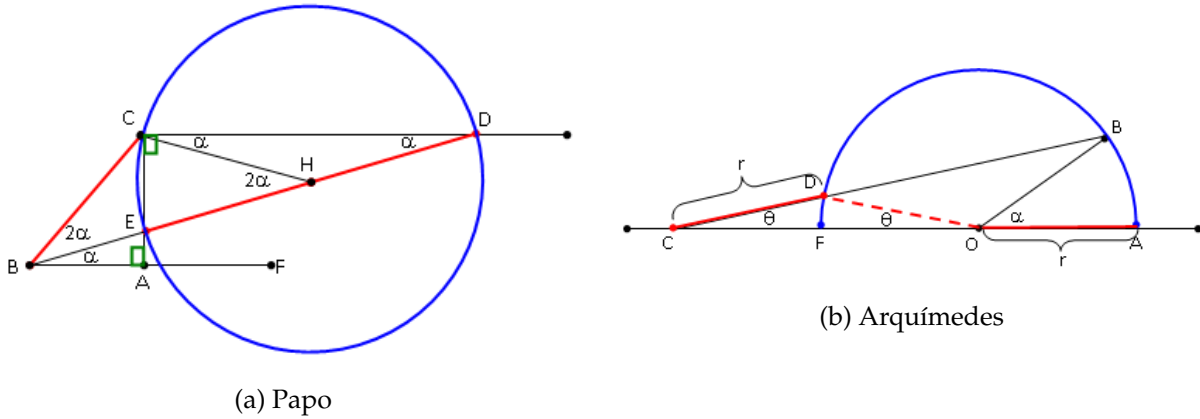


FIGURA A.3. Dos trisecciones con regla marcada. (a) Se desliza la regla por B hasta que el segmento ED , comprendido entre CA y la paralela a BA por C , mida el doble de BC ; entonces el ángulo EBA es la tercera parte del ángulo CBA . (b) Se desliza la regla por B hasta que el segmento CD , comprendido entre la prolongación del diámetro y la semicircunferencia, mida el radio r ; entonces el ángulo BCA es la tercera parte del ángulo BOA .

Fuente: Elaboración propia.

Proposición A.2 (Papo, *Colección* IV.32). Sea CBA el ángulo que se quiere trisecar, con A el pie de la perpendicular trazada desde C al lado BA , y sea CD la paralela a BA por C . Si una recta por B corta a CA en E y a CD en D de modo que $ED = 2BC$, entonces $\angle EBA = \frac{1}{3}\angle CBA$.

Demostración. Sea H el punto medio de ED (figura A.3a). El triángulo ECD es rectángulo en C , porque CD es paralela a BA y CA es perpendicular a BA ; por tanto, H equidista de sus tres vértices y $HC = HD = HE = BC$. Llamemos α al ángulo CDH . El triángulo HCD es isósceles, así que $\angle HCD = \alpha$ y el ángulo exterior CHE mide 2α . El triángulo BCH también es isósceles, porque $CB = CH$, de modo que $\angle CBH = \angle CHB = 2\alpha$. Finalmente, $\angle EBA = \angle CDH = \alpha$, por ser alternos internos entre las paralelas CD y BA . En consecuencia, $\angle CBA = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$. ■

Proposición A.3 (Arquímedes, *Libro de los lemas*, 8). Sea BOA un ángulo con vértice en el centro O de una semicircunferencia de radio r , con A y B sobre ella. Si una recta por B corta a la semicircunferencia en D y a la prolongación del diámetro AO en C , de modo que $CD = r$, entonces $\angle BCA = \frac{1}{3}\angle BOA$.

Demostración. Llamemos θ al ángulo BCA (figura A.3b). Como $CD = DO = r$, el triángulo CDO es isósceles y $\angle DOC = \theta$, de modo que el ángulo exterior ODB mide 2θ . Como $OD = OB = r$,

el triángulo ODB también es isósceles y $\angle OBD = 2\theta$. El ángulo BOA es exterior al triángulo COB , cuyos ángulos en C y en B miden θ y 2θ ; luego $\angle BOA = 3\theta$. ■

El *Libro de los lemas*, del que procede la segunda construcción, nos ha llegado solo en una versión árabe y no es seguro que todo su contenido sea de Arquímedes; lo que sí es seguro es que la idea funciona y que cabe en una página de cuaderno. En ambos casos la demostración es de nivel de secundaria: solo usa triángulos isósceles, ángulos exteriores y paralelas. Lo que la separa de una construcción euclidiana es el gesto de deslizar la regla hasta que algo coincida, un gesto que la geometría griega consideró legítimo en la práctica y sospechoso en la teoría.

A.3.3 El *tomahawk*

El *tomahawk*, llamado así por su parecido con un hacha, es un instrumento que cualquiera puede recortar en cartulina. Se forma con un segmento AD dividido en tres partes iguales $AB = BC = CD$, una semicircunferencia de centro B y radio AB , y un mango perpendicular a AD en el punto C . Su origen es desconocido; la referencia impresa más antigua que se conoce es un libro de Claude Lucien Bergery de 1835, y en 1877 Henri Brocard lo atribuyó a un oficial de marina francés llamado Pierre-Joseph Glotin.

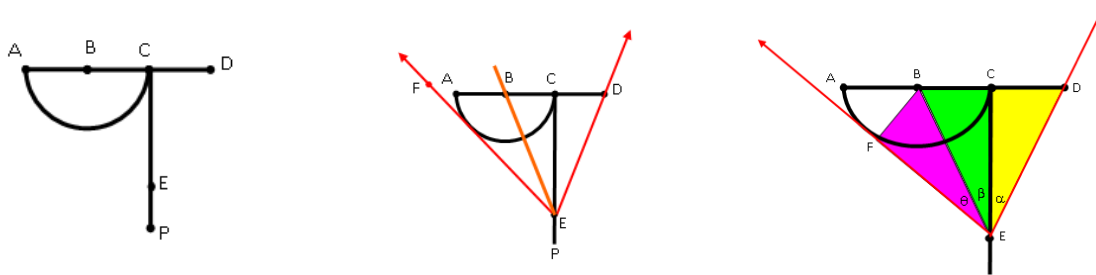


FIGURA A.4. El *tomahawk*: el instrumento, su colocación sobre un ángulo agudo y la figura de la demostración. El borde del mango pasa por el vértice E , el extremo D se apoya en un lado del ángulo y la semicircunferencia es tangente al otro lado en F ; las rectas EB y EC dividen el ángulo en tres partes iguales.

Fuente: Elaboración propia.

La colocación exige tres condiciones simultáneas: el borde del mango debe pasar por el vértice E del ángulo, el extremo D debe quedar sobre uno de los lados y la semicircunferencia debe ser tangente al otro lado, en un punto F . Cumplidas las tres, las rectas EC y EB trisecan el ángulo. La demostración es un ejercicio de congruencia de triángulos que funciona muy bien en noveno o décimo año. Los triángulos rectángulos ECD y ECB son congruentes, porque comparten el cateto EC y tienen $CD = CB$; por tanto, los ángulos DEC y CEB son iguales. Los triángulos rectángulos ECB y EFB también lo son, porque comparten la hipotenusa EB y tienen $BC = BF$, radios de la semicircunferencia (el ángulo en F es recto por la tangencia, y el ángulo en C lo es porque el mango es perpendicular a AD); por tanto, los ángulos CEB y BEF son iguales. Los tres ángulos en que queda dividido el ángulo FED miden lo mismo.

Con el *tomahawk*, o con cualquiera de las inserciones anteriores, se pueden construir polígonos regulares que la regla y el compás no alcanzan. El ejemplo más sencillo es el eneágono: se parte de un hexágono regular inscrito, se toman tres de sus vértices alternos, que determinan tres

ángulos centrales de 120° , se triseca cada uno y se obtienen los nueve vértices (figura A.5). Por el teorema de Wantzel sabemos que esto no puede hacerse con regla y compás, porque $\cos 40^\circ$ es raíz de la cúbica irreducible $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

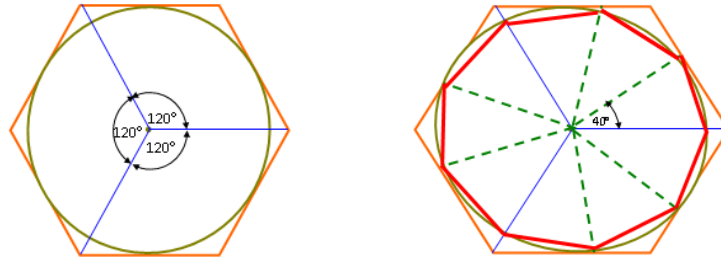


FIGURA A.5. Construcción del eneágono regular trisecando con el *tomahawk* los ángulos centrales de 120° de un hexágono regular.

Fuente: Elaboración propia.

A.3.4 Un error frecuente

Para bisecar un ángulo basta bisecar la cuerda que lo subtiende en una circunferencia centrada en su vértice. Muchos estudiantes, y no pocos adultos, suponen que para trisecarlo basta trisecar la cuerda. No es así, y un ejemplo con números concretos lo muestra de inmediato. En el triángulo rectángulo isósceles ABC de catetos $AB = BC = 3$, recto en B , la hipotenusa mide $3\sqrt{2}$; si se divide en tres partes iguales de longitud $\sqrt{2}$ y se unen los puntos de división con B , los tres ángulos que resultan en B no son de 30° . Con la ley de los cosenos se obtiene que los dos exteriores miden $\arctan \frac{1}{2} \approx 26,57^\circ$ y el central $90^\circ - 2\arctan \frac{1}{2} \approx 36,87^\circ$ (figura A.6). El ángulo central siempre resulta mayor, porque los puntos de la cuerda cercanos a su centro están más cerca del vértice que los extremos y, vistos desde él, subtienden ángulos mayores.

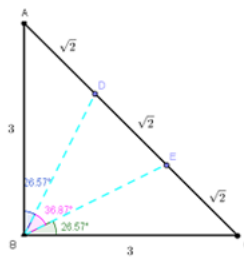


FIGURA A.6. Trisecar la cuerda no triseca el ángulo: los ángulos en B miden aproximadamente $26,57^\circ$, $36,87^\circ$ y $26,57^\circ$.

Fuente: Elaboración propia.

El error tiene un interés que va más allá de la anécdota. En la sección 3.11 vimos que la trisección con regla y compás es imposible en general; pero algunos ángulos sí pueden trisecarse, como los de 90° , 45° o 135° , porque sus terceras partes, 30° , 15° y 45° , son construibles. El trabajo de 2012 incluía esas construcciones, que son un buen ejercicio para distinguir entre «este ángulo no se puede trisecar» y «no existe un método que triseque todos los ángulos».

A.4 La cuadratura del círculo y las lúnulas

El tercer problema resultó el más difícil de los tres, y también el que más tardó en cerrarse: su imposibilidad depende de la trascendencia de π , que Lindemann demostró en 1882 (corolario 4.16). Pero antes de que nadie sospechara esa imposibilidad hubo un resultado que parecía anunciar lo contrario. Hipócrates de Quíos, el mismo de la reducción del problema del cubo, mostró hacia el 440 a. C. que ciertas figuras limitadas por arcos de circunferencia, las *lúnulas*, tienen exactamente la misma área que un triángulo (Heath, 1921; Knorr, 1986). Era la primera vez que alguien cuadraba una figura curvilínea, y la esperanza de cuadrar el círculo por ese camino duró mucho tiempo.

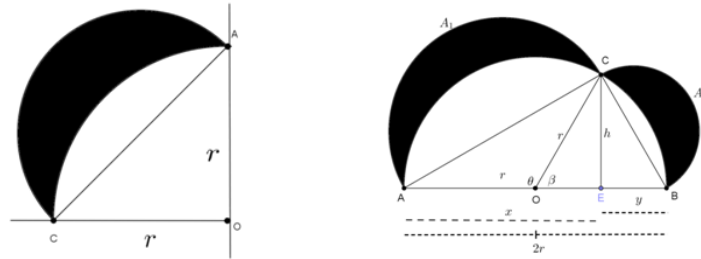


FIGURA A.7. A la izquierda, la lúnula de Hipócrates sobre el lado del cuadrado inscrito: su área es igual a la del triángulo AOC . A la derecha, las dos lúnulas construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia: la suma de sus áreas es igual a la del triángulo ACB .

Fuente: Elaboración propia.

Proposición A.4 (Hipócrates de Quíos). Sea O el centro de un círculo de radio r y sean A y C puntos de la circunferencia con $\angle AOC = 90^\circ$. La lúnula limitada por el arco AC del círculo y por la semicircunferencia de diámetro AC exterior a él tiene área igual a la del triángulo AOC , es decir, $r^2/2$.

Demostración. Por el teorema de Pitágoras, $AC^2 = 2r^2$, así que el semicírculo de diámetro AC tiene área $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$. El segmento circular limitado por la cuerda AC y el arco AC del círculo grande es el cuarto de círculo menos el triángulo: $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$. La lúnula es el semicírculo menos ese segmento:

$$\frac{\pi r^2}{4} - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2}.$$

Los términos con π se cancelan, y eso es todo el secreto. ■

La demostración de Hipócrates no usaba el número π , que nadie conocía como tal; usaba el resultado, que más tarde demostraría Eudoxo con el método de exhaustión, de que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros (teorema 2.19). El semicírculo sobre AC y el cuarto de círculo de radio r tienen la misma área porque $AC^2 = 2r^2$, y a partir de ahí la cancelación es la misma. El mismo cálculo muestra, en general, que si ACB es un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia de diámetro AB , las dos lúnulas construidas sobre los catetos suman exactamente el área del triángulo: basta aplicar el teorema de Pitágoras a los

tres semicírculos (ejercicio A.4). Este resultado más general suele atribuirse a Ibn al-Haytham, en el siglo XI.

¿Por qué no sirvió esto para cuadrar el círculo? Porque las lúnulas de Hipócrates se cuadran precisamente gracias a una cancelación afortunada: el área curvilínea que se suma y la que se resta son iguales. En el círculo completo no hay nada que cancelar. Hoy sabemos que solo hay cinco tipos de lúnulas cuadrables con regla y compás, tres de ellos conocidos por Hipócrates, y que el círculo no está entre las figuras cuadrables. Pero el camino no fue inútil: la búsqueda de cuadraturas llevó a Antifonte y a Brisón a inscribir y circunscribir polígonos con un número creciente de lados, idea que Eudoxo convirtió en el método de exhaustión y Arquímedes en la acotación de π del capítulo 2.

A.5 Lo que enseñan los tres problemas

Visto en conjunto, el recorrido de este apéndice responde, creo, a la pregunta del trabajo de 2012. Los tres problemas clásicos no produjeron por sí mismos el concepto de número irracional, pero lo empujaron en tres direcciones. La duplicación del cubo y la trisección del ángulo mostraron que había longitudes, como $\sqrt[3]{2}$ o $\cos 20^\circ$, que no se dejaban alcanzar con las raíces cuadradas de la regla y el compás, y esa sospecha, convertida en teorema por Wantzel, obligó a distinguir clases de irracionales. La cuadratura del círculo, por su parte, llevó a buscar el valor de π con una precisión creciente y, al final, a preguntarse por su naturaleza, lo que condujo a los números trascendentes. Y los instrumentos que se inventaron para esquivar la restricción —las cónicas, la cuadratriz, la regla marcada, el *tomahawk*— muestran algo que en el aula vale la pena decir en voz alta: que cuando un problema no se puede resolver con ciertas herramientas, la matemática tiene dos salidas honestas, cambiar de herramientas o demostrar que el problema no tiene solución con las que se tienen.

EN EL AULA: LOS PROBLEMAS CLÁSICOS EN SECUNDARIA

Casi todo lo que contiene este apéndice puede trabajarse en el aula de secundaria con materiales muy simples. El *tomahawk* se recorta en cartulina en diez minutos y la demostración de que triseca el ángulo solo necesita congruencia de triángulos. La inserción de Arquímedes se hace con una tira de papel en la que se marcan dos puntos. El error de trisecar la cuerda se descubre midiendo con un transportador, y la explicación con la ley de los cosenos es un buen ejercicio de trigonometría. Las lúnulas de Hipócrates son una ocasión excelente para calcular áreas de figuras curvas sin integrales. Lo único que conviene evitar es presentar estas construcciones como «soluciones» de los problemas clásicos sin aclarar qué instrumento usan: la discusión sobre por qué no valen como construcciones con regla y compás es precisamente lo que las hace valiosas.

Cuando un estudiante pregunta, con toda razón, por qué el *tomahawk* «no vale» si funciona, está haciendo la misma pregunta que se hicieron los geómetras griegos durante siglos. La respuesta honesta es que sí vale, pero para otro juego, con otras reglas; y comprender que en matemática las reglas del juego forman parte del problema es una de las lecciones más valiosas que puede dejar esta actividad.

Ejercicios

Ejercicio A.1. Verifique que la cuadratriz de Hipias, en un cuadrado de lado R con O en el origen, tiene por ecuación $x = y \cot(\frac{\pi y}{2R})$ para $0 < y \leq R$, y que corta al lado OA en el punto de abscisa $2R/\pi$. Explique por qué este último hecho permitiría rectificar la circunferencia si la curva pudiera trazarse completa.

Ejercicio A.2. Construya un *tomahawk* en cartulina y úselo para trisecar ángulos de 60° , 90° y 150° . Compruebe los resultados con un transportador y explique, con el teorema de Wantzel, por qué para el ángulo de 60° no existe una construcción equivalente con regla y compás.

Ejercicio A.3. Triseque con regla y compás un ángulo recto y un ángulo de 45° . ¿Por qué estas construcciones no contradicen el teorema de Wantzel?

Ejercicio A.4. Sea ACB un triángulo rectángulo en C inscrito en una semicircunferencia de diámetro AB . Demuestre que la suma de las áreas de las dos lúnulas limitadas por los semicírculos exteriores de diámetros AC y CB y por la semicircunferencia de diámetro AB es igual al área del triángulo ACB .

Ejercicio A.5. Demuestre que $\cos 40^\circ$ es raíz de $8x^3 - 6x + 1 = 0$ y que este polinomio no tiene raíces racionales. Deduzca que el eneágono regular no es construible con regla y compás.

Bibliografía

Reúno aquí, en una sola lista, todas las obras citadas a lo largo del libro. La he dividido en dos partes. Las *fuentes primarias* son los textos de los propios matemáticos y filósofos cuya obra se estudia, desde las ediciones de las tablillas mesopotámicas y de los *Elementos* hasta los artículos de Cantor, Dedekind, Hilbert o Apéry, ya sea en su edición original o en una traducción. Las *fuentes secundarias* reúnen los estudios históricos, las obras de referencia y la investigación en educación matemática sobre esos textos y su enseñanza. Cuando una obra dispone de un identificador digital estable (DOI) o de una dirección permanente de acceso libre, la he incluido para que el lector pueda consultarla directamente.

Fuentes primarias

- Apéry, R. (1979). Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque*, 61, 11–13. https://www.numdam.org/article/AST_1979__61__11_0.pdf
- Apostol, T. M. (2000). Irrationality of the square root of two: a geometric proof. *The American Mathematical Monthly*, 107(9), 841–842. <https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005280>
- Aristóteles (1988). *Tratados de lógica (Órganon) II: Sobre la interpretación. Analíticos primeros. Analíticos segundos* (trad. M. Candel Sanmartín). Madrid: Gredos.
- Aristóteles (1994). *Metafísica* (trad. T. Calvo Martínez). Madrid: Gredos.
- Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Praga: Gottlieb Haase.
- Bombelli, R. (1572). *L'Algebra*. Bolonia: Giovanni Rossi.
- Bruins, E. M. y Rutten, M. (1961). *Textes mathématiques de Suse*. Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, 34. París: Geuthner.
- Cantor, G. (1872). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5, 123–132. <https://doi.org/10.1007/BF01446327>
- Cantor, G. (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77, 258–262.
- Cantor, G. (1891). Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1, 75–78. <https://eudml.org/doc/144383>
- Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I^{re} partie: Analyse algébrique*. París: Debure.
- Chemla, K. y Guo, S. (2004). *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. París: Dunod.
- Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Brunswick: Vieweg.
- Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática* (ed. y trad. J. Ferreirós). Madrid: Alianza.

- Descartes, R. (1637). La Géométrie. En *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (pp. 297–413). Leiden: Ian Maire.
- Diógenes Laercio (1925). *Lives of Eminent Philosophers* (trad. R. D. Hicks), vol. II. Londres: Heinemann (Loeb Classical Library).
- Euclides (1991–1996). *Elementos* (trad. y notas de M. L. Puertas Castaños; introd. de L. Vega), 3 vols. Madrid: Gredos.
- Euler, L. (1744). De fractionibus continuis dissertatio. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 9 (1737), 98–137. [E71]. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/71/>
- Grant, E. (ed. y trad.) (1966). *Nicole Oresme: De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*. Madison: University of Wisconsin Press.
- Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Heath, T. L. (1912). *The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg: A Supplement to The Works of Archimedes, 1897*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (reimpr. de la 2.^a ed. de 1926; 1.^a ed., 1908), 3 vols. Nueva York: Dover.
- Heine, E. (1872). Die Elemente der Functionenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74, 172–188. <https://doi.org/10.1515/crll.1872.74.172>
- Hermite, C. (1873). Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 77, 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner.
- Hilbert, D. (1900). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 180–183. <https://eudml.org/doc/144659>
- Hurwitz, A. (1891). Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. *Mathematische Annalen*, 39, 279–284. <https://doi.org/10.1007/BF01206656>
- Jámblico (2003). *Vida pitagórica. Protréptico* (trad. M. Periago Lorente). Madrid: Gredos.
- Lambert, J. H. (1768). Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, año 1761, 265–322.
- Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie*. París: Firmin Didot. (Nota IV).
- Lindemann, F. (1882). Ueber die Zahl π . *Mathematische Annalen*, 20, 213–225. <https://doi.org/10.1007/BF01446522>
- Liouville, J. (1851). Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 16, 133–142. http://www.numdam.org/item/JMPA_1851_1_16__133_0/
- Neugebauer, O. y Sachs, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American Oriental Society.
- Newton, I. (1707). *Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica liber*. Cambridge: Typis Academicis.
- Niven, I. (1947). A simple proof that π is irrational. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(6), 509. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08821-2>
- Platón (1983). Menón. En *Diálogos II* (trad. F. J. Olivieri). Madrid: Gredos.
- Platón (1988). Teeteto. En *Diálogos V* (trad. Á. Vallejo Campos). Madrid: Gredos.
- Platón (1999). *Diálogos VIII y IX: Leyes* (trad. F. Lisi). Madrid: Gredos.
- Stevin, S. (1585). *L'Arithmétique*. Leiden: Christophe Plantin.

- Thomson, W. y Junge, G. (1930). *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.
- Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), 42, 230–265.
- Wantzel, P. L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, 366–372. https://www.numdam.org/item/JMPA_1837_1_2_366_0.pdf
- Weber, H. (1893). Leopold Kronecker. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2, 5–31.

Fuentes secundarias

- Aigner, M. y Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from THE BOOK* (6.^a ed.). Berlín: Springer.
- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, 8(1), 30–46. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-historia-de-las-matematicas-en-la-educacion-matematica/>
- Arcavi, A., Bruckheimer, M. y Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 18–23. <https://flm-journal.org/Articles/E6454867E7058659B0E3806B8E11.pdf>
- Arrigo, G. y D'Amore, B. (1999). «Lo veo, pero no lo creo»: obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática*, 11(1), 5–24. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1142281/Veo1999Arrigo.pdf>
- Beckmann, P. (1971). *A History of π* . Nueva York: St. Martin's Press.
- Bergé, A. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de completitud del conjunto de los números reales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 31–64. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n1/v9n1a3.pdf>
- Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 163–197. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560301>
- Berggren, J. L. (2016). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (2.^a ed.). Nueva York: Springer.
- Blåsjö, V. (2016). In defence of geometrical algebra. *Archive for History of Exact Sciences*, 70(3), 325–359. <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0169-5>
- Boyer, C. B. y Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3.^a ed.). Hoboken: Wiley.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Buckle, D. (2023). How the estimate of $\sqrt{2}$ on YBC 7289 may have been calculated. *Historia Mathematica*, 62, 3–18. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2022.08.002>
- Burkert, W. (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (trad. E. L. Minar). Cambridge (Mass.): Harvard University Press.
- Chinchilla, J. L. (2017). Los tres problemas clásicos de la antigüedad: una breve reflexión sobre su importancia en la construcción de los irracionales. En SEMUR (ed.), *Actas del 7.º Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 326–332). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguay. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/los-tres-problemas-clasicos-de-la-antiguedad-una-breve-reflexion-sobre-su-importancia-en-la-construccion-de-los-irracionales/>

- Chinchilla, J. L., Robles, C., Rodríguez, A. y Villalobos, D. (2012). *Análisis de diferentes problemas históricos de las matemáticas que proporcionan el concepto de número irracional* (Trabajo final de graduación, Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática). Universidad de Costa Rica, Ciudad Universitaria Rodrigo Facio.
- Chorlay, R., Clark, K. M. y Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: recent developments in the field. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7), 1407–1420. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>
- Christianidis, J. (ed.) (2004). *Classics in the History of Greek Mathematics*. Dordrecht: Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2640-9>
- Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 67–84. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9361-y>
- Corry, L. (2013). Geometry and arithmetic in the medieval traditions of Euclid's *Elements*: a view from Book II. *Archive for History of Exact Sciences*, 67(6), 637–705. <https://doi.org/10.1007/s00407-013-0121-5>
- Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales* (ed. revisada por I. Stewart). México: Fondo de Cultura Económica. (Original en inglés, 1941).
- Crespo Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Premisa*, 41, 21–30. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/acerca-de-la-comprension-y-significado-de-los-numeros-irracionales-en-el-aula-de-matematica/>
- Datta, B. (1932). *The Science of the Śulba: A Study in Early Hindu Geometry*. Calcuta: University of Calcutta.
- Douady, S. y Couder, Y. (1992). Phyllotaxis as a physical self-organized growth process. *Physical Review Letters*, 68(13), 2098–2101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.2098>
- Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the continuum, an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(3), 338–361. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0033-2>
- Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías* (1.^a ed. en español). México: Centro Regional de Ayuda Técnica. (Original en inglés, 1963).
- Fernández Verdú, C. y Llinares Ciscar, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129–142. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/252566>
- Ferreirós, J. (1993). On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind. *Historia Mathematica*, 20(4), 343–363. <https://doi.org/10.1006/hmat.1993.1030>
- Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (2.^a ed.). Basilea: Birkhäuser.
- Fischbein, E., Jehiam, R. y Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1), 29–44. <https://doi.org/10.1007/BF01273899>
- Fowler, D. H. (1999). *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction* (2.^a ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Fowler, D. y Robson, E. (1998). Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context. *Historia Mathematica*, 25(4), 366–378. <https://doi.org/10.1006/hmat.1998.2209>
- Fregueiro, A. y Bergé, A. (2024). La propiedad de completitud del sistema real: una introducción vía la convergencia de sucesiones. *Bolema*, 38, e230005, 1–24. <https://doi.org/10.1590/1980-4415V38A230005>

- Freudenthal, H. (1966). Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'Antiquité? *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, 18, 43–55. Reimpreso en J. Christianidis (ed.) (2004), *Classics in the History of Greek Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131–143. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9070-0>
- Giovannini, E. N. (2013). Completitud y continuidad en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert: acerca del *Vollständigkeitsaxiom*. *Theoria. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, 28(1), 139–163. <https://doi.org/10.1387/theoria.4544>
- Giovannini, E. N. (2015). «Una mancha en el sol de Euclides»: Hilbert y la teoría euclídea de las proporciones. *Tópicos. Revista de Filosofía*, 30, 19–39. <https://www.redalyc.org/pdf/288/28844048002.pdf>
- González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaustión. *Sigma*, 33, 101–129. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2932730>
- González-Martín, A. S. (2020). La introducción de los números reales en la enseñanza secundaria: un análisis institucional de libros de texto. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, 7–24. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-introduccion-de-los-numeros-reales-en-la-ensenanza-secundaria-un-analisis-institucional-de-libros-de-texto/>
- Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: how did he handle them? *Historia Mathematica*, 23(4), 355–375. <https://doi.org/10.1006/hmat.1996.0038>
- Guacaneme Suárez, E. A. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 113–131. <https://doi.org/10.17227/ted.num31-1651>
- Hardy, G. H. y Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6.ª ed., rev. por D. R. Heath-Brown y J. H. Silverman). Oxford: Oxford University Press.
- Hasse, H. y Scholz, H. (1928). Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Kant-Studien*, 33, 4–34. <https://doi.org/10.1515/kant.1928.33.1-2.4>
- Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. Oxford: Clarendon Press.
- Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. Nueva York: Springer.
- Huffman, C. (2024a). Pythagoras. En E. N. Zalta y U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (primera publicación 2005; revisión sustantiva del 5 de febrero de 2024). <https://plato.stanford.edu/entries/pythagoras/>
- Huffman, C. (2024b). Pythagoreanism. En E. N. Zalta y U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (primera publicación 2006; revisión sustantiva del 5 de marzo de 2024). <https://plato.stanford.edu/entries/pythagoreanism/>
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the «whys» and «hows» of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Jankvist, U. T., Clark, K. M. y Mosvold, R. (2020). Developing mathematical knowledge for teaching teachers: potentials of history of mathematics in teacher educator training. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(3), 311–332. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-09424-x>
- Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3.ª ed.). Boston: Addison-Wesley.
- Keyser, P. T. (2007). Eudoxus. En T. Hockey et al. (eds.), *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*. Nueva York: Springer.

- Khinchin, A. Ya. (1964). *Continued Fractions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kjeldsen, T. H. y Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 327–349. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9352-z>
- Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York: Oxford University Press. [Trad. esp.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid: Alianza, 1992].
- Knorr, W. R. (1975). *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht: Reidel.
- Knorr, W. R. (1983). «La croix des mathématiciens»: The Euclidean theory of irrational lines. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 9(1), 41–69. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1983-15155-8>
- Knorr, W. R. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser.
- Livio, M. (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. Nueva York: Broadway Books.
- Lützen, J. (2009). Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result. *Historia Mathematica*, 36(4), 374–394. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.03.001>
- Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, 33(1), 63–81. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2004.11.011>
- Mansfield, D. F. y Wildberger, N. J. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*, 44(4), 395–419. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001>
- Maor, E. (1994). *e: The Story of a Number*. Princeton: Princeton University Press.
- Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the golden ratio. *The College Mathematics Journal*, 23(1), 2–19. <https://doi.org/10.1080/07468342.1992.11973428>
- Martzloff, J.-C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlín: Springer.
- Medina M., A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 9. <https://doi.org/10.17227/ted.num9-5622>
- Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 329–358. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1832>
- Mendell, H. (2004). Aristotle and mathematics. En E. N. Zalta y U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-mathematics/>
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemáticas. I y II ciclo de la Educación Primaria, III ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. San José: MEP.
- Montoro, V. y Ferrero, M. (2022). Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad. *Revista de Educación Matemática*, 37(1), 61–92. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8833003.pdf>
- Montoro, V., Scheuer, N. y Pérez Echeverría, M. P. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, 28(3), 145–174. <https://doi.org/10.24844/em2803.06>
- Morante Rodríguez, J. D., Hernández Rebollar, L. A. y Ruiz Estrada, H. (2022). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, 34(1), 249–279. <https://doi.org/10.24844/em3401.09>

- Niven, I. (1956). *Irrational Numbers* (Carus Mathematical Monographs, 11). Washington: Mathematical Association of America.
- O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (1999). Eudoxus of Cnidus. En *MacTutor History of Mathematics Archive*. St Andrews: University of St Andrews. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudoxus/>
- Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Oller Marcén, A. M. y Gairín Sallán, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317–338. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1632>
- Plofker, K. (2009). *Mathematics in India*. Princeton: Princeton University Press.
- Rashed, R. (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Kluwer.
- Rashed, R. y Vahabzadeh, B. (2000). *Omar Khayyam, the Mathematician*. Nueva York: Bibliotheca Persica Press.
- Reck, E. (2025). Dedekind's contributions to the foundations of mathematics. En E. N. Zalta y U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (primera publicación 2008; revisión sustantiva del 21 de octubre de 2025). <https://plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/>
- Reina, L., Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en educación secundaria. *Educación Matemática*, 24(3), 67–97. <https://funes.uniaandes.edu.co/funes-documentos/configuraciones-epistemicas-asociadas-al-numero-irracional-sentidos-y-desafios-en-educacion-secundaria/>
- Rizos, I. y Adam, M. (2022). Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0686. <https://doi.org/10.29333/iejme/11977>
- Robson, E. (2001). Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica*, 28(3), 167–206. <https://doi.org/10.1006/hmat.2001.2317>
- Rodríguez del Río, R. (2006). *El número π : de la geometría al cálculo numérico* (Ponencia). Universidad Internacional Menéndez Pelayo. https://blogs.mat.ucm.es/rrdelrio/wp-content/uploads/sites/26/2017/11/numpi_uimp_rrodriguez.pdf
- Rommevaux-Tani, S. (2014). Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin. *Revue d'histoire des mathématiques*, 20(2), 171–209. <https://doi.org/10.24033/rhm.181>
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3.^a ed.). Nueva York: McGraw-Hill.
- Saiz, I. E., Gorostegui, E. y Vilotta, D. (2011). Problematicar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemática*, 23(1), 123–151. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40521127005>
- Santillana, G. de (1940). Eudoxus and Plato: a study in chronology. *Isis*, 32(2), 248–262. <https://doi.org/10.1086/347693>
- Sialaros, M. y Christianidis, J. (2016). Situating the debate on «geometrical algebra» within the framework of premodern algebra. *Science in Context*, 29(2), 129–150. <https://doi.org/10.1017/S0269889715000411>
- Sierpiska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 49–76. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5>

- Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line: where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477–488. <https://doi.org/10.1080/00207390601151828>
- Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics*, vol. II. Boston: Ginn and Company.
- Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: on the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese*, 84(2), 163–211. <https://doi.org/10.1007/BF00485377>
- Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History* (3.^a ed.). Nueva York: Springer.
- Tall, D. y Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49. https://wrap.warwick.ac.uk/id/eprint/494/1/WRAP_Tall_dot1978c-with-rolph.pdf
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tsamir, P. (2001). When «the same» is not perceived as such: the case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2–3), 289–307. <https://doi.org/10.1023/A:1016034917992>
- Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 15(1), 67–114. <https://doi.org/10.1007/BF00327233>
- van der Poorten, A. (1979). A proof that Euler missed. . . Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *The Mathematical Intelligencer*, 1(4), 195–203. <https://doi.org/10.1007/BF03028234>
- von Fritz, K. (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, 46(2), 242–264. <https://doi.org/10.2307/1969021>
- Voskoglou, M. Gr. y Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 301–336. <https://doi.org/10.4471/redimat.2012.16>
- Weller, K., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5–28. <https://doi.org/10.1080/14926150902817381>
- Zazkis, R. y Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 497–504). Bergen: Bergen University College.

Sobre el Autor

Jorge Luis Chinchilla Valverde es docente de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cuenta con experiencia en la enseñanza universitaria de la matemática y en la formación de docentes de primaria y secundaria. Posee el Bachillerato y la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática por la Universidad de Costa Rica, así como una Maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Currículo por la Universidad Latina de Costa Rica; actualmente cursa el Doctorado en Ciencias de la Educación. Ha impartido cursos en diversas universidades, publicado artículos y libros, y participado en congresos nacionales e internacionales de matemática educativa, donde también ha ejercido labores de coordinación académica.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7512-6511>