Aplicaciones de la Derivada

Determinar ecuaciones de rectas tangentes

Entre las aplicaciones de la derivada está el encontrar la ecuación de una recta tangente a una curva y que pasa por un punto dado. Recordemos que $f'(x)$ nos brinda la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto cualquiera $(x, f(x))$. Por lo anterior debemos asegurarnos que al evaluar en cierto valor de x éste corresponda con el de un punto en la curva. En los siguientes ejemplos distinguiremos cuando el punto dado pertenece a la curva y cuando no.

Ejemplos

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = -\ln(2x-1) + 3e^{x-1} + 2$, y que pasa por el punto $(1, 5)$.

   Solución

   Veamos primero que pasa con el punto $(1, 5)$. Al evaluar la función con $x = 1$ tenemos $f(1) = -\ln(1) + 3e^0 + 2 = 0 + 3 + 2 = 5$, lo que nos indica que el punto está en la curva. Ahora podemos calcular la primera derivada de f y evaluar $f'(1)$:

   $$f'(x) = \frac{-2}{2x-1} + 3e^{x-1} \Longrightarrow f'(1) = -2 + 3 = 1 = m$$

   Para hallar b usamos $b = y_1 - mx_1 \Longrightarrow b = 5 - 1(1) = 4$. De donde la ecuación de la recta buscada es $y = x + 4$.

2. Determine la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 + x$, y que pasan por el punto $(2, -3)$.

   Solución

En este caso el punto no pertenece a la curva, esto lo sabemos pues al evaluar $y(2) = 2^2 + 2 = 6 \neq 3$. Así que debemos determinar los puntos de la curva que corresponden con los puntos de tangencia de las rectas.

Sea $(w, y(w))$ uno de los puntos de tangencia buscados entonces, la pendiente de la recta tangente en $(w, y(w))$ está dada por:

$$y'(x) = 2x + 1 \Longrightarrow y'(w) = 2w + 1 = m$$

Por otro lado la pendiente de la recta que pasa por $(2, -3)$ y $(w, y(w))$ se calcula mediante el cociente

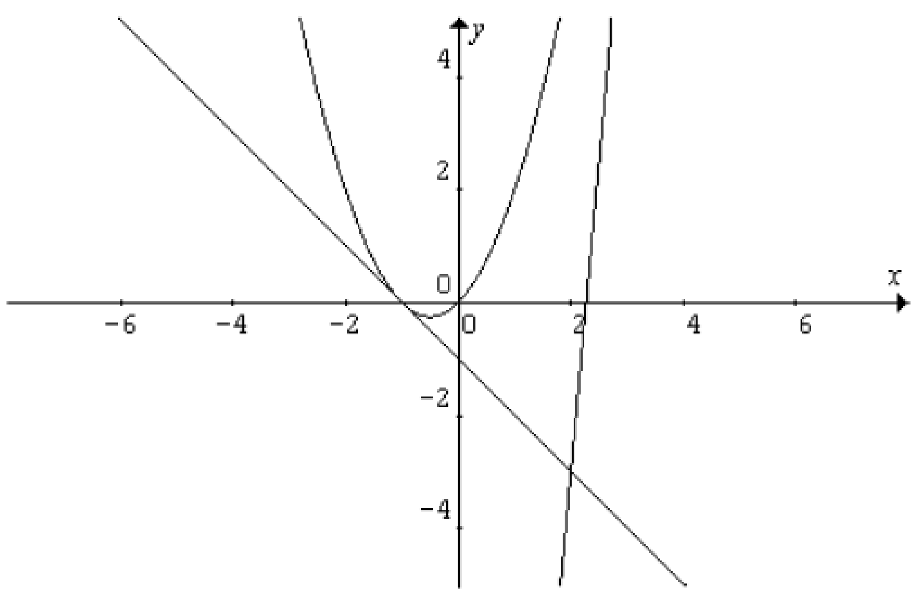
$$\frac{y(w) - (-3)}{w - 2} = \frac{w^2 + w + 3}{w - 2}$$

Ahora igualamos los resultados que tenemos para m, pues una recta mantiene la misma pendiente a todo su largo.

$$\begin{aligned} & 2w + 1 = \frac{w^2 + e + 3}{w - 2} \\ \Rightarrow \quad & 2w^2 - 3w - 2 = w^2 + w + 3 \\ \Rightarrow \quad & w^2 - 4w - 5 = 0 \end{aligned}$$

De esta última ecuación tenemos dos soluciones $w = -1$ y $w = 5$.

Esto significa que hay dos puntos de tangencia, veamos la situación gráficamente:



- Con $w = -1$ el punto de tangencia es $(-1, y(-1)) = (-1, 0)$. La pendiente de la recta tangente es $m = 2(-1) + 1 = -1$; mientras que $b = -3 - (-1)(2) = -1$.
- Con $w = 5$ el punto de tangencia es $(5, y(5)) = (5, 30)$. La pendiente de la recta tangente es $m = 2(5) + 1 = 11$; mientras que $b = -3 - (11)(2) = -25$.

Así las ecuaciones pedidas son $y = -x - 1$ y $y = 11x - 25$.

3. Considere las funciones

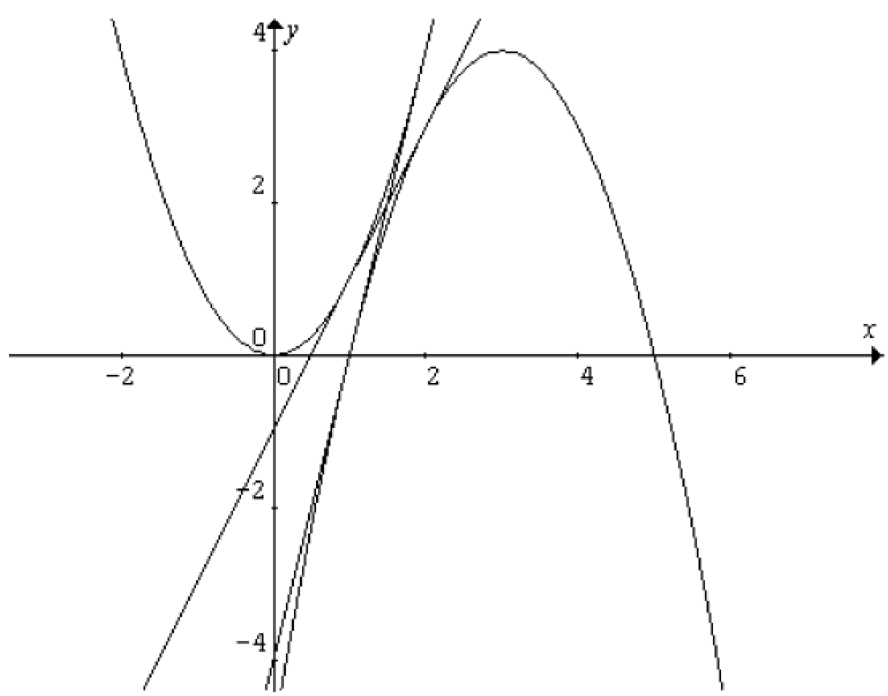
$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Determine las ecuaciones de las dos rectas que simultáneamente sean tangentes a las gráficas de ambas curvas.

Solución

Veamos la situación gráficamente



Las parábolas no se intersecan, y de acuerdo a su posición si es posible hallar un par de rectas que simultáneamente sean tangentes a ambas curvas. Necesitamos encontrar primero los puntos de tangencia.

Definamos como $(w, f(w))$ a uno de los puntos de tangencia en la curva de f y como $(z, g(z))$ a uno de los puntos de tangencia en la curva de g.

Vamos a encontrar la pendiente de la recta tangente en cada punto

Para $(w, f(w))$: $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(w) = 2w = m$

Para $(z, g(z))$: $g'(x) = -2x + 6 \Rightarrow g'(z) = -2z + 6 = m$

Por otro lado la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(w, f(w))$ y $(z, g(z))$ está dada por:

$$m = \frac{g(z) - f(w)}{z - w} = \frac{-z^2 + 6z - 5 - w^2}{z - w}$$

Igual que antes la pendiente m es la misma en cada ecuación, por lo cual podemos establecer el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2w = -2z + 6 \\ 2w = \dfrac{-z^2 + 6z - 5 - w^2}{z - w} \end{cases}$$

Que al resolver para z nos brinda como soluciones $z = 1$ y $z = 2$

- Con $z = 1$ se tiene $w = 2$, y con ellos los puntos de tangencia son :

  $$(w, f(w)) = (2, f(2)) = (2, 4)$$

  $$(z, g(z)) = (1, g(1)) = (1, 0)$$

  En este caso la pendiente de la recta es $m = 2w = 4$; mientras que $b = 0 - 4 \cdot 1 = -4$.

- Con $z = 2$ se tiene $w = 1$, y con ellos los puntos de tangencia son:

  $$(w, f(w)) = (1, f(1)) = (1, 1)$$

  $$(z, g(z)) = (2, g(2)) = (2, 3)$$

  En este caso la pendiente de la recta es $m = 2w = 2$; mientras que $b = 3 - 2 \cdot 2 = -1$.

Así que las ecuaciones de las dos rectas pedidas son $y = 4x - 4$ y $y = 2x - 1$.

Determinar Máximos y Mínimos en un intervalo cerrado

Al considerar una función f sobre un intervalo esperamos que ella logre un valor máximo y un valor mínimo. En apartados anteriores se ha relacionado la derivada con la búsqueda de extremos relativos de una función, aquí buscamos los extremos pero sobre un intervalo cerrado.

Definición

> Sea f una función definida sobre un intervalo I (puede ser abierto o cerrado), sean c y d valores en I.
> Decimos que $L = f(c)$ es el mínimo de f en I si se cumple que $L \leq f(x)$, $\forall x \in I$ y que $M = f(d)$ es el máximo de f si cumple que $M \geq f(x)$, $\forall x \in I$.

Para funciones continuas se tiene el siguiente resultado

> Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces siempre existen el máximo y el mínimo de f en $[a, b]$.

Para hallar los extremos de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$ vamos a:

1. Encontrar los valores críticos de f que pertenecen al intervalo abierto $]a, b[$.
2. Determinar la imagen para cada valor crítico seleccionado y además para los extremos del intervalo.
3. De los resultados anteriores el mayor corresponde con el máximo de la función y el menor con el mínimo.

Ejemplo

Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el intervalo $\left[-3, \dfrac{1}{2}\right]$.

$\boxed{\textbf{Solución}}$

Primero calculamos la derivada de f, para luego hallar sus valores críticos (valores del dominio de f donde su primera derivada se anula o indefine).

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Tenemos dos valores críticos pero sólo $x = -1$ pertenece al intervalo abierto $\left]-3, \frac{1}{2}\right[$.

Ahora evaluamos

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = -1 + 3 + 3 = 5$

$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 3 = -27 + 9 + 3 = -15$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 3 = \frac{13}{8}$

Así que 5 es el máximo de f y ocurre en $x = -1$; mientras que el mínimo es –15 y ocurre en $x = -3$.

Determinar Máximos y Mínimos en un intervalo cerrado

La optimización de funciones ocupa un lugar muy importante en las aplicaciones de la derivada. Dada una función encontrar sus valores máximo y mínimo, bajo ciertas condiciones (restricciones), puede convertirse en clave para la toma de decisiones de una empresa (costos mínimos, máxima utilidad, mínimo tiempo de entrega, etc).

Teníamos un resultado que permitía determinar si un cierto valor crítico correspondía con un mínimo o un máximo relativo si conocíamos las variaciones de signo de la primera derivada. Ahora complementaremos ese resultado con el siguiente teorema.

Teorema (Criterio de la segunda Derivada)

Sea f una función continua y al menos dos veces derivable sobre un intervalo I y sea c un valor crítico de f que pertenece a I :

- Si $f''(c) > 0$, entonces en $x = c$ la función f logra un mínimo relativo.
- Si $f''(c) < 0$, entonces en $x = c$ la función f logra un máximo relativo.
- Si $f''(c) = 0$ o se indefine, entonces el criterio no decide.

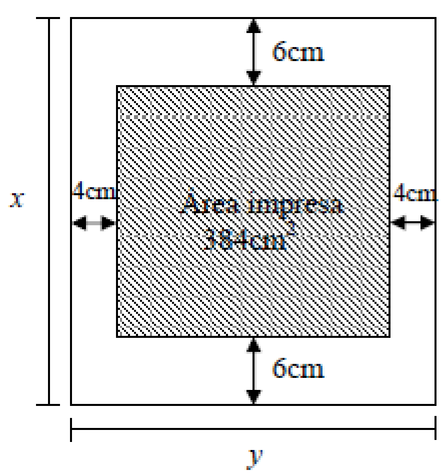
Note que para usar el teorema requerimos de un valor crítico y de la función segunda derivada, luego bastará con evaluar para decidir la naturaleza del extremo.

Ejemplo

Los márgenes superior e inferior de un cartel miden 6 cm. cada uno, y los márgenes laterales miden 4 cm. cada uno. Si el área del material impreso en el cartel se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del cartel que tenga la mínima área.

Solución

Primero vamos a establecer nuestra *función objetivo*, esto es la función que se quiere optimizar (maximizar o minimizar). En este ejemplo tal función corresponde con la mínima área del cartel. Considere la siguiente figura:



Función Objetivo

Área del Cartel $= xy$

Donde x corresponde con la medida en centímetros del alto del cartel, y y con la medida en centímetros del ancho del cartel.

Ahora debemos reescribir la función objetivo de modo que corresponda con una función en una variable, para ello vamos a utilizar una ecuación auxiliar, ésta es usualmente una condición (o restricción) del problema.

Ecuación auxiliar:

Área impresa $= 384\ \text{cm}^2$

De acuerdo con nuestro dibujo tal ecuación se escribe $(x-12)(y-8) = 384$.

Despejando y tenemos $y = \dfrac{384}{x-12} + 8$, este resultado nos permite escribir la función del área del cartel como sigue:

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{384}{x-12} + 8\right) \\ \Rightarrow \quad A(x) &= \frac{8x^2 + 288x}{x-12} \end{aligned}$$

Calculamos ahora su primera derivada, para luego calcular sus valores críticos

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{8x^2 - 192x - 3456}{(x-12)^2} \\ A'(x) &= 0 \Rightarrow 8x^2 - 192x - 3456 = 0 \Rightarrow x = -12 \ \vee \ x = 36 \end{aligned}$$

Note que la función primera derivada se indefine cuando $x = 12$, pero este valor no está en el domino de la función A, de hecho tal medida no tiene sentido para el cartel. Por esta última razón también descartamos al valor $x = -12$. Así que nos queda solo $x = 36$ por llevar al criterio de la segunda derivada. En un problema siempre debemos tener presente su propia naturaleza, esto es el problema "del mundo real" que modelamos.

Calculamos $A''(x)$, para luego evaluarla en $x = 36$.

$$\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{(16x-192)(x-12)^2 - (8x^2-192x-3456)\cdot 2(x-12)}{(x-12)^4} \\
&= \frac{(16x-192)(x-12) - (8x^2-192x-3456)\cdot 2}{(x-12)^3} \\
&\Rightarrow\ A''(36) = \frac{(576-192)(36-12) - 0\cdot 2}{(36-12)^3} \approx 0.67 > 0
\end{aligned}$$

De la última línea tenemos que en $x = 36$ la función A logra un mínimo relativo. Si $x = 36$ la ecuación auxiliar indica que $y = 24$. Por lo tanto las medidas del cartel son 36 cm de alto y 24 cm de ancho.

Del proceso anterior debemos resaltar:

1. Determinar la función por optimizar en una sola variable. Si hay más de una variable buscar las condiciones que permite reescribirla.

2. Hallar los valores críticos, para ello se requiere de calcular la primera derivada y buscar donde se anula o indefine. Se debe tener presente las particularidades del problema.

3. Calcular la segunda derivada y evaluar allí los puntos críticos seleccionados, el criterio de la segunda derivada nos permitiría conocer la naturaleza del extremo.

4. Dar una respuesta acorde a lo que se pregunta.

Ejercicios

- **Determinar Ecuaciones de Rectas Tangentes**

1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{\sqrt{x}\left(2-x^2\right)}{x}$, cuando $x = 4$. .... R/ $y = -\dfrac{25}{8}x + \dfrac{11}{2}$

2. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4+1}$, en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ .... R/ $y = \dfrac{1}{2}x$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}$, en el punto $(3, 1)$ .... R/ $y = 4x - 11$

4. Determine las ecuaciones de las rectas que son tangentes a la curva $y = 4x^2$, y que pasan por el punto $(0, -2)$. .... R/ $y = \pm 4x\sqrt{2} - 2$

5. Determine en qué punto de la curva $y = x\sqrt{x}$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$. .... R/ $(4, 8)$

6. ¿En qué puntos las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$, son paralelas al eje de las abscisas? .... R/ $(0, 20), (-2, -12), (1, 15)$

7. Determine el punto donde la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es paralela a la recta $y = -x - 6$. Luego determine la ecuación de dicha recta tangente.
R/ $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$, $y = -x + \dfrac{3}{4}$

8. Encontrar la ecuación de la recta normal a $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$, en el punto correspondiente a $x = 0$. (La recta normal es perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia) .... R/ $y = -\dfrac{1}{96}x + 36$

- **Determinar Máximos y Mínimos en un intervalo cerrado**

  Encuentre los valores máximo y mínimo de f en el intervalo dado.

  1. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en $[0, 3]$ .... R/ Mínimo en $x = 1$.

  2. $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ en $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ .... R/ Mínimo en $x = 1$.

  3. $f(x) = 2x - x^{2/3}$ en $[-1, 3]$ .... R/ Mínimo en $x = \dfrac{1}{27}$.

- **Problemas de Máximos y Mínimos**

  1. Encuentre dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo. R/10, 10.

  2. Un agricultor tiene 100m de alambre con el cual planea construir dos corrales idénticos. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que se puede cercar para obtener el área máxima? .... R/ $\dfrac{50}{3}$ m y 25 m.

  3. Se desea editar un manual de instrucciones de forma que cada página tenga 1.5 cm de margen izquierdo, y los restantes tres márgenes de 1 cm cada uno. Además se desea que el área impresa sea de 180cm^2. Calcule las dimensiones mínimas que debe tener la página. .... R/ $x = 17.5$, $y = 14$

  4. Un finquero desea construir un corral rectangular de 44506 metros cuadrados de área a lo largo de un acantilado vertical. La cerca en el lado del acantilado cuesta ₡200 el metro, mientras que para los otros tres lados cuesta ₡350 el metro. Encuentre las dimensiones del corral de modo que el costo del corral sea mínimo.

     R/ 187 m de ancho y 238 m de largo

5. Una pequeña empresa puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir q artículos a la semana (en dólares) es $C(q) = 1000 + 6q - 0.003q^2 + 0.000001q^3$. ¿Qué valor de q debemos seleccionar con objeto de maximizar la utilidad? .... R/ $q = 2000$

6. En una biblioteca se quieren construir 10 cubículos de lectura de igual tamaño y separados por divisiones, cuyo diagrama se muestra en la figura. El presupuesto de la biblioteca alcanza para instalar 30 metros lineales de estas divisiones. ¿Qué dimensiones deben tener los cubículos de modo que se maximice su área?

Cubículo 1	Cubículo 2	Cubículo 3	Cubículo 4	Cubículo 5
Cubículo 6	Cubículo 7	Cubículo 8	Cubículo 9	Cubículo 10

R/ $\dfrac{15}{8}$ de ancho y $\dfrac{45}{8}$ de largo.

7. La empresa de cable por televisión D&S tiene actualmente 2000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$20. Una encuesta reveló que se tendrían 50 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Con qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrán entonces?