

Nivel de razonamiento en la solución de problemas matemáticos y su relación con variables cognitivas, metacognitivas y la dificultad de la tarea

Alejandra Alfaro Barquero¹ & Greivin Ramírez Arce²

Resumen

Con el objetivo de identificar la relación existente entre el nivel de razonamiento matemático y las variables cognitivas, metacognitivas y de dificultad de la tarea, se aplicaron en el 2012 tres ejercicios algebraicos, tomados del Examen de Diagnóstico en Matemática, a una muestra de 52 estudiantes matriculados en cursos de matemática en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR).

El nivel de razonamiento cognitivo se evaluó empleando el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes de Biggs y Collis, 1982). Asimismo, se estimó la dificultad de los ejercicios y los conocimientos matemáticos con el método de Rasch. Adicionalmente se utilizó como medida de habilidad el puntaje en la Prueba de Aptitud Académica del ITCR en el área matemática, el autoconcepto a partir del Cuestionario de Autoconcepto Matemático de Dermitzaki y Efklides (2000) y se midió la precisión metacognitiva como la concordancia entre los juicios de desempeño y el puntaje obtenido en el ítem.

Se encontraron diferencias significativas en el nivel de razonamiento cognitivo según la dificultad de los ítems, obteniendo mejores niveles de razonamiento en los ejercicios de mayor facilidad.

Asimismo, se evidenció asociación entre los conocimientos previos y el nivel de razonamiento cognitivo, no así en la habilidad y el autoconcepto matemático.

Abstract

The purpose of this study was to identify the relation between the level of mathematical reasoning with cognitive and metacognitive variables, and also with the difficulty of the task. 52 students from Technological Institute of Costa Rica (ITCR) solved three algebraic exercises taken from Diagnostic test of Mathematic.

The level of mathematical reasoning was defined utilizing SOLO Model (Structure of Observed Learning Outcomes of Biggs and Collis, 1982). The item's difficulties and the mathematical knowledge were determined by Rasch method. The scores obtained by mathematical area in ITCR Admission Test was utilized by measure of ability and the Mathematical Self-concept Questionnaire (Dermitzaki. y Efklides, 2000) was applied. Finally, metacognitive precision was estimated with the concordance between judgments of self performance and the score in each item.

It was found higher means of mathematical reasoning in easier items. Also, association between prior knowledge and level of cognitive reasoning was evident, but not in the ability and mathematics self-concept.



¹Instituto Tecnológico de Costa Rica, alealfaro@itcr.ac.cr

²Instituto Tecnológico de Costa Rica, gramirez@itcr.ac.cr

Palabras claves: experiencias metacognitivas, habilidad matemática, solución de problemas matemáticos, razonamiento cognitivo, conocimientos matemáticos, precisión metacognitiva y autoconcepto matemático.

Keywords: metacognitive experiences, mathematical skill, mathematical problem solving, cognitive development, mathematical knowledge, metacognitive accuracy, mathematical self-concept.

Modalidad: ponencia

El interés del presente estudio es identificar la relación existente entre la habilidad, los conocimientos, la dificultad de la tarea, el autoconcepto matemático y la precisión metacognitiva en relación con el nivel de razonamiento cognitivo alcanzado por los estudiantes del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) en la resolución de ejercicios matemáticos.

Lo anterior es relevante considerando que los estudiantes universitarios ingresan con deficiencias en contenidos y habilidades de razonamiento matemático, lo que se evidencia en los resultados obtenidos en las pruebas de diagnóstico aplicadas en el ITCR en el 2010, a una muestra de 1315 alumnos matriculados en el curso de Matemática General, quienes obtuvieron, en promedio, una nota de 42,6 ($\sigma = 18.02$) en escala de 0 a 100, con resultados aún más deficientes en el 2011 con una media de 35,34 ($\sigma = 16.12$) (Ramírez y Barquero, 2010, 2011).

Estas deficiencias repercuten sobre el rendimiento académico obtenido en los cursos universitarios, explicando un 17.3% de la varianza en la nota del curso de Matemática General (Ramírez y Barquero, 2010). Ello se refleja igualmente en los porcentajes de aprobación de los cursos de Matemática General (47.64%) y Calculo Diferencial e Integral (48.74%) en el periodo 2006-2011 en el ITCR (Ramírez, Hernández, Alfaro, Blanco; 2012), lo que incide a su vez sobre la deserción en las universidades públicas (Barquero, 2009 y Guillén y Chinchilla, 2005 y 2007).

La situación es más preocupante si se considera que los estudiantes universitarios recibieron formación en temas de álgebra en secundaria, y a pesar de ello, experimentan dificultades en la resolución de nuevos problemas, presentando obstáculos epistemológicos (costumbres intelectuales que fueron útiles en situaciones previas, pero que después de un tiempo pueden obstaculizar la resolución exitosa de tareas afines, Bachelard, 1976), pues los conocimientos se transfieren de manera inadecuada a otros contextos, siendo difíciles de identificar y modificar para los individuos (Godino, en Ruiz, 2006).

Desde esta perspectiva, se propone como supuesto que el nivel de razonamiento cognitivo está asociado con el desempeño matemático, y constituye por lo tanto una herramienta fundamental para detectar obstáculos epistemológicos, mejorar la eficiencia de la transferencia de conocimientos adquiridos a nuevos problemas y la precisión metacognitiva; y consecuentemente, repercutirá en el rendimiento académico de los estudiantes.

En este sentido el razonamiento cognitivo se definirá como el nivel de complejidad de los procesos mentales evidenciados por los individuos a través de las respuestas escritas

en la solución de problemas algebraicos, utilizando el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes de Biggs y Collis, 1982), el cual jerarquiza el desarrollo cognitivo en categorías con orden progresivo según el nivel de madurez.

Para profundizar en el tema Ramírez, Chavarría y Mora (2010) realizaron un estudio en estudiantes del ITCR para analizar los tipos de errores cometidos por los estudiantes, los obstáculos evidenciados y el nivel de madurez de razonamiento cognitivo mostrado por los alumnos utilizando los cuatro niveles del modelo SOLO en expresiones algebraicas, concluyeron que la mayoría de los estudiantes se ubicaron entre los primeros dos niveles cognitivos (preestructural y uniestructural).

Resultados distintos encontraron Hernández y Cuevas (2014) en el curso de Cálculo Diferencial e Integral, en el ubicaron que los estudiantes se encontraban en el nivel multiestructural en el tema de álgebra. Por su parte Fuster (2014) utilizó el modelo SOLO para interpretar los resultados en pruebas de acceso a la universidad, concluyendo que las mismas se realizan desde las rutinas y no a partir de presupuestos teóricos de innovación.

Desde esta perspectiva se propone como hipótesis del estudio que el nivel de razonamiento cognitivo estará influido por otras variables cognitivas (la habilidad y los conocimientos matemáticos), variables de la tarea (dificultad), así como también por variables subjetivas como el autoconcepto matemático, pues éste último representa una valoración subjetiva de habilidad, y por lo tanto, dependerán en algún sentido de la competencia matemática del sujeto.

En lo pertinente al último concepto mencionado, Efklides, y Petkaki (2002), Efklides y Tsiora (2002) y Efklides (2006) encontraron una correlación moderada entre la autoconfianza matemática y la precisión metacognitiva; así como también entre las experiencias metacognitivas, la habilidad y autoconcepto matemático. En este sentido el autoconcepto repercute sobre las experiencias metacognitivas en la percepción del desempeño, retroalimentando el auto-concepto y generando una mayor eficacia regulatoria.

Así mismo, Alfaro (2014) encontró asociación negativa entre la precisión metacognitiva y la dificultad de la tarea, obteniéndose mejores niveles de precisión en ítems de menor dificultad.

Por otro lado, si bien el razonamiento cognitivo es importante para explicar el desempeño matemático de los estudiantes, existen también otras variables relevantes para los teóricos del aprendizaje que se han asociado con el desempeño, desde una perspectiva en la cual se concibe al individuo como un sujeto activo que ejerce una función de regulación sobre sus propios procesos cognitivos, modificando sus conductas y habilidades mentales a través del monitoreo y control de las variables motivacionales y cognitivas (Kitsantas, Huie y Winsler, 2008). Éstas últimas incluyen las capacidades cognitivas (o de procesamiento de información) así como también las habilidades metacognitivas (Arsal, 2010).

En este sentido Flavell (1979) definió la metacognición como cognición de la cognición, refiriéndose a los conocimientos que posee el individuo sobre sus propios procesos mentales, los cuales se vinculan con la metacognición a través de las funciones de control y monitoreo (Efklides, 2009).

Al respecto algunos autores suponen la existencia de una estrecha relación entre habilidades cognitivas y metacognitivas. Así por ejemplo, Sastre-Riba (2011) señaló que las

personas con altas capacidades intelectuales tienden a mostrar un mayor conocimiento metacognitivo, destacando la relación entre metacognición y funciones ejecutivas como procesos educativos de alto nivel. En este sentido, González (2010) subrayó también la vinculación bidireccional entre las estrategias de orden superior y la metacognición, ya que el desarrollo de estrategias impulsa el conocimiento metacognitivo y éstas a su vez, el desarrollo y generalización de estrategias cognitivas de orden superior.

Desde esta perspectiva en la cual se propone una asociación positiva entre cognición y metacognición, es de interés en este estudio evaluar la posible relación entre el nivel de razonamiento cognitivo y la precisión de las experiencias metacognitivas. Éstas últimas se definen como el grado de consciencia cognitiva o experiencia afectiva vinculada con tareas de aprendizaje (Flavell, 1979), percepciones subjetivas que resultan de los procesos mentales de control y monitoreo (Efklides, 2006).

Tales experiencias representan el grado de conciencia sobre los conocimientos y estrategias metacognitivas, las emociones asociadas con el afrontamiento de los desafíos cognitivos y la percepción de progreso o logro de las metas. A través de estas vivencias se generan una serie de sentimientos y estimaciones variadas, tales como las percepciones de dificultad, esfuerzo, tiempo requerido en la solución, la exactitud de la respuesta, la confianza y la satisfacción (Efklides, 2006).

En este caso en particular, las experiencias metacognitivas se evaluarán a través de los juicios de desempeño, los cuales pueden ser considerados como indicadores subjetivos del desempeño objetivo, lo que variará de individuo a individuo en el grado en que dichos juicios se acerquen o no a la realidad. Los juicios de desempeño son por tanto definidos como experiencias metacognitivas enfocadas a la evaluación de la calidad de la solución brindada en una tarea cognitiva y su respectiva valoración como correcta o incorrecta (Efklides, 2006).

A pesar de que estos juicios se basan en información externa e involucran procesos que tienden a ser más analíticos, ello no garantiza pleno grado de consciencia, transparencia, eficiencia y control sobre las propias conductas (González, 2010). Cabe suponer al respecto que los estudiantes que muestren mayores niveles de razonamiento cognitivo tenderán a mostrar mejor grado de precisión de los juicios del desempeño. Desde esta perspectiva la precisión se entenderá como el grado de concordancia entre las estimaciones de desempeño y la ejecución en la tarea, reflejo de la eficiencia de las funciones de control en situaciones de desempeño académico, a partir de la valoración del esfuerzo y tiempo invertido, así como de las estrategias empleadas (Efklides, 2006).

Este concepto de precisión de los juicios de desempeño ha sido estudiado también bajo la denominación de calibración, definido como los sucesos que resultan de la interacción entre el éxito subjetivo y el objetivo, frente a una tarea compuesta por un determinado número de reactivos en condiciones de incertidumbre. En este sentido las percepciones generadas pueden involucrar sesgos de sub o supra valoración, los cuales pueden ser modificados con la inclusión de variables ambientales críticas (Macbeth, Razumiejczk, 2012).

En esta línea algunos autores han encontrado evidencias de asociación entre las estimaciones de éxito y la ejecución en la tarea, tales son los casos de Beaudoin, y Desrichard (2011) quienes encontraron relación leve pero significativa entre los juicios de autoeficacia de memoria (MSE) y rendimiento en tareas de recuerdo, lo que tiende a incrementarse cuando los MSE son de dominio específico. A pesar de ello algunos autores tales como Everson

(1997) y McCormick (2003) sugieren que la metacognición es una habilidad de dominio general, dadas las correlaciones evidenciadas entre las estimaciones de desempeño en ámbitos distintos entre sí, tales como en el área verbal y matemática.

En relación con la precisión metacognitiva, Tabor y Dunlosky (1997) y Rhodes y Tauber (2011) encontraron una mayor precisión en los juicios de aprendizaje (autopercepciones del grado de aprendizaje obtenido en tareas de memoria) cuando las estimaciones se emiten con retraso (unos minutos después de que se ha concluido la fase previa de estudio); comparado con quienes hacían sus estimaciones inmediatamente después de finalizar su periodo de aprendizaje, argumentando que los juicios que se expresan con dilación se vinculan con la memoria de corto y largo plazo (González, 2010), a diferencia de las estimaciones inmediatas, asociadas con la memoria de corto plazo.

La relación entre razonamiento cognitivo y precisión ha sido poco estudiada, es escaso lo que se conoce sobre el monitoreo y la regulación cognitiva en el campo matemático, pues los esfuerzos se han enfocado principalmente en el tema de la comprensión de textos (Winne y Nesbit, 2010), por lo que existen aún grandes vacíos en esta área.

Así mismo, al igual que se han evidenciado carencias en las habilidades matemáticas en población universitaria, también se ha encontrado que cerca de la mitad de los estudiantes de primer ingreso universitario no han alcanzado el pensamiento operacional formal, con pobres destrezas de monitoreo, tendencia al exceso de confianza (Winne y Nesbit, 2010) y limitaciones para percibir los errores cometidos (Efklides y Sideris, 2009, Moraitou y Efklides, 2009).

Método

Participantes

Se utilizó una muestra de 52 estudiantes, la cual fue tomada de Alfaro (2014), compuesta por un total de 495 estudiantes matriculados en los cursos de Matemática General (MG) y Cálculo Diferencial e Integral (CDI) en el segundo semestre de 2012 del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR).

La muestra de 52 estudiantes se seleccionó en forma aleatoria considerando una proporción similar de estudiantes de ambos cursos (46.2% de MG y 53.8% de CDI), 25% mujeres y 75% hombres; con una media de edad de 18.76 años. La mayoría de ellos de primer ingreso universitario (78.8%).

En el curso MG el 75% presentó condición de repitencia, mientras que en el curso CDI el porcentaje fue de 32.1%. La mayor proporción de reprobación en el curso MG es esperable considerando que el estudio se desarrolló en el segundo semestre, cuando sólo los estudiantes que aprobaron MG, matriculan por primera vez CDI, los demás repiten el curso.

Procedimientos

Los instrumentos aplicados incluyeron una prueba de ejercicios matemáticos y una escala de autoconcepto matemático. Los mismos fueron aplicados durante las clases de los cursos de MG y CDI, previa autorización de la Escuela de Matemática, los docentes y los estudiantes (éstos últimos mediante consentimiento informado).

Los estudiantes completaron en primer lugar la prueba de conocimientos matemáticos constituida por 6 ítems provenientes de la Prueba de Diagnóstico en Matemática aplicada en 2010 y tres problemas tomados del Cuestionario de Experiencias Metacognitivas de Efklides (2006). Para cada uno de los ejercicios respondieron, luego de haber intentado dar solución al problema, qué tan correcta creían haber resuelto la tarea, utilizando una escala de 0 a 3 (0=nada, 1=poco, 2=bastante y 3=totalmente) para expresar sus juicios de desempeño.

Los conocimientos matemáticos se estimaron a partir de los resultados obtenidos en dicha prueba matemática con el método de Rasch, utilizando el paquete estadístico Winsteps. Se conceptualizaron como el nivel de dominio de conceptos evidenciado en las respuestas de solución a ejercicios matemáticos, que requieren para su acierto, el manejo de algunos contenidos matemáticos básicos (de nivel de primaria y secundaria). La prueba mostró una confiabilidad de .7, lo que se considera aceptable para fines de investigación, siempre y cuando los resultados obtenidos no tengan altas consecuencias para los individuos (Montero 2013 en Alfaro, 2014). Así mismo se realizó un análisis factorial confirmatorio para comprobar la adecuación de los indicadores empíricos utilizados en la medición de los constructos. Se obtuvieron al respecto niveles de ajuste adecuados (CFI .94, IFI .95, RMSEA .05).

Por su parte, la dificultad de los ítems se definió como el grado de aptitud necesaria para resolver con éxito una tarea (Martínez, Hernández y Hernández, 2006); y se estimó también utilizando el método de Rasch. Los ítems obtuvieron puntajes aceptables de ajuste (entre .8 y 1.2). La dificultad se obtuvo con puntuaciones estandarizadas, siendo el ítem número tres el de mayor de mayor dificultad, seguido por el dos y el uno, como se muestra en la tabla 1 (Alfaro, 2014).

Tabla 1. Características psicométricas de los ítems matemáticos de acuerdo con el modelo de Rasch

Ítem	Dificultad (Rasch)	Ajuste (IN.MSQ)	Tema
1	-.96	1.04	Factorización por agrupación
2	-.46	1.11	Simplificación algebraica
3	.07	1.10	Ecuación cuadrática

Posterior a la realización de la prueba matemática los estudiantes completaron una traducción al español del Cuestionario de Autoconcepto matemático de Dermitzaki y Efklides (2000), partiendo de la definición de dicho concepto como el nivel de competencia en el área matemática percibido por el propio individuo (Efklides y Vlachopoulos, 2012). Este instrumento estuvo constituido por 22 ítems y mostró una confiabilidad de .93 (Alfaro, 2014). Igualmente se realizó el análisis factorial confirmatorio alcanzándose indicadores de ajuste aceptables (CFI .89, IFI .9, RMSEA .08).

Adicionalmente, la habilidad matemática se obtuvo utilizando el puntaje obtenido en la Prueba de Aptitud Académica del ITCR en el área matemática de los estudiantes que habían resuelto previo a su ingreso a la universidad, con autorización del Comité de Examen de Admisión. Dicha prueba evalúa destrezas evidenciadas en la solución de tareas de índole numérica con ejercicios asociados con operaciones básicas, razonamiento deductivo/inductivo, interpretación de gráficos, resolución de problemas, razonamiento con figuras y razonamiento probabilístico (Moreira, 2010) y presentó valores de confiabilidad Alfa de Cronbach superiores a .9.

Por otra parte, el nivel de razonamiento cognitivo se definió utilizando la adaptación del modelo SOLO propuesto por Ramírez, Chavarría y Mora (2010), contemplando las categorías preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional.

Según estos autores, en el nivel preestructural (el más básico), los estudiantes poseen información aislada de los conceptos y propiedades de los números reales que intervienen en la simplificación de expresiones algebraicas, no identifican correctamente el método que se debe emplear para la factorización o bien, confunden la tarea con resolver una ecuación. El estudiante conoce algunos conceptos pero no entiende como éstos se relacionan, ni qué significa resolver una ecuación.

En el siguiente nivel, uniestructural, los estudiantes realizan relaciones en forma correcta de algunos de los conceptos y propiedades de números reales en la simplificación y factorización de expresiones algebraicas. Identifican correctamente los conceptos y métodos de factorización y resolución de ecuaciones; sin embargo, en ocasiones realizan agrupaciones incorrectas, tiene problemas con priorizar las operaciones básicas y pierden una solución de la ecuación al realizar un despeje incorrecto; enfocándose en un solo aspecto relevante de la tarea.

En el nivel multiestructural, los estudiantes logran crear relaciones en forma correcta de los principales conceptos y propiedades que intervienen en la simplificación, factorización y solución de ecuaciones donde intervienen expresiones algebraicas simples o generalizadas. Realizan en forma correcta la agrupación de los términos semejantes y la extracción del factor común en cada una de estas agrupaciones; sin embargo, muestran algunas inconsistencias que no le permiten obtener la factorización correcta del polinomio. Reconocen qué es una ecuación y saben lo que tienen hacer para resolverla; sin embargo, no dan como respuesta el conjunto solución.

Finalmente en el nivel relacional, los estudiantes son capaces de simplificar, factorizar y resolver ecuaciones donde intervienen expresiones algebraicas. Factorizan polinomios como el producto de sus factores más simples, encuentran las soluciones y dan el conjunto solución de la ecuación propuesta.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes según las categorías antes mencionadas se seleccionó una muestra de tres ejercicios (de los nueve resueltos por los estudiantes) vinculados con el tema de álgebra (factorización, simplificación algebraica y ecuación cuadrática). Cada ítem fue calificado otorgando una categoría de 1 a 4, considerando los niveles contemplados en el modelo SOLO. Posteriormente se estimó un promedio de razonamiento por sujeto obtenido a partir de las categorías alcanzadas en los tres ítems.

Para ello previamente se instruyó a dos estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la Matemática del ITCR por parte del docente de matemática: Msc. Greivin Ramírez. Este profesor formó parte del equipo que diseñó, aplicó y evaluó el Examen de Diagnóstico de 2010 (Ramírez y Barquero, 2010, 2011) y realizó varios estudios con la aplicación del modelo SOLO en estudiantes de secundaria y de grado universitario en temas de álgebra, estadística, probabilidad y geometría (Ramírez y Ballesteros, 2007, Ramírez, Chavarría, Mora y Barahona, 2009, Ramírez, Chavarría y Mora, 2010).

Se siguió un proceso de entrenamiento en dos vías: la calificación de los ítems y la clasificación de los resultados obtenidos con la implementación del modelo SOLO. En el

primer caso se realizaron varias sesiones de entrenamiento hasta garantizar un adecuado nivel de concordancia en los criterios de calificación entre los asistentes y el profesor experto, obteniéndose un grado de acuerdo casi perfecto según Mandeville (2005) en los coeficientes de correlación intra-clase: .941 y .946 (Alfaro, 2014).

Procedimiento similar se utilizó en el entrenamiento para la clasificación de las respuestas de los estudiantes según la adaptación del modelo SOLO hasta lograr porcentaje de concordancia superior al 90 % entre los asistentes y el docente.

Finalmente la precisión metacognitiva se obtuvo como un puntaje promedio de precisión de los juicios de desempeño obtenidos en los nueve ítems de la prueba matemática. Para ello cada ítem se calificó en escala de 0 a 3, utilizando la misma métrica empleada para estimar los juicios de desempeño.

La escala de juicios del desempeño obtuvo un confiabilidad Alfa de Cronbach de .79 y obtuvo indicadores de ajuste observables en el análisis confirmatorio (CFI .98, IFI, .98, RMSEA .036).

Posteriormente para estimar el error en la precisión metacognitiva se restó al juicio de desempeño de cada ítem el puntaje obtenido en la solución de dicho ejercicio matemático, de la siguiente manera $JD1 - Puntaje.Ítem1 = \text{error de estimación prospectivo } 1$, y así sucesivamente.

Un valor de cero (0) en el error de estimación significa que hubo precisión en el juicio de desempeño, dado que el puntaje asignado en la escala de juicio de desempeño se correspondió en forma perfecta con el puntaje obtenido en el ejercicio matemático. Por otro lado un puntaje de 3 refleja la mayor distancia obtenida entre el juicio de desempeño y el rendimiento en el ítem, y por tanto el mayor grado de error.

Seguidamente, para obtener el puntaje de precisión se recodificaron en orden inverso los valores absolutos obtenidos en el error de estimación. De este modo, un valor de error de estimación de 0 se reconvirtió en un valor de 3; ya que representa el máximo puntaje de precisión obtenida para cada ítem.

Con las medidas obtenidas se implementó el procedimiento estadístico denominado análisis de senderos (path analysis) con el paquete estadístico Lisrel 8.54; el cual es utilizado para establecer relaciones de causalidad unidireccionales entre variables observadas (Cea, 2002), con el objetivo de evaluar un modelo explicativo sobre la relación entre la habilidad, los conocimientos y el autoconcepto en el área matemática con el nivel de razonamiento cognitivo y su posible vinculación con la precisión metacognitiva.

Así mismo, se realizó un análisis de varianza con medidas repetidas con el paquete estadístico SPSS para identificar la relación existente entre el nivel de razonamiento cognitivo y la dificultad de la tarea. Este método se utiliza para evaluar el efecto de la dificultad de los ítems considerando dicha variable como condición intra-sujeto, ya que todos los niveles de dificultad (contenidos en los tres ítems) se aplicaron un mismo grupo de estudiantes, contrario a lo que ocurre en un anova tradicional, en el cual se tendría una muestra de sujetos diferentes para resolver cada ítem (supuesto de medidas independientes).

Resultados

Las estadísticas descriptivas y correlacionales se resumen en las tablas 2 y 3. Cabe agregar además, que ninguna de las variables cumplió con el supuesto de normalidad de acuerdo con la prueba de Shapiro-Wilk.

Tabla 2. Medias y desviaciones estándar de las diferentes escalas y medidas

Medida	M	DE	Escala	Mínimo	Máximo
Desempeño en la prueba matemática	15.62	5.53	0-26	3	26
Estimación de conocimientos matemáticos	.2865	.76	Puntajes z	-1.89	2.23
Autoconcepto matemático	3.31	.661	1-5	2.09	4.76
Precisión retrospectiva	2.13	.351	0-3	1.40	2.89
Habilidad matemática (admisión)	57.38	13.60	0-100	31.71	87.8

Todas las variables mostraron asociación entre sí de manera significativa, a excepción de la precisión retrospectiva con el autoconcepto matemático. Así mismo, con respecto al razonamiento cognitivo las variables que evidenciaron mayor relación con dicho constructo fueron la precisión retrospectiva y los conocimientos matemáticos (mayores a 0.3).

Tabla 3. Correlaciones entre las variables

	1	2	3	4	5
Examen admisión prueba matemática (1-100)	1				
Puntaje autoconcepto matemático	0,230**	1,000			
Puntaje precisión retrospectiva	0,188*	-0,025	1,000		
Conocimientos Matemáticos	0,361**	0,232**	0,398**	1,000	
Nivel de razonamiento cognitivo	0,299**	0,235**	0,313**	0,666**	1,000

* $p < 0,05$

** $p < 0,01$

Por otra parte, para evaluar la asociación entre nivel de razonamiento cognitivo y la dificultad de la tarea (ítem) se realizó un análisis de varianzas con medidas repetidas; sometiendo a prueba la hipótesis nula H_0 : los promedios de nivel de razonamiento de los estudiantes son iguales en los tres niveles de dificultad de los ítems.

Para ello se evaluó el supuesto de esfericidad (las varianzas de las diferencias de los niveles de dificultad son iguales cuando se comparan dos a dos); comprobándose el cumplimiento del mismo ($p=0.933$). En concordancia con lo anterior se analizó la aproximación univariada (efectos intra-sujeto), pues este procedimiento es más potente y recomendado en muestras pequeñas.

Los resultados permiten rechazar la hipótesis nula y concluir que los promedios de nivel de razonamiento de los estudiantes son distintos en los tres niveles de dificultad de los ítems, como se muestra en la tabla 4. Se identificaron diferencias significativas

($p=0.001$) en las medias de los niveles de razonamiento según la dificultad de la tarea, en ítem 1 ($M=3.32$, $\sigma = 1.11$), ítem 2 ($M= 2.83$, $\sigma = 1.06$) e ítem 3 ($M=2.71$, $\sigma = 0.8$), evidenciando que a menor dificultad del ítem los estudiantes alcanzan mayor nivel de razonamiento; evidenciándose una tendencia de asociación lineal mediante la prueba de contrastes intra-sujetos ($F(1)=12.83$, $p=0.001$).

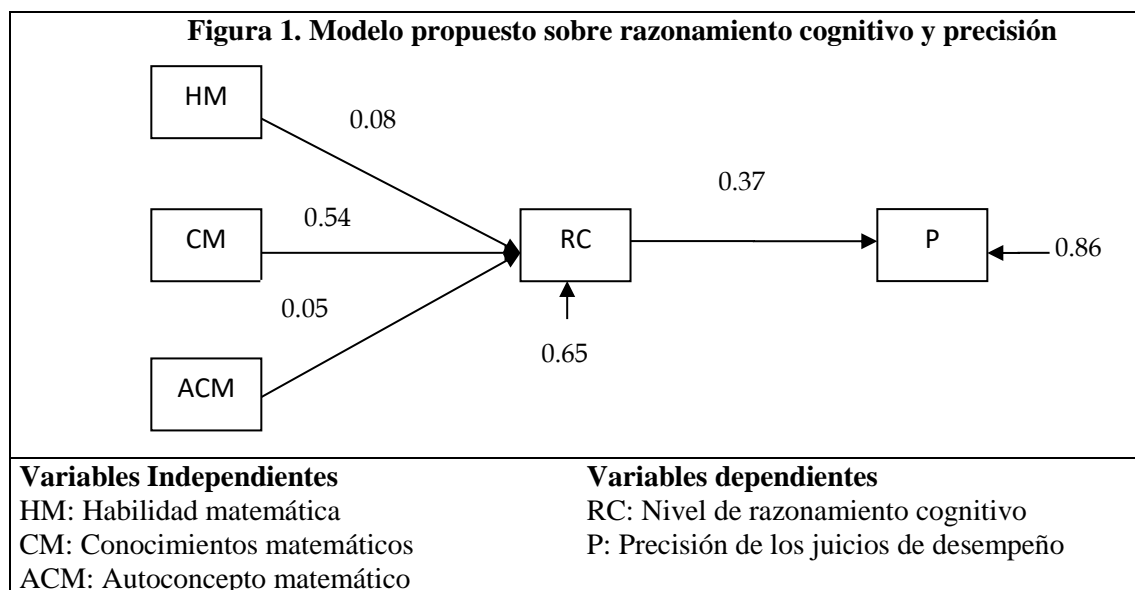
Tabla 4. Análisis de varianzas para los niveles de razonamiento cognitivos de los estudiantes según la dificultad de la tarea con medidas repetidas

Variable dependiente	gl	Suma de cuadrados	Media cuadrática	F	Sig.
Dificultad del ítem	2	10.76	5.38	7.028	.001

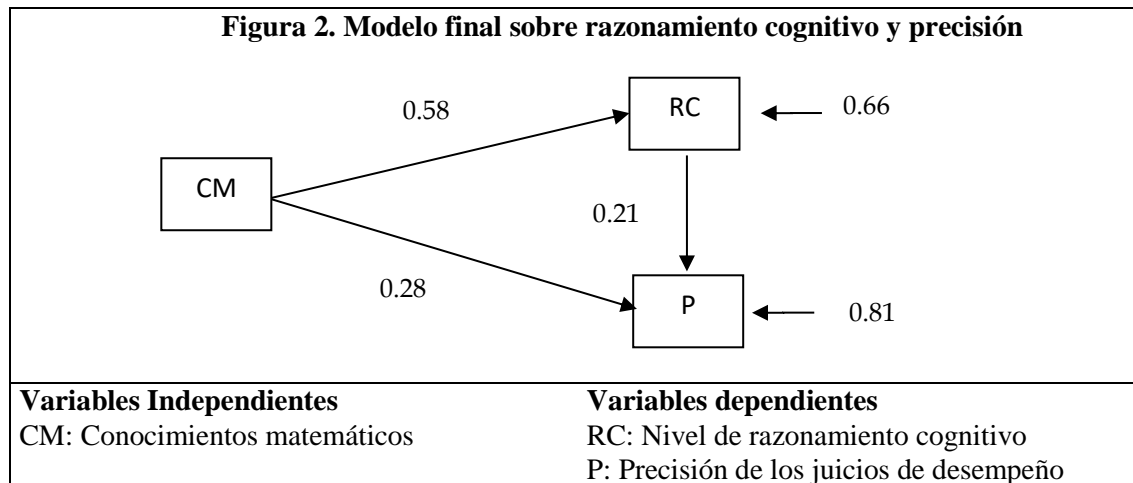
Por otro lado, para medir la relación entre el razonamiento cognitivo con las variables precisión metacognitiva de los juicios de desempeño y la habilidad, el autoconcepto y los conocimientos en el área matemática se utilizó el análisis de senderos (path analysis), cuyos resultados se muestran en la figura 1.

Para facilitar la interpretación del modelo cabe aclarar que en la representación gráfica de un análisis de senderos las figuras cuadradas representan variables observables; y las líneas que se establecen entre estas indican relaciones de causalidad entre las variables independientes (aquellas utilizadas como punto de partida de las flechas) y las variables dependientes (a las cuales apunta cada flecha). El valor numérico que aparece al lado de cada flecha representa el grado de relación entre las variables; es decir, el cambio producido en la variable dependiente cuando se modifica en una unidad la variable independiente. Así mismo para cada variable dependiente se calcula un error, lo que representa el porcentaje de varianza de la variable dependiente no explicada por la o las variables independientes incluidas en el modelo.

Para aceptar el ajuste del modelo los indicadores CFI, IFI deben alcanzar valores iguales o superiores a .9, el RMSEA puntajes iguales o inferiores a .05 y la Chi cuadrada será mejor cuanto más pequeña y su probabilidad superior a 0.05 (Cea, 2002).



La figura 1 muestra los resultados obtenidos al evaluar el modelo propuesto, el cual mostró indicadores favorables (CFI de .97, el IFI de .97, el RMSEA de .053 y la Chi cuadrada $\chi^2(9)=12.84.22$, $p=0.17$). A pesar de ello, las variables habilidad y autoconcepto matemático mostraron una asociación cercana a cero, por lo que se consideró conveniente eliminarlos del modelo. Con esta modificación se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 2.



De acuerdo con el modelo final se obtuvo un ajuste perfecto (CFI e IFI: ambos con valor 1, RMSEA de .000 y la Chi cuadrada $\chi^2(1)=0$, $p=1$). En este modelo los conocimientos matemáticos mostraron efecto sobre el razonamiento cognitivo y sobre la precisión. La pendiente de la recta evidencia que, en promedio, por cada incremento en la unidad de medida de los conocimientos matemáticos aumenta en 0.58 el razonamiento cognitivo alcanzado por los estudiantes y 0.28 la precisión de los juicios de desempeño. Así mismo, también se encontró asociación entre el razonamiento cognitivo y la precisión, en la cual por cada incremento en una unidad de medida del nivel de razonamiento cognitivo, la precisión de los juicios del desempeño aumenta 0.21 puntos. La varianza explicada por los conocimientos matemáticos sobre el razonamiento cognitivo fue del 34%, mientras que para el modelo de precisión la varianza explicada por los conocimientos matemáticos y el razonamiento cognitivo fue del 19%.

Discusión

Los resultados obtenidos aportan evidencias que sustentan la hipótesis en favor de la asociación entre los conocimientos matemáticos y la dificultad de la tarea sobre el razonamiento cognitivo, no así en el caso de la habilidad y el autoconcepto matemático.

No hay evidencia suficiente en este estudio para explicar el por qué estas dos últimas variables no mostraron vinculación con el nivel de razonamiento cognitivo; sin embargo, es posible conjeturar que la habilidad podría estar siendo medida también a través de la prueba de contenidos matemáticos, partiendo de la asociación evidenciada entre conocimientos y habilidad. En este sentido, si bien es cierto que dicha prueba evalúa conceptos previamente adquiridos, la transferencia adecuada de los mismos frente a problemas y contextos novedosos exigen para su acierto también algún grado de flexibilidad mental. Siendo así, la habilidad podría estar siendo implícitamente evaluada a través de los ejercicios de conocimiento, reduciendo el efecto directo de la habilidad sobre el razonamiento cognitivo.

Por otra parte, en relación con las variables que resultaron significativas en el estudio, dichos resultados destacan la interrelación existente entre las variables de contexto (la dificultad de las tareas) y las condiciones intra-sujeto (los conocimientos matemáticos) sobre el nivel de razonamiento cognitivo; el cual, si bien puede considerarse una característica de la capacidad intelectual del individuo que tiende a ser muy estable, su grado de éxito o madurez dependerá de la correspondencia entre las demandas cognitivas y el nivel de competencia de la persona. En este sentido es más probable que un mayor número de estudiantes evidencien altos niveles de madurez en sus razonamientos frente a exigencias menores que ante otras de mayor dificultad, en las que sólo quienes muestren mejor conocimiento y destreza podrán tener más criterio para razonar sus respuestas.

De este modo, se concluye que la dificultad de la tarea muestra una asociación inversa con el razonamiento cognitivo. Estos hallazgos son congruentes con los obtenidos por Alfaro (2014), en el cual se encontró una relación también inversa entre la dificultad de los ítems y la precisión metacognitiva; así como también asociación positiva entre esta última y los conocimientos previos; comportamiento muy similar al mostrado por dichas variables con respecto al razonamiento cognitivo.

En este sentido es válido retomar los planteamientos de González (2010), quien subrayó la existencia de una vinculación bidireccional entre las estrategias de orden superior y la metacognición. Desde esta perspectiva el nivel de razonamiento cognitivo y la precisión metacognitiva podrían también mostrar un desarrollo bidireccional, lo que explicaría por qué tanto la dificultad de la tarea como la competencia matemática mostraron un comportamiento muy similar frente a ambas variables.

Lo anterior también explicaría la asociación positiva encontrada entre el nivel de razonamiento cognitivo y la precisión metacognitiva, lo que a su vez respalda la tesis de Sastre-Riba (2011) de que las personas con mayores capacidades intelectuales tienen a presentar igualmente mejor desempeño metacognitivo.

Bibliografía

- Alfaro, A. (2014). *Experiencias metacognitivas y su relación con la autoeficacia, la habilidad matemática, la dificultad de la tarea y el rendimiento académico* (Tesis maestría inédita). Instituto de Investigaciones Psicológicas, Costa Rica.
- Arsal, Z. (2010). The effects of diaries self-regulation on strategies of preservice science teachers. *International Journal of Environmental & Science Education*, 5 (1), 85-103.
- Bachelard. (1976). *La formación del espíritu científico*. 5 ed. México: Siglo Veintiuno, editores, S.A.
- Barquero, J. (2009). *Análisis de Rendimiento Académico en la carrera de Ingeniería en Electrónica*. Manuscrito inédito. Departamento de Orientación y Psicología. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Beaudoin, M. y Desrichard, O. (2011). Are memory self-efficacy and memory performance related? A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 137 (2), 211-241.
- Biggs, J. y Collis, F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy*. Academic Press, New York.

- Cea, A. (2002). *Análisis multivariable. Teoría y práctica en la Investigación Social*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Dermitzaki, I. y Efklides, A. (2000). Self-concept and its relations with cognitive and metacognitive factors regarding performance in specific domains of knowledge. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 7, 354-368.
- Efklides, A. (2006). Metacognition and affect: What can metacognitive experiences tell us about the learning process? *Educational Research Review* 1, 3-14.
- Efklides, A. (2009). Metacognition. Defining its facets and levels of functioning in relation to self-regulation and co-regulation. *European Psychologist*, 13 (4), 277-287. Doi. 10.1027/1015-5759.25.2.115.
- Efklides, A. y Petkaki, Ch. (2005). Effects of mood on students' metacognitive experiences. *Learning and instruction*, 15, 215-431.
- Efklides, A. y Tsiora, A. (2002). Metacognitive experiences, self-concept, and self regulation. *Psychologia*, 45, 222-236.
- Efklides, A. y Sideris, G. (2009). Assessing cognitive failures. *European Journal of Psychological Assessment*, 25 (2), 67-72.
- Efklides, A. y Vlachopoulos, S. (2012). Measurement of Metacognitive knowledge of self, task and strategies in Mathematics. *European Journal of Psychological Assessment*, 28 (3), 227-239. DOI:10.1027/1015-5759/a000145
- Everson, H. (1997). Do metacognitive skills and learning strategies transfer across domains? Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.
- Flavell, J. (1979). A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34 (10), 906-911.
- Fuster, C. (2013) Las pruebas de acceso a la Universidad y el control del aprendizaje de Historia. Historia e Identidades culturales. Actas V Simposio Internacional de Didáctica de las Ciencias Sociales en el ámbito Iberoamericano & Congresso Internacional das XIII Jornadas de Educaçao Hsitórica, 1010-1021.
- Guillén, E y Chinchilla, S. (2007). *Variables asociadas a la repetición de cursos en el ITCR*. Manuscrito inédito. Departamento de Orientación y Psicología. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Guillén, E. y Chinchilla, S. (2005). Detección de estudiantes en riesgo académico en el Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Revista Educación*, 29 (2), 123-138.
- González, J. (2010). Para una reconstrucción genealógica y epistemológica del concepto de metacognición. *Revista de Psicología*, 19 (1), 129-153.
- Hernández, A. y Cuevas, J. (2014). Análisis sobre el nivel de competencias en matemáticas básicas por parte de estudiantes de cálculo diferencial de nivel superior. En F. Santillán. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*. Jalisco, México.
- Kitsantas, A., Huie, A. y Winsler, A. (2008). Self- regulation and ability predictors of academic success during college: a predictive Validity Study. *Journal of Advanced Academics*, 20 (1), 42-68.

- Macbeth, G. y Razumiejczk, E. (2012). Modelado matemático del efecto del anclaje sobre el sesgo de subconfianza. *Revista de Psicología (PUPC)*, 30 (2), 224-248.
- Martínez, Hernández y Hernández (2006). *Psicometría*. Madrid: Alianza Editorial.
- McCormick, C. (2003). Metacognition and learning. In W. M. Reynolds & G. E. Miller (Eds.), *Handbook of Psychology: Vol. 7. Educational psychology* (pp. 79-102). New York: Wiley y Sons.
- Mandeville, P. (2005). Tema 9. El coeficiente de correlación intraclase (ICC). *Ciencia UANL*, 8 (3), 414-416.
- Moraitou, D. y Efklides, A. (2009). The Blank in the Mind Questionnaire (BIMQ). *European Journal of Psychological Assessment*, 25 (2), 115-122.
- Moreira, T. (Julio, 2010). Tabla de especificaciones: Una experiencia de validación de la prueba de aptitud académica del Tecnológico de Costa Rica. Trabajo presentado en el VII Congreso Iberoamericano de Psicología. Federación Iberoamericana de Asociaciones de Psicología, Oviedo, España.
- Ramírez, G., Hernández, M., Alfaro, A. y Blanco, R. (2012). Informe final RAMA TEC. Vicerrectoría de Vida Estudiantil y Servicios Académicos, Departamento de Orientación y Psicología y Escuela de Matemática de Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Ramírez, G. y Barquero, A. (2011). Análisis de la prueba de diagnóstico de Matemática. Departamento de Orientación y Psicología y Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Ramírez, G. y Barquero, A. (2010). Análisis de la prueba de diagnóstico de Matemática. Departamento de Orientación y Psicología y Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Ramírez, G., Chavarría, J. y Mora, M. (2010). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de álgebra: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23. 95-103.
- Ramírez, G., Chavarría, J., Mora, M. y Barahona, C. (2009). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 10 (1). Recuperado de <http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>
- Ramírez, G. y Ballesteros, E. (2007). La centración en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20. 46-68.
- Rhodes, M. & Tauber, S. (2011). The influence of delaying Judgments of learning on metacognitive accuracy: A meta-analytic review. *Psychological Bulletin*, 137 (1), 131-148. Doi:10.1037/a0021705
- Ruiz, A. (2006). *Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica, Costa Rica: San José*. CIMM/UCR.
- Sastre-Riba, S. (2011) Funcionamiento metacognitivo en niños con altas capacidades. *Neurología*, 52 (1), 11-18.

Tabor & Dunlosky (1997). Age-Related Differences in Absolute but not relative metamemory accuracy. *Psychology and Aging*, 12 (1), 50-71.

Winne, P. y Nesbit, C. (2010). The psychology of academic achievement. *Annual Review of Psychology*, 61, 653-678.