TEC Tecnológico de Costa Rica

Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal para Computación

Escuela de Matemática

Kendall Rodríguez Bustos
II Semestre 2013

9 968925 021054

Este material es una recopilación de ejercicios tomados de exámenes de semestres y veranos anteriores, y también de algunos libros del tópico de Álgebra Lineal y Álgebra Abstracta.

Además, este material está dirigido principalmente a estudiantes de Ingeniería en Computación y Administración de Tecnologías de la Información.

Agradezco al profesor Cristhian Páez Páez por sus correcciones y sugerencias a este material.

Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal para Computación

Escuela de Matemática

Kendall Rodríguez Bustos

II Semestre 2013

9 968925 021054

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Para las matrices $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ dadas, calcule el resultado de $I_3 - C^{-1} + 3B^tB$.

Solución:

Se procede primero a calcular la matriz C^{-1}, para ello:

$$(C|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-F_2+F_3]{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4F_3+F_2]{6F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\textit{Es decir, } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que:

$$\bullet\ I_3 - C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{11}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{14}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ 3B^tB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+12 & 6-6 & 12-12 \\ 6-6 & 12+3 & 24+6 \\ 12-12 & 24+6 & 48+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$I_3 - C^{-1} + 3B^tB = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{14}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 30 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{59}{3} & \dfrac{94}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{91}{3} & \dfrac{182}{3} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

2. Sean H y G matrices de $n \times n$ tal que H es invertible y se cumple que $HG = O_n$. Pruebe entonces que $G = O_n$.

Solución:

Hipótesis: $HG = O_n$, *donde* H *es una matriz invertible de* $n \times n$.

HQM: $G = O_n$, *donde* G *es una matriz de* $n \times n$.

Partiendo de la hipótesis:

$$HG = O_n \quad \Rightarrow \quad H^{-1} \cdot (HG) = H^{-1} \cdot O_n, \quad (H \ \textit{es invertible})$$

$$\Rightarrow \quad \left(H^{-1}H\right)G = O_n$$

$$\Rightarrow \quad I_nG = O_n$$

$$\Rightarrow \quad G = O_n$$

Por lo tanto, si H y G son matrices de $n \times n$ tal que H es invertible y se cumple que $HG = O_n$, entonces $G = O_n$. ■

3. Considere las matrices $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $B^t \cdot (C + 2I_3)^{-1}$.

Solución:

Primero se calcula la matriz $C + 2I_3$ para luego calcular su inversa, para ello:

$$\begin{aligned} C + 2I_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$(C + 2I_3|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2F_3+F_2]{-4F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textit{Es decir, } (C+2I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B^t \cdot (C+2I_3)^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-1+2 & 4-1+0 & -8+2-2 \\ -9+0-1 & -6+0+0 & 12+0+1 \\ 0+1-2 & 0+1+0 & 0-2+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ -10 & -6 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Determine el conjunto de solución del sistema:

$$\begin{cases} x+3y-2z = -3 \\ 3x+5y-2z-w = -2 \\ x-y+2z-w = 4 \end{cases}$$

Solución:

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{-7}{4} \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_2+F_3]{-3F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\dfrac{3}{4} & \dfrac{9}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{-7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última matriz escalonada, tenemos que:

$$x + z - \frac{3}{4}w = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -z + \frac{3}{4}w + \frac{9}{4}}$$

$$y - z + \frac{1}{4}w = -\frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = z - \frac{1}{4}w - \frac{7}{4}}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left\{ \left(-z + \frac{3}{4}w + \frac{9}{4},\ z - \frac{1}{4}w - \frac{7}{4}, z, w \right) \Big/ z, w \in \mathbb{R} \right\}$. $\blacksquare$

5. Sean A una matriz de tamaño $r \times p$, B matriz de $q \times r$, C matriz de $r \times q$. Pruebe, entrada por entrada, que $(2B^t - C)^t A = 2BA - C^t A$.

Solución:

HQM: $(2B^t - C)^t A = 2BA - C^t A$.

Note que las matrices de cada miembro de la igualdad son de tamaño de $q \times p$*, es decir, son de igual tamaño.*

Basta demostrar que entrada por entrada son iguales, es decir:

$$\left\langle (2B^t - C)^t A \right\rangle_{ij} = \langle 2BA - C^t A \rangle_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., q\}, \forall j \in \{1, 2, ..., p\}.$$

Veamos, $\forall i \in \{1,2,...q\}$, $\forall j \in \{1,2,...p\}$ *se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(2B^t - C\right)^t A \right\rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} \left\langle \left(2B^t - C\right)^t \right\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Multiplic. de matrices})\\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t - C\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz})\\
&= \sum_{k=1}^{r} \Big(\langle 2B^t\rangle_{ki} - \langle C\rangle_{ki}\Big) \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Sustracción de matrices})\\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} - \langle C\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Distributividad en } \mathbb{R})\\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \langle A\rangle_{ij} - \langle B\rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle A\rangle_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \langle B\rangle_{ij}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{r} 2\langle B^t\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C\rangle_{ki} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Multiplic. por un escalar en una matriz})\\
&= \sum_{k=1}^{r} 2\langle B\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C^t\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz})\\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C^t\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} \quad (\textit{Multiplic. por un escalar en una matriz})\\
&= \langle 2BA\rangle_{ij} - \langle C^t A\rangle_{ij} \quad (\textit{Multiplic. de matrices})\\
&= \langle 2BA - C^t A\rangle_{ij} \quad (\textit{Sustracción de matrices})
\end{aligned}
$$

Así, $\left\langle \left(2B^t - C\right)^t A \right\rangle_{ij} = \langle 2BA - C^t A\rangle_{ij} \quad \forall i \in \{1,2,...,q\}, \ \forall j \in \{1,2,...p\}$

Por lo tanto, $\left(2B^t - C\right)^t A = 2BA - C^t A.$ ■

6. Se dice que una matriz de $n \times n$ es ortogonal si cumple que $A^{-1} = A^t$.

(a) Pruebe que si B y C son ortogonales, entonces BC es ortogonal.

Solución:

Hipótesis:

1. *B es ortogonal* $(B^{-1} = B^t)$.

2. *C es ortogonal* $(C^{-1} = C^t)$.

HQM: *BC es ortogonal, es decir, hay que probar que* $(BC)^{-1} = (BC)^t$.

Usando propiedades de matrices, tenemos que:

$$\begin{aligned} (BC)^{-1} &= C^{-1} \cdot B^{-1} \\ &= C^t \cdot B^t \quad (\textit{Hipótesis 1 y 2}) \\ &= (BC)^t \end{aligned}$$

Por lo tanto, si B y C es ortogonal, entonces BC es ortogonal.

(b) Pruebe que si B es ortogonal, entonces $\det(B) = -1$ o $\det(B) = 1$.

Solución:

Hipótesis: *B es ortogonal* $(B^{-1} = B^t)$.

HQM: $|B| = -1$ o $|B| = 1$. (*Recuerde que la notación $|B|$ es igual a* $\det(B)$)

Partiendo de la hipótesis:

$$B^{-1} = B^t \;\; \Rightarrow \;\; |B^{-1}| = |B^t|$$

$$\Rightarrow \quad |B^{-1}| = |B|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|B|} = |B|$$

$$\Rightarrow \quad |B|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |B|^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (|B|+1)(|B|-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad |B|+1 = 0 \ \vee \ |B|-1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad |B| = -1 \ \vee \ |B| = 1$$

Por lo tanto, si B es ortogonal, entonces $\det(B) = -1$ o $\det(B) = 1$. ■

7. Demuestre la igualdad $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$.

Solución:

Procedemos a calcular el determinante de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} &= (a+b)\cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} - a\cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & a+b \end{vmatrix} + a\cdot \begin{vmatrix} a & a+b \\ a & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b)\left(a^2+2ab+b^2-a^2\right) - a\left(a^2+ab-a^2\right) + a\left(a^2-a^2-ab\right) \\
&= (a+b)\left(2ab+b^2\right) - a\cdot ab + a\cdot -ab \\
&= 2a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 - a^2b - a^2b \\
&= ab^2 + 2ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

$$= \quad b^2\,(3a+b)$$

$\blacksquare$

8. Utilizando el método de Gauss-Jordan, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -8a+3b+c &= -25 \\ 5a-2b &= 16 \\ a-c &= 1 \\ -5a+2b+c &= -16 \end{cases}$$

Solución:

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 16 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 3 & 1 & -25 \\ 5 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 16 \\ -8 & 3 & 1 & -25 \\ -5 & 2 & 1 & -16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[5F_1+F4]{\substack{-5F_1+F_2 \\ 8F_1+F_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & 2 & -4 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & 2 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_2+F4]{-3F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dado que en la última matriz escalonada hay una inconsistencia, entonces se detiene el proceso de reducción matricial.

Así, el sistema equivalente es igual a:

$$\begin{cases} a &= & c+1 \\ b &= & 2c-6 \\ c &= & -1 \\ 0 &= & 1 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones no tiene solución, pues $0 = 1$ *es falso.*

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones es vacío, es decir, $S = \emptyset$. ■

9. Si se sabe que (a, b, c, d) es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - z &= & 1 \\ 3y - 2w &= & 0 \\ x - y + w &= & -2 \\ 5y + 4z + w &= & 0 \end{cases}$$

Utilice la regla de Cramer para encontrar el valor de la constante b.

Solución:

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y *calcularemos el determinante A.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{3}F_2+F_4]{\frac{1}{3}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & \dfrac{13}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{-8F_3+F_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{3} = 5 \qquad \textit{(Matriz Triangular Superior)}$$

Ahora se calcula el determinante para la constante ***b*** *.*

Por lo que consideremos $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *y calcularemos el determinante de B.*

Recuerde que la matriz B surge de colocar la columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *en la segunda columna de la matriz* *de coeficientes* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, *pues el elemento* $\boldsymbol{b}$ *se encuentra en la segunda columna del sistema de ecuaciones.*

Ahora, procedemos a calcular su determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \left(2 \cdot -\tfrac{5}{2} \cdot 4 \cdot -2\right) = 40 \qquad \textit{(Matriz Triangular Superior)}$$

Observe que el efecto de los dos intercambios de filas aplicados no afecta en el resultado anterior.

Por lo tanto, por Regla de Cramer:

$$b = \frac{|B|}{|A|} = \frac{40}{5} = 8$$

■

10. Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y $|A| \neq 0$, entonces:

(a) Demuestre que $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$.

Solución:

Sabemos por teorema que $A \cdot Adj(A) = |A| \cdot I_n$*, entonces*:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \quad &\Leftrightarrow \quad |A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \right| \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{|A|} \right)^n \cdot |Adj(A)| \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \frac{\frac{1}{|A|}}{\left(\frac{1}{|A|} \right)^n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \left(\frac{1}{|A|} \right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \left(|A|^{-1} \right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = |A|^{n-1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si A *es una matriz de tamaño* $n \times n$ *y* $|A| \neq 0$*, entonces* $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, demuestre que $|Adj(\lambda A)| = \Big(\lambda^n |A| \Big)^{n-1}$.

Solución:

Procedemos de forma similar a la prueba de la parte **(a)**. *Tenemos que*:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{|\lambda A|} \cdot Adj(\lambda A) \\
&\Leftrightarrow \quad |(\lambda A)^{-1}| = \left| \frac{1}{\lambda^n |A|} \cdot Adj(\lambda A) \right| \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|\lambda A|} = \left(\frac{1}{\lambda^n |A|} \right)^n \cdot |Adj(\lambda A)| \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \frac{\frac{1}{\lambda^n |A|}}{\left(\frac{1}{\lambda^n |A|} \right)^n}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \left(\frac{1}{\lambda^n|A|}\right)^{1-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \left((\lambda^n|A|)^{-1}\right)^{1-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \left(\lambda^n|A|\right)^{n-1}$$

Por lo tanto, si A es una matriz de tamaño de $n \times n$ y $|A| \neq 0$, entonces $|Adj(\lambda A)| = \left(\lambda^n|A|\right)^{n-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. ■

11. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -5$ y $\det(B^{-1}) = \frac{4}{3}$, calcule $\det(2B \cdot Adj(A^t))$.

Solución:

Por hipótesis, se tiene que $|A| = -5$ *y* $|B^{-1}| = \frac{4}{3}$.

Ahora, sabemos que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{|B^{-1}|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

Por otro lado

Tenemos que $|Adj(A^t)| = \left|(Adj(A))^t\right| = |Adj(A)|$. *Además* $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$ (*Ejercicio* **10.**), *entonces* $|Adj(A^t)| = |A|^{n-1} = (-5)^3 = -125$.

Así, $|2B \cdot Adj\,(A^t)\,| = 2^4 \cdot |B| \cdot |Adj\,\left(A^t\right)| = 16 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot -125 = -1500$.

[1]*Por lo tanto, el valor numérico del* $\det(2B \cdot Adj(A^t)) = -1500$. ■

[1]*Se utiliza el siguiente resultado: Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ entonces* $Adj\,(A^t) = [Adj(A)]^t$.

12. Considere el sistema de ecuaciones con variables x, y, donde m, $n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx - 3y &= 1 \\ 2mx + my &= n \end{cases}$$

Determine los valores de m y n para que el sistema:

(a) Tenga solución única.

(b) No tenga solución.

(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

Solución:

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} m & -3 \\ 2m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que $\begin{vmatrix} m & -3 \\ 2m & m \end{vmatrix} = m^2 + 6m$, *por lo que:*

- *Si* $m^2 + 6m \neq 0$, *es decir* $m \neq 0$ *y* $m \neq -6$ *entonces el sistema tiene solución única.*

- *Si* $m^2 + 6m = 0$, *es decir si* $m = 0$ o $m = -6$, *el sistema es inconsistente o posee infinita cantidad de soluciones. Procedamos analizando los siguientes casos:*

Caso $m = 0$.

Se sustituye $m = 0$ *en el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} -3y &= 1 \\ 0 &= n \end{cases}$$

Si $n = 0$ *el sistema posee infinita cantidad de soluciones. Si* $n \neq 0$ *el sistema es inconsistente.*

Caso $m = -6$.

Se sustituye $m = -6$ *en el sistema de ecuaciones*:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -6x - 3y & = & 1 \\ -12x - 6y & = & n \end{array}\right. \xrightarrow{-2F_1} \left\{\begin{array}{rcl} 12x + 6y & = & -2 \\ -12x - 6y & = & n \end{array}\right. \xrightarrow{F_1+F_2} \left\{\begin{array}{rcl} 12x + 6y & = & -2 \\ 0 & = & n-2 \end{array}\right.$$

Así, si $n = 2$ *el sistema posee infinita cantidad de soluciones y si* $n \neq 2$ *el sistema es inconsistente.*

Por lo tanto, en resumen:

a) *Si* $m \neq 0$ *y* $m \neq -6$ *con* $n \in \mathbb{R}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.*

b) *Si* $m = 0$ *y* $n \neq 0$ o $m = -6$ *y* $n \neq 2$ *entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.*

c) *Si* $m = 0$ *y* $n = 0$ o $m = -6$ *y* $n = 2$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene infinita cantidad de soluciones.* ■

13. Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^3 = O_n$, pruebe que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Solución:

Hipótesis: $A^3 = O_n$.

HQM: $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Sabemos que al multiplicar la matriz $I_n - A$ *por la matriz* $(I_n - A)^{-1}$ *se obtiene la matriz identidad.*

$$\Leftrightarrow \quad (I_n - A)^{-1} \cdot (I_n - A) = \left(I_n + A + A^2\right) \cdot (I_n - A)$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = {I_n}^2 + A \cdot I_n + A^2 \cdot I_n - I_n \cdot A - A^2 - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n - O_n \quad (\textit{Por hipótesis})$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n \ \checkmark$$

Como se llegó a una igualdad verdadera, entonces $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$ *también es verdadera.*

Por lo tanto, si A *es una matriz de* $n \times n$ *tal que* $A^3 = O_n$*, entonces se cumple que* $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$. ■

14. Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y, donde a, $b \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcc} 3ax - 4y & = & 2b \\ -x + 3ay & = & 3b + 1 \end{array} \right.$$

Determine los valores de las constantes a y b para que el sistema:

(a) No tenga solución.

(b) Tenga solución única.

(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

(d) Determine el conjunto solución en el caso de que la solución es única.

Solución:

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 3b + 1 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene $\begin{vmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{vmatrix} = 9a^2 - 4$, *por lo que*:

- *Si* $9a^2 - 4 \neq 0$, *es decir* $a \neq \pm\dfrac{2}{3}$ *entonces el sistema tiene solución es única.*

- *Si* $9a^2 - 4 = 0$, *es decir, si* $a = \pm\dfrac{2}{3}$ *el sistema es inconsistente o posee infinito número de soluciones. Procedamos analizando los siguientes casos*:

Caso $a = \dfrac{2}{3}$.

Se sustituye $a = \dfrac{2}{3}$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & 2b \\ -x + 2y & = & 3b + 1 \end{array}\right. \xrightarrow{2F_2} \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & 2b \\ -2x + 4y & = & 6b + 2 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1 + F_2} \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y & = & 2b \\ 0 & = & 8b + 2 \end{array}\right.$$

Ahora, el sistema depende la igualdad $0 = 8b + 2$.

Por lo que, si $b = -\dfrac{1}{4}$ *el sistema posee infinito número de soluciones y si* $b \neq -\dfrac{1}{4}$ *el sistema es inconsistente.*

Caso $a = -\dfrac{2}{3}$.

Se sustituye $a = -\dfrac{2}{3}$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x - 4y & = & 2b \\ -x - 2y & = & 3b + 1 \end{array}\right. \xrightarrow{-2F_2} \left\{\begin{array}{rcl} -2x - 4y & = & 2b \\ 2x + 4y & = & -6b - 2 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1 + F_2} \left\{\begin{array}{rcl} -2x - 4y & = & 2b \\ 0 & = & -4b - 2 \end{array}\right.$$

Al igual que en el caso anterior, el sistema depende de la igualdad $0 = -4b - 2$.

Así, si $b = -\dfrac{1}{2}$ *el sistema posee infinito número de soluciones y si* $b \neq -\dfrac{1}{2}$ *el sistema es inconsistente.*

Por lo tanto, en resumen:

a) *Si* $a = \dfrac{2}{3}$ *y* $b \neq -\dfrac{1}{4}$ o $a = -\dfrac{2}{3}$ *y* $b \neq -\dfrac{1}{2}$ *entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.*

b) *Si* $a \neq \dfrac{2}{3}$ *y* $a \neq -\dfrac{2}{3}$ *con* $b \in \mathbb{R}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.*

c) *Si* $a = \dfrac{2}{3}$ *y* $b = -\dfrac{1}{4}$ o $a = -\dfrac{2}{3}$ *y* $b = -\dfrac{1}{2}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene infinita cantidad de soluciones.*

d) *Procedamos ahora a calcular el conjunto solución en el caso de que el conjunto solución sea única.*

Sabemos que el conjunto solución es de la forma $x = A^{-1}b$. *Donde* $A = \begin{pmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$ *y* $b = \begin{pmatrix} 2a \\ 3b+1 \end{pmatrix}$.

Primero calculamos la matriz A^{-1}*, para ello:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3a & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 3a & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3a & 0 & 1 \\ 3a & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3a & 0 & -1 \\ 3a & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-3aF_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3a & 0 & -1 \\ 0 & 9a^2-4 & 1 & 3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{9a^2-4}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{9a^2-4} & \dfrac{3a}{9a^2-4} \end{array}\right) \xrightarrow{3aF_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{3a}{9a^2-4} & \dfrac{4}{9a^2-4} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{9a^2-4} & \dfrac{3a}{9a^2-4} \end{array}\right)$$

Donde se tiene que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3a}{9a^2-4} & \dfrac{4}{9a^2-4} \\ \dfrac{1}{9a^2-4} & \dfrac{3a}{9a^2-4} \end{pmatrix}$. *Además, observe que* $a \neq \pm\dfrac{2}{3}$ *entonces la expresión* $\dfrac{1}{9a^2-4}$ *está bien definido.*

Entonces, tenemos que $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \dfrac{3a}{9a^2-4} & \dfrac{4}{9a^2-4} \\ \\ \dfrac{1}{9a^2-4} & \dfrac{3a}{9a^2-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 3b+1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{3a(2b)}{9a^2-4} + \dfrac{4(3b+1)}{9a^2-4} \\ \\ \dfrac{2b}{9a^2-4} + \dfrac{3a(3b+1)}{9a^2-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6ab+12b+4}{9a^2-4} \\ \\ \dfrac{9ab+3a+2b}{9a^2-4} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $S = \left\{ \left(\dfrac{6ab+12b+4}{9a^2-4}, \ \dfrac{9ab+3a+2b}{9a^2-4} \right) \Big/ a \neq \pm\dfrac{2}{3}, \ b \in \mathbb{R} \right\}.$ ■

15. Sean A, B y C matrices de tamaño $n \times n$. Pruebe que:

(a) Si A es involutiva, entonces $\frac{1}{2}(A + I_n)$ es idempotente.

Solución:

Hipótesis: *A es involutiva, es decir,* $A^2 = I_n$.

HQM: $\frac{1}{2}(A+I_n)$ *es idempotente, o sea, hay que probar que* $\left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right)^2 = \frac{1}{2}(A+I_n)$.

Partiendo del lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(A^2 + 2A \cdot I_n + {I_n}^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(A^2 + 2A + I_n\right) \\ &= \frac{1}{4}(I_n + 2A + I_n) \quad (\textit{Hipótesis}) \\ &= \frac{1}{4}\Big(2(A+I_n)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(A+I_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si A es involutiva, entonces $\frac{1}{2}(A+I_n)$ es idempotente.

(b) Si B es idempotente, entonces $|B|=1 \quad \text{o} \quad |B|=0$.

Solución:

Hipótesis: *B es idempotente, es decir, $B^2=B$.*

HQM: $|B|=1 \quad \text{o} \quad |B|=0$.

Partiremos de la hipótesis, tenemos que:

$$\begin{aligned} B^2 = B \quad &\Leftrightarrow \quad \left|B^2\right| = |B| \\ &\Leftrightarrow \quad |B|\cdot|B| = |B| \\ &\Leftrightarrow \quad |B|\cdot|B| - |B| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |B|\left(|B|-1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |B| = 0 \ \vee \ |B| = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si B es idempotente, entonces $|B|=1 \quad \text{o} \quad |B|=0$.

(c) Si C es involutiva y $\frac{1}{2}(C+I_n)$ es invertible, entonces $\left|\frac{1}{2}(C+I_n)\right|=1$.

Solución:

Hipótesis: *C es involutiva, es decir, $C^2=I_n$. Además $\frac{1}{2}(C+I_n)$ es invertible.*

HQM: $\left|\frac{1}{2}(C+I_n)\right|=1$.

Como C es involutiva entonces se cumple que $\frac{1}{2}(C+I_n)$ es idempotente. (Por parte **(a)**)

Además, si $\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)$ *es idempotente entonces se cumple que* $\left|\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)\right| = 1 \ \vee\ \left|\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)\right| = 0$ (*Por parte* **(b)**). *Pero como* $\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)$ *es invertible, se descarta que su determinante sea igual a cero.*

Por lo que se concluye que el determinante de $\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)$ *es igual* 1.

Por lo tanto, si C *es involutiva y* $\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)$ *es invertible, entonces* $\left|\frac{1}{2}\left(C+I_n\right)\right| = 1.$ ■

16. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -4$ y $\det(B^{-1}) = \frac{5}{4}$, calcule $\det(3B\cdot Adj(2A))$.

Solución:

Por hipótesis, tenemos que $|A| = -4$ *y* $|B^{-1}| = \frac{5}{4}$.

Sabemos que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{|B^{-1}|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}.$

Además, se tiene que $|Adj(2A)| = \left(2^n|A|\right)^{n-1} = \left(2^4\cdot -4\right)^3 = -262144.$ (*Por ejercicio* **10.**)

Así, $|3B\cdot Adj(2A)| = 3^4\cdot|B|\cdot|Adj(2A)| = 81\cdot\dfrac{4}{5}\cdot -262144 = -\dfrac{84934656}{5}.$

Por lo tanto, el valor numérico del $\det(3B\cdot Adj(2A)) = -\dfrac{84934656}{5}.$ ■

17. Sean $X \in M_{n\times 1}$, B una matriz simétrica de tamaño $n\times n$ y considere la matriz

$$A = B - \frac{2}{X^tX}XX^t$$

Pruebe, entrada por entrada, que $A^t = A$.

Solución:

Hipótesis: *B es una matriz simétrica, es decir,* $B^t = B$.

HQM: $A^t = A$.

Note que $\dfrac{2}{X^tX}$ *es una constante, pues* X^t *es de tamaño* $1 \times n$ *y* X *es de tamaño* $n \times 1$*; por lo tanto* X^tX *es de tamaño* 1×1. (*Considerado como un número en este curso*)

Además, las matrices A^t *y* A *son de igual tamaño* $n \times n$*, ya que ambas matrices son una resta de dos matrices de* $n \times n$.

Basta demostrar entrada por entrada son iguales, es decir:

$$\langle A^t \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Veamos que $\forall i, j \in \{1, 2, ...n\}$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\langle A^t \rangle_{ij} &= \left\langle \left(B - \frac{2}{X^tX} X X^t \right)^t \right\rangle_{ij} \\
&= \left\langle B - \frac{2}{X^tX} X X^t \right\rangle_{ji} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz}) \\
&= \langle B \rangle_{ji} - \left\langle \frac{2}{X^tX} X X^t \right\rangle_{ji} \quad (\textit{Sustración de matrices}) \\
&= \langle B \rangle_{ji} - \frac{2}{X^tX} \langle X X^t \rangle_{ji} \quad (\textit{Multiplic. por escalar en una matriz}) \\
&= \langle B^t \rangle_{ji} - \frac{2}{X^tX} \langle X X^t \rangle_{ji} \quad (\textit{Hipótesis}) \\
&= \langle B \rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X \rangle_{jk} \langle X^t \rangle_{ki} \quad (\textit{Multiplic. de matrices}) \\
&= \langle B \rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X^t \rangle_{kj} \langle X \rangle_{ik} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz}) \\
&= \langle B \rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X \rangle_{ik} \langle X^t \rangle_{kj} \quad (\textit{Conmutatividad en } \mathbb{R}) \\
&= \langle B \rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \langle X X^t \rangle_{ij} \quad (\textit{Multiplic. de matrices}) \\
&= \langle B \rangle_{ij} - \left\langle \frac{2}{X^tX} X X^t \right\rangle_{ij} \quad (\textit{Multiplic. por escalar en una matriz}) \\
&= \left\langle B - \frac{2}{X^tX} X X^t \right\rangle_{ij} \quad (\textit{Sustracción de matrices}) \\
&= \langle A \rangle_{ij}
\end{aligned}$$

Así, $\langle A^t\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij} \quad \forall i,j \in \{1,2,...,n\}$.

Por lo tanto, si $A = B - \dfrac{2}{X^tX}XX^t$ *con* B *una matriz simétrica, entonces* $A^t = A$. ■

18. Calcule el determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Se aplican operaciones elementales buscando transformarlo en una matriz triangular superior para calcular su determinante; multiplicando los elementos de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_1+F_{n-2} \\ -F_1+F_{n-1}}]{\substack{-F_1+F_4 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, su determinante es igual a $(x-1)(x-2)\cdot ... \cdot(x-(n-1))$. ■

19. Se sabe que si A es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, se cumple:

$$A \cdot \frac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que si B es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, entonces:

$$(Adj\,(B^t))^t = det(B) \cdot B^{-1}$$

Solución:

Hipótesis: $A \cdot \dfrac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$, *donde además se tiene que* A *es una matriz de* $n \times n$.

HQM: $(Adj\,(B^t))^t = det(B) \cdot B^{-1}$, con B una matriz de $n \times n$.

En esta prueba, partiremos de la conclusión (lo que se quiere probar) y lo trabajaremos hasta llegar a una afirmación verdadera.

$$\begin{aligned}
\left(Adj\left(B^t\right)\right)^t = det(B) \cdot B^{-1} &\overset{2}{\Leftrightarrow} \left(Adj(B)^t\right)^t = det(B) \cdot B^{-1} \\
&\overset{3}{\Leftrightarrow} Adj(B) = det(B) \cdot B^{-1} \\
&\Leftrightarrow B \cdot Adj(B) = B\left(det(B) \cdot B^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow B \cdot Adj(B) = det(B) \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow B \cdot Adj(B) = det(B) \cdot I_n \\
&\Leftrightarrow B \cdot \frac{Adj(B)}{det(B)} = I_n \qquad (Hipótesis)
\end{aligned}$$

Como la última igualdad es verdadera entonces $(Adj\,(B^t))^t = det(B) \cdot B^{-1}$ *es verdadera.*

---

[2]Si A es una matriz de $n \times n$ entonces $Adj\,(A^t) = [Adj(A)]^t$.

[3]Si A es una matriz de $n \times n$ entonces $(A^t)^t = A$.

Por lo tanto, si A y B son matrices invertibles de tamaño $n \times n$, donde se cumple que $A \cdot \dfrac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$, *entonces* $(Adj\,(B^t))^t = det(B) \cdot B^{-1}$. $\blacksquare$

20. Suponga que A es una matriz de $n \times n$ que satisface la condición $A^2 = A$. Pruebe que que $\forall k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, se cumple que:

$$(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A$$

Solución:

Se demuestra por inducción sobre k.

- *Para* $k = 1 \Leftrightarrow (A + I_n)^1 = I_n + (2^1 - 1)\,A \Leftrightarrow A + I_n = I_n + A$ ✓.

- *Asumimos validez para algún* $k > 1$, *es decir* $(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A$ *es nuestra hipótesis inductiva* (HI).

- *Con base en lo anterior hay que probar la validez para* $k + 1$, *es decir, hay que probar* $(A + I_n)^{k+1} = I_n + \left(2^{k+1} - 1\right) A$.

- **Prueba**:

$$\begin{aligned}
(A + I_n)^{k+1} &= (A + I_n)^k (A + I_n) \\
&\overset{\text{HI}}{=} \left(I_n + \left(2^k - 1\right) A\right)(A + I_n) \\
&= I_n \cdot A + {I_n}^2 + \left(2^k - 1\right) A^2 + \left(2^k - 1\right) A \cdot I_n \\
&= A + I_n + \left(2^k - 1\right) A + \left(2^k - 1\right) A \qquad \left(\textit{Hipótesis: } A^2 = A\right) \\
&= A + I_n + 2\left(2^k - 1\right) A \\
&= I_n + 2\left(2^k - 1\right) A + A \\
&= I_n + \left(2^{k+1} - 2\right) A + A
\end{aligned}$$

$$= \quad I_n + \left(2^{k+1} - 2 + 1\right) A$$

$$= \quad I_n + \left(2^{k+1} - 1\right) A$$

Por lo tanto, se cumple que $(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ *con* $k \geq 1.$ ■

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y ESPACIOS VECTORIALES

1. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_8, +)$.

(a) Determine el elemento neutro, los inversos de cada elemento del grupo, los elementos involutivos y los elementos idempotentes.

Solución:

Tenemos la siguiente tabla de la operación $(\mathbb{Z}_8, +)$:

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{7}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{6}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{7}$	$\dot{7}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$

Por lo tanto, podemos determinar que:

◇ *El elemento neutro es* $\dot{0}$.

◇ *Los inversos de cada elemento son*:

$$\left(\dot{0}\right)^{-1} = 0 \qquad \left(\dot{1}\right)^{-1} = 7 \qquad \left(\dot{2}\right)^{-1} = 6 \qquad \left(\dot{3}\right)^{-1} = 5$$

$$\left(\dot{4}\right)^{-1} = 4 \qquad \left(\dot{5}\right)^{-1} = 3 \qquad \left(\dot{6}\right)^{-1} = 2 \qquad \left(\dot{7}\right)^{-1} = 1$$

◇ *Los elementos involutivos son:* $\dot{0}$ *y* $\dot{4}$.

◇ *Solamente el* $\overset{\bullet}{0}$ *es un elemento idempotente.*

(b) Calcule todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Solución:

Por teorema de Lagrange los posibles subgrupos de $(\mathbb{Z}_8, +)$ *son de orden* 1,2,4,8.

Por lo tanto, tenemos que:

Subgrupo de orden $1 = \left\{\overset{\bullet}{0}\right\}$.

Subgrupo de orden $2 = \left\{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{4}\right\}$.

Subgrupo de orden $4 = \left\{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{2}, \overset{\bullet}{4}, \overset{\bullet}{6}\right\}$.

Subgrupo de orden $8 = \mathbb{Z}_8 = \left\{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{2}, \overset{\bullet}{4}, \overset{\bullet}{6}, \overset{\bullet}{8}\right\}$. ■

2. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como $(a, b) \otimes (c, d) = (a + c + 2, 3bd)$. Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano:

(a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$.

Solución:

Primero se hallará el elemento neutro, procedamos de la siguiente manera:

Sea (m, n) *el neutro de* (a, b) *con* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$(a, b) \otimes (m, n) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \quad (a + m + 2, 3bn) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \quad a + m + 2 = a \quad \wedge \quad 3bn = b$$

$$\Rightarrow \quad m = -2 \ \wedge \ n = \frac{1}{3} \quad (\textit{note que } b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad (m,n) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$$

Ahora, sea (c,d) *el elemento inverso de* (a,b) *con* $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
& (a,b) \otimes (c,d) = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \\
\Rightarrow \quad & (a+c+2, 3bd) = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \\
\Rightarrow \quad & a+c+2 = -2 \ \wedge \ 3bd = \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \quad & c = -4-a \ \wedge \ d = \frac{1}{9b} \quad (\textit{note que } b \neq 0) \\
\Rightarrow \quad & (c,d) = \left(-4-a, \frac{1}{9b}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $(a,b)^{-1} = \left(-4-a, \dfrac{1}{9b}\right)$.

(b) Calcule el valor exacto de $(2,-1)^{-3} \otimes \left(5, \frac{1}{4}\right)^2$.

Solución:

Por medio de la operación $\otimes$ *definida por* $(a,b) \otimes (c,d) = (a+c+2, 3bd)$ *y la fórmula* $(a,b)^{-1} = \left(-4-a, \dfrac{1}{9b}\right)$ *podemos hallar lo solicitado:*

$$\begin{aligned}
(2,-1)^{-3} \otimes \left(5, \frac{1}{4}\right)^2 &= \left[(2,-1)^{-1}\right]^3 \otimes \left(5, \frac{1}{4}\right)^2 \\
&= \underbrace{\left[\left(-6, \frac{-1}{9}\right)\right]^3}_{\left(-6, \frac{-1}{9}\right) \otimes \left(-6, \frac{-1}{9}\right) \otimes \left(-6, \frac{-1}{9}\right)} \otimes \left(5, \frac{1}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-14, \frac{-1}{81}\right) \otimes \underbrace{\left(5, \frac{1}{4}\right)^2}_{\left(5,\frac{1}{4}\right)\otimes\left(5,\frac{1}{4}\right)} \\ &= \left(-14, \frac{-1}{81}\right) \otimes \left(12, \frac{3}{16}\right) \\ &= \left(0, \frac{-1}{144}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor exacto de $(2,-1)^{-3} \otimes \left(5, \frac{1}{4}\right)^2 = \left(0, \frac{-1}{144}\right)$. ■

3. Sea $(G,*)$ un grupo con elemento neutro e. Demuestre que si $x^2 = e$, $\forall x \in G$, entonces G es abeliano.

Solución:

Hipótesis: $x^2 = e \Rightarrow x \cdot x = e \Rightarrow x = x^{-1}$.

Como $(G,*)$ *es grupo, entonces solo hay que probar que* $\forall a, b \in G$ *se cumple que* $a * b = b * a$.

HQM: $a * b = b * a$ (*Conmutatividad*).

$$\begin{aligned} a * b &= (a * b)^{-1} \quad (\textit{Hipótesis}) \\ &= b^{-1} * a^{-1} \quad (\textit{Recíproco de la operación interna de dos elementos en un grupo}) \\ &= b * a \quad (\textit{Hipótesis}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x \in G$ *si* $x^2 = e$, *entonces* G *es un grupo abeliano.* ■

4. Sea $p(x) = x^3 + x^2 - 5$ un vector de P_3. Exprese a $p(x)$ como combinación lineal de los vectores $x^3 - x^2 + 3$, $3x^3 - 2x^2 + 3$, $-x^2 + 1$.

Solución:

Sean $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ *tales que*:

$$C_1\left(x^3 - x^2 + 3\right) + C_2\left(3x^3 - 2x^2 + 3\right) + C_3\left(-x^2 + 1\right) = x^3 + x^2 - 5$$

$$\Rightarrow \left(C_1 + 3C_3\right)x^3 + \left(-C_1 - 2C_2 - C_3\right)x^2 + \left(3C_1 + 3C_2 + C_3\right) = x^3 + x^2 - 5$$

Necesariamente se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcr} C_1 + 3C_2 & = & 1 \\ -C_1 - 2C_2 - C_3 & = & 1 \\ 3C_1 + 3C_2 + C_3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Donde obtenemos que $C_1 = \dfrac{-13}{5}$, $C_2 = \dfrac{6}{5}$ *y* $C_3 = \dfrac{-4}{5}$.

Por lo tanto, se puede expresar $p(x) = \dfrac{-13}{5}\left(x^3 - x^2 + 3\right) + \dfrac{6}{5}\left(3x^3 - 2x^2 + 3\right) + \dfrac{-4}{5}\left(-x^2 + 1\right)$. ■

5. Si se sabe que $A = \{u, v, w, z\}$ es una base del espacio vectorial V. Determine si el conjunto $B = \{v - 3u + z,\ 2w - v + z,\ 2v + u - w,\ -z - 2v + w\}$ es o no, base de V.

Solución:

Como A *es una base de* V *dichos vectores son* [4]*l.i., es decir*:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w + \alpha_4 z = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Además, como en B *hay cuatros vectores,* B *es una base de* V *si se cumple que es l.i.*

[4] *La abreviación* ***l.i.*** *significa linealmente independiente. En algunos textos es muy común el uso de dicha abreviación, pero en este material no se abusará de su uso.*

Entonces, sean $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$C_1(v-3u+z)+C_2(2w-v+z)+C_3(2v+u-w)+C_4(-z-2v+w)=0$$

$$(C_1-C_2+2C_3-2C_4)\,v+(-3C_1+C_3)\,u+(C_1+C_2-C_4)\,z+(2C_2-C_3+C_4)\,w=0$$

Como $u,\ v,\ w,\ z$ *son l.i., entonces se cumple que:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1-C_2+2C_3-2C_4 & = & 0\\ -3C_1+C_3 & = & 0\\ C_1+C_2-C_4 & = & 0\\ 2C_2-C_3+C_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Despejando en la segunda ecuación $C_3=3C_1$ *y sustituyendo en las otras ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7C_1-C_2-2C_4 & = & 0\\ C_1+C_2-C_4 & = & 0\\ -3C_1+2C_2+C_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donde obtenemos que $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0,\ C_4=0.$

Por lo tanto, B *es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto* $B=\{v-3u+z,\ \ 2w-v+z,\ \ 2v+u-w,\ \ -z-2v+w\}$ *es una base de* V*.* ■

6. En el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{17}{}^{*},\cdot)$:

(a) Calcule, si es posible, un subgrupo de orden cuatro y otro de orden seis.

Solución:

Por teorema de Lagrange, los posibles subgrupos de $(\mathbb{Z}_{17}{}^{*},\cdot)$ *son de orden* $1,2,4,8,16.$

Además, tenemos que los inversos de cada elemento son:

$$\left(\dot{1}\right)^{-1} = 1 \qquad \left(\dot{2}\right)^{-1} = 9 \qquad \left(\dot{3}\right)^{-1} = 6 \qquad \left(\dot{4}\right)^{-1} = 13 \qquad \left(\dot{5}\right)^{-1} = 7 \qquad \left(\dot{6}\right)^{-1} = 3$$

$$\left(\dot{7}\right)^{-1} = 5 \qquad \left(\dot{8}\right)^{-1} = 15 \qquad \left(\dot{9}\right)^{-1} = 2 \qquad \left(\dot{10}\right)^{-1} = 12 \qquad \left(\dot{11}\right)^{-1} = 14 \qquad \left(\dot{12}\right)^{-1} = 10$$

$$\left(\dot{13}\right)^{-1} = 4 \qquad \left(\dot{14}\right)^{-1} = 11 \qquad \left(\dot{15}\right)^{-1} = 8 \qquad \left(\dot{16}\right)^{-1} = 16$$

Observe que no se calcularon los elementos inversos por medio de la tabla de la operación $(\mathbb{Z}_{17}{}^*, \cdot)$, *pues está claro que no es muy eficiente para la solución de este ejercicio.*

Por lo tanto, concluimos que un subgrupo de orden $4 = \left\{\dot{1}, \dot{4}, \dot{13}, \dot{16}\right\}$ *y un subgrupo de orden* 6, *no es posible.*

(b) Calcule el resultado de $\left(\dot{13}\right)^{-1} \cdot \left[\dot{4} \cdot \left(\dot{2}\right)^{-3}\right]^{-2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\left(\dot{13}\right)^{-1} \cdot \left[\dot{4} \cdot \left(\dot{2}\right)^{-3}\right]^{-2} &= \dot{4} \cdot \left[\dot{4} \cdot \left(\left(\dot{2}\right)^{-1}\right)^{3}\right]^{-2} \\
&= \dot{4} \cdot \left[\dot{4} \cdot \left(\dot{9}\right)^{3}\right]^{-2} \\
&= \dot{4} \cdot \left[\dot{4} \cdot \dot{15}\right]^{-2} \\
&= \dot{4} \cdot \left[\left(\dot{4} \cdot \dot{15}\right)^{-1}\right]^{2} \\
&= \dot{4} \cdot \left[\left(\dot{9}\right)^{-1}\right]^{2} \\
&= \dot{4} \cdot \left(\dot{2}\right)^{2} \\
&= \dot{4} \cdot \dot{4} \\
&= \dot{16} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

7. Determine si el conjunto $\{(-1,2,1),(1,0,2),(3,-4,0),(2,-2,1)\}$ genera o no al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Sean $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}$ *y sea* (a,b,c) *un elemento arbitrario de* $\mathbb{R}^3$ *tales que:*

$$C_1 \cdot (-1,2,1) + C_2 \cdot (1,0,2) + C_3 \cdot (3,-4,0) + C_4 \cdot (2,-2,1) = (a,b,c)$$

$$\Rightarrow \quad (-C_1 + C_2 + 3C_3 + 2C_4) + (2C_1 - 4C_3 - 2C_4) + (C_1 + 2C_2 + C_4) = (a,b,c)$$

$$\Rightarrow \quad (-C_1 + C_2 + 3C_3 + 2C_4, 2C_1 - 4C_3 - 2C_4, C_1 + 2C_2 + C_4) = (a,b,c)$$

Así, necesariamente se debe cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -C_1 + C_2 + 3C_3 + 2C_4 & = & a \\ 2C_1 - 4C_3 - 2C_4 & = & b \\ C_1 + 2C_2 + C_4 & = & c \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & -4 & -2 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \end{array} \right) \quad \xrightarrow{-F_1} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -3 & -2 & -a \\ 2 & 0 & -4 & -2 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -1 & -3 & -2 & -a \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2a+b \\ 0 & 3 & 3 & 3 & a+c \end{array} \right) \quad \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \quad \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -1 & -3 & -2 & -a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dfrac{2a+b}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 3 & a+c \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-3F_2+F_3]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & \dfrac{b}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dfrac{2a+b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a-\dfrac{3b}{2}+c \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones tiene soluciones si y solo si $-2a-\dfrac{3b}{2}+c=0$.

Por lo tanto, el conjunto $\{(-1,2,1),(1,0,2),(3,-4,0),(2,-2,1)\}$ *no genera al espacio* $\mathbb{R}^3$*, pues existe una condición para que el sistema de ecuaciones tenga solución infinita y solo genera a los vectores que la satisfacen, es decir no genera a todos los vectores de* $\mathbb{R}^3$. ■

8. Sea $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+d=0 \ \wedge \ b+c=0\right\}$.

(a) Pruebe que W es subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos que* $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+d=0 \ \wedge \ b+c=0\right\}$.

HQM: W *es subespacio de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *o bien* $W \prec M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

El conjunto W *se puede reescribir como* $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) / a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

Es claro que $W \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*. Además* $W \neq \emptyset$*, pues* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

Luego, con base en lo anterior, para que W *sea subespacio de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, debe cumplirse que:*

$$\odot \quad \forall A,B\in W \quad A+B\in W.$$

$$\odot \quad \forall \alpha\in W \quad \alpha A\in W.$$

Procedemos a probar las dos condiciones dadas:

1. *Sean A y B dos matrices de 2×2 de W tales que* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & -e \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ -f & -e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ -(b+f) & -(a+e) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & -a' \end{pmatrix} \in W \end{aligned}$$

Donde $a' = a+e$ *y* $b' = b+f$.

2. *Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y A una matriz de 2×2 tal que* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -(\alpha b) & -(\alpha a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ -b'' & -a'' \end{pmatrix} \in W \end{aligned}$$

Donde $a'' = \alpha a$ *y* $b'' = \alpha b$.

Por lo tanto, como se cumplen con ambas condiciones entonces $W \prec M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Halle $A,\, B \in W$ tales que $Gen\{A,B\} = W$.

Solución:

Sea $H = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ *un elemento arbitrario de W.*

Como $H = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se observa que $Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = W.$

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *note que* $A, B \in W$ *y es claro que todo elemento de* W *es combinación lineal de* A *y* B. *Así,* $W = Gen\{A, B\}$. ■

9. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 1, 2bd)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$ es un grupo abeliano.

(a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$.

Solución:

Primero se hallará el elemento neutro, por lo que:

Sea (m, n) *el elemento neutro de* (a, b) *con* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$(a, b) \otimes (m, n) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \quad (a + m - 1, 2bn) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \quad a + m - 1 = a \;\; \wedge \;\; 2bn = b$$

$$\Rightarrow \quad m = 1 \;\; \wedge \;\; n = \frac{1}{2} \quad (\textit{note que } \; b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad (m, n) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Ahora, sea (c, d) *el elemento inverso de* (a, b) *con* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$(a, b) \otimes (c, d) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (a+c-1, 2bd) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \\
&\Rightarrow \quad a+c-1 = 1 \ \wedge \ 2bd = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad c = 2-a \ \wedge \ d = \frac{1}{4b} \quad (\textit{note que } b \neq 0) \\
&\Rightarrow \quad (c,d) = \left(2-a, \frac{1}{4b}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que $(a,b)^{-1} = \left(2-a, \dfrac{1}{4b}\right)$.

(b) Calcule el valor exacto de $(3,-1)^{-2} \otimes (1,2)^3$.

Solución:

Con ayuda de la operación $\otimes$ *definida por* $(a,b)\otimes(c,d) = (a+c-1, 2bd)$ *y la fórmula* $(a,b)^{-1} = \left(2-a, \dfrac{1}{4b}\right)$ *podemos calcular lo solicitado.*

$$
\begin{aligned}
(3,-1)^{-2} \otimes (1,2)^3 &= \left[(3,-1)^{-1}\right]^2 \otimes \Big((1,2)\otimes(1,2)\otimes(1,2)\Big) \\
&= \left(-1, \frac{-1}{4}\right)^2 \otimes \Big((1,8)\otimes(1,2)\Big) \\
&= \left(\left(-1, \frac{-1}{4}\right) \otimes \left(-1, \frac{-1}{4}\right)\right) \otimes (1,32) \\
&= \left(-3, \frac{1}{8}\right) \otimes (1,32) \\
&= (-3, 8)
\end{aligned}
$$

(c) Si $H = \{(1,t) \ / \ t \in \mathbb{R}^*\}$, pruebe que $(H, \otimes)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$.

Solución:

HIpótesis: $H = \{(1,t) \ / \ t \in \mathbb{R}^*\}$.

HQM: $(H, \otimes)$ *es subgrupo de* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$, *es lo mismo decir* $(H, \otimes) < (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$.

Es claro que $H \neq \emptyset$ *y además* $H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Con la base en lo anterior, basta demostrar que $\forall (a,b), (c,d) \in H$ *se cumple que:*

$$\odot \quad (a,b) \otimes (c,d) \in H.$$

$$\odot \quad (a,b)^{-1} \in H.$$

Ahora, procedamos a probar ambas condiciones dadas:

1. *Sean* $(a,b), (c,d) \in H \ / \ a = 1, c = 1 \quad \wedge \quad b \neq 0, d \neq 0$:

$$\begin{aligned} (a,b) \otimes (c,d) &= (1,b) \otimes (1,d) \\ &= (1+1-1, 2bd) \\ &= (1, 2bd) \in H, \ \ \textit{pues} \ \ 2bd \neq 0 \end{aligned}$$

2. *Sea* $(a,b) \in H \ / \ a = 1 \quad \wedge \quad b \neq 0$:

$$\begin{aligned} (a,b)^{-1} &= (1,b)^{-1} \\ &= \left(2-1, \frac{1}{4b}\right) \\ &= \left(1, \frac{1}{4b}\right) \in H, \ \ \textit{pues} \ \ \frac{1}{4b} \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que $(H, \otimes) < (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$. $\blacksquare$

10. Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro e, con H y K subgrupos de G. Pruebe que $H \cap K$ es un subgrupo de G.

Solución:

Hipótesis: *G es un grupo con elemento neutro e y además H y K subgrupos de G.*

HQM: *$H \cap K$ es un subgrupo de G.*

Es claro que $H \cap K \subseteq G$. Además $H \cap K \neq \emptyset$, ya que $H < G \Rightarrow e \in H$ y $K < G \Rightarrow e \in K$. Así, $e \in H \cap K$.

Con base en lo anterior para probar que $H \cap K$ es un subgrupo de G, basta probar que $\forall a, b \in H \cap K$ se debe cumplir que:

$$\odot \quad a + b \in H \cap K.$$

$$\odot \quad a^{-1} \in H \cap K.$$

Probando ambas condiciones dadas, para verficar si $H \cap K < G$:

1. *Como* $a, b \in H \cap K \Rightarrow a \in H \cap K \ \wedge b \in H \cap K$

$$\Rightarrow a \in H \wedge a \in K \ \ \wedge \ \ b \in H \wedge b \in K$$

$$\Rightarrow (a \in H \wedge b \in H) \ \ \wedge \ \ (a \in K \wedge b \in K)$$

$$\Rightarrow a * b \in H \ \ \wedge a * b \in K, \text{ pues } H \text{ y } K \text{ son subgrupos.}$$

$$\Rightarrow a * b \in H \cap K$$

2. *Como* $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H \ \ \wedge \ \ a \in K$

$$\Rightarrow a^{-1} \in H \ \ \wedge \ \ a^{-1} \in K, \text{ pues } H \text{ y } K \text{ son subgrupos.}$$

$$\Rightarrow a^{-1} \in H \cap K$$

Por lo tanto, se puede afirmar que $H \cap K$ es un subgrupo de G. ■

11. Sea B una matriz invertible en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Suponga que $\{A_1, A_2, ..., A_9\}$ es un conjunto linealmente independiente en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Pruebe que $\{A_1B, A_2B, ..., A_9B\}$ es también un conjunto linealmente independiente.

Solución:

Hipótesis: *El conjunto $\{A_1, A_2, ..., A_9\}$ es linealmente indepediente y B es una matriz invertible de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.*

HQM: *$\{A_1B, A_2B, ..., A_9B\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Sean $C_1, C_2, ..., C_9 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$C_1 \cdot A_1B + C_2 \cdot A_2B + ... + C_9 \cdot A_9B = O_3$$

$$\Rightarrow \quad (C_1 \cdot A_1B + C_2 \cdot A_2B + ... + C_9 \cdot A_9B) \cdot B^{-1} = O_3 \cdot B^{-1} \quad (\textit{Pues } B \textit{ es invertible})$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \cdot A_1 \left(B \cdot B^{-1}\right) + C_2 \cdot A_2 \left(B \cdot B^{-1}\right) + ... + C_9 \cdot A_9 \left(B \cdot B^{-1}\right) = O_3$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \cdot A_1 \cdot I_3 + C_2 \cdot A_2 \cdot I_3 + ... + C_9 \cdot A_9 \cdot I_3 = O_3$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \cdot A_9 + C_2 \cdot A_2 + ... + C_9 \cdot A_9 = O_3$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, \;\; C_2 = 0, \;\; ..., \;\; C_9 = 0 \quad (\textit{Pues } \{A_1, A_2, ..., A_9\} \textit{ es li.})$$

Por lo tanto, el conjunto $\{A_1B, A_2B, ..., A_9B\}$ es linealmente independiente. ■

12. Considere el subespacio de P_4 dado por $H = \{p(x) \in P_4 \ / \ p'(1) = 0 \ \wedge \ p(1) = 0\}$. Determine una base de H y calcule su dimensión.

Solución:

Sabemos que $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in P_4$ *y como* $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^3 + 2cx + d$, *entonces se tiene que* $p(1) = a + b + c + d + e = 0$ *y* $p'(1) = 4a + 3b + 2c + d = 0$.

Luego, se buscan valores reales a, b, c, d, e *que cumplan:*

$$\begin{cases} a + b + c + d + e &= 0 \\ 4a + 3b + 2c + d &= 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Donde se obtiene que $a = c + 2d + 3e$ *y* $b = -2c - 3d - 4e$.

Así, H *se puede reescribir como* $H = \left\{ (c+2d+3e)x^4 + (-2c-3d-4e)x^3 + cx^2 + dx + e \ \Big/ \ c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$

$\Longrightarrow c\,(x^4 - 2x^3 + x^2) + d\,(2x^4 - 3x^3 + x) + e\,(3x^4 - 4x^3 + 1)$

$\Longrightarrow Gen\left\{ x^4 + 2x^3 + x^3, \ \ 2x^4 - 3x^3 + x, \ \ 3x^4 - 4x^3 + 1 \right\} = H$

Ahora, falta verificar que este conjunto es linealmente independiente:

Sean C_1, C_2, $C_3 \in \mathbb{R}$ *tal que*:

$$C_1\left(x^4+2x^3+x^3\right)+C_2\left(2x^4-3x^3+x\right)+C\left(x^4-4x^3+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(C_1+2C_2+C_3\right)x^4+\left(-2C_1-3C_2-4C_3\right)x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=0$$

Note que los polinomios de la igualdad anterior no son de igual grado, el primero de ellos es de grado 4 y el polinomio nulo es de grado -1*. Como dicha igualdad debe cumplirse* $\forall x \in \mathbb{R}$*, entonces para* $x=0$ *se obtiene que* $C_3=0$*.*

Por otra parte, $\forall x \in \mathbb{R}$*, como* $\left(C_1+2C_2+C_3\right)x^4+\left(-2C_1-3C_2-4C_3\right)x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=0$ *es válido, entonces debe cumplirse la igualdad entre sus respectivas derivadas con respecto a* x*, es decir:*

$$4\left(C_1+2C_2+C_3\right)x^3+3\left(-2C_1-3C_2-4C_3\right)x^2+2C_1x+C_2=0$$

Evaluando $x=0$*, se obtiene que* $C_2=0$*.*

Análogamente, $\forall x \in \mathbb{R}$*, como* $4\left(C_1+2C_2+C_3\right)x^3+3\left(-2C_1-3C_2-4C_3\right)x^2+2C_1x+C_2=0$ *es válido, entonces debe cumplirse la igualdad entre sus respectivas derivadas con respecto a* x*, es decir:*

$$12\left(C_1+2C_2+C_3\right)x^2+6\left(-2C_1-3C_2-4C_3\right)x+2C_1=0$$

Evaluando $x=0$*, se obtiene que* $C_1=0$*.*

Se concluye que los escalares C_1*,* C_2 *y* C_3 *son iguales a cero, es decir el conjunto es linealmente independiente.*

Por lo tanto, $\left\{x^4+2x^3+x^3,\ 2x^4-3x^3+x,\ x^4-4x^3+1\right\}$ *es una base de* H *y* $\dim(H)=3$. ■

13. Demuestre que el conjunto de las matrices simétricas es un subespacio de $(M_n, +, \cdot)$.

Solución:

Hipótesis: *El conjunto de las matrices simétricas, es decir, si A es una matriz simétrica se cumple que $A = A^t$.*

HQM: *El conjunto de las matrices simétricas es un subespacio de $(M_n, +, \cdot)$.*

Sea S el conjunto de las matrices simétricas, la cual no es vacío, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a ese conjunto. Además se cumple que $S \subseteq (M_n, +, \cdot)$.

Con la base en lo anterior, basta probar que $\forall A, B \in S$ y $\forall \alpha \in S$:

$$\odot \quad A + B \in S$$

$$\odot \quad \alpha A \in S$$

1. *Sean las matrices simétricas A y $B \in S$ tal que:*

$$\begin{aligned} A + B &= A^t + B^t, \text{ pues } A = A^t \text{ y } B = B^t \\ &= (A + B)^t \in S \end{aligned}$$

2. *Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in S$ tal que:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \cdot A^t, \text{ pues } A = A^t \\ &= (\alpha \cdot A)^t \in S \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que el conjunto de las matrices simétricas es un subespacio de $(M_n, +, \cdot)$. $\blacksquare$

14. Sea $W \subset \mathbb{R}^5$ el espacio solución del siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Encuentre una base para W y verifique que $\dim(W) = 2$.

Solución:

Para hallar una base para W, primero se resolverá el sistema de ecuaciones, para buscar sus soluciones.

Representando matricialmente el sistema y resolviendo:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-F_3+F_4]{2F_3+F_1} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenemos que $x_1 = -x_2 - x_5, \quad x_3 = -x_5$ *y* $\quad x_4 = 0.$

Como $W \subset \mathbb{R}^5$ *entonces* $W = \begin{pmatrix} -x_2 - x_5 \\ x_2 \\ -x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$. *Y como* $\begin{pmatrix} -x_2 - x_5 \\ x_2 \\ -x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\Longrightarrow \quad Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = W.$$

Ahora, como esos dos vectores no son múltiplos entonces el conjunto es linealmente independiente.

Por lo tanto, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* W *y* $dim(W) = 2$. ■

15. Pruebe que $(5\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos el conjunto* $(5\mathbb{Z}, +)$.

HQM: $(5\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

En el conjunto $5\mathbb{Z}$ *se definen todos los múltiplos enteros de 5.*

Es claro que $(5\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$, *donde* $(\mathbb{Z}, +)$ *es un grupo. Además* $5\mathbb{Z} \neq \emptyset$, *pues* 0 *es un múltiplo de* 5.

Con base en lo anterior, basta probar que $\forall a, b \in 5\mathbb{Z}$:

$$\odot \quad a + b \in 5\mathbb{Z}$$

$$\odot \quad a^{-1} \in 5\mathbb{Z}$$

Procedamos con la prueba:

1. *Como* $a, b \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} \ / \ a = 5k \quad \wedge \quad b = 5k'$

$$a + b \quad = \quad 5k + 5k'$$

$$= \quad 5\,(k+k')$$

$$= \quad 5k'',\ con\ \ k'' \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad a+b \in 5\mathbb{Z}.$$

2. *Sea* $a \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = 5k$

$$\begin{aligned} a^{-1} &= -5k,\ \ pues\ se\ debe\ cumplir\ que\ \ a+a^{-1}=0 \\ &= 5\,(-k) \\ &= 5k',\ con\ \ k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a^{-1} \in 5\mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, se tiene que $(5\mathbb{Z},+)$ *es un subgrupo* $(\mathbb{Z},+)$. ■

16. Sea $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2 \ / \ a^2+b^2 \leq 1, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Determine si $(D_2,+)$ es o no un grupo.

Solución:

No es grupo, pues D_2 *no es cerrada bajo* $+$*, para ello basta ver que:*

Se tiene que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D_2$ *y* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in D_2$.

Pero $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ & \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 0 \\ & \\ 0 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \notin D_2$. *Pues* $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 0^2 = \dfrac{9}{4} > 1.$

Por lo tanto, $(D_2, +)$ *no es grupo.* ■

17. Sean V algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$, demuestre que el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, ..., u_n\}$ es, también, linealmente independiente.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos* $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subseteq V$, *donde* S *es linealmente independiente. Además se tiene* $x \in V$, *tal que* $x \notin Gen(S)$.

HQM: *El conjunto* $H = \{x, u_1, u_2, ..., u_n\}$ *es linealmente independiente.*

Sean C_1, C_2,..., C_n, $C_{n+1} \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n + C_{n+1}x = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+1}x = -C_1u_1 - C_2u_2 - ... - C_nu_n$$

Se analizarán dos posbilidades asociadas al valor de C_{n+1}.

Caso $C_{n+1} \neq 0$.

Como $C_{n+1}x = -C_1u_1 - C_2u_2 - ... - C_nu_n$.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-C_1}{C_{n+1}}u_1 - \frac{-C_2}{C_{n+1}}u_2 - ... - \frac{-C_n}{C_{n+1}}u_n$$

$$\Rightarrow \quad x \in Gen\{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

$$\Rightarrow \quad x \in Gen(S) \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Por lo que este caso no puede ocurrir.

Caso $C_{n+1} = 0$.

Como $C_{n+1}x = -C_1u_1 - C_2u_2 - ... - C_nu_n$.

$$\Rightarrow \quad -C_1u_1 - C_2u_2 - ... - C_nu_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, C_2 = 0, ..., C_n = 0 \quad (Pues\ \{u_1, u_2, ..., u_n\}\ es\ li).$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, C_2 = 0, ..., C_n = 0, C_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \{x, u_1, u_2, ..., u_n\}\ es\ li.$$

Por lo tanto, el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, ..., u_n\}$ *es linealmente independiente siempre que* $x \notin Gen(S)$ *y* S *sea un conjunto linealmente independiente.* ■

18. Sea $(W, +, \cdot)$ un anillo. Pruebe que $(-a)b = a(-b) = -(ab)\ \forall a, b \in W$.

Solución:

Note que son tres igualdades las que se deben probar:

1. $(-a)b = a(-b)$.

2. $(-a)b = -(ab)$.

3. $a(-b) = -(ab)$.

Pero probando dos de ellas es suficiente, ya que la tercera se garantizaría por transitividad.

Primero probaremos que $(-a)b = -(ab)$.

$$
\begin{aligned}
a + -a = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; b\,(a + -a) = b \cdot 0 \quad (\textit{Adición en Igualdad}) \\
&\Rightarrow \;\; ba + b(-a) = a \cdot 0 \quad (\textit{Distrib. de} \cdot \textit{con respecto a} \, +) \\
&\Rightarrow \;\; ab + a(-b) = 0 \quad (\textit{Absorb. del cero}) \\
&\Rightarrow \;\; ab + (-a)b = 0 \quad (\textit{Conmutativa}) \\
&\Rightarrow \;\; \Big(-(ab) + ab\Big) + (-a)b = -(ab) \quad (\textit{Adición en Igualdad y asociativa}) \\
&\Rightarrow \;\; 0 + (-a)b = -(ab) \quad (\textit{Opuesto aditivo}) \\
&\Rightarrow \;\; (-a)b = -(ab) \quad (\textit{Neutro aditivo}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ahora se prueba que $a(-b) = -(ab)$, *que se demuestra similar al caso anterior.*

$$
\begin{aligned}
b + -b = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; a\,(b + -b) = a \cdot 0 \quad (\textit{Adición en Igualdad}) \\
&\Rightarrow \;\; ab + a(-b) = a \cdot 0 \quad (\textit{Distrib. de} \;\cdot\; \textit{con respecto a} \, +) \\
&\Rightarrow \;\; ab + a(-b) = 0 \quad (\textit{Absorb. del cero}) \\
&\Rightarrow \;\; \Big(-(ab) + ab\Big) + a(-b) = -(ab) \quad (\textit{Adición en Igualdad y asociativa}) \\
&\Rightarrow \;\; 0 + a(-b) = -(ab) \quad (\textit{Opuesto aditivo}) \\
&\Rightarrow \;\; a(-b) = -(ab) \quad (\textit{Neutro aditivo}) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Por (1) *y* (2) *se cumplen que* $(-a)b = a(-b) = -(ab) \quad \forall a, b \in W$. ■

TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Considere la función T: $P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} a+3b-c \\ a-2b+3c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix}$

(a) Pruebe que T es una transformación lineal.

Solución:

Tenemos que T es una transformación lineal si se cumple que:

$$\odot \quad \forall x, y \in P_2 \quad T(x+y) = T(x) + T(y).$$

$$\odot \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad T\left(\alpha x\right) = \alpha T(x).$$

Para efecto de la prueba, consideramos los polinomios ax^2+bx+c y ex^2+fx+g, y sea α una constante real:

1.
$$\begin{aligned} T\Big(\left(ax^2+bx+c\right)+\left(ex^2+fx+g\right)\Big) &= T\Big((a+e)x^2+(b+f)x+c+g\Big) \\ &= \begin{pmatrix} a+e+3(b+f)-(c+g) \\ a+e-2(b+f)+3(c+g) \\ 2(a+e)+(b+f)+2(c+g) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+3b-c \\ a-2b+3c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+3f-g \\ e-2f+3g \\ 2e+f+2g \end{pmatrix} \\ &= T\left(ax^2+bx+c\right) + T\left(ex^2+fx+g\right) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} T\Big(\alpha\left(ax^2+bx+c\right)\Big) &= T\Big((\alpha a)x^2+(\alpha b)x+\alpha c\Big) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a+3(\alpha b)-\alpha c \\ \alpha a-2(\alpha b)+3(\alpha c) \\ 2(\alpha a)+\alpha b+2(\alpha c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a+3b-c \\ a-2b+3c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot T\left(ax^2+bx+c\right)$$

Por lo tanto, se tiene que T es una transformación lineal.

(b) Calcule el núcleo de T y obtenga una base para esta.

Solución:

Sea $ax^2+bx+c \in Nucl(T) \Leftrightarrow T\left(ax^2+bx+c\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+3b-c \\ a-2b+3c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-c &= 0 \\ a-2b+3c &= 0 \\ 2a+b+2c &= 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{5}F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_2+F_3]{-3F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $a = -\frac{7}{5}c$ y $b = \frac{4}{5}c$. *Sustituyendo estos valores en el polinomio* ax^2+bx+c.

Tenemos que $Nucl(T) = \left\{ \left(-\dfrac{7}{5}c\right)x^2 + \left(\dfrac{4}{5}c\right)x + c \ \Big/ \ c \in \mathbb{R} \right\}$.

Y como $\left(-\dfrac{7}{5}c\right)x^2 + \left(\dfrac{4}{5}c\right)x + c = c\left(-\dfrac{7}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x + 1\right)$.

Sea $A = \left\{-\dfrac{7}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x + 1\right\}$. *Por lo que* $Gen(A) = Nucl(T)$ *y además* A *es linealmente independiente.*

Por lo tanto, se tiene que $A = \left\{-\dfrac{7}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x + 1\right\}$ *es una base de* $Nucl(T)$.

(c) Calcule la imagen de T y obtenga una base para esta.

Solución:

Sea $\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \in Im(T) \Leftrightarrow T\left(ax^2 + bx + c\right) = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ *para algún* $ax^2 + bx + c \in P_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 3b - c \\ a - 2b + 3c \\ 2a + b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a + 3b - c & = & e \\ a - 2b + 3c & = & f \\ 2a + b + 2c & = & g \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & -1 & e \\ 1 & -2 & 3 & f \\ 2 & 1 & 2 & g \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & -1 & e \\ 0 & -5 & 4 & -e+f \\ 0 & -5 & 4 & -2e+g \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & e \\ 0 & -5 & 4 & -e+f \\ 0 & 0 & 0 & -e-f+g \end{array}\right)$$

El sistema tiene soluciones si y solo si $-e-f+g=0 \Leftrightarrow e=-f+g$.

Así, tenemos que $Im(T)=\left\{\begin{pmatrix} -f+g \\ f \\ g \end{pmatrix} \Big/ \ f,g\in\mathbb{R}\right\}$.

Y como $\begin{pmatrix} -f+g \\ f \\ g \end{pmatrix} = f\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sea $B=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. *Entonces se tiene que* $Gen(B)=Im(T)$ *y además* B *es linealmente independiente, pues los vectores no son múltiplos.*

Por lo tanto, $B=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *es una base de* $Im(T)$. ■

2. Sea $T\in L(\mathbb{R}^3,P_2)$. Si $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=x+1$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=x^2+1$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=-2x^2+2$. Calcule el criterio de T, es decir, calcule $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

Solución:

Buscamos C_1, C_2, C_3 *tales que:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= C_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1+C_2 \\ C_2 \\ C_1+2C_3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} C_1+C_2 &=& a \\ C_2 &=& b \\ C_1+2C_3 &=& c \end{array}\right. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 2 & -a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2+F_3]{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & -a+b+c \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-a+b+c}{2} \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $C_1 = a-b$, $C_2 = b$ *y* $C_3 = \dfrac{-a+b+c}{2}$.

Así,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\cdot(x+1) + b\cdot\left(x^2+1\right) + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\left(-2x^2+2\right)$$

$$\Leftrightarrow\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\cdot(x+1) + b\cdot\left(x^2+1\right) + (-a+b+c)\cdot\left(-x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax+a-bx-b+bx^2+b+ax^2-bx^2-cx^2-a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-c)\,x^2+(a-b)x+b+c$$

Por lo tanto, el criterio es $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-c)\,x^2+(a-b)x+b+c.$ ■

3. Considere la transformación lineal $T : P_3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=\begin{pmatrix} b-2d \\ -2b+c+d \\ -b+c-d \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el núcleo de T, una base del núcleo y su dimensión.

Solución:

Sea $ax^3+bx^2+cx+d \in Nucl(T) \Leftrightarrow T\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b-2d \\ -2b+c+d \\ -b+c-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b-2d & = & 0 \\ -2b+c+d & = & 0 \\ -b+c-d & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $b=2d$ *y* $c=3d$*. Sustituyendo los valores en el polinomio* ax^3+bx^2+cx+d*.*

Tenemos que $Nucl(T)=\left\{ax^3+(2d)x^2+(3d)x+d \;\Big/\; a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$.

Y como $ax^3+(2d)x^2+(3d)x+d = ax^3+d\left(2x^2+3x+1\right)$.

Sea $A=\{x^3, 2x^2+3x+1\}$*. Entonces se tiene que* $Gen(A)=Nucl(T)$ *y además* A *es linealmente independiente, pues los vectores no son múltiplos.*

Por lo tanto, $A = \{x^3, 2x^2+3x+1\}$ *es una base de* $Nucl(T)$ *y* [5]$nul(T) = 2$.

(b) Calcule la imagen de T, una base de la imagen y su dimensión.

Solución:

$$\text{Sea} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \in Im(T) \Leftrightarrow T\left(ax^3+bx^2+cx+d\right) = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{para algún } ax^3+bx^2+cx+d \in P_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b-2d \\ -2b+c+d \\ -b+c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b-2d & = & e \\ -2b+c+d & = & f \\ -b+c-d & = & g \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -2 & e \\ -2 & 1 & 1 & f \\ -1 & 1 & -1 & g \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -2 & e \\ 0 & 1 & -3 & 2e+f \\ 0 & 1 & -3 & e+g \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -2 & e \\ 0 & 1 & -3 & 2e+f \\ 0 & 0 & 0 & -e-f+g \end{array}\right)$$

El sistema tiene soluciones si y solo si $-e-f+g=0 \Leftrightarrow e=-f+g$.

$$\text{Por lo que, } Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -f+g \\ f \\ g \end{pmatrix} \Big/ \ f, g \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{Y como} \begin{pmatrix} -f+g \\ f \\ g \end{pmatrix} = f \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[5]$nul(T)$ *conocida como la nulidad de* T, *es la dimensión del núcleo de* T.

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Entonces se tiene que* $Gen(B) = Im(T)$ *y además* B *es linealmente independiente, pues los vectores no son múltiplos.*

Por lo tanto, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $Im(T)$ *y* [6]$rang(T) = 2$.

(c) Calcule las preimágenes de $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Buscamos $ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tal que*:

$$\begin{aligned} T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) &= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b - 2d \\ -2b + c + d \\ -b + c - d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} b - 2d &=& -4 \\ -2b + c + d &=& 3 \\ -b + c - d &=& -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

[6]$rang(T)$ *conocida como el rango de* T, *es la dimensión de la imagen de* T

Donde obtenemos que $b = 2d - 4$ *y* $c = 3d - 5$ *y sustituyendo en* $ax^3 + bx^2 + cx + d$, *tenemos el polinomio:* $ax^3 + (2d - 4)\,x^2 + (3d - 5)\,x + d$.

Por lo tanto, las preimágenes de $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *son los polinomios de la forma* $ax^3 + (2d - 4)\,x^2 + (3d - 5)\,x + d$, *con* $a, d \in \mathbb{R}$. ■

4. Sea $T \in L(W, H)$. Pruebe que si $\dim(W) < \dim(H)$, entonces T no es sobreyectiva.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos que* $T \in L(W, H)$, *con* $\dim(W) < \dim(H)$.

HQM: T *no es sobreyectiva.*

Supongamos por contradicción que T *es sobreyectiva, entonces se cumple que:*

$$Im(T) = H$$

$$\Longrightarrow \quad \dim\left(Im(T)\right) = \dim(H)$$

Además por hipótesis, se tiene que $\dim(W) < \dim(H)$. *Pero, como* $\dim(Im(T)) = \dim(H) \quad \wedge \quad \dim(W) < \dim(H)$.

$$\Longrightarrow \quad \dim(W) < \dim\left(Im(T)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \dim(W) < \dim(Nucl(T)) + \dim(Im(T)), \text{ pues } dim(Nucl(T)) \geq 0$$

Pero esto último es una contradicción, pues se debe cumplir que $\dim(W) = \dim(Nucl(T)) + \dim(Im(T))$.

Por lo tanto, si $\dim(W) < \dim(H)$, *entonces* T *no es sobreyectiva.* ■

5. Sea $T \in L\left(\mathbb{R}^3, P_2\right)$. Si $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+2b+c)x^2 + (4a+b+2c)x - a + b$.

(a) Pruebe que T es un isomorfismo.

Solución:

Para probar que T es un isomorfismo, se debe cumplir que T sea inyectiva y sobreyectiva.

Empezemos con la inyectividad, para ello calculemos el $Nucl(T)$:

$$\text{Sea } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Nu(T) \Leftrightarrow T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+2b+c)\,x^2 + (4a+b+2c)x - a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b+c & = & 0 \\ 4a+b+2c & = & 0 \\ -a+b & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene que $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$.

Entonces $Nucl(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, *es decir T es inyectiva.*

Por otro lado se tiene que $rang(T) = 3$, pues $nul(T) = 0$. (Debe cumplirse que $nul(T) + rang(T) = \dim P_2$)

Como $\dim(Im(T)) = 3 \ \wedge \ Im(T) \prec P_2 \Longrightarrow Im(T) = P_2 \Longrightarrow T$ *es sobreyectiva.*

Por lo tanto, T es biyectiva, o mejor dicho, T es un isomorfismo.

(b) Calcule el criterio de T^{-1}.

Solución:

Se desea encontrar el criterio de T^{-1}, es decir:

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(ex^2+fx+g\right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad ex^2+fx+g &= T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad ex^2+fx+g &= (a+2b+c)\,x^2+(4a+b+2c)\,x-a+b \end{aligned}$$

Necesariamente se cumple que:

$$\begin{cases} a+2b+c &= & e \\ 4a+b+2c &= & f \\ -a+b &= & g \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & e \\ 4 & 1 & 2 & f \\ -1 & 1 & 0 & g \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{-4F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & e \\ 0 & -7 & -2 & -4e+f \\ 0 & 3 & 1 & e+g \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{7}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & e \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} & \dfrac{4e-f}{7} \\ 0 & 3 & 1 & e+g \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_2+F_3]{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{3}{7} & \dfrac{-e+2f}{7} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} & \dfrac{4e-f}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{7} & \dfrac{-5e+3f+7g}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{7F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{3}{7} & \dfrac{-e+2f}{7} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} & \dfrac{4e-f}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -5e+3f+7g \end{array}\right) \underset{-\frac{2}{7}F_3+F_2}{\xrightarrow{-\frac{3}{7}F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \dfrac{14e-7f-21g}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{14e-7f-14g}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -5e+3f+7g \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el criterio $T^{-1}\left(ex^2+fx+g\right) = \begin{pmatrix} 2e-f-3g \\ 2e-f-2g \\ -5e+3f+7g \end{pmatrix}$. ■

6. Sea $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que $T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 2a+b \\ b-2c \end{pmatrix}$ y sean $B_1 = \{2x^2, -x+1, 3x+1\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bases ordenadas de P_2 y de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Calcule [7] $[T]_{B_1}^{B_2}$.

Solución:

Calculamos las imágenes de los elementos de B_1 *y luego las escribimos como combinación lineal de los elementos de* B_2.

Tenemos que:

- $$T\left(2x^2\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -C_2 + C_3 & = & 2 \\ C_1 + C_2 & = & 4 \\ C_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donde obtenemos que $C_1 = 0$, $C_2 = 4$ *y* $C_3 = 6$. *Entonces, se tiene que* $[T(v_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

[7] *La notación* $[T]_{B_1}^{B_2}$ *se lee como la matriz representación de* T *de la base* B_1 *a* B_2.

- $$T\left(-x+1\right)=\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -3 \end{pmatrix}=C_1\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcr} -C_2+C_3 & = & 0\\ C_1+C_2 & = & -1\\ C_1 & = & -3 \end{array}\right.$$

Donde obtenemos que $C_1=-3$, $C_2=2$ *y* $C_3=2$. *Entonces se tiene que* $[T(v_2)]_{B_2}=\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 2 \end{pmatrix}$.

- $$T\left(3x+1\right)=\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 1 \end{pmatrix}=C_1\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} -C_2+C_3 & = & 4\\ C_1+C_2 & = & 3\\ C_1 & = & 1 \end{array}\right.$$

Donde obtenemos que $C_1=1$, $C_2=2$ *y* $C_3=6$. *Entonces se tiene* $[T(v_3)]_{B_2}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 6 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, se tiene que $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. ■

7. Considere la función $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} a+c \\ a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$.

(a) Pruebe que T es un isomorfismo.

Solución:

Se debe probar que T cumple la inyectividad y sobreyectividad, para que T sea un isormorfismo.

Para ello, empezamos probando la inyectividad.

Primero calculemos el $Nucl(T)$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c \in Nu(T) &\Leftrightarrow T\left(ax^2+bx+c\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c \\ a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 0 \\ a+b-c &=& 0 \\ -a+b+c &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $a=0$, $b=0$ y $c=0$.

Entonces, se tiene que $Nu(T)=\{0\}$, es decir T es inyectiva.

Por otro lado se tiene que $rang(T) = 3$, pues $nul(T) = 0$. (Recuerde que debe cumplirse que $nul(T)+rang(T) = \dim P_2$)

Como $\dim(Im(T)) = 3 \ \wedge \ Im(T) \prec P_2 \Rightarrow Im(T) = P_2 \Rightarrow T$ *es sobreyectiva.*

Por lo tanto, concluimos que T es un isomorfismo.

(b) Calcule el criterio de T^{-1}.

Solución:

Se desea encontrar el criterio de T^{-1}*, es decir:*

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} &= ax^2+bx+c \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} &= T\left(ax^2+bx+c\right) \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c \\ a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& e \\ a+b-c &=& f \\ -a+b+c &=& g \end{array} \right. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & e \\ 1 & 1 & -1 & f \\ -1 & 1 & 1 & g \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 1 & -2 & -e+f \\ 0 & 1 & 2 & e+g \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 1 & -2 & -e+f \\ 0 & 0 & 4 & 2e-f+g \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & e \\ 0 & 1 & -2 & -e+f \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2e-f+g}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2F_3+F_2]{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2e+f-g}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{f+g}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2e-g+f}{4} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el criterio $T^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \left(\dfrac{2e+f-g}{4}\right)x^2 + \left(\dfrac{f+g}{2}\right)x + \dfrac{2e-g+f}{4}$. ■

8. Sea $T \in L(V,W)$. Demuestre que $Im(T) \prec W$, es decir, pruebe que $Im(T)$ es subespacio de W.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos que* $T \in L(V,W)$, *donde* $Im(T)$ *es la imagen de* T.

HQM: $Im(T)$ *es subespacio de* W.

Es claro que $Im(T) \subseteq W$. *Además* $Im(T) \neq \emptyset$, *pues* $0_w \in Im(T)$ *ya que* $T(0_v) = 0_w$.

Luego, $Im(T)$ *es subespacio de* W, *si se cumple que:*

$$\odot \quad \forall v, w \in Im(T) \qquad v + w \in Im(T).$$

$$\odot \quad \forall \alpha \in Im(t) \qquad \alpha v \in Im(T).$$

Procedamos con la prueba:

1. *Sean* $v, w \in Im(T)$.

$$\exists x, y \in V \ / \ T(x) = v \ \wedge \ T(y) = w$$

$$\Rightarrow \ T(x) + T(y) = v + w$$

$$\Rightarrow \ T(x+y) = v + w, \text{ es decir, } x + y \in W \text{ es preimagen de } v + w.$$

$$\Rightarrow \quad v + w \in Im(T)$$

2. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ v \in Im(T)$.

$$\begin{aligned} & \exists x \in V \ / \ T(x) = v \\ \Rightarrow \quad & \alpha \cdot T(x) = \alpha v \\ \Rightarrow \quad & T(\alpha v) = \alpha v \\ \Rightarrow \quad & \alpha v \in Im(T) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que $Im(T) \prec W$. ■

9. Sea $T \in L\left(P_2, M_{2\times 3}\right)$. Si $T\left(x^2 - x\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T(3x+2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule el criterio de T.

Solución:

Buscamos C_1, C_2 *y* C_3 *tales que:*

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = C_1 \cdot \left(x^2 - x\right) + C_2 \cdot (x+1) + C_3 \cdot (3x+2) \\ \Leftrightarrow \quad & ax^2 + bx + c = C_1 x^2 + \left(-C_1 + C_2 + 3C_3\right) x + C_2 + 2C_3 \end{aligned}$$

Necesariamente se cumple que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & a \\ -C_1 + C_2 + 3C_3 & = & b \\ C_2 + 2C_3 & = & c \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 3 & b \\ 0 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & a+b \\ 0 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & a+b \\ 0 & 0 & -1 & -a-b+c \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & a+b-c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -2a-2b+3c \\ 0 & 0 & 1 & a+b-c \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $C_1 = a$, $C_2 = -2a-2b+3c$ *y* $C_3 = a+b-c$.

Así,

$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x^2-x\right) + (-2a-2b+3c)\cdot(x+1) + (a+b-c)\cdot(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow\ T\left(ax^2+bx+c\right) = a\cdot T\left(x^2-x\right) + (-2a-2b+3c)\cdot T(x+1) + (a+b-c)\cdot T(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow\ T\left(ax^2+bx+c\right) = a\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2a-2b+3c)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (a+b-c)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} -2a-2b+3c & a+a+b-c & 2a+2b-3c+2a+2b-2c \\ 2a-4a-4b+6c+a+b-c & 0 & a+a+b-c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} -2a-2b+3c & 2a+b-c & 4a+4b-5c \\ -a-3b+5c & 0 & 2a+b-c \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el criterio es $T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} -2a-2b+3c & 2a+b-c & 4a+4b-5c \\ -a-3b+5c & 0 & 2a+b-c \end{pmatrix}$. ■

10. Sea $T \in L(V, W)$. Demuestre que si T es inyectiva y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de V, entonces $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es también un conjunto de vectores linealmente independiente.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos que* $T \in L(V, W)$, *donde* T *es inyectiva. Además* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es un conjunto linealmente independiente de* V.

HQM: $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Sean $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$C_1T(v_1) + C_2T(v_2) + ... + C_nT(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(C_1 \cdot v_1) + T(C_2 \cdot v_2) + ... + T(C_n \cdot v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(C_1v_1 + C_2v_2 + ... + C_nv_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1v_1 + C_2v_2 + ... + C_nv_n \in Nu(T)$$

Y como $Nu(T) = \{0\}$, *pues* T *es inyectiva.*

$$\Rightarrow \quad C_1v_1 + C_2v_2 + ... + C_nv_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, C_2 = 0, ..., C_n = 0, \ \ \textit{pues } \{v_1, v_2, ..., v_n\} \ \textit{es li}$$

Por lo tanto, $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independiente.* ■

11. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, cuyo criterio es $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 2a-c \end{pmatrix}$. Sean B_1 y B_2 las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ dadas por $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, respectivamente.

(a) Calcule $[T]_{B_1}^{B_2}$.

Solución:

Calculamos las imágenes de los elementos de B_1 y luego las escribimos como combinación lineal de los elementos de B_2.

Tenemos que:

- $$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + C_2 &= 6 \\ C_1 - 2C_2 &= -1 \end{cases}$$

Donde obtenemos que $C_1 = \dfrac{11}{5}$ *y* $C_2 = \dfrac{8}{5}$. *Entonces, se tiene que* $[T(v_1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{pmatrix}$.

- $$T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 - 2C_2 &= 1 \end{cases}$$

Donde obtenemos que $C_1 = \dfrac{3}{5}$ *y* $C_2 = \dfrac{-1}{5}$. *Entonces, se tiene que* $[T(v_2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{-1}{5} \end{pmatrix}$.

$$\bullet \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2C_1 + C_2 & = & 2 \\ C_1 - 2C_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

Donde obtenemos que $C_1 = \dfrac{6}{5}$ *y* $C_2 = \dfrac{-2}{5}$. *Entonces, se tiene que* $[T(v_3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{5} \\ \\ \dfrac{-2}{5} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, se tiene que $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{6}{5} \\ \\ \dfrac{8}{5} & \dfrac{-1}{5} & \dfrac{-2}{5} \end{pmatrix}$.

(b) Si $[w]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, utilice la matriz de transición de T para calcular $T(w)$.

Solución:

Sabemos por teorema que $[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [w]_{B_1} = [T(w)]_{B_2}$.

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{11}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{6}{5} \\ \\ \dfrac{8}{5} & \dfrac{-1}{5} & \dfrac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = [T(w)]_{B_2}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \\ \dfrac{-13}{5} \end{pmatrix} = [T(w)]_{B_2}$$

$$\Rightarrow\ T(w) = \frac{4}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-13}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ T(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que $T(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. ■

12. Considere la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule el polinomio característico y compruebe que sus valores propios son -1 y 8.

Solución:

Para hallar el polinomio característico, se debe calcular $\det(A - \lambda I_3)$, *donde* A *es la matriz dada.*

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\left(-3\lambda + \lambda^2 - 4\right) - 2\,(6 - 2\lambda - 8) + 4\,(4 + 4\lambda) \\
&= -9\lambda + 3\lambda^2 - 12 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda + 4 + 16 + 16\lambda \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8
\end{aligned}$$

Entonces el polinomio característico es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$.

Así, los valores propios son:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 8 \ \wedge \ \lambda = -1$$

(b) Calcule una base para el espacio propio asociado a $\lambda = -1$.

Solución:

Sustituyendo $\lambda = -1$ *en* $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. *Se obtiene que:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $x = \dfrac{-1}{2}y - z$.

Entonces, $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ y, z \in \mathbb{R} \right\}$. *Y como* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Entonces, se tiene que* $Gen(B) = E_{-1}$ *y además* B *es un conjunto* *linealmente independiente, pues los vectores no son múltiplos.*

Por lo tanto, B es una base de E_{-1}. $\blacksquare$

13. Sea $T \in L\left(M_{2\times 2}, \mathbb{R}^3\right)$ y sean B_1 y B_2 bases ordenadas de $M_{2\times 2}$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, dadas por $B_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y se sabe que $v = 2u_1 - u_3 + 3u_2$, calcule $T(v)$.

Solución:

Sabemos por teorema que $[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}$.

Además como $v = 2u_1 - u_3 + 3u_2 \Longrightarrow [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tenemos, así que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = [T(v)]_{B_2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = [T(v)]_{B_2}$$

$$\Rightarrow T(v) = 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(v) = \begin{pmatrix} -30 \\ -27 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que $T(v) = \begin{pmatrix} -30 \\ -27 \\ 22 \end{pmatrix}$. ■

14. Demuestre que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son valores propios de una matriz A de orden n, entonces también son valores propios de A^t.

Solución:

Hipótesis: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *son valores propios de una matriz* A.

HQM: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *son valores propios de la matriz* A^t.

Tenemos que:

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ son valores propios de una matriz } A.$$

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ son las soluciones de la ecuación } |A - \lambda I_n| = 0$$

Haciendo uso del resultado de determinantes: Si A *es una matriz de* $n \times n$ *entonces* $|A| = |A^t|$.

Entonces, $|A - \lambda I_n| = \left|(A - \lambda I_n)^t\right| \Longrightarrow |A - \lambda I_n| = \left|A^t - \lambda {I_n}^t\right| \Longrightarrow |A - \lambda I_n| = \left|A^t - \lambda I_n\right|$.

Como $|A - \lambda I_n| = \left|A^t - \lambda I_n\right|$, *podemos decir que*:

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ son las soluciones de la ecuación } \left|A^t - \lambda I_n\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ son valores propios de } A^t.$$

Por lo tanto, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *son valores propios de la matriz* A^t. ■

15. Considere la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. Calcule su polinomio característico, sus valores propios y una base para cada espacio.

Solución:

Para hallar el polinomio característico, se debe calcular $\det(A - \lambda I_3)$*, donde* A *es la matriz dada.*

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)\Big((4-\lambda)(-4-\lambda) + 12\Big) + 6 \cdot (4 + \lambda - 6) - 6 \cdot (6 - 12 + 3\lambda) \\
&= (5-\lambda)\left(-16 - 4\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 12\right) + 6 \cdot (-2 + \lambda) - 6 \cdot (-6 + 3\lambda) \\
&= (5-\lambda)\left(-4 + \lambda^2\right) - 12 + 6\lambda + 36 - 18\lambda \\
&= -20 + 5\lambda^2 + 4\lambda - \lambda^3 - 12 + 6\lambda + 36 - 18\lambda \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4
\end{aligned}$$

Entonces el polinomio característico es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$.

Así, los valores propios son:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \wedge \quad \lambda = 2$$

Ahora calculemos los espacios E_1 y E_2:

- $\underline{\lambda = 1}$.

Sustituyendo $\lambda = 1$ *en* $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix}$. *Se obtiene que*:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{3}F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{3}{2}F_2+F_3]{\frac{3}{2}F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $x = z$ *y* $y = \dfrac{-1}{3}z$.

Entonces $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -\frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} \Big/ z \in \mathbb{R} \right\}$. *Y como* $\begin{pmatrix} z \\ -\frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Entonces, se tiene que* $Gen(B) = E_{-1}$ *y además* B *es un conjunto* *linealmente independiente.*

Por lo tanto, B es una base de E_{-1}.

- $\underline{\lambda = 2}$.

Sustituyendo $\lambda = 2$ en $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix}$. *Se obtiene que*:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donde obtenemos que $x = 2y + 2z$

Entonces $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ y, z \in \mathbb{R} \right\}$. *Y como* $\begin{pmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sea $C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Entonces, se tiene que $Gen(C) = E_2$ y además C es un conjunto linealmente independiente, pues los vectores no son múltiplos.*

Por lo tanto, C es una base de E_2. ■

16. Sea A una matriz invertible de tamaño n y λ un valor propio de A. Demuestre que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

Solución:

Hipótesis: *Tenemos una matriz invertible A, donde λ es un propio de A.*

HQM: λ^{-1} *es un valor propio de A^{-1}.*

Sea v el vector propio asociado a λ, con $v \neq 0$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
& Av = \lambda v \quad (\textit{Hipótesis}) \\
\Rightarrow\ & A^{-1}(Av) = A^{-1} \cdot \lambda v \\
\Rightarrow\ & \left(A^{-1}A\right) v = A^{-1} \cdot \lambda v \\
\Rightarrow\ & I_n \cdot v = A^{-1} \cdot \lambda v \\
\Rightarrow\ & \lambda^{-1} v = \lambda^{-1}\left(A^{-1} \cdot \lambda v\right) \\
\Rightarrow\ & \lambda^{-1} v = \left(\lambda^{-1} \cdot \lambda\right) A^{-1} v \\
\Rightarrow\ & \lambda^{-1} v = A^{-1} v \\
\Rightarrow\ & \lambda^{-1} \ \textit{es un valor propio de} \ A^{-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}. ■

Bibliografía

[1] Arce C. (2003). *Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal*. Editorial Universidad de Costa Rica: San José, Costa Rica.

[2] Ávila E. (sf). *Álgebra Lineal para Computación*. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.

[3] Barrantes H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. 2a ed. Editorial Universidad Estatal a Distancia: San José, Costa Rica

[4] González F. (2003). *Álgebra I*. 2 reimp. de la 1 ed. Editorial Universidad Estatal a Distancia: San José, Costa Rica.

[5] Mata J. (2010). *Ejercicios Resueltos de Matemática Discreta*. 2a ed. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.

[6] Murillo M. (2009). *Introducción a la Matemática Discreta*. 3a ed. Editorial Tecnológica de Costa Rica: Cartago, Costa Rica.

[7] Páez C. (2010). *Espacios Vectoriales*. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.

[8] Páez C. (2010). *Estructuras Algebraicas*. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.

[9] Páez C. (2013). *Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.

[10] Páez C. (2010). *Transformaciones Lineales*. Publicaciones ITCR: Cartago, Costa Rica.