

Ecuación diferencial mediante cambio de Variable

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde

Considere la ecuación diferencial

1

$$\frac{y'}{y} - \frac{2 \ln y}{x} = \ln x$$

en el intervalo $]0, +\infty[$ y aplique el cambio de variable

2

$$z = \frac{x}{\ln y}$$

para resolverla.

1

$$\frac{y'}{y} - \frac{2 \ln y}{x} = \ln x$$

2

$$z = \frac{x}{\ln y}$$

3

$$x z' + z = -\ln(x) \cdot z^2$$

- De la ecuación 2 se obtiene:

$$y = e^{\frac{x}{z}}$$

- Derivando con respecto a x

$$y' = e^{\frac{x}{z}} \left(\frac{z - xz'}{z^2} \right)$$

- Sustituyendo en la ecuación diferencial 1

$$\frac{e^{\frac{x}{z}} \left(\frac{z - xz'}{z^2} \right)}{e^{\frac{x}{z}}} - \frac{2}{z} = \ln x$$

$$\Rightarrow x z' + z = -\ln(x) \cdot z^2$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{2 \ln y}{x} = \ln x$$

1

3

$$x \cdot z' + z = -\ln(x) \cdot z^2$$

4

$$v' - \frac{v}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

- Note ED **3** es de **Bernoulli en $z(x)$** , luego tome el cambio de variable

$$v = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{v} \Rightarrow z' = \frac{-v'}{v^2} \quad [*]$$

- Utilizando [*] en **3** se tiene:

$$x \left(\frac{-v'}{v^2} \right) + \frac{1}{v} = -\ln(x) \cdot \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow -x v' + v = -\ln x$$

$$\Rightarrow v' - \frac{v}{x} = \frac{\ln x}{x} \quad : \text{ED lineal en } v(x)$$

4

$$v' - \frac{v}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

5

$$\mu(x) = \frac{1}{x}$$

Recuerde que:

$$z = \frac{x}{\ln y} \wedge z = \frac{1}{v}$$

Entonces: $v = \frac{\ln y}{x}$

- Multiplicando **4** por el factor integrante **5**:

$$\frac{v'}{x} - \frac{v}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v}{x}\right)' = \frac{\ln x}{x^2}$$

- Al aplicar integrar a ambos lados se obtiene:

$$\Rightarrow \frac{v}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

- Retomando las variables originales se tiene que la **solución general** viene dada por:

$$\frac{\ln y}{x} = Cx - \ln x - 1$$

Créditos

Vicerrectoría de Docencia

CEDA-TEC Digital

Proyecto de Virtualización 2018

Ecuaciones Diferenciales

M.Sc. Norberto Oviedo Ugalde - Profesor

Bach. Dayana Calderón Prado - Estudiante Asistente

Ing. Luis Carlos Guzmán Arias - Coordinador de Diseño