Semana 2

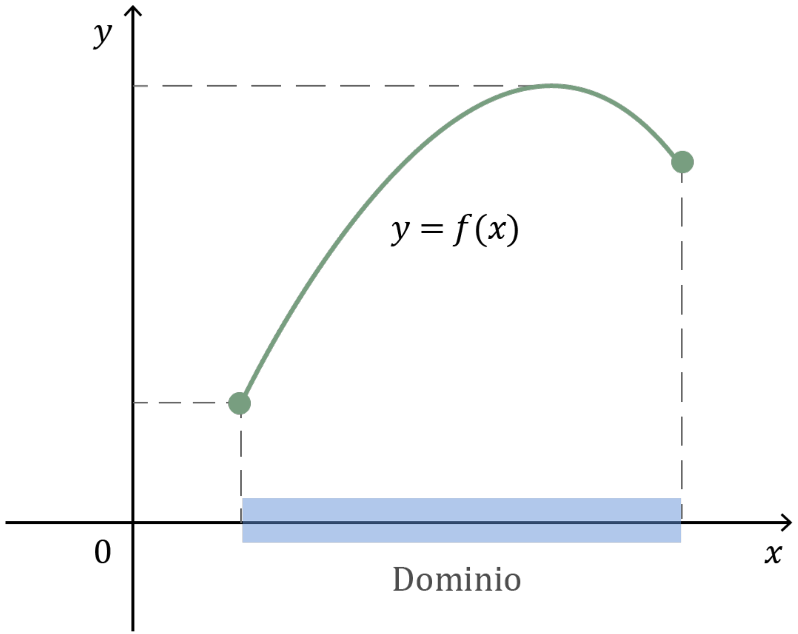
Fundamentos II

II Semestre 2021

Prof.: Lourdes Quesada Villalobos

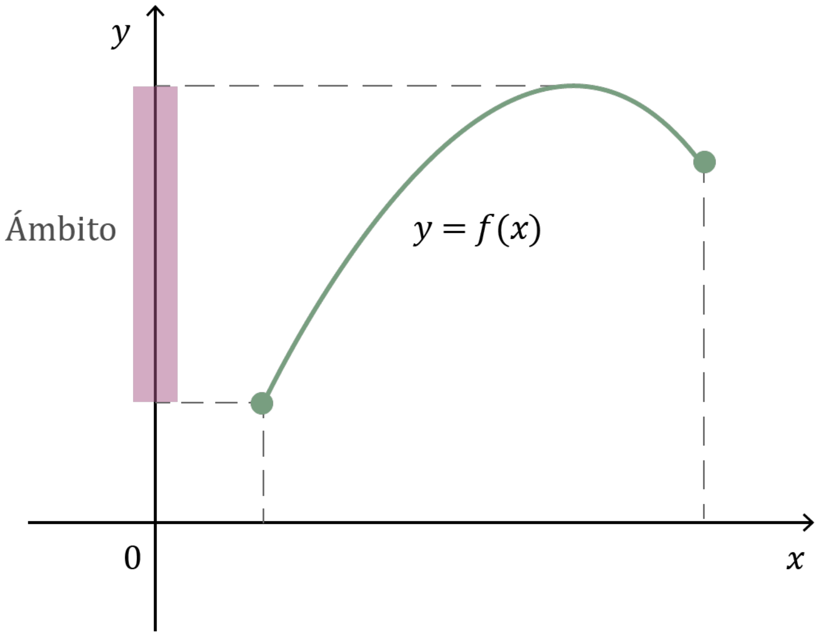
Dominio desde la gráfica

El dominio es la proyección perpendicular de la gráfica sobre el eje x.



Ámbito desde la gráfica

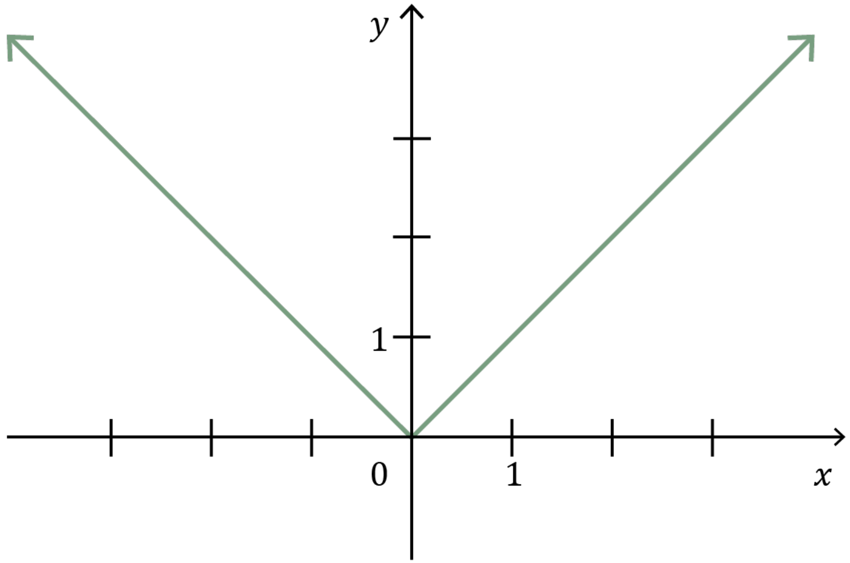
El ámbito es la proyección perpendicular de la gráfica sobre el eje y.



Ejemplos

Mediante la gráfica determine el dominio y ámbito de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

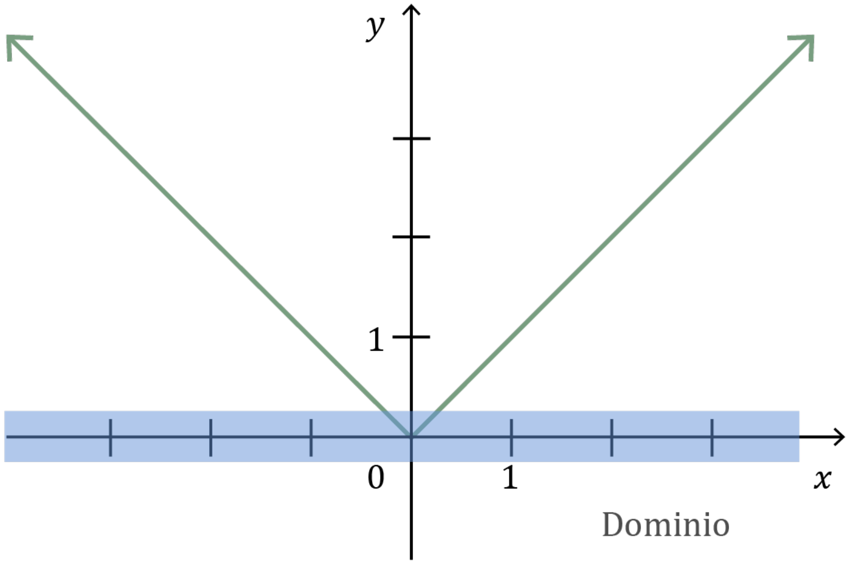


Ejemplos

Mediante la gráfica determine el dominio y ámbito de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R}$$

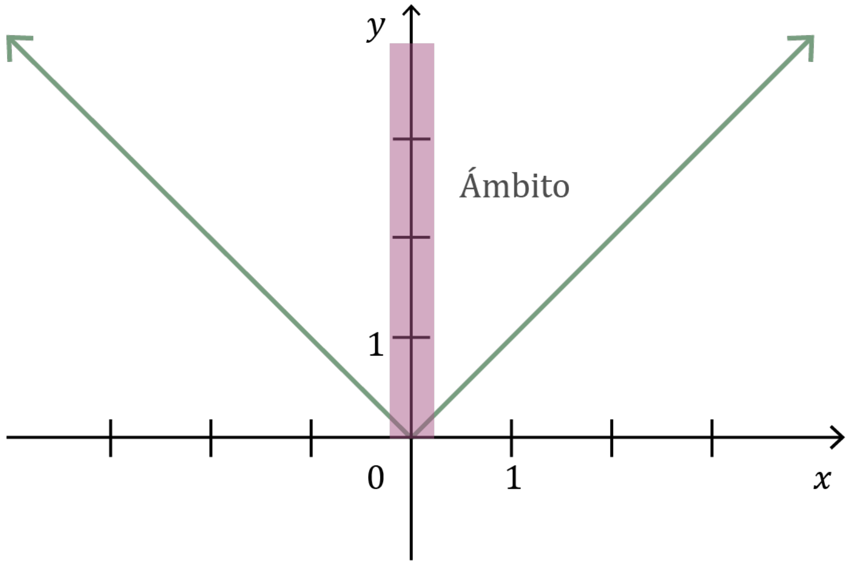


Ejemplos

Mediante la gráfica determine el dominio y ámbito de la función $f: A \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

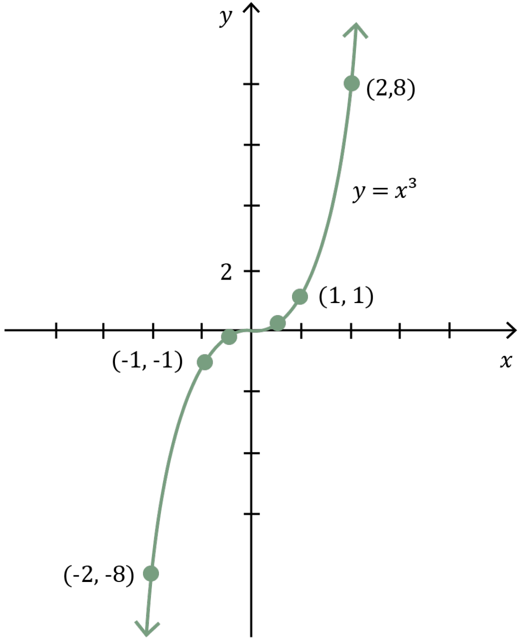
Ámbito $= [0, +\infty[$



Ejemplos

Determine el dominio y ámbito de la función $g: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por

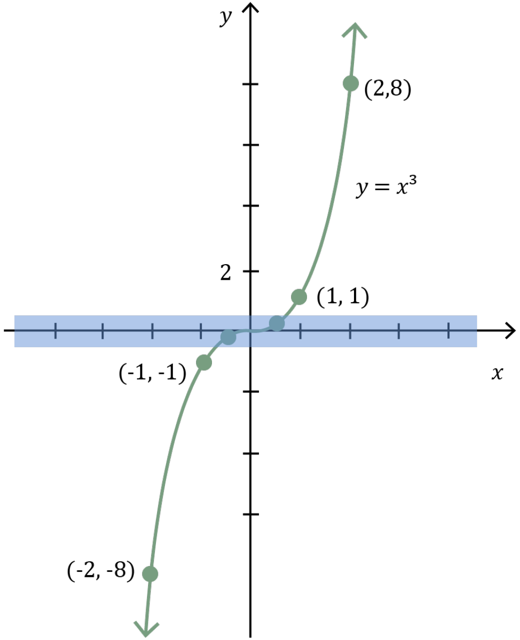
$$g(x) = x^3$$



Ejemplos

Determine el dominio y ámbito de la función $g: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por

$$g(x) = x^3$$



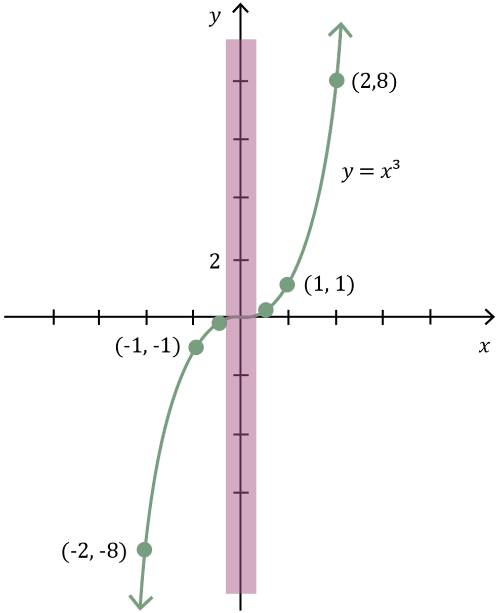
Dominio $= \mathbb{R}$

Ejemplos

Determine el dominio y ámbito de la función $g\colon A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por

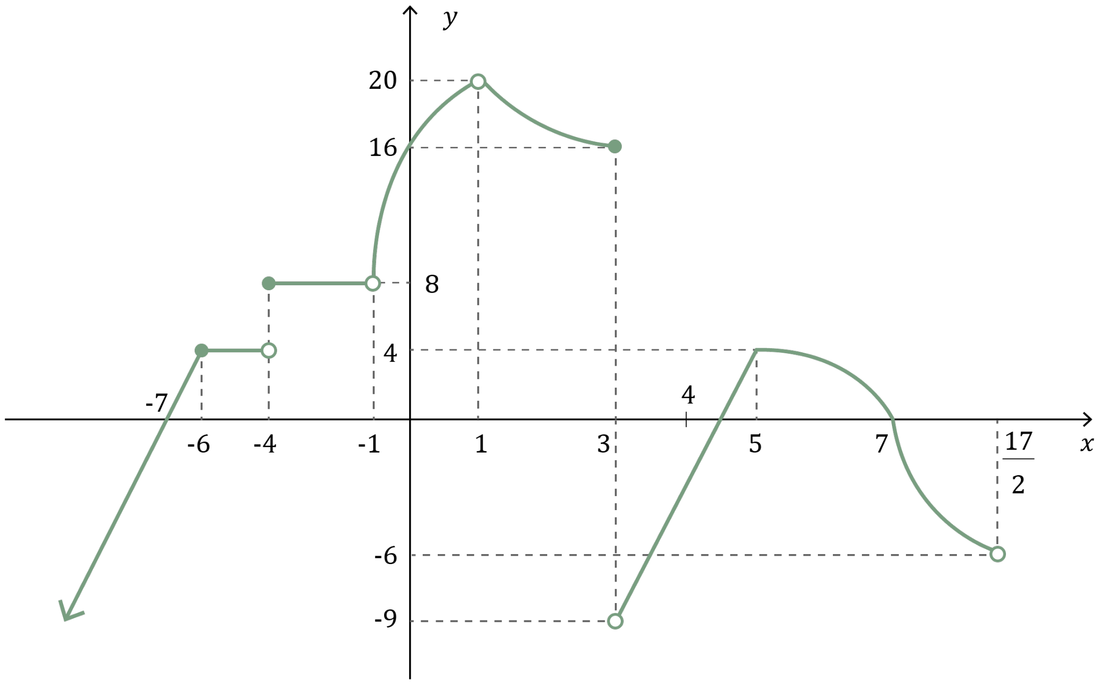
$$g(x) = x^3$$

$$\text{Ámbito} = \mathbb{R}$$



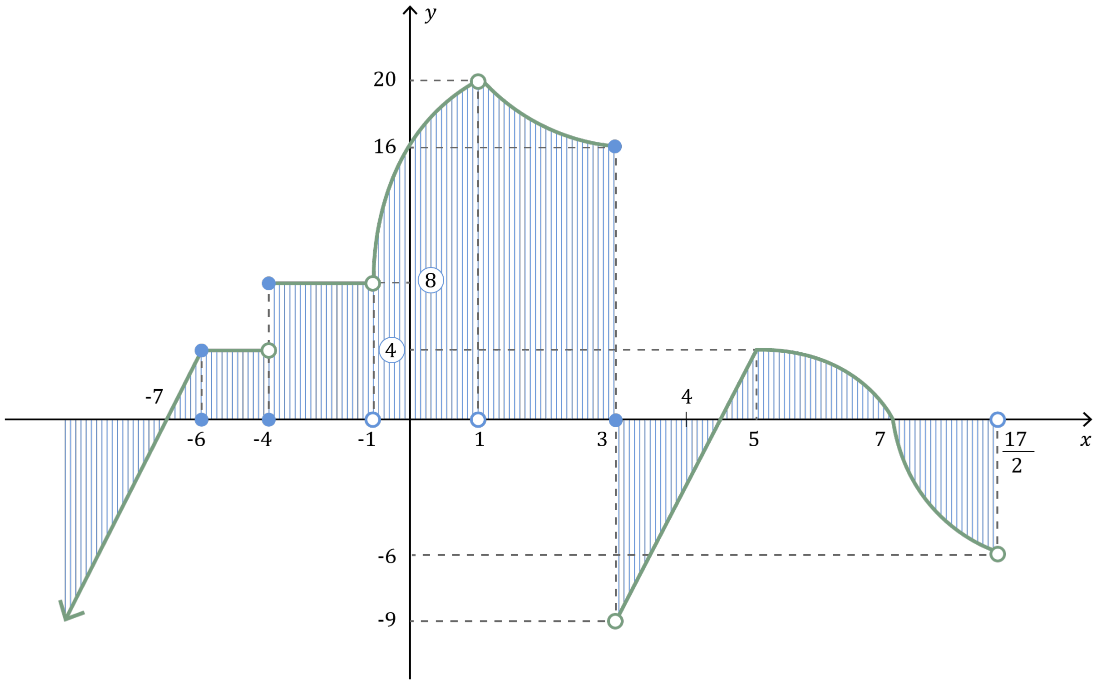
Ejemplos

Determine el dominio de la función $h: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por



Ejemplos

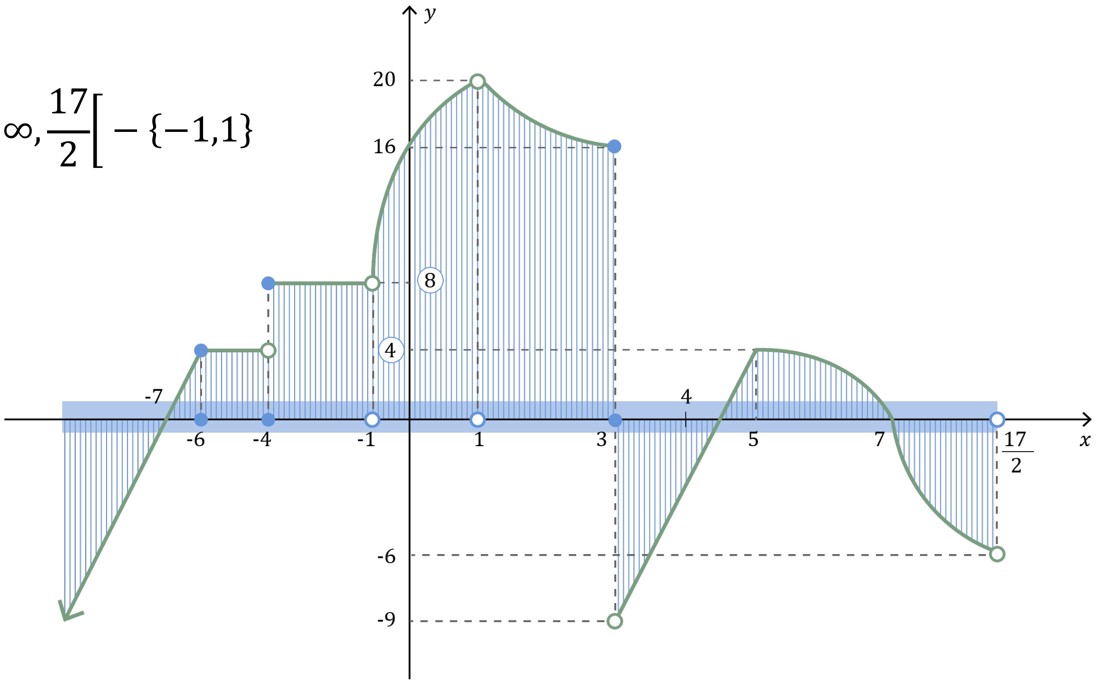
Determine el dominio de la función $h: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por



Ejemplos

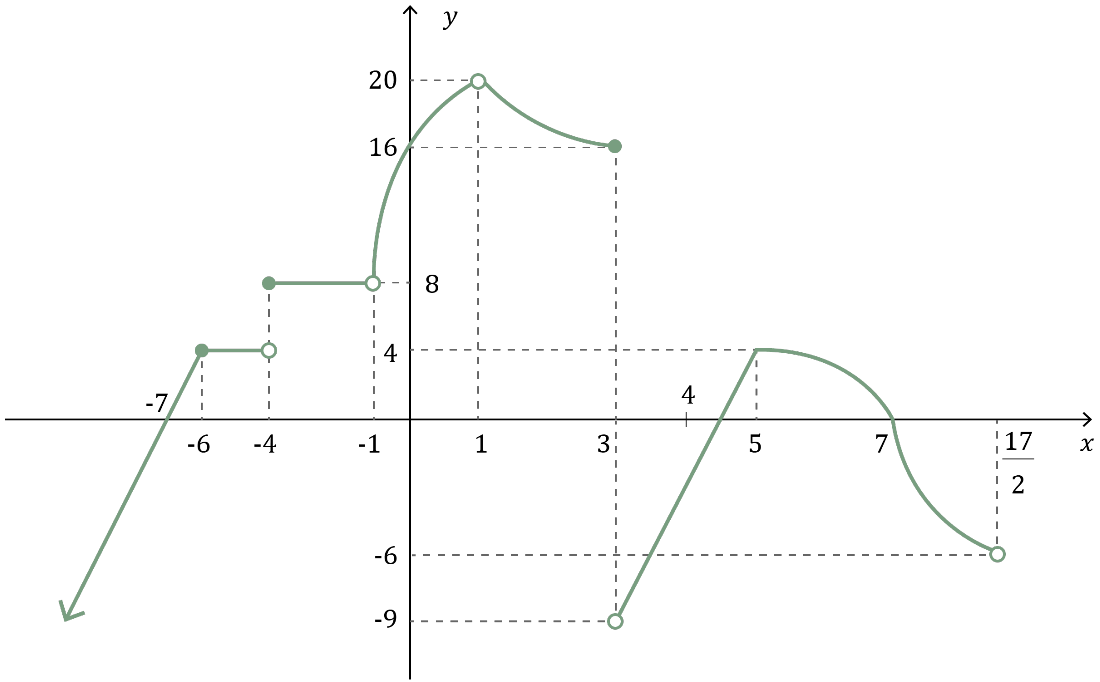
Determine el dominio de la función $h: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por

$$\text{Dominio} = \left]-\infty, \frac{17}{2}\right[- \{-1,1\}$$



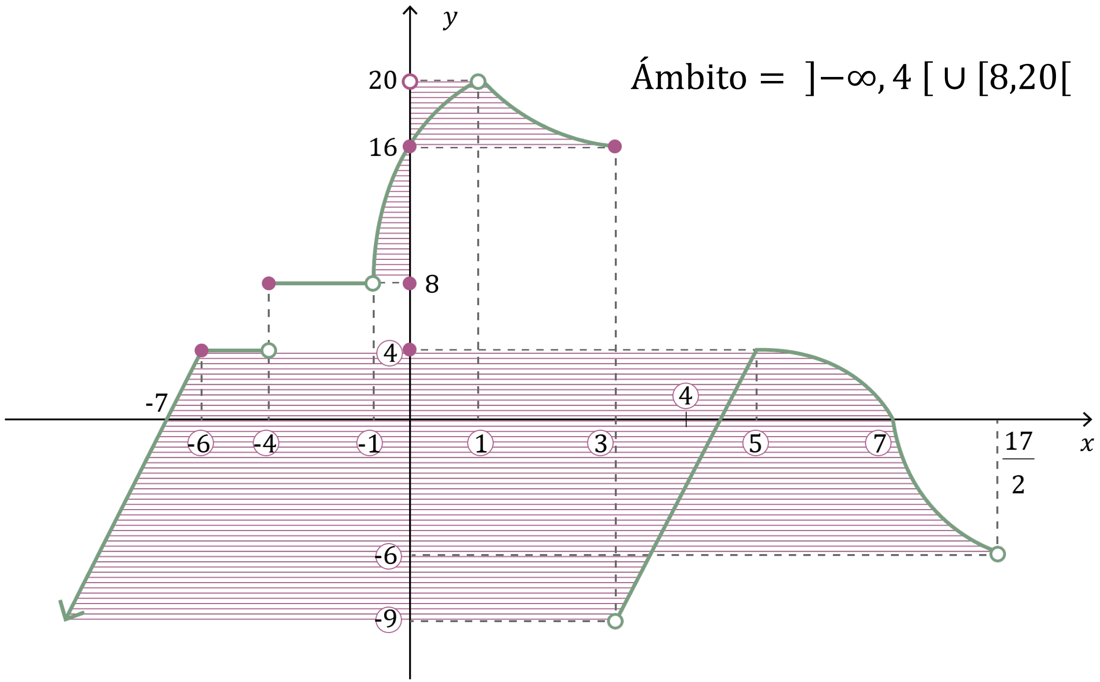
Ejemplos

Determine el ámbito de la función $h: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por



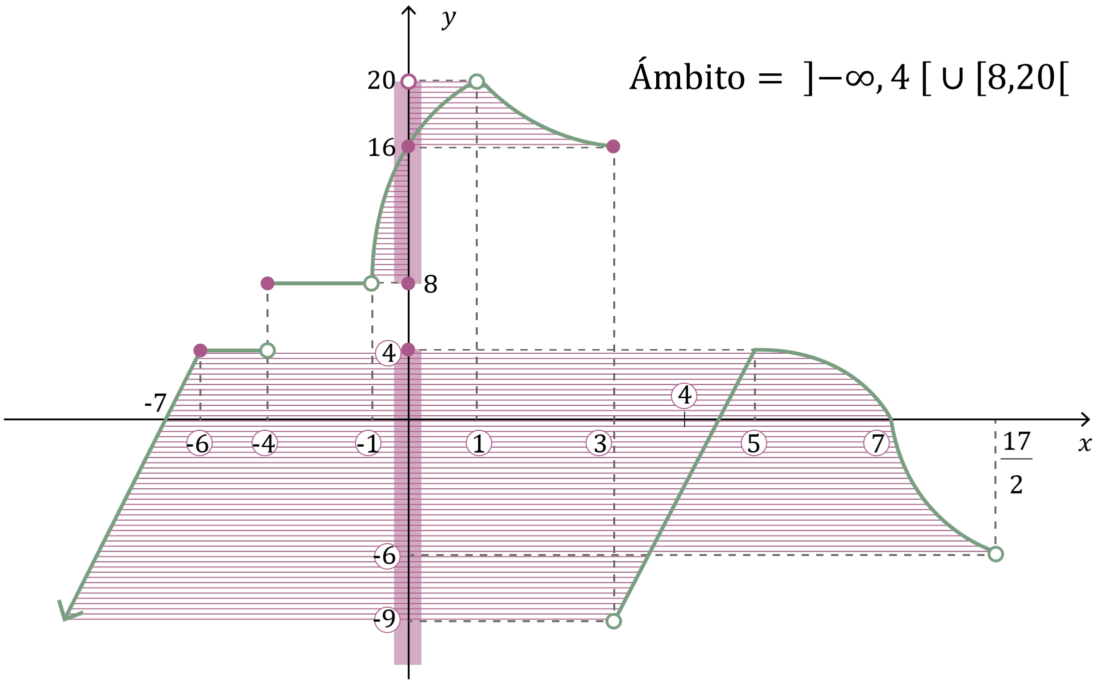
Ejemplos

Determine el ámbito de la función $h\colon A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por



Ejemplos

Determine el ámbito de la función $h: A \to \mathbb{R}$, dada gráficamente por

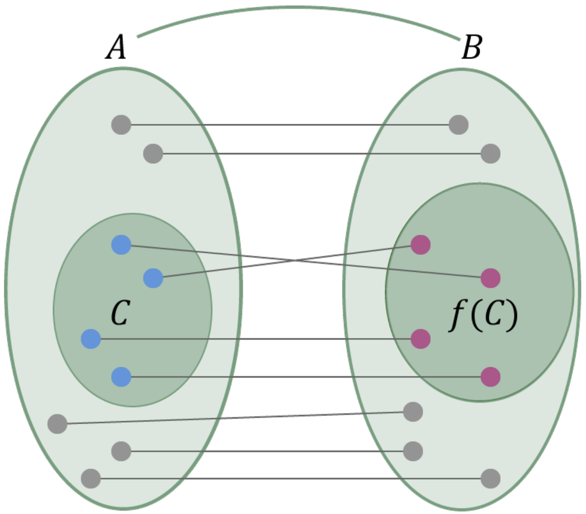


$$\text{Ámbito} = \left]-\infty, 4\right[\cup [8,20[$$

Imagen directa

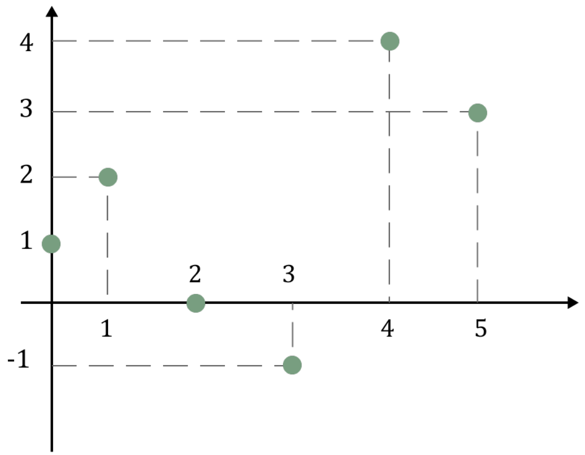
Considere la función $f : A \to B$. Sea $C \subseteq A$ se define la imagen directa de C por:

$$f(C) = \{b \in B \mid \exists a \in C: f(a)=b\} = \{ f(a) \mid a \in C \}$$



Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:



1. Determine D_f , A_f y G_f .
2. Sea $C = \{1, 2, 3\}$, determine $f(C)$

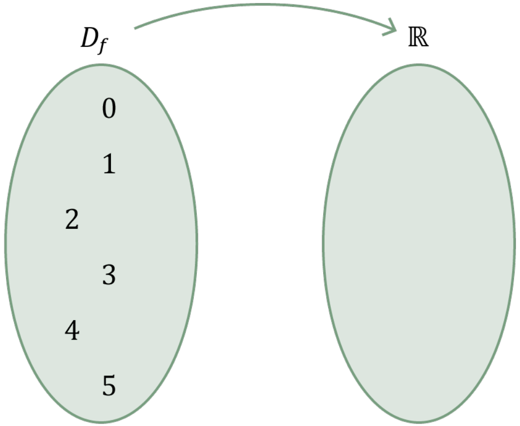
Ejemplos

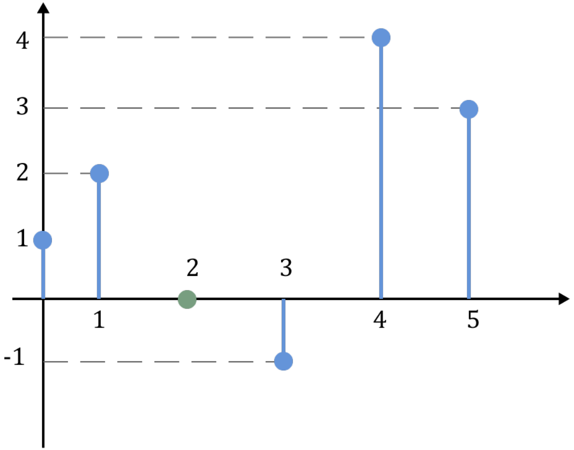
Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:

1. Determine D_f , A_f y G_f .

Dominio

$Df = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$





Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:

1. Determine D_f , A_f y G_f .

Dominio

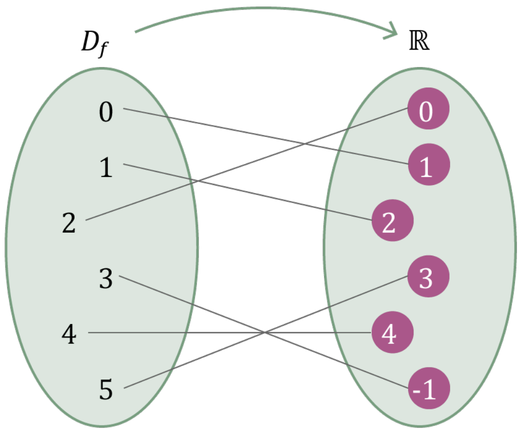
$Df = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$

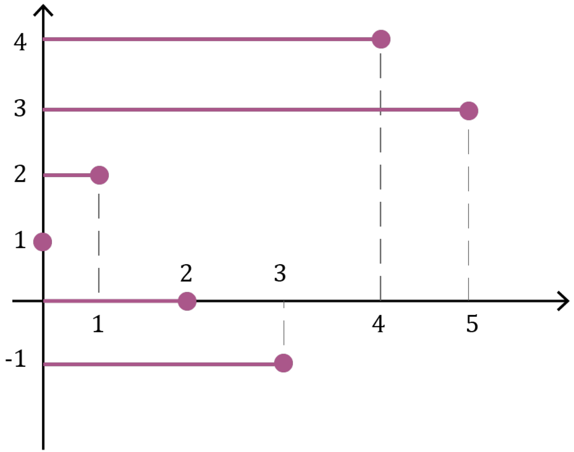
Ámbito

$Af=\{-1,0,1, 2, 3, 4\}$

Gráfico

$Gf=\{(0,1), (1,2), (2,0), (3,-1),(4,4), (5,3)\}$

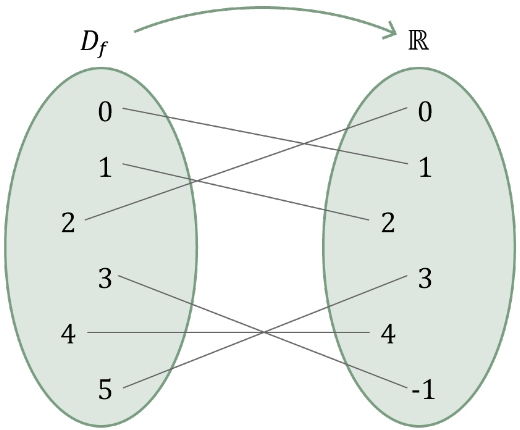


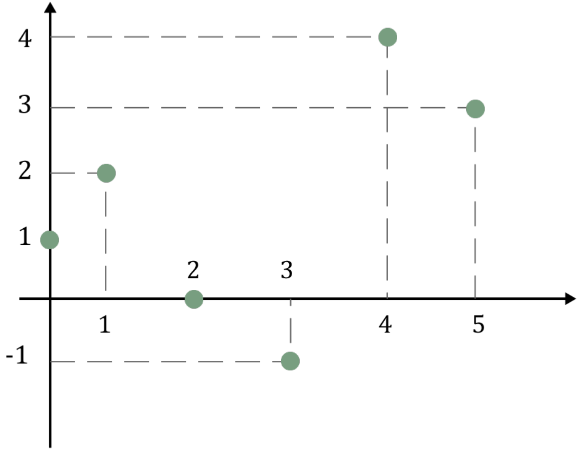


Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:

2. Sea $C = \{1, 2, 3\}$, determine $f(C)$

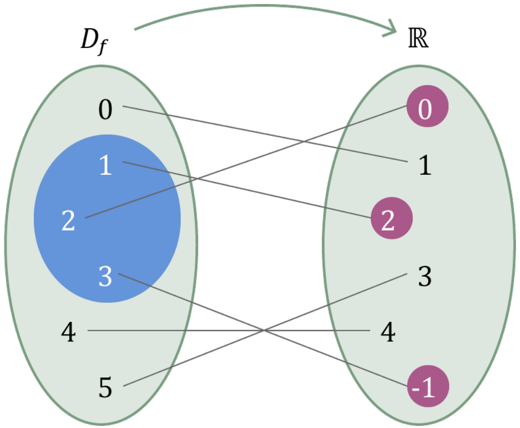


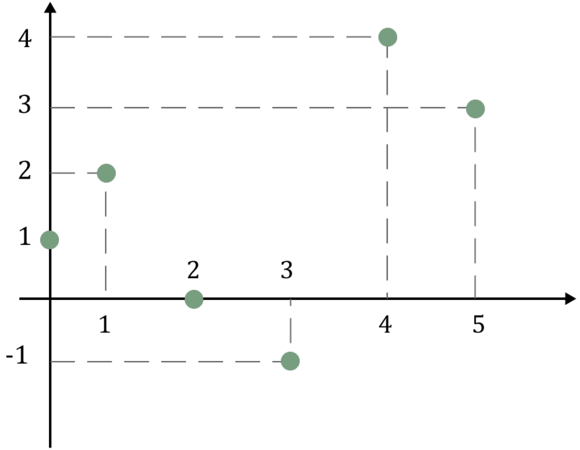


Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:

2. Sea $C = \{1, 2, 3\}$, determine $f(C)$





Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica:

1. Determine D_f , A_f y G_f .
2. Sea C = {1, 2, 3}, determine $f\ (C)$

$Df = \{0,1, 2, 3, 4, 5\}$

$Af = \{-1,0,1, 2, 3, 4\}$

$Gf = \{(0,1), (1,2), (2,0), (3,-1),(4,4), (5,3)\}$

$f(C) = \{-1,0,2\}$

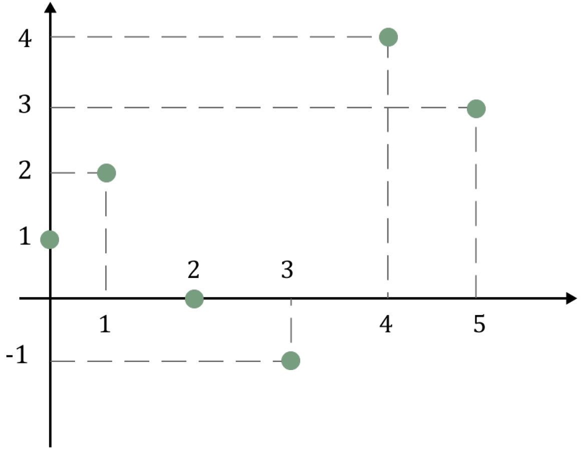
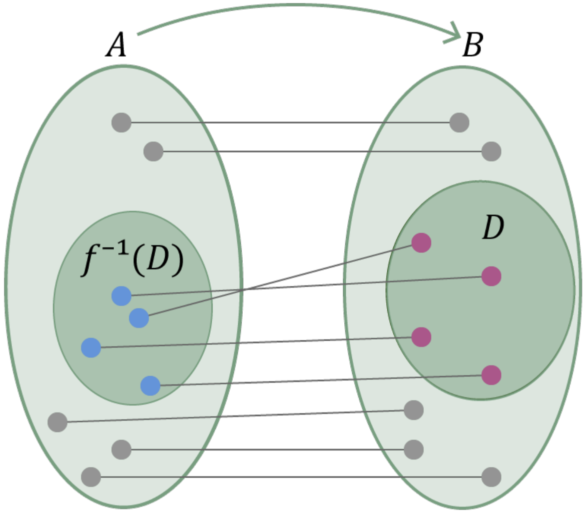


Imagen inversa

Considere la función $f: A \to B$. Sea $D \subseteq B$ se define la imagen inversa de D por:

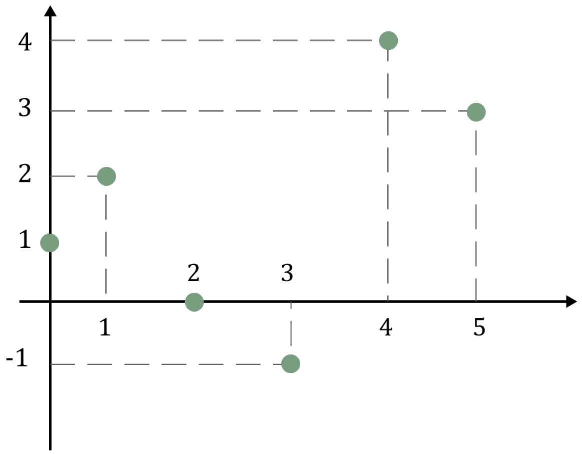
$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid \exists b \in D:\ f(a) = b\} = \{a \mid f(a) \in D\}$$



Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica, y $C = \{1, 2, 3\}$, determine

1. $f^{-1}(f(C))$
2. $f(f^{-1}(C))$



Ejemplos

Considere la función $f: D_f \to \mathbb{R}$, representada por la siguiente gráfica, y $C = \{1, 2, 3\}$, determine

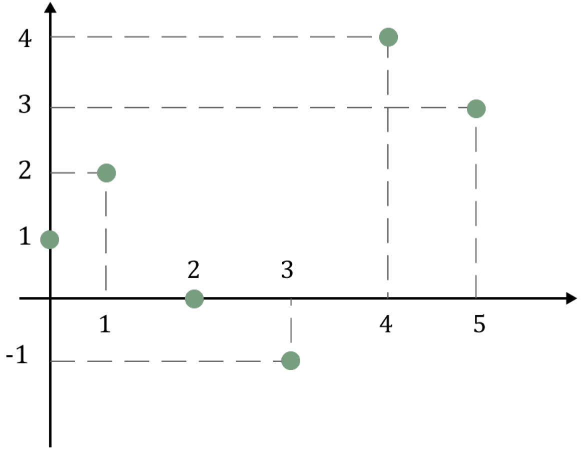
1. $f^{-1}(f(C))$
2. $f(f^{-1}(C))$

$$f(C) = f(\{1,2,3\}) = \{-1,0,2\}$$

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{0, 1, 4, 5\}$$

$$f^{-1}\big(f(C)\big) = f^{-1}(\{-1, 0, 2\}) = \{3, 2, 1, 5\}$$

$$f(f^{-1}(C)) = f(\{0, 1, 4, 5\}) = f(\{1,2,3\})$$



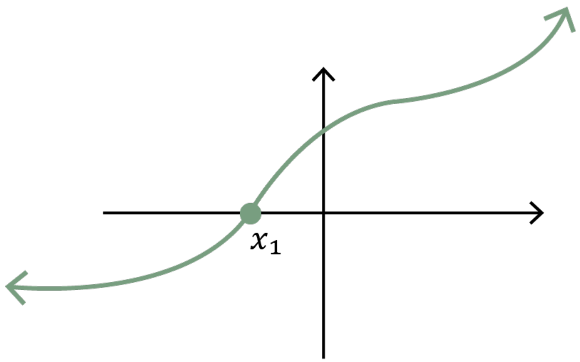
Ecuaciones y funciones

Intersección con el eje x

Sea $f(x)$ una función de variable real. Un valor de x es solución de la ecuación

$$f(x) = 0$$

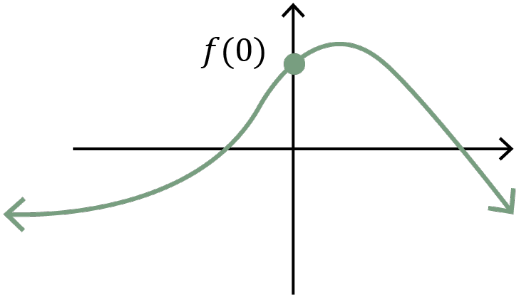
si es una pre imagen de f que satisface la ecuación. Es decir, $x \in Df$. Gráficamente si x_1 es una solución de la ecuación entonces $f(x) = 0$ y la gráfica de f pasa por el punto $(x_1, f(x_1)) = (x_1, 0)$, es decir x_1 es la coordenada X de un **punto de intersección de f con el eje X**



¿Puede o no intersecar una función al eje X?¿cuántas intersecciones con este eje puede tener la función f cómo máximo?

Ecuaciones y funciones

Intersección con el eje y



Sea $f(x)$ una función de variable real.
El valor $y=f(0)$ corresponde a la **intersección de f con el eje $\mathbf{Y}$**, siempre que $0 \in D_f$.

Es decir, si el punto $(0, f(0)) \in G_f$ entonces la función f corta al eje Y.

¿Puede o no intersecar una función al eje Y?¿cuántas intersecciones con este eje puede tener la función f cómo máximo?

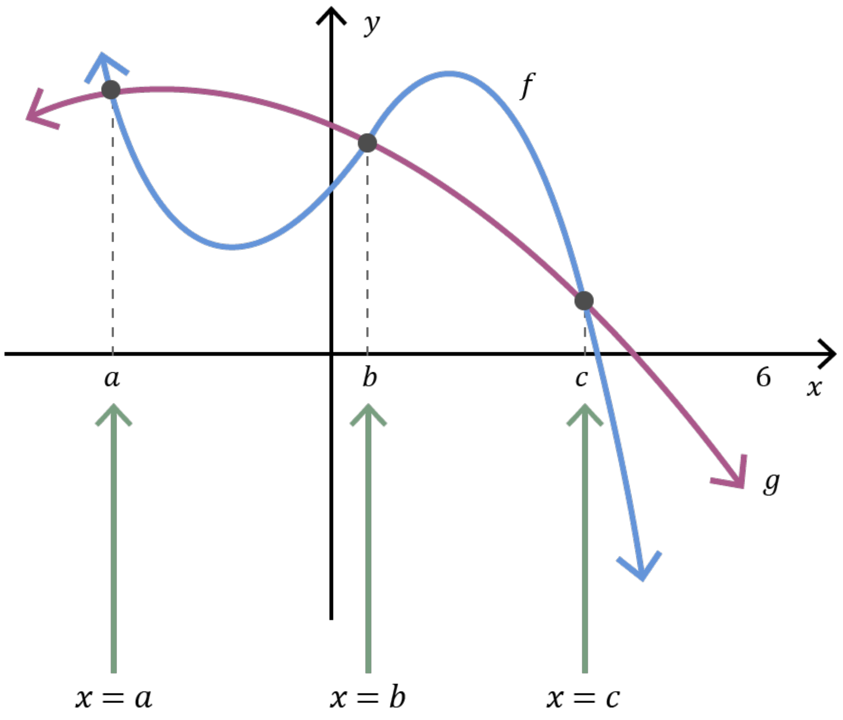
Inecuaciones y funciones

Sea $f(x)$ una función de variable real. Un valor de x es solución de alguna de las siguientes inecuaciones

$$f(x) \geq 0 \;\; , f(x) > 0 \;\; , f(x) \leq 0 \, , f(x) < 0$$

si es una pre imagen de f que satisface dicha inecuación. Es decir, $x \in D_f$.

Así, el conjunto solución de las inecuaciones será un subconjunto del dominio de f



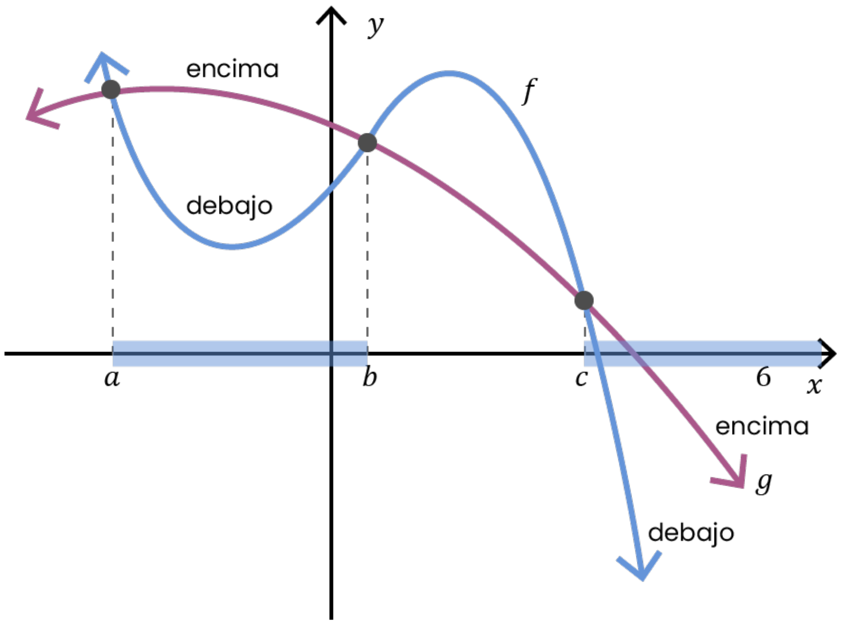
Considere las funciones $f\colon D_f \to B$ y $g\colon D_g \to C$.

La igualdad entre dos funciones f y g plantea la solución de la ecuación

$$f(x) = g(x),$$

en cuyo caso los valores de x que la satisfacen pertenecen al conjunto $D_f \cap D_g$.

Sus soluciones corresponden a las abscisas de los puntos de intersección entre las funciones.



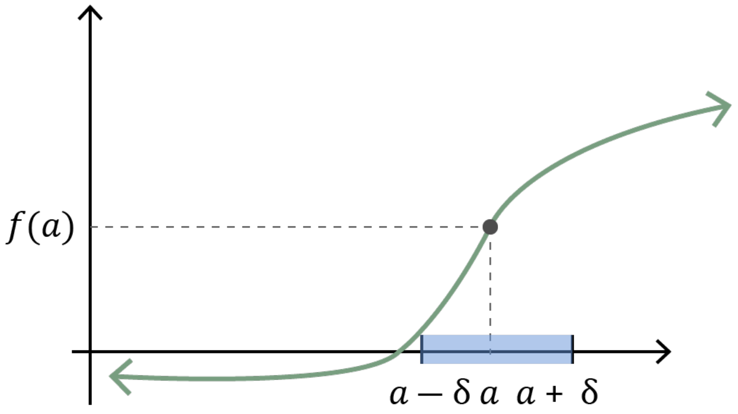
$$g(x) \geq f(x) \Rightarrow x \in [a, b] \cup [c, +\infty[$$

Ahora bien, determinar los intervalos en que la función g está por encima o es igual que la función f corresponde a la solución de la inecuación $g(x) \geq f(x)$, en cuyo caso los valores de x que la satisfacen pertenecen al conjunto $D_f \cap Dg$.

Similarmente, se pueden interpretar las inecuaciones $g(x) \leq f(x)$, $g(x) > f(x)$ o $g(x) < f(x)$.

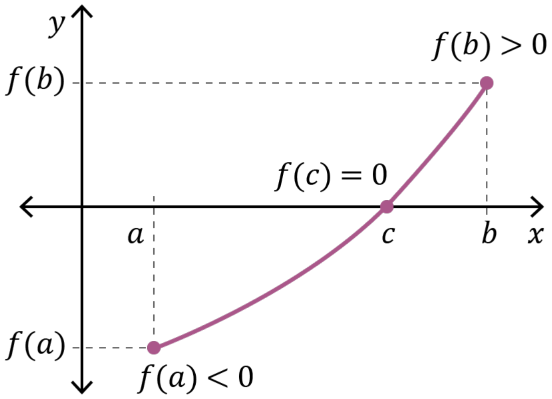
Teorema de la conservación del signo

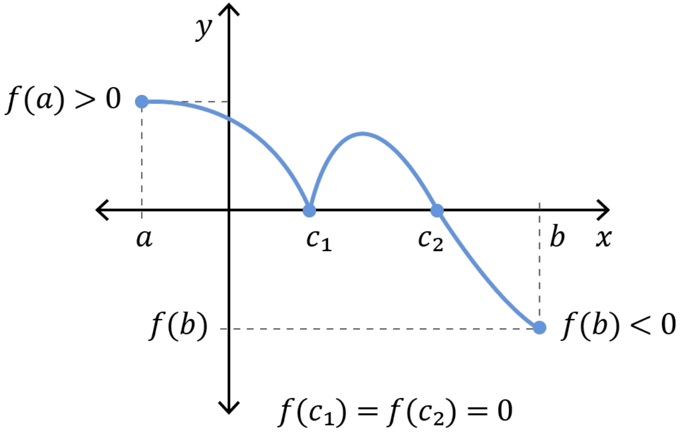
Si $f(x)$ es continua en $x = a$ y $f(a) > 0$, entonces existe un intervalo abierto tal que $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$.



Teorema de Bolzano

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $c \in \mathbb{R}$, $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$; es decir, c es una raíz de $f(x)$.



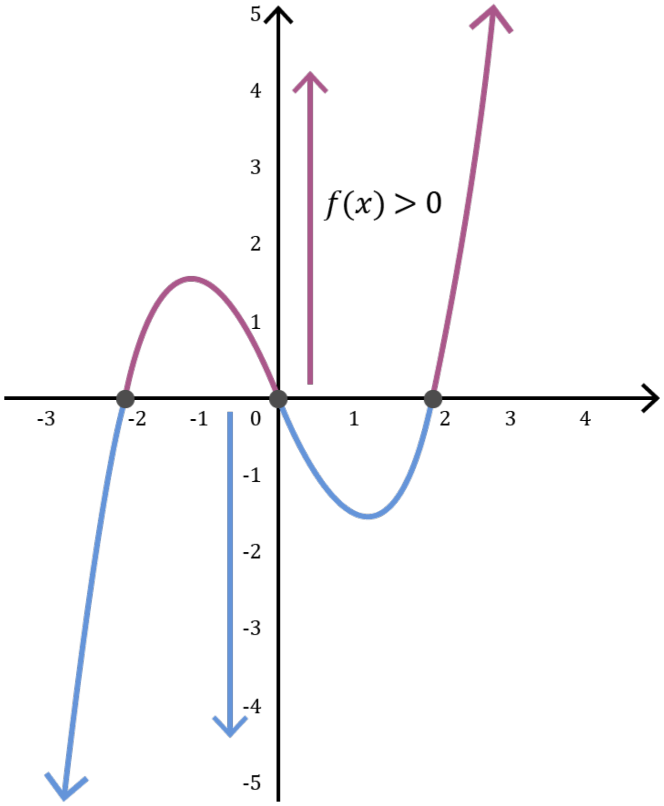


Definiciones

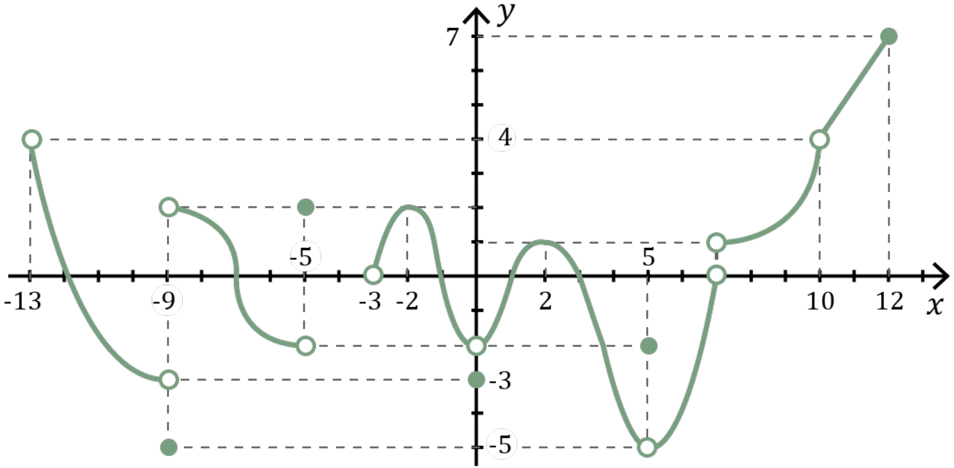
Signo de una función

Se dice que la función f **es positiva** en A si $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, $A \subseteq D_f$.

Se dice que la función f **es negativa** en A si $f(x) < 0$ para todo $x \in A$, $A \subseteq D_f$.



Ejemplo



Considere la función f representada gráficamente.

Determine los intervalos del dominio donde:

$f(x)<0$ (función es negativa) , $f(x)>0$ (función es positiva) , $f(x)=0$ (función se anula)

Puntos de intersección con los ejes coordenados

Ejemplo

Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$$

1. Determine, de forma analítica, el signo de la función f.
2. Determine los valores de $x \in D_f$ tales que $f(x) \leq -3$
3. Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados.
4. Utilice un graficador para graficar la función f y compare las respuestas obtenidas en la parte 1, 2 y 3.

Monotonía de una función

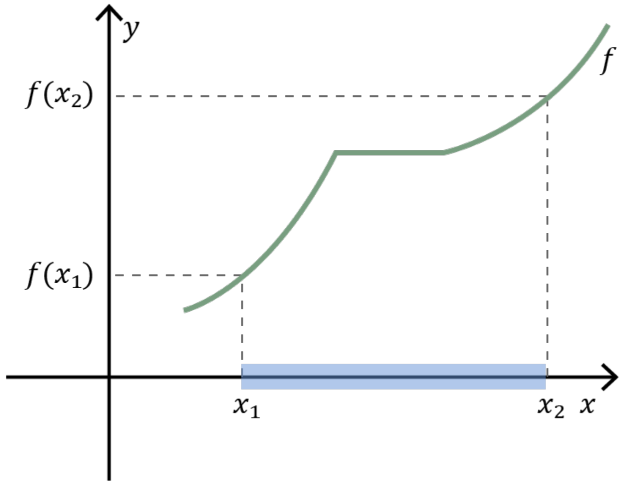
Definición: FUNCIÓN CRECIENTE (Y ESTRICTAMENTE CRECIENTE)

Sea f una función y $A \subseteq D_f$

f es **creciente** $\nearrow$ en A si para cualesquiera x_1 y x_2 valores en A se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Hqm: $(\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\big)$



Monotonía de una función

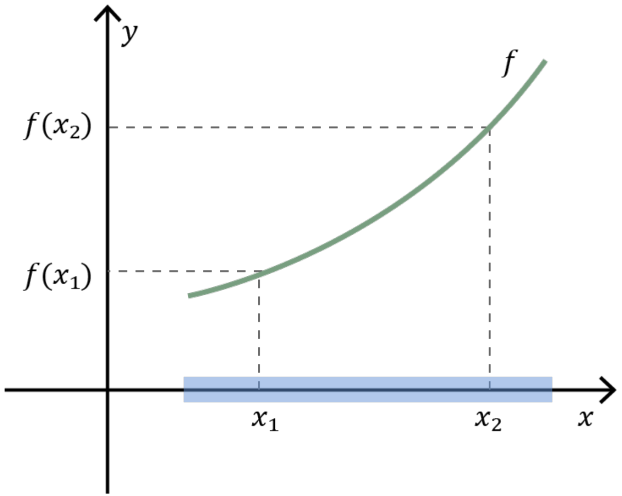
Definición: FUNCIÓN CRECIENTE (Y ESTRICTAMENTE CRECIENTE)

Sea f una función y $A \subseteq D_f$

f es **estrictamente creciente** ↑ en A si para cualesquiera x_1 y x_2 valores en A se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hqm: $(\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\big)$



Monotonía de una función

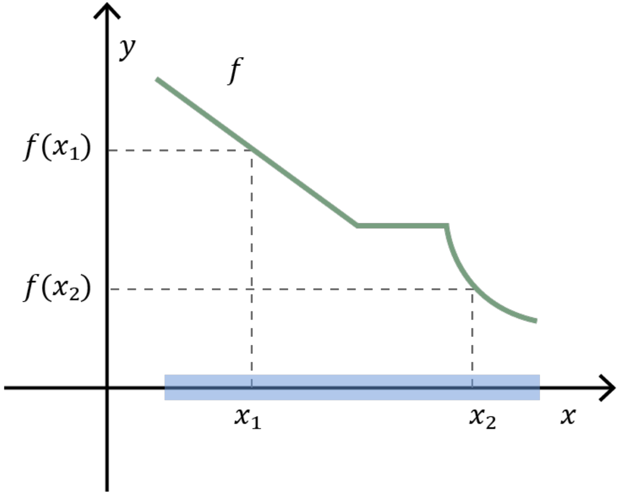
Definición: FUNCIÓN DECRECIENTE (Y ESTRICTAMENTE DECRECIENTE)

Sea f una función y $A \subseteq D_f$

f es **decreciente** ↘ en A si para cualesquiera x_1 y x_2 valores en A se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\boxed{\text{Hqm: } (\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\big)}$$



Monotonía de una función

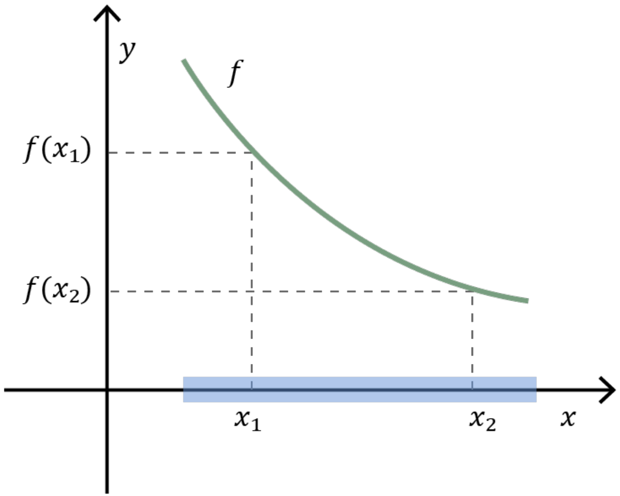
Definición: FUNCIÓN DECRECIENTE (Y ESTRICTAMENTE DECRECIENTE)

Sea f una función y $A \subseteq D_f$

f es **estrictamente decreciente** $\downarrow$ en A si para cualesquiera x_1 y x_2 valores en A se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hqm: $(\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\big)$



Nota

Los intervalos de monotonía se dan abiertos.

Si la función tiene el mismo comportamiento monótono en dos intervalos no se puede garantizar que sea monótona en la unión de dichos intervalos.

Ejemplo

Pruebe que la función definida por $f(x) = \frac{x+1}{2}$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Pruebe que la función definida por $f(x) = \frac{x+1}{2}$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Prueba: Note que el dominio de dicha función es $\mathbb{R}$.

Probar que es creciente significa

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right)$$

Ejemplo

Sean x_1, x_2 elementos cualesquiera de $\mathbb{R}$ tales que:

$$x_1 < x_2$$

$$\Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{2} < \frac{x_2+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{2} \leq \frac{x_2+1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\therefore (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\big)$$

Ejemplo

Pruebe que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{4x^2-8x+5}$ es estrictamente decreciente en $]2, +\infty[$.

Pruebe que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{4x^2-8x+5}$ es estrictamente decreciente en $]2,+\infty[$

Prueba: Probar que es estrictamente decreciente significa

$$(\forall a, b \in \,]2,+\infty[)\big(a < b \Rightarrow f(a) > f(b)\big)$$

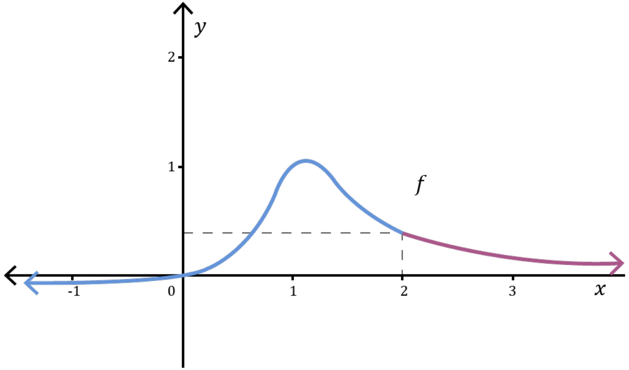
Primero reescribamos el polinomio $P(x) = 4x^2 - 8x + 5$ mediante completación de cuadrados, ya que más adelante interesa conocer el signo de este polinomio. o

$4x^2 - 8x + 5 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 5 = 4x^2 - 8x + 4 + 1 = (2x-2)^2 + 1$, de donde se sigue que $P(x) = (2x-2)^2 + 1 > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ahora, sean a, b elementos cualesquiera de $]2, +\infty[$ tales que $a < b$, analicemos lo siguiente:

$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow \frac{a}{4a^2-8a+5} > \frac{b}{4b^2-8b+5}$$

$\Leftrightarrow a[4b^2 - 8b + 5] > b[4a^2 - 8a + 5]$, ya se probó que $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$



$$\Leftrightarrow 4ab^2 - 8ab + 5a > 4ba^2 - 8ab + 5b$$

$$\Leftrightarrow 4ab^2 - 4ba^2 - 5b + 5a > 0$$

$$\Leftrightarrow 4ab(b-a) - 5(b-a) > 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(4ab-5) > 0$$

$$\Leftrightarrow b - a > 0 \ \ (*)$$

$$\Leftrightarrow b > a$$

$(*)$ $a > 2 \wedge b > 2 \Rightarrow ab > 4 \Rightarrow 4ab > 16 \Rightarrow 4ab - 5 > 11 \Rightarrow 4ab - 5 > 0$

Ejemplo

Considere la función $h: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{1}{x+3}$.

Analice la monotonía de la función h en el intervalo $]-\infty, -3[$.

Considere la función $h: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{1}{x+3}$. Analice la monotonía de la función h en el intervalo $]-\infty, -3[$.

Para determinar si la función es monótona creciente o decreciente se debe analizar si $a < b \Rightarrow h(a) \leq h(b)$ ó $a < b \Rightarrow h(a) \geq h(b)$

Para esto considere $a, b \in]-\infty, -3[$ tales que $a < b$, entonces

$a < b \Rightarrow a + 3 < b + 3$ y como $a, b \in]-\infty, -3[\Rightarrow a < -3 \wedge b < -3 \Rightarrow a + 3 < 0 \wedge b + 3 < 0$

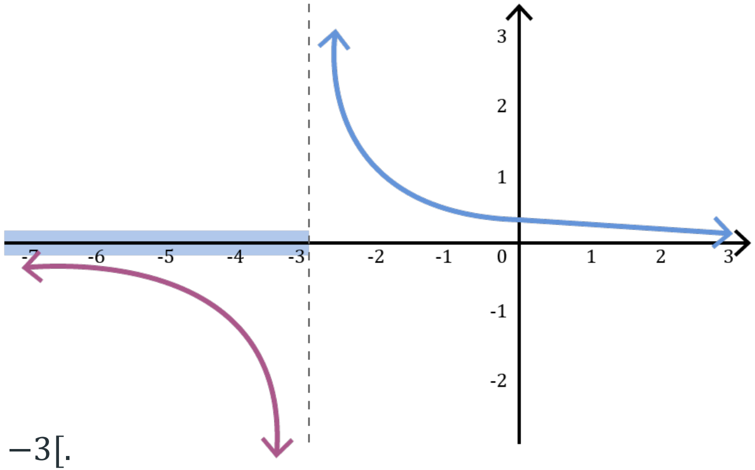
Así,

$$a < b \Rightarrow a + 3 < b + 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+3} < \frac{1}{a+3}$$

$$\Rightarrow h(b) < h(a)$$

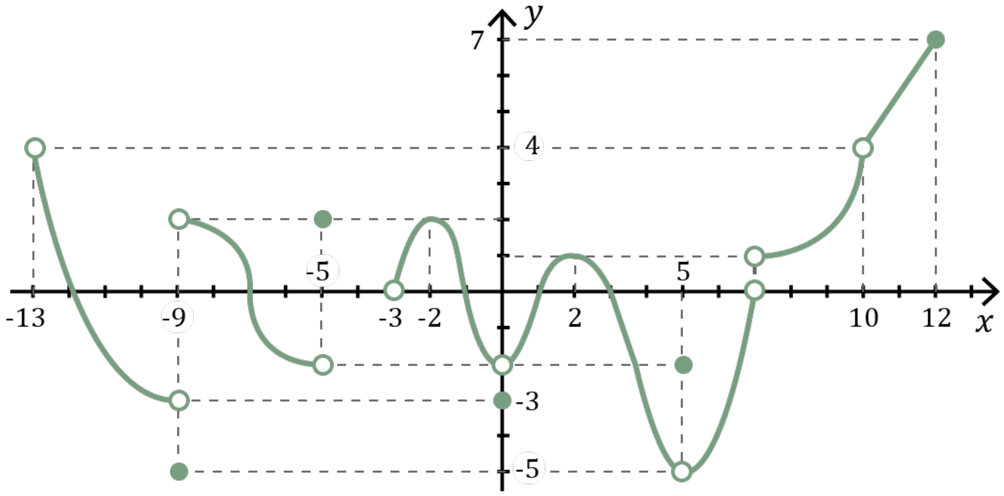
$$\Rightarrow h(b) \leq h(a)$$



Por tanto, la función h es decreciente en el intervalo $]-\infty, -3[$.

Ejemplo

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función h dada gráficamente por



Ejemplo

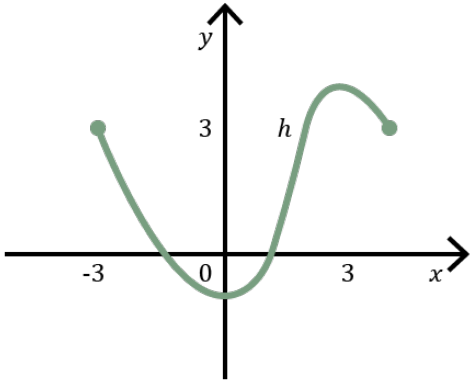
Se da la gráfica de una función h.

(a) Encuentre $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

(b) Encuentre el dominio y rango de h.

(c) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) = 3$.

(d) Encuentre los valores de x para los cuales $h(x) \leq 3$



Ejemplo

Para el gráfico que se da a continuación determine:

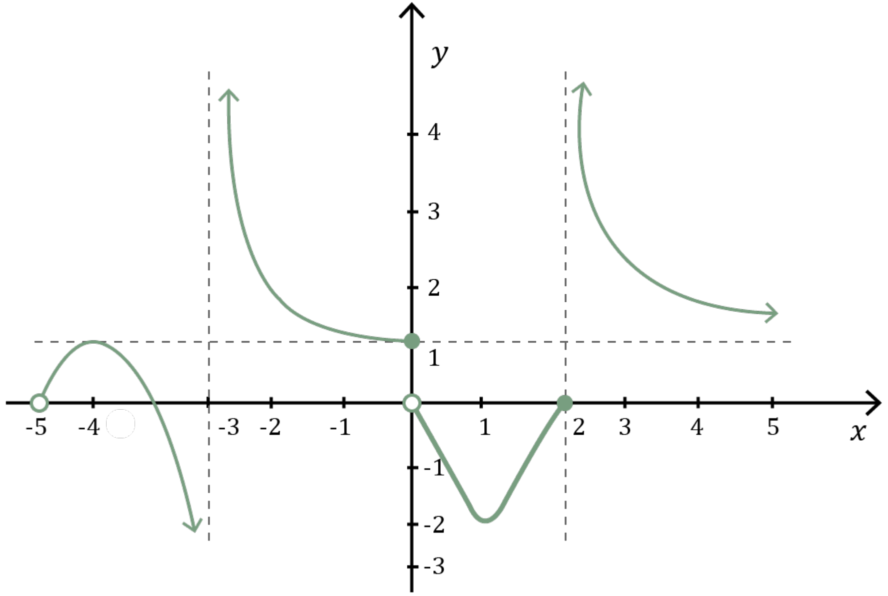
a) Dominio de la función f

c) Intervalos donde f es negativa

d) Intervalos donde f es creciente

e) Intersecciones con el eje x

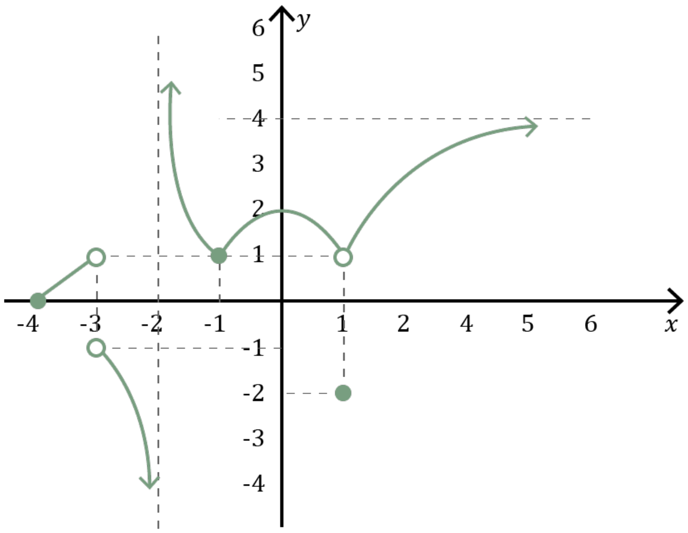
f) ¿Cuántas pre imágenes tiene -1?



Ejemplo

Para la función f representada en la imagen determine:

- Dominio
- Ámbito
- Intersecciones con el eje X
- La o las pre imágenes de 1
- El número de pre imágenes de 2
- El valor de $(f \circ f)(-1)$
- Intervalos del dominio donde la función es decreciente
- Intervalos del dominio donde es positiva
- Valores de x tales que $f(x) \geq 1$, $f(x)+1<0$



Bibliografía

Sanabria G. (s.f.). Fundamentos de Funciones.

Chavaría M, J. & otros. (2018). Folleto Funciones. [Versión en digital]

Créditos

Diseño y edición: Fredy Guzmán.

Contenido y gráficos: Lourdes Quesada

Plantilla ppt extraída de https://slidesgo.com/

Ilustraciones extraídas de https://storyset.com/ y https://www.freepik.com/.