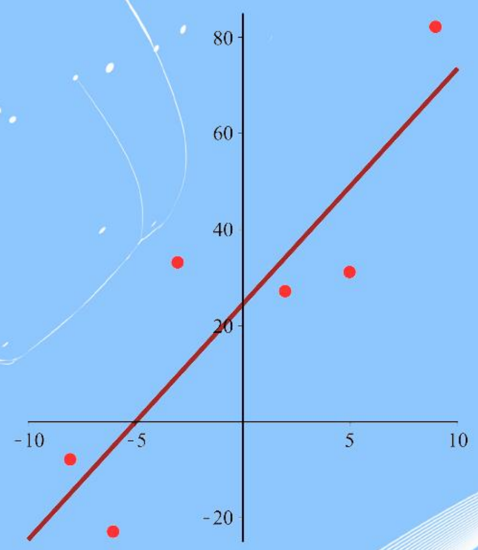
Cálculo para Administración



Febrero 2023

Luis Alejandro Acuña Prado

La imagen de fondo de la portada fue obtenida en es.pngtree.com.

Índice general

Capítulo 1

Límites y continuidad de una función

A veces sucede que, aunque una función f no esté definida en un punto $x = a$, los valores de $y = f(x)$ se acercan a un límite L conforme x se acerca a a. En ese caso se dice que L es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Otra forma de expresar lo mismo es diciendo que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a, o en símbolos, que $f(x) \to L$ cuando $x \to a$.

En este capítulo veremos cómo estimar límites a partir de gráficos o tablas de valores, y cómo calcularlos formalmente.

1.1. Límite de una función en un punto

Vamos a empezar por analizar el concepto de límite, y ver su relación con el comportamiento numérico o gráfico de una función.

Ejemplo 1: estimar límite donde la función está indefinida

Estimar el límite de $\dfrac{x^3 - 25x}{x - 5}$ cuando x tiende a 5.

La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 25x}{x - 5}$ no está definida en $x = 5$, pero para x cercano a 5 podemos observar los valores de la función conforme x se acerca a 5 desde la izquierda o desde la derecha:

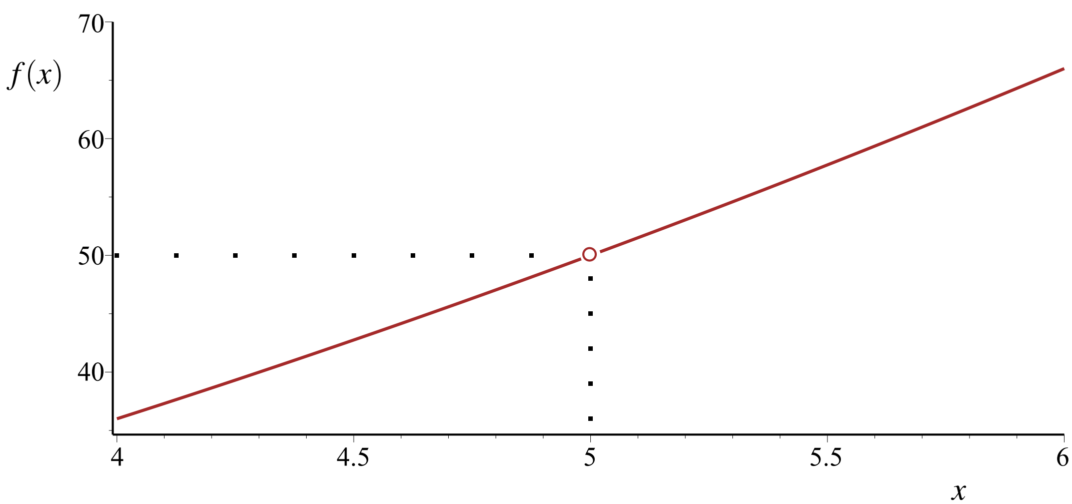
x	4	4.5	4.9	4.999	5
$f(x)$	36	42.75	48.51	49.985	$\nexists$

(desde la izquierda de 5)

x	5	5.001	5.1	5.5	6
$f(x)$	$\nexists$	50.015	51.51	57.75	66

(por la derecha de 5)

Gráficamente,



Es claro, tanto en la tabla de valores como en el gráfico, que entre más se acerca x a 5, más se acerca $f(x)$ a 50, aunque $f(5)$ no es 50.

En símbolos escribimos que $f(x) \to 50$ cuando $x \to 5$, o bien que $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 50$.

Para hablar del límite de una función en un punto no es necesario que la función esté indefinida allí. En el ejemplo anterior la función f está definida en $x = 4$, con $f(4) = 36$. Si hiciéramos un análisis como el que hicimos en el ejemplo, encontraríamos que

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 36$$

En general, si una función f está definida en $x = a$, es usual que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, como veremos en el siguiente ejemplo. Pero luego en el ejemplo 3 veremos que ese no siempre es el caso.

Ejemplo 2: estimar límite donde la función está definida

Estimar el $\lim_{t \to 3} t + 5$.

La función $h(t) = t + 5$ sí está definida en $t = 3$ y, como vemos en la siguiente tabla de valores, su límite allí es $\lim_{t \to 3} h(t) = 8 = h(3)$.

			$\rightarrow$		$\leftarrow$		
t	2.5	2.9	2.999	3	3.001	3.1	3.5
$h(t)$	7.5	7.9	7.999	8	8.001	8.1	8.5
			$\rightarrow$		$\leftarrow$		

Ocasionalmente, una función f puede tener un límite distinto en cada lado (izquierdo y derecho) del punto $x = a$. En ese caso se habla de *límites laterales*, que se denotan

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

y se llaman *límite por la izquierda* y *límite por la derecha* (o límite cuando x tiende a a por la izquierda y por la derecha), respectivamente.

El límite general de la función (también llamado *límite bilateral*) existe solamente si ambos límites laterales existen y son iguales.

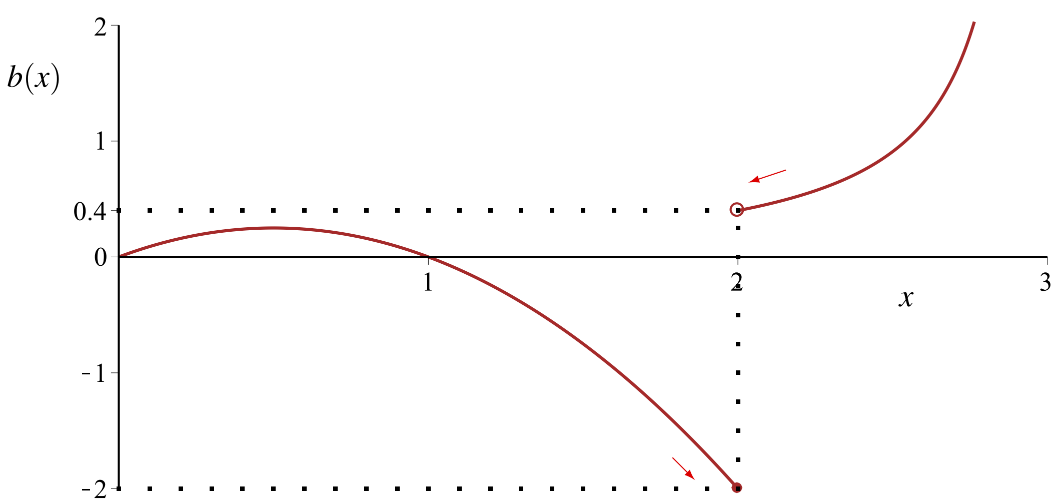
Ejemplo 3: límites laterales

Calcular los límites laterales de

$$b(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{9 - x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

cuando $x \to 2$.

Empecemos por ver el gráfico de $b(x)$ para $0 \leq x \leq 3$.



En el gráfico vemos que hay dos límites distintos cuando x tiende a 2 por la izquierda y cuando x tiende a 2 por la derecha.

- Viniendo desde la izquierda de $x = 2$ el gráfico se acerca al punto $(2, -2)$, por lo que parece que el límite por la izquierda será -2.
- Y viniendo desde la derecha el gráfico se acerca a $(2, 0.4)$, de modo que el límite por la derecha parece ser 0.4.

Confirmemos numéricamente esas dos estimaciones.

- Para el límite por la izquierda, $\lim_{x\to 2^-} b(x)$, usamos la fórmula que se aplica para x a la izquierda de 2:

  $$b(x) = x - x^2 \quad \text{para } x < 2.$$

  No se necesita una tabla de valores para evaluar el límite, ya que si $x \to 2$ entonces claramente $x - x^2 \to (2) - (2)^2 = -2$.

  Concluimos que $\lim_{x\to 2^-} b(x) = -2$.
- Por la derecha, para calcular $\lim_{x\to 2^+} b(x)$, vamos a usar la fórmula que se aplica a la derecha de 2:

  $$b(x) = \frac{x}{9 - x^2} \quad \text{para } x > 2.$$

  También ahora podemos evaluar el límite sustituyendo: si $x \to 2^+$, $x/(9 - x^2)$ tiende a $2/(9 - 2^2) = 2/5$. Entonces, $\lim_{x\to 2^+} b(x) = 2/5 = 0.4$.

En resumen, los límites laterales cuando $x \to 2$ son -2 por la izquierda y 0.4 por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^-} b(x) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} b(x) = 0.4$$

Como son distintos, no existe el límite bilateral $\lim\limits_{x\to 2} b(x)$.

El ejemplo anterior ilustra que, aunque una función esté definida en un punto, su límite en ese punto puede no ser igual al valor de la función. En efecto, en el ejemplo se tiene $b(2) = -2$, pero $\lim_{x\to 2} b(x)$ no es -2 (de hecho, el límite no existe). De eso se trata el concepto de continuidad de una función; en este caso resulta que la función b es discontinua en 2. Pero nos estamos adelantando; la definición de continuidad se presentará en la sección 1, página 22.

Ejercicios

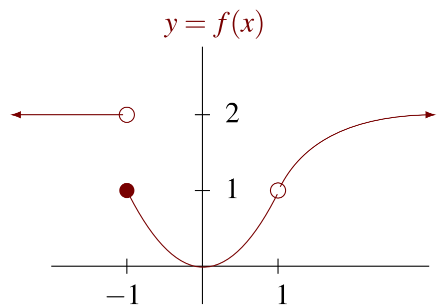
Estime a partir del gráfico

1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$



5. $\lim\limits_{t\to -3^+} g(t)$

6. $\lim\limits_{t\to -1^-} g(t)$

7. $\lim\limits_{t\to -1^+} g(t)$

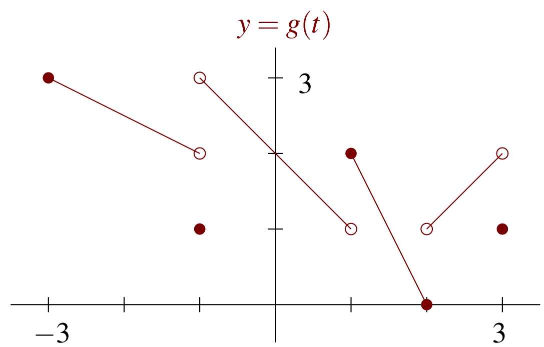
8. $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t)$

9. $\lim\limits_{t\to 1^+} g(t)$

10. $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$

11. $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$

12. $\lim\limits_{t\to 3^-} g(t)$



Complete la tabla de valores para estimar el límite

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-6x+4}{4-x^2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$		-0.4962		-0.5004		-0.5366

14. $\lim\limits_{t\to -5} \dfrac{t^2-25}{t+5}$

t	-5.1	-5.01	-5.001	-4.999	-4.99	-4.9
$f(t)$		-10.01				-9.9

15. $\lim\limits_{w\to 3} \dfrac{\sqrt{w-2}-1}{w-3}$

w	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(w)$	0.5132					0.4881

16. $\displaystyle\lim_{y\to -1} \frac{2-\sqrt{5+y}}{1+y}$

y	-1.1	-1.01	-1.001	-0.999	-0.99	-0.9
$f(y)$		-0.2502			-0.2498	

17. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ (con t en radianes)

t	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(t)$						0.9983

18. $\displaystyle\lim_{y\to 4^-} \frac{1-\mathrm{e}^{4-y}}{4y-y^2}$

y	3.9	3.99	3.999	3.9999
$f(y)$		-0.2519		

19. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\ln t$

t	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(t)$		-0.0069		

Haga una tabla de valores para estimar el límite

20. $\displaystyle\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{1-y}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\mathrm{e}^x}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{1/x}$

23. $\displaystyle\lim_{t\to \mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}-t}{1-\ln t}$

24. $\displaystyle\lim_{t\to 0} (1+t)^{2/t}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

1.2. Teoremas sobre límites

Teorema

Si $f(x)$ es una suma, resta, producto, cociente o composición de

- polinomios
- raíces
- logaritmos
- funciones exponenciales
- funciones trigonométricas

entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

siempre que $f(c)$ esté definido.

Una implicación del teorema anterior es que para las funciones mencionadas el límite se puede calcular simplemente sustituyendo $x = c$, siempre que la función esté definida en c.

Ejemplo 4: calcular límite evaluando

Calcular $\lim\limits_{z\to 3} \dfrac{\sqrt{z^2+7}}{z-1}$.

Al sustituir $z = 3$ vemos que la función sí está definida[1]:

$$\left.\frac{\sqrt{z^2+7}}{z-1}\right|_{z=3} = \frac{\sqrt{3^2+7}}{3-1} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Entonces, $\lim\limits_{z\to 3} \dfrac{\sqrt{z^2+7}}{z-1} = 2$.

Ejercicios

Calcule

26. $\lim\limits_{t\to -2} t^2 + 3t$

27. $\lim\limits_{z\to 3} \sqrt{1+z^3}$

28. $\lim\limits_{y\to 5} 2y\sqrt{2y^3+6}$

29. $\lim\limits_{p\to 2} 3e^{p-2} - 5p$

30. $\lim\limits_{u\to 3} u^2 - 5u + \log_2(u+1)$

31. $\lim\limits_{h\to 4} \dfrac{h^2}{h^2-9}$

32. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{2+10^y}{y+5}$

33. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 3 \\ 4-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Calcule para $g(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x+2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x^2+2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

34. $g(-1)$

35. $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$

36. $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$

37. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

38. $g(1)$

39. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

---

[1] La notación $f(x)\big|_{x=a}$, o simplemente $f(x)\big|_a$ se refiere a la función $f(x)$ evaluada en $x = a$. Si la función tiene un nombre, como f, es más sencillo escribir $f(a)$. Pero en este ejemplo la función no tiene nombre.

40. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

41. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

42. $g(0)$

43. $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

44. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

45. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

1.3. Cálculo de límites

En la sección anterior vimos que algunos límites pueden calcularse de manera inmediata con solo evaluar la función. Pero como vimos en el ejemplo 1, no todos los límites pueden calcularse tan fácilmente.

En esta sección veremos cómo calcular algunos límites que no son inmediatos, sin analizar el gráfico ni usar tablas de valores.

Si la función $f(x)$ es una combinación de polinomios, raíces, logaritmos y funciones exponenciales o trigonométricas como en la sección anterior, pero el valor $f(c)$ no está definido, entonces para calcular $\lim_{x\to c} f(x)$ a veces es posible simplificar $f(x)$ de modo que la forma simplificada sí se pueda evaluar en c.

Existen varios métodos para simplificar antes de evaluar. En el ejemplo 5 veremos cómo simplificar factorizando, y en el ejemplo 6, racionalizando. Luego en la sección 3.2 veremos un tercer método: derivando.

Ejemplo 5: simplificar factorizando

Calcular $\lim\limits_{w\to -1} \dfrac{w^2-1}{w+1}$.

Primero notemos que la función $\dfrac{w^2-1}{w+1}$ no está definida en -1:

$$\left.\frac{w^2-1}{w+1}\right|_{w=-1} = \frac{0}{0}$$

Pero podemos factorizar el numerador (diferencia de cuadrados) y simplificar para aplicar el principio del ejemplo anterior.

$$\lim_{w\to -1} \frac{w^2-1}{w+1} = \lim_{w\to -1} \frac{\cancel{(w+1)}(w-1)}{\cancel{w+1}} = \lim_{w\to -1} w-1$$

Esta última función, $w-1$, sí está definida en $w=-1$, y entonces su límite se evalúa sustituyendo:

$$\lim_{w\to -1} \frac{w^2-1}{w+1} = \lim_{w\to -1} w-1 = (-1)-1 = -2$$

En este ejemplo teníamos $w \to -1$ y un factor $w+1$ en el denominador. La fracción estaba indefinida en $w=-1$ porque este es un cero del denominador. La solución fue encontrar un factor $(w+1)$ en el numerador para cancelar el factor idéntico en el denominador de modo que así funcionara el segundo intento de sustituir.

Compare con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6: simplificar racionalizando

Calcular $\displaystyle\lim_{y\to 9} \frac{\sqrt{y}-3}{y-9}$.

El factor $y-9$ hace imposible evaluar la fracción en $y=9$, porque resulta en un 0 en el denominador. Si encontráramos otro factor $y-9$ en el numerador, los cancelaríamos como en el ejemplo anterior.

Pero como no hay nada que factorizar, ahora vamos a racionalizar el numerador y después de eso podremos simplificar.

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 9} \frac{\sqrt{y}-3}{y-9} &= \lim_{y\to 9} \frac{\sqrt{y}-3}{y-9} \cdot \frac{\sqrt{y}+3}{\sqrt{y}+3} \\ &= \lim_{y\to 9} \frac{\cancel{y-9}}{\cancel{(y-9)}(\sqrt{y}+3)} \\ &= \lim_{y\to 9} \frac{1}{\sqrt{y}+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

El límite, entonces, vale $1/6$.

Note que en el ejemplo anterior teníamos $y \to 9$, y al simplificar cancelamos un factor $(y-9)$ en cada parte de la fracción. En el ejemplo trasanterior era $w \to -1$ y los factores que cancelamos fueron $(w+1)$.

Por regla general, si una fracción de polinomios o raíces resulta en $0/0$ cuando $x \to c$, se debe intentar conseguir un factor $(x-c)$ en el numerador y otro en el denominador.

Ejercicios

Simplifique cada expresión y calcule su límite

46. $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{2t^2-t-3}{t+1}$

47. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x+x^2}{2+x}$

48. $\displaystyle\lim_{y\to 1} \frac{y^2+3y-4}{y-1}$

49. $\displaystyle\lim_{w\to 3c} \frac{cw^2-3c^2w}{w^2-9c^2}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3+5x-3x^2-15}$

51. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-5h}{4h}$

52. $\displaystyle\lim_{u\to -6}\frac{u^2+42}{u+6}+\frac{13u}{u+6}$

53. $\displaystyle\lim_{p\to 3}\frac{p^2-3p}{3e^p-pe^p}$

54. $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{5^{2y}-1}{5^y-1}$

55. $\displaystyle\lim_{t\to -2}\ln(t^3+2t^2)-\ln(3t+6)$

56. $\displaystyle\lim_{y\to 4}\frac{y-4}{\sqrt{y}-2}$

57. $\displaystyle\lim_{y\to k^2}\frac{y-k^2}{\sqrt{y}-k}$, con $k>0$

58. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3x-x^2}{1+\sqrt{1+x}}$

59. $\displaystyle\lim_{t\to 5/2}\frac{4-\sqrt{2t+11}}{2t-5}$

60. $\displaystyle\lim_{y\to -2}\frac{\sqrt{y+6}+y}{y+2}$

61. $\displaystyle\lim_{u\to a}\frac{2\sqrt{u}+\sqrt{a}}{4u-a}$

62. $\displaystyle\lim_{p\to 1}\frac{p^3+p^2-2}{2-\sqrt{p+3}}$

1.4. Límites al infinito y límites infinitos

En esta sección veremos dos tipos de límites en los que alguna de las variables (independiente o dependiente) tiende a infinito.

Que una variable tienda a infinito significa que crece sin cota, tomando valores mayores que cualquier número real. Un ejemplo muy sencillo es este: si n es una variable que toma *todos* los valores enteros $1, 2, 3, \ldots,$ sucesivamente, entonces n crece sin cota (porque eventualmente sobrepasará cualquier número real) y por lo tanto tiende a infinito. Eso se denota $n\to\infty$.

Una variable también puede tender a menos infinito. Por ejemplo, si n toma los valores $-1, -2, -3, \ldots,$ entonces $n\to-\infty$.

Supongamos que f es una función y a es un número. Si $f(x)$ crece sin cota (es decir, tiende a infinito) cuando $x\to a$, se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x\to a$ es infinito: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

Si $f(x)$ decrece sin cota cuando $x\to a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

En cualquiera de estos dos casos, eso es lo que se considera un *límite infinito*.

1.4.1. Estimación de límites infinitos y al infinito

Empecemos con el enfoque numérico para aclarar el concepto.

Ejemplo 7: estimar límite infinito

Calcular $\displaystyle\lim_{r\to -4}\frac{5r}{r+4}$.

Llamando la función f, la tabla de valores es así:

r	-4.5	-4.1	-4.001	-4.00001	$\rightarrow$	-4
$f(r)$	45	205	20005	2000005	$\rightarrow$	$\nexists$

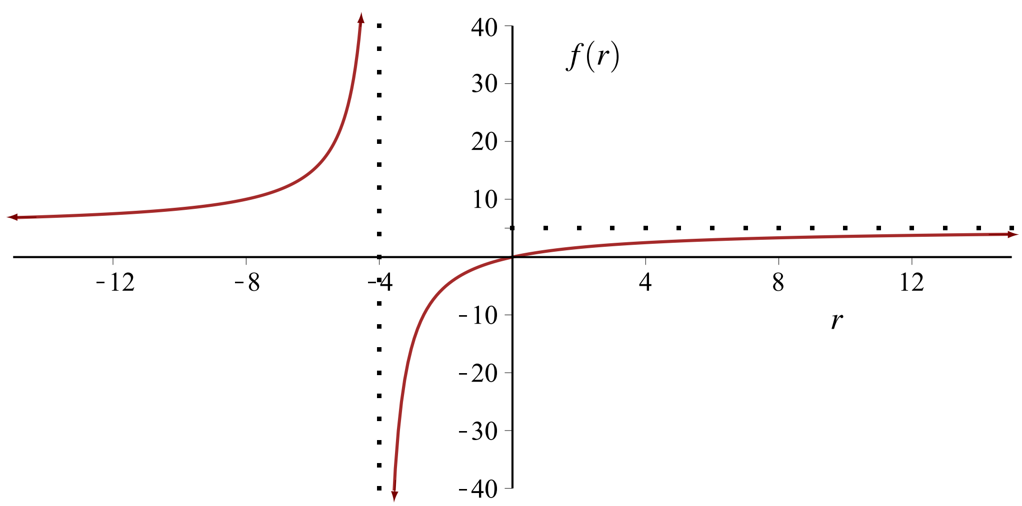
(por la izquierda)

r	-4	$\leftarrow$	-3.99999	-3.999	-3.9	-3.5
$f(r)$	$\nexists$	$\leftarrow$	-1999995	-19995	-195	-35

(por la derecha)

En ella vemos, y lo confirmamos de otra manera en el gráfico abajo, que cuando $r \to -4$ por la izquierda, $f(r)$ crece sin cota, hacia ∞, y que cuando $r \to -4$ por la derecha, $f(r)$ decrece sin cota, hacia $-\infty$. Entonces,

$$\lim_{r \to -4^-} f(r) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{r \to -4^+} f(r) = -\infty$$



Estos son dos ejemplos de límites infinitos.

Cuando es x el que crece o decrece sin cota (en símbolos, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$), entonces se habla de un *límite al infinito*.

Ejemplo 8: estimar límite al infinito

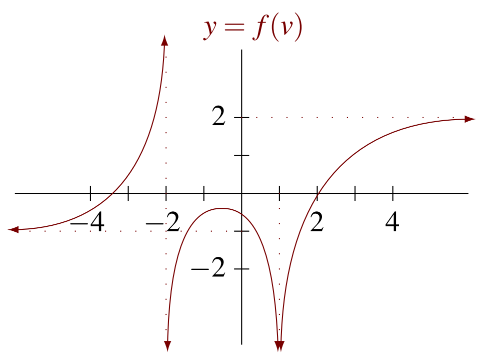
Con la misma función f del ejemplo anterior, veamos qué sucede cuando $r \to \infty$:

r	100	10000	1000000	$\to \infty$
$f(r)$	4.8077	4.9980	4.99998	$\to 5$

La tabla confirma lo que podemos ver también en el gráfico del ejemplo anterior: que $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{5r}{r+4} = 5$.

Ejercicios

Estime a partir del gráfico



63. $\lim\limits_{v\to-\infty} f(v)$

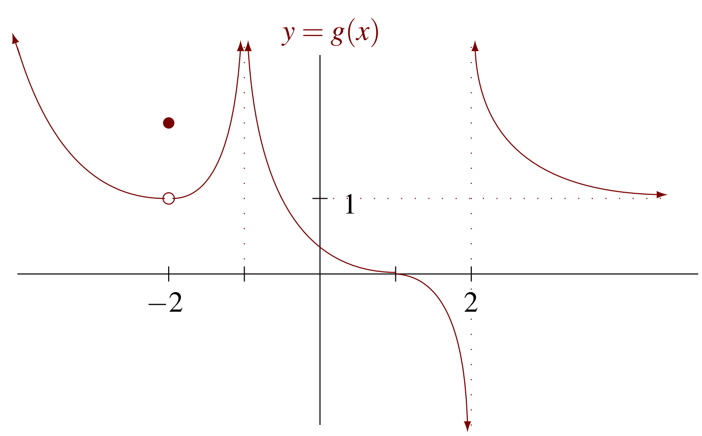
64. $\lim\limits_{v\to\infty} f(v)$

65. $\lim\limits_{v\to-2^-} f(v)$

66. $\lim\limits_{v\to-2^+} f(v)$

67. $\lim\limits_{v\to1^-} f(v)$

68. $\lim\limits_{v\to1^+} f(v)$



69. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

70. $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)$

71. $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)$

72. $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)$

73. $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$

74. $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)$

75. $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

76. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

Haga una tabla de valores para estimar el límite

77. $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{1-y}$

78. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\cos\theta - 1}$

79. $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{0.2}{k}\right)^k$

80. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{1/x}$

81. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t}$

82. $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{u}{1+u-\mathrm{e}^u}$

83. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^x$

84. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x$

1.4.2. Cálculo de límites infinitos y límites al infinito

Si en el límite de un cociente, $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, el numerador $f(x)$ tiende a algún número y el denominador $g(x)$ tiende a infinito (positivo o negativo), entonces el límite es cero. En símbolos, escribimos

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \qquad \text{para cualquier } a \in \mathbb{R}.$$

Si el denominador $g(x)$ tiende a cero y el numerador $f(x)$ tiende a otro número (distinto de cero), entonces el límite es infinito positivo o infinito negativo. En ese caso basta con encontrar los signos de $f(x)$ y $g(x)$ para determinar el signo del resultado. Escribimos

$$\frac{a}{0} = \pm\infty \qquad \text{para cualquier } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Otras propiedades útiles acerca de límites al infinito son

$$\infty^n = \begin{cases} \infty & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \le b < 1 \end{cases}$$

Para logaritmos:

$$\log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{si } b > 1 \\ \infty & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \log_b \infty = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 1 \\ -\infty & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Como aplicaciones inmediatas de esas fórmulas tenemos, por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} x^5 = \infty^5 = \infty \qquad \text{porque } 5>0$$
$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} = \infty^{-1} = 0 \qquad \text{porque } -1<0$$
$$\lim_{x\to\infty} 2^x = 2^\infty = \infty \qquad \text{porque } 2>1$$
$$\lim_{x\to\infty} (1/3)^x = (1/3)^\infty = 0 \qquad \text{porque } (1/3)<1$$
$$\lim_{x\to 0} \ln x = \log_e 0 = -\infty \qquad \text{porque } e>1$$
$$\lim_{x\to\infty} \log_{0.1} x = -\infty \qquad \text{porque } 0.1<1$$

Ejemplo 9: calcular límite infinito

Calcular $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{1-y}{2-y}$.

Aquí el denominador tiende a cero pero el numerador no: el límite es de la forma

$$\frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Para determinar el signo necesitamos conocer los signos del numerador y del denominador.

Cuando $y \to 2$, el numerador $1-y$ tiende a -1 y entonces es claramente negativo. Pero el denominador, $2-y$, tiende a 0 y entonces puede ser positivo o negativo dependiendo de si $y \to 2$ por la izquierda o por la derecha.

Separamos entonces los dos límites laterales.

Por la izquierda, cuando $y \to 2^-$, el denominador $2-y$ tiende a 0 pero es positivo (por ejemplo, con $y = 1.999$ se tiene $2-y = +0.001$). Entonces, la fracción entera es negativa: numerador negativo y denominador positivo. Así lo escribimos:

$$\lim_{y\to 2^-} \frac{1-y}{2-y} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(donde 0^+ denota una cantidad que tiende a cero pero es positiva).

Por la derecha, cuando $y \to 2^+$, el denominador tiende a 0 pero es negativo (por ejemplo, con $y = 2.001$ se da $2-y = -0.001$). Entonces,

$$\lim_{y\to 2^+} \frac{1-y}{2-y} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Ejemplo 10: calcular límite infinito

Calcular $\lim_{z\to 1} \frac{z}{|1-z|}$.

En este límite, como en el ejemplo anterior, tenemos un denominador que tiende a cero y un numerador que tiende a otro número. Específicamente, la forma de este límite es $\frac{1}{0}$.

El límite será entonces $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo de los signos. El numerador es positivo cuando $z \to 1$, y el denominador, aunque tiende a cero, esta vez no tiene ambigüedad de signo por el valor absoluto: el denominador es también positivo siempre.

Por eso el límite es $1/0^+ = +\infty$ por ambos lados.

Límites al infinito de cocientes de polinomios

Veamos un atajo para calcular el límite al infinito de un cociente de polinomios. Si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

son dos polinomios de grados n y m respectivamente, entonces el límite de su cociente cuando $x \to \pm\infty$ puede calcularse tomando solo los términos principales (con grado más alto) de cada polinomio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Ejemplo 11: límite al infinito de un cociente de polinomios

Calcular $\lim_{t\to\infty} \frac{5-2t^2}{6t^3+t+1}$, $\lim_{y\to\infty} \frac{1-4y+3y^2}{6y-5y^2}$ y $\lim_{u\to-\infty} \frac{2u^5+u^2}{u^2-4}$.

- $\lim_{t\to\infty} \frac{5-2t^2}{6t^3+t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2}{6t^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{3t} = \frac{-1}{\infty} = 0$
- $\lim_{y\to\infty} \frac{1-4y+3y^2}{6y-5y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{3y^2}{-5y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$
- $\lim_{u\to-\infty} \frac{2u^5+u^2}{u^2-4} = \lim_{u\to-\infty} \frac{2u^5}{u^2} = \lim_{u\to-\infty} 2u^3 = 2(-\infty)^3 = 2(-\infty) = -\infty$

Otros límites al infinito

Para calcular otros límites al infinito que involucran potencias de la variable, puede ser útil factorizar la potencia más alta de la variable en cada parte de la expresión.

Ejemplo 12: calcular límite al infinito factorizando

Calcular $\lim\limits_{v\to\infty} v-\sqrt{3v^2-2}$.

Este límite tiene la forma indeterminada $\infty-\infty$. Puede sacarse v^2 como factor común dentro de la raíz, y luego v como factor común de la diferencia:

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to\infty} v-\sqrt{3v^2-2} &= \lim_{v\to\infty} v-\sqrt{v^2(3-2v^{-2})}\\
&= \lim_{v\to\infty} v-v\sqrt{3-2v^{-2}}\\
&= \lim_{v\to\infty} v(1-\sqrt{3-2v^{-2}})\\
&= \infty(1-\sqrt{3+0}) = -\infty
\end{aligned}$$

(el cero dentro de la raíz se debe a que $2v^{-2}\to 2(\infty)^{-2}=0$, y el signo final se debe a que $1-\sqrt{3}\approx -0.732$ es negativo).

Es importante recordar que para cualquier $x\in\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

En el ejemplo anterior, como $v\to\infty$ entonces $v>0$ y $\sqrt{v^2}=v$. Pero en el siguiente, donde $x\to-\infty$, tendremos $\sqrt{x^2}=-x$.

Ejemplo 13: calcular límite al infinito factorizando

Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2+x}}{2x+3}$.

Para esto se puede sacar x^2 como factor común dentro de la raíz, y x como factor común del denominador. Note que como ahora $x\to-\infty$, entonces x es negativo, por lo que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2+x}}{2x+3} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(5+x^{-1})}}{x(2+3x^{-1})}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{5+x^{-1}}}{x(2+3x^{-1})}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{5+x^{-1}}}{2+3x^{-1}}\\
&= \frac{-\sqrt{5+0}}{2+0} = \frac{-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 14: límite al infinito con funciones exponenciales

Calcular $\lim_{t\to\infty} \frac{3+0.7^t}{4+2^{-t}}$.

Encontremos primero los límites de 0.7^t y de 2^{-t}. El primero es inmediato:

$$\lim_{t\to\infty} 0.7^t = 0.7^\infty = 0 \qquad (b^\infty = 0 \text{ cuando } 0 \le b < 1)$$

Para el segundo tenemos dos opciones. Podemos decir que

$$\lim_{t\to\infty} 2^{-t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0 \qquad (\text{de nuevo } b^\infty \text{ con } 0 \le b < 1)$$

o que

$$\lim_{t\to\infty} 2^{-t} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} \qquad (b^\infty = \infty \text{ cuando } b > 1)$$

que también es igual a 0.

Estos cálculos nos llevan a que $\lim_{t\to\infty} \frac{3+0.7^t}{4+2^{-t}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 15: límite al infinito con logaritmo

Calcular $\lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{2t+1}{t^2+4}\right)$.

Veamos primero cuánto es el límite de la fracción dentro del logaritmo. Recordando que para calcular un límite al infinito de un cociente de polinomios basta con tomar los términos principales, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2t+1}{t^2+4} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{t} = 0$$

Entonces, $\lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{2t+1}{t^2+4}\right) = \ln(0) = -\infty$.

Ejercicios

Calcule

85. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

86. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1-h}{h}$

87. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2+x+x^2}{6+x-x^2}$

88. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t-1}{t^2-t^4}$

89. $\lim\limits_{h \to -3} \dfrac{1}{h^2-9}$

90. $\lim\limits_{t \to 5} \dfrac{t-6}{t-5}$

91. $\lim\limits_{u \to 3} \dfrac{1-u}{6-2u}$

92. $\lim\limits_{y \to 5} \dfrac{1}{y} - \dfrac{2-y}{(5-y)^2}$

93. $\lim\limits_{p \to -1} \dfrac{p+2}{\ln(p+2)}$

94. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$

95. $\lim\limits_{p \to -2} \dfrac{1-\sqrt{p+3}}{(p+2)^2}$

96. $\lim\limits_{c \to 4^+} \sqrt{\dfrac{4c}{c-4}}$

97. $\lim\limits_{t \to 5} \left|\dfrac{t-6}{t-5}\right|$

98. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-2|-3}{1-|4-x|}$

99. $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{t-1}{|t+2|}$

100. $\lim\limits_{u \to 3} \dfrac{1-u}{|6-2u|}$

101. $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{3-u}{2u-1}$

102. $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{1-u}{6-2u}$

103. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+8}{x^2-5x+1}$

104. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{3y-5y^2}{2y-9}$

105. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

106. $\lim\limits_{w \to \infty} \dfrac{2w^3-5w+6}{4-w^3}$

107. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{2t^3+1}{7t^3+2t+8}$

108. $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{4z+z^2-z^3}{5+2z^2}$

109. $\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{y^2-1}{3y+6y^3}$

110. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{4t^2-6t+3}{2t^2+1} + \dfrac{3t+5}{5t-3}$

111. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{y^3-2y+1}{y-5} + \dfrac{y^2+6}{y^2-y}$

112. $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{1-r^2}{2+r} - \dfrac{4r^3+r}{2r^2-5r+3}$

113. $\lim\limits_{w \to -\infty} \dfrac{w^3}{2+w^2} - \dfrac{1-6w^2}{3w+4}$

114. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x+9} - x$

115. $\lim\limits_{r \to -\infty} \dfrac{3r+2}{\sqrt{4r^2-r+1}}$

116. $\lim\limits_{h \to -\infty} \dfrac{h^2-1}{\sqrt{3h+5h^4}}$

117. $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

118. $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{\sqrt{2u-5}+1}{1+\sqrt[3]{2u}}$

119. $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt{\dfrac{4t^2-5}{t+9t^2}}$

120. $\lim\limits_{w\to-\infty} \dfrac{2w-3}{w-\sqrt{1-w}}$

121. $\lim\limits_{y\to-\infty} y^3+\sqrt{1+y^3+y^6}$

122. $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{2-u}{2+\sqrt{u}}$

123. $\lim\limits_{p\to\infty} 2p-\sqrt{p^2+1}$

124. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r-\sqrt{r^2+1}}{r+6}$

125. $\lim\limits_{v\to\infty} \dfrac{v+1}{\sqrt{v^2+4}}-\dfrac{\sqrt{v^2+4}}{2v-1}$

126. $\lim\limits_{h\to\infty} (2+1/h)^h$

127. $\lim\limits_{x\to 0} 5^{1/x}$

128. $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{e^q-e^{-q}}{2}$

129. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{2}{4-2^u}$

130. $\lim\limits_{t\to\infty} \ln(t^2-4)-\ln(4t^2+1)$

131. $\lim\limits_{x\to 5^+} \log_{0.5}(x-5)$

132. $\lim\limits_{z\to\infty} \log\left(\dfrac{10z-3}{z+8}\right)$

Resuelva

133. Cuando el precio unitario de un artículo es x, el proveedor ofrece una cantidad $S(x)=\dfrac{105x^2}{5x^2+48}$ de unidades por semana. ¿A cuánto se aproxima la oferta del proveedor cuando el precio tiende a infinito?

134. Una escalera de 8 m de longitud está apoyada sobre una pared. La base de la escalera se aleja de la pared a 1 m por segundo. Cuando la base está a x metros de la pared, el extremo superior de la escalera se desliza hacia abajo por la pared a una velocidad $v=\dfrac{x}{\sqrt{64-x^2}}$ m/s. Calcule la velocidad a la que baja el extremo cuando la distancia de la base a la pared es 7 m, 7.9 m y 7.99 m. ¿A cuánto tiende la velocidad del extremo cuando este está a punto de tocar el piso?

135. Si el costo de producir q unidades de un producto es $C(q)=800+6q$, y el costo promedio por unidad es $\bar{C}(q)=C(q)/q$, ¿a cuánto tiende el costo promedio por unidad conforme el número de unidades tiende a infinito?

136. La velocidad de un avión t minutos después del despegue es $v=300\dfrac{3t+2}{t+2}$ en km/h. ¿Cuál es la velocidad en el momento del despegue? ¿Cuál es la velocidad 10 min después? ¿A cuánto tiende la velocidad conforme pasa el tiempo?

137. Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por la función $I(n)=\dfrac{95n^2}{n^2+3}$, en millones de dólares. ¿Cuánto es el ingreso total después de dos meses? ¿Después de seis meses? ¿A cuánto tiende el ingreso total al largo plazo?

138. Se estima que el tiempo necesario para completar la construcción de un edificio es $T(n) = 6/(1-0.95^n)$ en meses, donde n es el número de trabajadores en el sitio. ¿A cuánto tiende el tiempo de construcción conforme el número de trabajadores tiende a infinito?

1.5. Continuidad de una función

El concepto de que una función sea continua suele plantearse en términos de que "se puede trazar su gráfico sin levantar el lápiz".

Pero lo anterior supone que se tiene acceso al gráfico de la función. Según esa idea, ¿cómo se sabría, sin ver el gráfico, si una función es continua?

Lo correcto es que la continuidad de una función en un punto depende del límite de la función en el punto, como vemos en esta definición.

Definición (continuidad de una función en un punto)

Una función f es *continua* en un punto $c \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(a)$$

Note que la igualdad en esta definición implica varias cosas: que existe el límite por la derecha, que existe el límite por la izquierda, que la función está definida en c, y que los tres valores son iguales. Es decir,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Ejemplo 16: determinar continuidad en un punto

Determinar si la función $g(u) = \dfrac{u-3}{u^2+2u-15}$ es continua en $u = 3$.

Por un lado, el límite $\lim_{u \to 3} g(u)$ es

$$\lim_{u \to 3} \frac{u-3}{u^2+2u-15} = \lim_{u \to 3} \frac{\cancel{u-3}}{\cancel{(u-3)}(u+5)} = \lim_{u \to 3} \frac{1}{u+5} = \frac{1}{8}$$

por ambos lados, y eso es un buen comienzo.

Pero por otro lado, $g(3) = \frac{0}{0}$, que no está definido.

Entonces, no; la función $g(u)$ no es continua en $u = 3$.

Los polinomios, las raíces, las funciones exponenciales, las logarítmicas y las trigonométricas son continuas en cada punto de su dominio. Y las sumas, restas, y productos de funciones continuas también son continuas, como dice el siguiente teorema.

Teorema

Si f y g son continuas en a, entonces $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ también son continuas en a. Si además $g(a)\neq 0$ entonces también f/g es continua en a.

Ejemplo 17: encontrar puntos de discontinuidad

Encontrar los puntos donde la función $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{x^3-4x}$ es continua.

En primer lugar, f es un cociente de polinomios, por lo que su numerador y su denominador son continuos en todo $\mathbb{R}$. Por el teorema anterior, el cociente $f(x)$ es continuo siempre que su denominador sea distinto de 0.

Los únicos puntos de discontinuidad de f son entonces los puntos donde el denominador es 0:

$$x^3-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2)(x+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0,2 \text{ o } -2$$

Así, f es continua en $\mathbb{R}-\{0,2,-2\}$.

Para funciones definidas en trozos no basta con aplicar el teorema anterior a polinomios, exponenciales y otras funciones que se saben continuas. Eso es porque aunque una función se defina en trozos a partir de funciones continuas, podría haber una discontinuidad en los puntos que separan los trozos. Como ejemplo de esto, vea el gráfico en el ejemplo 3: cada trozo es continuo pero hay una discontinuidad en $x=2$.

Por regla general, si f está definida en trozos entonces sus puntos de discontinuidad son los puntos de discontinuidad de cada trozo, y posiblemente los puntos donde se unen o separan los trozos.

Ejemplo 18: encontrar puntos de discontinuidad

Encontrar los puntos de discontinuidad de

$$p(t)=\begin{cases} 2t^2-2t+2 & \text{si } t\leq 2 \\ 12-t & \text{si } t>2. \end{cases}$$

Como $p(t)$ está definida en trozos y cada trozo es continuo en su dominio, entonces el único punto de posible discontinuidad es $t=2$, el que divide los trozos.

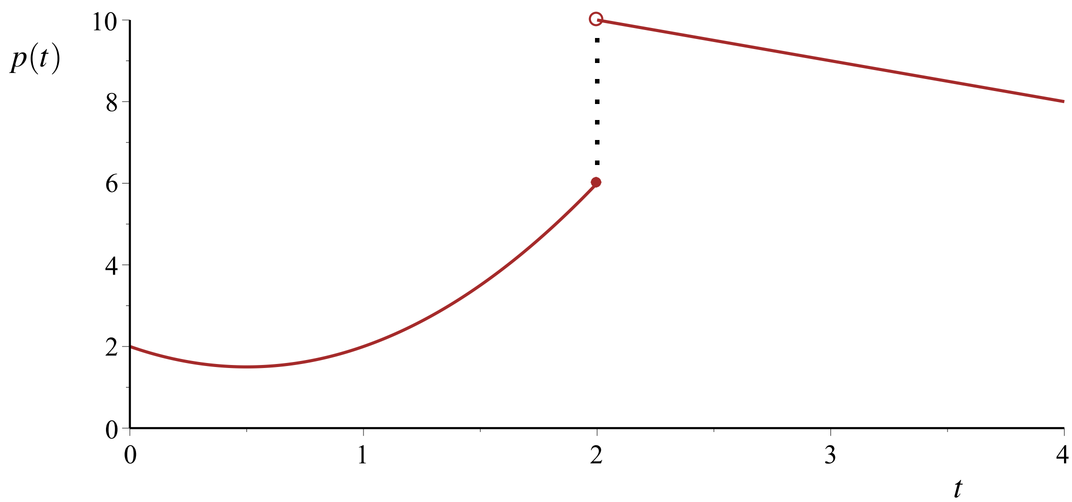
En ese punto tendremos que recurrir a la definición de continuidad: la función p será continua en $t=2$ solo si los dos límites laterales y el valor de la función en ese punto son iguales.

Calculemos entonces:

- $p(2)=2(2)^2-2(2)+2=6$
- $\lim\limits_{t\to 2^-} p(t)=\lim\limits_{t\to 2^-} 2t^2-2t+2=6$
- $\lim\limits_{t\to 2^+} p(t)=\lim\limits_{t\to 2^+} 12-t=10$

Como los tres valores no son todos iguales, no se satisface que $\lim_{t\to 2} p(t)=p(2)$ (específicamente porque el límite no existe), y concluimos que p es discontinua en 2.

En el gráfico de $p(t)$ confirmamos que cada trozo es continuo pero hay un salto en $t=2$ (debido a límites laterales distintos), lo que causa la discontinuidad.



Ejemplo 19: determinar parámetro para que función sea continua

Comparando con el ejemplo anterior, consideremos ahora una función $q(t)$ con la siguiente definición:

$$q(t)=\begin{cases} 2t^2-2t+2 & \text{si } t\le 2 \\ a-t & \text{si } t>2 \end{cases}$$

donde a es alguna constante.

¿Cuál debe ser el valor de a para que q sea continua en todo $\mathbb{R}$?

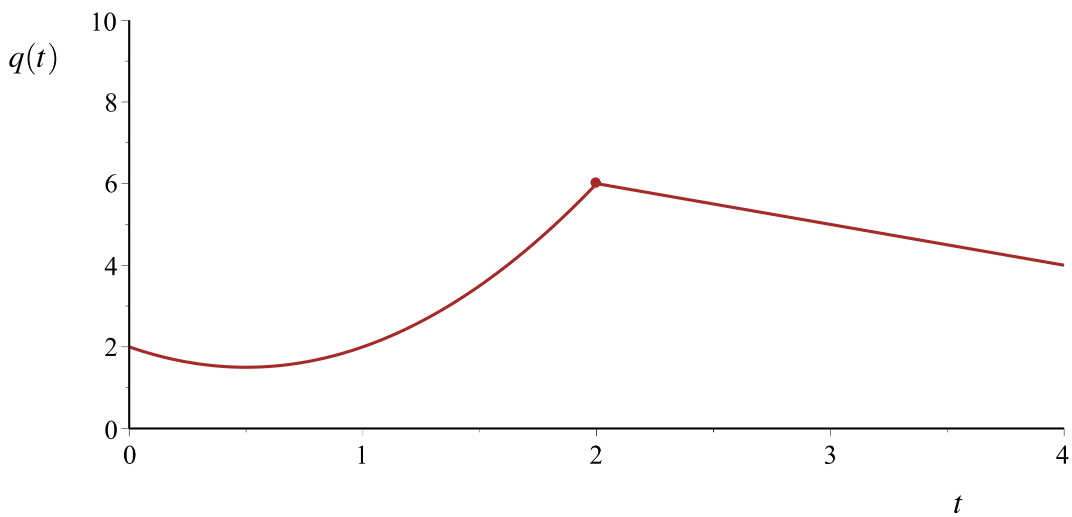
Esta nueva función es casi idéntica a la función del ejemplo anterior excepto que el trozo derecho tiene $a-t$ en vez de $12-t$. Al igual que en el caso anterior de $p(t)$, como los dos trozos son continuos el requisito para que q sea continua en $\mathbb{R}$ se reduce a que sea continua en $t=2$. Para eso se necesita que los siguientes tres valores sean iguales:

- $q(2) = 2(2)^2 - 2(2) + 2 = 6$
- $\lim\limits_{t\to 2^-} q(t) = \lim\limits_{t\to 2^-} 2t^2 - 2t + 2 = 6$
- $\lim\limits_{t\to 2^+} q(t) = \lim\limits_{t\to 2^+} a - t = a - 2$

Eso es fácil de resolver: la igualdad $6 = a-2$ es cierta solo cuando $a=8$.

La respuesta entonces es que para que q sea continua en $\mathbb{R}$ el valor de a debe ser 8.

El gráfico de $q(t)$ para $a=8$, abajo, muestra la semejanza con $p(t)$ y también la diferencia principal: el trozo derecho está trasladado hacia abajo de modo ahora que los dos trozos se empalman y no hay salto en el gráfico.



Ejercicios

Determine si la función es continua en el punto dado

139. $f(x) = \dfrac{4x-8}{x^2-4}$ en $x=2$

140. $h(t) = \dfrac{6t^2-5t+1}{3t^2-18}$ en $t=3$

141. $g(x) = \begin{cases} 8x-5 & \text{si } x < -1 \\ 10x-2x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$

142. $p(r) = \begin{cases} 4-r & \text{si } r < -1 \\ 4 & \text{si } r = -1 \\ 2r+7 & \text{si } r > -1 \end{cases}$ en $r = -1$

143. $y(x) = \begin{cases} |4-x| & \text{si } x > -5 \\ |3x+6| & \text{si } x < -5 \end{cases}$ en $x = -5$

Determine los valores de la variable donde la función es discontinua

144. $h(t) = \dfrac{t-3}{t^2-9}$

145. $g(y) = \dfrac{y-1}{\sqrt{y}-1}$

146. $f(u) = \begin{cases} \dfrac{1-u}{1-u^2} & \text{si } u \neq \pm 1 \\ 1/2 & \text{si } u = \pm 1 \end{cases}$

147. $p(u) = \begin{cases} \dfrac{3u-5}{u+5} & \text{si } u \neq -5 \\ 4 & \text{si } u = -5 \end{cases}$

148. $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x < 3 \\ 7-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

149. $r(t) = \begin{cases} 6-t & \text{si } t < -2 \\ 10+t & \text{si } -2 \leq t < 1 \\ 5+6t & \text{si } t > 1 \end{cases}$

150. $q(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t-1} & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t}{t+1} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

151. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2+2x} & \text{si } x < -1 \\ x-3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

152. $h(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-1}{y-1} & \text{si } y < -1 \\ \dfrac{1}{y^2-4} & \text{si } -1 < y < 3 \\ \dfrac{2y^2-9y+4}{y^2-3y-4} & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que la función sea continua en $\mathbb{R}$

153. $f(p) = \begin{cases} p^4 & \text{si } p \leq 3 \\ ap^2 & \text{si } p > 3 \end{cases}$

154. $q(v) = \begin{cases} v^2+4v-2b & \text{si } v < -1 \\ v^2 & \text{si } v \geq -1 \end{cases}$

155. $p(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < a \\ x+1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

156. $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \leq -1 \\ at+b & \text{si } -1 < t \leq 3 \\ -2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

157. $r(u) = \begin{cases} u+1 & \text{si } u \leq 0 \\ u^2+a & \text{si } 0 < u \leq b \\ 7-u & \text{si } u > b \end{cases}$

Capítulo 2

Derivadas de funciones de una variable

En este capítulo estudiaremos derivadas de funciones. En su forma más básica, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto.

A pesar de que este concepto es fundamentalmente geométrico, veremos, especialmente en el siguiente capítulo, que las derivadas tienen aplicaciones en las finanzas y otras áreas.

2.1. Derivada de una función en un punto

Definición (derivada de una función en un punto)

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo alrededor de un número a.
La *derivada* de f en a es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$, y se calcula como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si el límite existe.

Una fórmula alterna para la derivada de f en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si $f'(a)$ existe (el límite existe) se dice que f es *derivable* en a.

De las dos fórmulas en la definición, generalmente la primera es preferible si se conoce el valor de a. La segunda puede usarse para valores indeterminados de x. Vea los ejemplos que siguen.

Notación

Si $y = f(x)$, la derivada puede denotarse

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x).$$

La derivada de f en el punto a se puede denotar

$$f'(a), \quad y'(a), \quad f'(x)\Big|_{x=a} \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

Ejemplo 1: derivada por definición en un punto

Calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en $x = 3$.

Usaremos la primera fórmula en la definición porque sabemos en qué punto se necesita la derivada.

$$\begin{aligned}
h'(3) &= \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{1-x} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2+(1-x)}{2(1-x)}}{x-3} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{2(1-x)(x-3)} \qquad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}}{2(1-x)\cancel{(x-3)}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{2(1-x)} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, $f'(3) = 1/4$.

El hecho de que durante el cálculo del límite en el ejemplo anterior nos encontráramos la forma $0/0$ no debe sorprendernos. Eso será usual, porque al intentar calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

sustituyendo $x = a$ invariablemente tendremos[1]

$$\frac{f(a) - f(a)}{a-a} = \frac{0}{0}$$

[1]Esto sucederá siempre que f sea continua en a, porque entonces $\lim_{x\to a} = f(a)$.

Ejemplo 2: derivada por definición en un punto

Calcular la derivada de $r(t) = 1 - \sqrt{6-3t}$ en $t = -1$.

De nuevo usamos la primera forma de la definición porque necesitamos la derivada en un punto particular. Aquí usaremos la letra r en vez de f, y t en vez de x.

$$
\begin{aligned}
r'(-1) &= \lim_{t\to -1} \frac{r(t) - r(-1)}{t - (-1)} \\
&= \lim_{t\to -1} \frac{\left(1-\sqrt{6-3t}\right) - (-2)}{t+1} \qquad \begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix} \\
&= \lim_{t\to -1} \frac{3-\sqrt{6-3t}}{t+1} \cdot \frac{3+\sqrt{6-3t}}{3+\sqrt{6-3t}} \qquad \text{(racionalizar)} \\
&= \lim_{t\to -1} \frac{9-(6-3t)}{(t+1)(3+\sqrt{6-3t})} \\
&= \lim_{t\to -1} \frac{3\cancel{(1+t)}}{\cancel{(t+1)}(3+\sqrt{6-3t})} \\
&= \frac{3}{3+\sqrt{6-3(-1)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $r'(-1) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3: derivada por definición como función de la variable

Calcular la derivada de $h(x) = x^2 - 3x$ para cualquier valor de x.

Ahora usamos la segunda fórmula en la definición de derivada porque no tenemos un valor específico de x. También, como la función se llama h, usaremos otra letra, digamos u, para la variable que tiende a 0.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{u \to 0} \frac{h(x+u) - h(x)}{u} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{[(x+u)^2 - 3(x+u)] - [x^2 - 3x]}{u} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{[\cancel{x^2} + 2xu + u^2 - \cancel{3x} - 3u] - \cancel{x^2} + \cancel{3x}}{u} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{2xu + u^2 - 3u}{u} \qquad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{\cancel{u}(2x + u - 3)}{\cancel{u}} \\
&= \lim_{u \to 0} 2x + u - 3 \\
&= 2x - 3
\end{aligned}
$$

Así es que la derivada de $h(x) = x^2 - 3x$, como función de x, es $h'(x) = 2x - 3$.

En este último ejemplo vemos que la derivada de una función, sin evaluar en un punto en particular, es una nueva función.

Es probable que su calculadora tenga una tecla $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$, que se usa para calcular derivadas.

Para la derivada en el ejemplo 1, use esa tecla y escriba la fórmula de la función y el punto donde se evaluará la derivada, de modo que la pantalla muestre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-X}\right)\bigg|_{x=3}$$

Al presionar la tecla $=$, la calculadora responderá con el valor 0.25, que es lo que obtuvimos en ese ejemplo.

La función de derivar en la calculadora necesita que la variable se llame X. Para la derivada en el ejemplo 2, escriba

$$\frac{d}{dx}(1 - \sqrt{6 - 3X})\big|_{x=-1}$$

y la calculadora responderá con 0.5.

Esta función puede usarse para calcular la derivada de una función en un punto específico. No es útil para derivadas en general como en el ejemplo 3.

Ejercicios

Use la definición para calcular la derivada

1. $3r-8$ en $r=-2$
2. $2-6(t+1)$ en $t=3$
3. u^2-4u en $u=5$
4. $1-3x+x^2$ en $x=-6$
5. $5(p-3)^2+p-3$ en $p=3$
6. $2y^3-y$ en $y=1$
7. $5q^3+2q^2$ en $q=-1$
8. $\dfrac{1}{1-z}$ en $z=2$
9. $\dfrac{3}{2w+5}$ en $w=-2$
10. $\dfrac{2}{y}-1$ en $y=-2$
11. $\dfrac{2v+3}{v-4}$ en $v=3$
12. $\dfrac{4-3x}{2+x}$ en $x=-1$
13. $\dfrac{2t^2-5t}{t+3}$ en $t=0$
14. $\dfrac{10}{u^2-4}$ en $u=-3$
15. $\sqrt{v+3}$ en $v=1$
16. $2-3\sqrt{x}$ en $x=25$
17. $t+\sqrt{1-t}$ en $t=-2$
18. $\sqrt{2y^2-5}$ en $y=2$
19. $1-\sqrt{1-2u}$ en $u=0$
20. $\dfrac{1}{1+\sqrt{r}}$ en $r=1$

Use la definición para calcular la derivada, como función de la variable. . .

21. . . . de las funciones en los ejercicios 1–19 impares.
22. . . . de las funciones en los ejercicios 2–20 pares.

2.2. Derivada de una función

En la práctica no es común calcular derivadas por definición. Existen reglas para derivar sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones, así como para funciones particulares como potencias, logaritmos y otras. Empecemos por dos reglas básicas y una fórmula de derivación.

Dos reglas de derivación

- Regla del producto por constante: si f es una función derivable y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(cf)' = cf'$$

- Regla de la suma: Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f+g)' = f' + g'$$

Derivada de una potencia

Si $f(x) = x^n$ con n constante, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Note en particular que la derivada de x es

$$(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$$

y que la derivada de cualquier constante es

$$(c)' = (cx^0)' = c \cdot 0x^{-1} = 0$$

Como consecuencia, la derivada de una función lineal $y = mx + b$ es

$$(mx+b)' = m(x)' + (b)' = m(1) + 0 = m$$

lo cual coincide (recordando que la derivada es la pendiente de la recta tangente) con lo que siempre hemos sabido: la pendiente de una recta $y = mx + b$ es igual a m.

Ejemplo 4: reglas de producto por constante, suma y potencia

Usando las reglas anteriores, así calculamos estas derivadas:

- $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5\,(3x^2) = 15x^2$

- $(2t^2 - 3t + \sqrt{t})' = (2t^2)' - (3t)' + (t^{1/2})'$
  $= 2\,(2t^1) - 3\,(1) + \frac{1}{2}t^{-1/2} = 4t - 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

- $\big[(3r+2)(1-r)\big]' = [-3r^2+r+2]'$ (primero desarrollar el producto)
  $= -3\,(2r)+1+0 = -6r+1$

- $\left(\dfrac{2u^3+u}{3u^2}\right)' = \left(\dfrac{2u^3}{3u^2}+\dfrac{u}{3u^2}\right)' = (\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u^{-1})'$ (primero dividir)
  $= \frac{2}{3}-\frac{1}{3}u^{-2}$

Cuando se usen reglas de derivación para calcular la derivada de una función en un punto particular, por ejemplo $f'(a)$, debe calcularse primero la derivada $f'(x)$ en cualquier punto, y *luego* evaluarla en $x=a$.

Ejemplo 5: derivada en un punto usando reglas

Calcular $q'(2)$ para $q(r) = 5r(r-\sqrt{2r})$.

Como acabamos de decir, primero calcularemos $q'(r)$ y después la evaluaremos en $r=2$.

Pero antes de derivar llevemos la expresión $q(r)$ a una forma en que podamos aplicar las fórmulas vistas:

$$\begin{aligned} q(r) &= 5r(r-\sqrt{2r}) = 5r(r-\sqrt{2}\sqrt{r}) \\ &= 5r^2-5\sqrt{2}\,r^{3/2} \end{aligned}$$

Lo anterior fue solo preparar la expresión $q(r)$. Ahora derivamos:

$$\begin{aligned} q'(r) &= (5r^2)'-(5\sqrt{2}\,r^{3/2})' \\ &= 5\,(2r)-5\sqrt{2}\,(\tfrac{3}{2}r^{1/2}) \\ &= 10r-\tfrac{15}{2}\sqrt{2r} \end{aligned}$$

Por último evaluamos en $r=2$.

$$q'(2) = 10(2)-\tfrac{15}{2}\sqrt{2(2)} = 20-\tfrac{15}{2}\cdot 2 = 5$$

Tenemos entonces ya nuestra respuesta: $q'(2)=5$.

Ejercicios

Derive

23. x^9

24. $5t^3$

25. $\frac{7}{4}u^4$

26. $12y^{-3}$

27. $6r^{1/3}$

28. $13t^4 - 5t^2 + 6t$

29. $12y^{3/2} - 6y^{1/2} - 3y^{-1}$

30. $-5x^2 + 3x - 6$

31. $\dfrac{11q}{4} + \dfrac{9}{5}$

32. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5}u + 0.5u^2$

33. $\dfrac{5(y^4 - 3)}{2}$

34. $\dfrac{\sqrt{8}}{x^5}$

35. $\dfrac{5t^2 - 3t + 1}{t^2}$

36. $\dfrac{5w+1}{w} - \dfrac{6w-2}{w^2}$

37. $r\sqrt{r} + \dfrac{1}{r^2\sqrt{r}}$

38. $(2u+3)(3u^2-1)$

39. $x(3x^2 - 7x + 7)$

40. $3t\left(t^2 - \dfrac{2}{t}\right)$

41. $(s^2+s+1)(s^2+2)$

42. $2\sqrt{y}\left(y^2 - \dfrac{1}{y}\right)$

43. $(v^2+2v)(v+1) - 6v^2 + 5$

44. $(6w-4)^2$

45. $\sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$

46. $\dfrac{6\sqrt{y^5} - 9\sqrt{y}}{3\sqrt{y^3}}$

47. $\dfrac{40t^5 - t^3\sqrt{t}}{5t^2\sqrt{t}}$

Calcule la derivada de la función dada en el punto dado

48. $4 - 5t + t^2$ en $t = 2$

49. $(u-4)(u+2)$ en $u = -1$

50. $7y - 12\sqrt{2y}$ en $y = 8$

51. $(6x^3 - 2x + 3)/x$ en $x = 0$

2.2.1. Interpretación geométrica

Recuerde que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene pendiente m es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

y que la forma pendiente-intersección ($y = mx + b$) puede conseguirse despejando y en la ecuación punto-pendiente.

Ejemplo 6: derivada como pendiente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x$ en $x = 1$ (vea el gráfico después de este ejemplo).

Como sabemos, para encontrar la ecuación de una recta en un plano se necesitan un punto y una pendiente.

- El punto (x, y) se encuentra tomando $x = 1$ y calculando $y = (1)^2 - 5(1) = -4$. El punto entonces es $(1, -4)$.
- La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1)$.
  Para calcular $f'(1)$, como vimos, se debe calcular primero $f'(x)$ y luego evaluarla en $x = 1$:

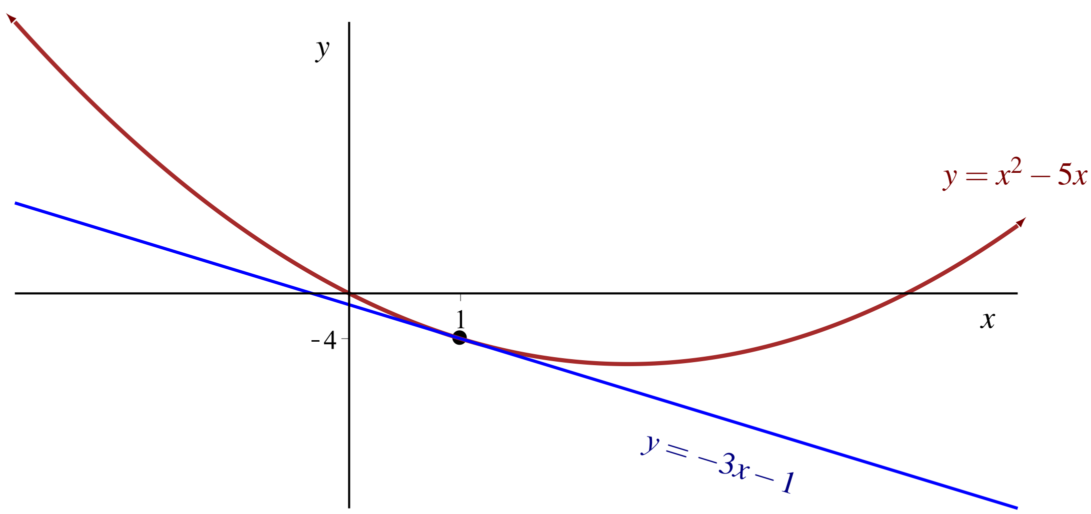
$$f'(x) = (x^2 - 5x)' = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2(1) - 5 = -3$$

Teniendo ya el punto $(1, -4)$ y la pendiente $m = -3$, escribimos la ecuación de la recta:

$$y + 4 = -3(x - 1)$$

o bien $y = -3x - 1$.

En relación con el ejemplo anterior, en esta figura vemos el gráfico de la parábola $y = x^2 - 5x$ y su tangente en el punto $(1, -4)$, la recta $y = -3x - 1$.



Recuerde que dos rectas son normales (ortogonales, perpendiculares) entre sí cuando se intersecan formando un ángulo recto. Esto sucede cuando el producto de sus pendientes es -1. Específicamente, si L_1 y L_2 son dos rectas con pendientes respectivas m_1 y m_2, entonces

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son normales} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

Definición (recta normal a un gráfico)

La recta *normal* al gráfico de $y = f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta normal a la tangente del gráfico en ese punto.

Como la recta tangente tiene pendiente $m_1 = f'(a)$, entonces la normal tiene pendiente

$$m_2 = \frac{-1}{f'(a)}$$

suponiendo que $f'(a) \neq 0$. Si fuera $f'(a) = 0$ entonces la tangente sería horizontal, y la normal sería vertical.

Ejemplo 7: aplicación geométrica de la derivada

Sea $g(x) = x + 6x^{-1}$. Encontrar, para el gráfico de $y = g(x)$:

a. La ecuación de la recta normal en $x = -3$.

b. Los puntos donde la recta normal es paralela a la recta $y = 2x + 4$

Para contestar cada una de esas preguntas necesitaremos conocer la derivada de $g(x)$, así que empecemos por ahí:

$$g'(x) = 1 - 6x^{-2}$$

a. Como siempre que busquemos la ecuación de una recta en el plano, necesitaremos un punto y una pendiente.

   - Punto: para $x = -3$ el punto es $(-3, g(-3)) = (-3, -5)$.
   - Pendiente: la pendiente de la recta *tangente* es $m_1 = g'(-3) = 1/3$. De ahí que la pendiente de la recta *normal* es $m_2 = -3$.

   Por último, la ecuación de la recta normal en $x = -3$ es $y + 5 = -3(x + 3)$, o bien $y = -3x - 14$.

b. Que la recta normal en un punto x sea paralela a la recta $y = 2x + 4$ significa que las dos rectas tienen la misma pendiente. Resulta entonces lo siguiente:

   - La pendiente de la recta $y = 2x + 4$ es $m_1 = 2$.
   - La recta normal, por ser paralela a la anterior, tiene pendiente $m_2 = 2$.
   - La recta tangente, por ser normal a la anterior, tiene $m_3 = -1/2$.
   - Como la pendiente de la tangente es lo mismo que la derivada, se concluye que $g'(x) = -1/2$.

Esto último se plantea como una ecuación con incógnita x:

$$\begin{aligned} g'(x) = 1 - 6x^{-2} &= -\tfrac{1}{2} \\ -6x^{-2} &= -\tfrac{3}{2} \\ x^{-2} &= \tfrac{1}{4} \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Encontramos así que existen dos puntos donde la recta normal es paralela a $y = 2x+4$: en $x = 2$ y en $x = -2$. Los puntos, como pares ordenados, son

$$(2, g(2)) = (2,5) \quad \text{y} \quad (-2, g(-2)) = (-2,-5)$$

Ejercicios

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado

52. $y = 5x - x^2$ en $x = 1$

53. $y = r^3 + 3r^2 - 1$ en $r = -2$

54. $z = -6t^2 + t^3$ en $t = 0$

55. $y = 2r^5 - 3r^2$ en $r = -1$

56. $q = 1/p$ en $p = -1$

57. $y = \dfrac{1-r}{r}$ en $r = 2$

58. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ en $x = 8$

59. $w = \sqrt{u} - 2$ en $u = 0$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a...

60. ... $y = x^3 - 12x$ es horizontal

61. ... $y = 1 + t^{1/3}$ es vertical

62. ... $y = 4u^2 - 5u + 6$ es paralela a la recta $y = 7u - 2$

2.2.2. Razón de cambio

Recuerde que en una ecuación lineal $y = mx + b$ la pendiente m es el incremento en y por cada unidad de incremento en x. En otras palabras, m es la tasa de cambio de y con respecto a x (la velocidad con la que cambia y conforme x varía). Esta tasa de cambio es constante en una función lineal, porque la pendiente m es la misma en toda la recta.

Si $y = f(x)$, donde f es alguna función lineal o no, entonces $f'(x)$ es la tasa instantánea de cambio (o velocidad instantánea) de y con respecto a x. Se le llama "instantánea" porque aunque tiene el rol de la pendiente (ya que $m = f'(a)$ es la pendiente de la tangente en $x = a$), a diferencia de la pendiente de una recta, la derivada puede variar de un punto a otro en el gráfico.

Si la tasa de cambio es positiva, se llama también tasa de aumento, crecimiento o incremento. Si es negativa, tasa de disminución o decrecimiento.

Al igual que en la pendiente de una recta, la unidad de medida de y' es la unidad de medida de y dividida entre la unidad de medida de x.

Ejemplo 8: derivada como razón de cambio

Si un monto de \$5000 se invierte a una tasa de interés anual de 3 %, entonces su valor a los t años será aproximadamente $A(t) = 5000 + 148t + 2.15t^2 + 0.025t^3$, en dólares.

Calculemos la tasa de incremento anual del valor de la inversión a los tres años, y a los siete años.

En cualquier momento t, la tasa de cambio de $A(t)$ con respecto al tiempo es la derivada:

$$A'(t) = 148 + 2.15(2t) + 0.025(3t^2) = 148 + 4.3t + 0.075t^2$$

A los tres años la tasa de incremento es $A'(3) = 161.575$. Como A está en dólares y t en años, la derivada está en dólares por año: la tasa de incremento a los tres años es 161.575 dólares por año.

A los siete años la tasa es $A'(7) = 181.775$: la inversión en ese momento está creciendo a la tasa de 181.775 dólares por año.

Recuerde que f' es la tasa *instantánea* de cambio, y generalmente es variable. En el ejemplo anterior, que $A'(7)$ sea igual a 181.775 no significa que el valor de la inversión aumenta \$181.775 *cada* año. Esa es la tasa instantánea de crecimiento, en el momento $t = 7$. En $t = 8$ la tasa habrá cambiado. De hecho, para cuando $t = 7.1$ ya la tasa será otra.

Lo anterior marca una diferencia importante entre la tasa de cambio de una recta y la tasa de cambio de otras funciones: las rectas se caracterizan porque su tasa de cambio es siempre la misma, mientras que en otras funciones la tasa de cambio es variable.

Ejercicios

Resuelva

63. El valor de una maquinaria a los t años de comprada es $V(t) = 120\,000 - 8000t$ en dólares. ¿Cuál es la tasa de depreciación (pérdida de valor) en el momento de ser comprada? ¿Diez años después?

64. El valor de una maquinaria a los t años de comprada es $V(t) = 350(t-15)^2$ en dólares. ¿Cuál es la tasa de depreciación (pérdida de valor) en el momento de ser comprada? ¿A los cinco años? ¿A los diez años? ¿A los quince años?

65. Un proyectil se lanza hacia arriba, y su altura t segundos después es $h(t) = -4.9t^2 + 17t + 2$ en metros. ¿Cuál es su velocidad al ser lanzado? ¿Después de un segundo? ¿Después de tres segundos?

66. El salario mensual de una persona está dado por $S(m) = 800\,000 + 21\,320m - 75.9m^2 + 3.7m^3$, en colones a los m meses de su contratación. ¿Cuál es la tasa de aumento del salario mensual al año de la contratación? ¿A los 2.5 años? ¿A los diez años?

2.3. Reglas de derivación

En la sección anterior vimos las primeras dos reglas de derivación: la regla del producto por constante y la regla de la suma.

En esta sección estudiaremos tres reglas más: para el producto, para el cociente y para la composición de dos funciones.

2.3.1. Reglas del producto y del cociente

Para derivar el producto de dos funciones puede usarse la siguiente regla.

Regla del producto

Si u y v son funciones derivables, la *regla del producto* dice que

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Ejemplo 9: derivada de un producto

La derivada del producto $t^{1/3} \cdot (t^2 - 3t)$ es[2]

$$\begin{aligned}\left[t^{1/3} \cdot (t^2 - 3t)\right]' &= \left(t^{1/3}\right)' \cdot (t^2 - 3t) + t^{1/3} \cdot (t^2 - 3t)' \\ &= \tfrac{1}{3} t^{-2/3} \cdot (t^2 - 3t) + t^{1/3} \cdot (2t - 3)\end{aligned}$$

La siguiente regla dice cómo derivar el cociente de dos funciones.

Regla del cociente

Si u y v son funciones derivables, la *regla del cociente* dice que

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Ejemplo 10: derivada de un cociente

La derivada del cociente $\dfrac{2y-1}{3y+5}$ es

$$\begin{aligned}\left(\frac{2y-1}{3y+5}\right)' &= \frac{(2y-1)' \cdot (3y+5) - (2y-1) \cdot (3y+5)'}{(3y+5)^2} \\ &= \frac{(2)(3y+5) - (2y-1)(3)}{(3y+5)^2} = \frac{13}{(3y+5)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 11: derivada de cociente con un producto

Derivar $y = \dfrac{(x-1)(1-\sqrt{x})}{x^2+1}$.

Esta función tiene un producto y un cociente, por lo que vamos a usar las reglas del producto y del cociente.

Como lo "más grande" aquí es el cociente (porque el producto es parte del cociente y no al revés), entonces se empieza por la regla del cociente. Luego, en el

---

[2] En este caso particular la regla del producto no es estrictamente necesaria, porque podríamos desarrollar el producto para usar otras fórmulas más básicas: $t^{1/3}(t^2 - 3t) = t^{7/3} - 3t^{4/3}$. Pero en la sección 2.4 veremos casos en los que la regla del producto será inevitable.

momento de calcular la derivada del numerador le tocará el turno a la regla del producto.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left[\frac{(x-1)(1-\sqrt{x})}{x^2+1}\right]' \\
&= \frac{\left[(x-1)(1-\sqrt{x})\right]' \cdot (x^2+1) - (x-1)(1-\sqrt{x}) \cdot [x^2+1]'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\left[\,(x-1)'(1-\sqrt{x}) + (x-1)(1-\sqrt{x})'\,\right](x^2+1) - (x-1)(1-\sqrt{x})[2x]}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\left[1(1-\sqrt{x}) + (x-1)(-\frac{1}{2}x^{-1/2})\right](x^2+1) - 2(x^2-x)(1-\sqrt{x})}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(1-\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2}x^{-1/2})(x^2+1) - (2x^2-2x)(1-\sqrt{x})}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 12: derivada de producto con un cociente

Calcular la derivada de $q = (1-p^2)\,\dfrac{3p+1}{5p-2}$.

Aquí tenemos, como en el ejemplo anterior, un producto y un cociente. Pero esta vez el producto es lo "más grande" porque el cociente es parte del producto y no al revés. Entonces, empezamos por la regla del producto, y al derivar el segundo factor usaremos la regla del cociente.

$$
\begin{aligned}
q' &= (1-p^2)' \cdot \frac{3p+1}{5p-2} + (1-p^2) \cdot \left[\frac{3p+1}{5p-2}\right]' \\
&= -2p \cdot \frac{3p+1}{5p-2} + (1-p^2) \cdot \left[\frac{(3p+1)'(5p-2) - (3p+1)(5p-2)'}{(5p-2)^2}\right] \\
&= -2p \cdot \frac{3p+1}{5p-2} + (1-p^2) \cdot \frac{3(5p-2) - (3p+1)(5)}{(5p-2)^2} \\
&= -2p \cdot \frac{3p+1}{5p-2} + (1-p^2) \cdot \frac{-11}{(5p-2)^2}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Derive

67. $(x^2-3x+5)(4x^3+x-7)$

68. $(s^3+s-1)(s^2-4)$

69. $y^2\,(1+\sqrt{y})$

70. $\sqrt[3]{t}\,(\sqrt{t}+3)$

71. $(5w^2-2)(2\sqrt{w}-1/w)$

72. $\dfrac{z^4+5}{3+z}$

73. $\dfrac{3x+2}{x^2-5x+3}$

74. $\dfrac{t+1}{t^2+2t+2}$

75. $\dfrac{u^2+2}{u^2+u+1}$

76. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ con respecto a x

77. $\dfrac{y}{y+1}-\dfrac{y-1}{y+3}$

78. $\dfrac{2x-1}{2x+1}\,(3x+1)$

79. $t^2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{3-t}$

80. $\dfrac{(s+1)(s^2+1)}{s-2}$

81. $(2x-5)\,\dfrac{x+1}{x+2}$

82. $(1-2p)(3p+2)(p^2+1)$

83. $6\sqrt{u}\,(u^4+u+1)(2u-3)$

84. $w^4\left(1-\dfrac{2}{w+1}\right)$

85. $\dfrac{2}{x+1}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)$

86. $\dfrac{4-\dfrac{1}{1-t}}{t-2}$

87. $\dfrac{u+1}{u-1}\cdot\dfrac{u^2+2}{5+u}$

88. $\dfrac{(4r+6)(2+3r)}{r(1-2r)}$

Calcule el valor numérico

89. $(fg)'(2)$, dado que $f(2)=-1$, $g(2)=3$, $f'(2)=1$ y $g'(2)=-2$

90. $h'(-1)$, dado que $h(x)=x^2p(x)$, $p(-1)=4$ y $p'(-1)=2$

91. $(f/g)'(5)$, dado que $f(5)=-2$, $g(5)=-1/2$, $f'(5)=4$ y $g'(5)=2$

92. $q'(4)$, dado que $q(x)=f(x)/\sqrt{x}$, $f(4)=-3$ y $f'(4)=0$

Encuentre la ecuación de la recta...

93. ... tangente a $q=(p^3+4)(p^2-5)$ en $p=-2$

94. ... tangente a $w=\dfrac{5}{4-u}$ en $u=9$

95. ... tangente a $r=\dfrac{t}{t^2+1}$ en $t=0$

96. … normal a $y=\sqrt{w}\,(6w-3)$ en $w=1/4$

97. … normal a $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ en $x=4$

Resuelva

98. La velocidad de un avión t segundos después del despegue está dada por $v=83\dfrac{180t+2}{60t+2}$ m/s. ¿Cuánto es la aceleración (la tasa de cambio de la velocidad) 10 s después del despegue?

99. Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por la función $I(n)=\dfrac{95n^2}{n^2+3}$, en millones de dólares. Calcule $I'(12)$ e interprete el resultado.

100. Se estima que el costo, en miles de dólares, de eliminar $x\,\%$ de los contaminantes en un pozo de agua es $C(x)=\dfrac{0.8x}{100-x}$. Calcule $C'(50)$ y $C'(90)$, e interprete los resultados.

101. La utilidad mensual de una pastelería es $U(x)=\dfrac{400x}{x+2}-2x-300$ en millones de colones, donde x es el número de toneladas de pastel que producen. El punto más alto en el gráfico de U es el punto donde la tangente es horizontal. Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad. ¿Cuál es la utilidad máxima?

2.3.2. Regla de la cadena

Para derivar una composición de funciones está la regla de la cadena.

Regla de la cadena

Si f y g son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, la *regla de la cadena* dice que

$$(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

donde $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

Podemos decir entonces que la derivada de una composición es la derivada de la función externa multiplicada por la derivada de la función interna.

Ejemplo 13: derivada de función compuesta

Calcular la derivada de $y = \sqrt{x^2+3x}$.

Esta es la composición de dos funciones: la externa es la raíz cuadrada y la interna el polinomio x^2+3x.

Si pensamos en $u = x^2+3x$ (la función interna) entonces $y = \sqrt{u}$ (la función externa). Por la regla de la cadena, la derivada de la composición es el producto de la derivada de la raíz cuadrada por la derivada del polinomio.

La derivada de la raíz cuadrada es $y' = \frac{1}{2}u^{-1/2}$, y la derivada del polinomio es $u' = 2x+3$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u' \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+3x)^{-1/2} \cdot (2x+3) \end{aligned}$$

En los dos ejemplos siguientes tenemos una función compuesta por un cociente y una composición pero en distintos órdenes. Es importante aplicar las reglas de derivación “de fuera hacia dentro”, derivando primero la operación más grande.

Ejemplo 14: derivada de composición con cociente

La función $u(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right)^3$ tiene un cociente (la función interna) dentro de un cubo (la función externa). Aquí lo más grande es la composición porque el cociente está dentro de la composición, y no al revés.

Usamos entonces primero la regla de la cadena: derivada del cubo por derivada del cociente. Para la derivada del cociente usaremos después la regla del cociente.

$$\begin{aligned} u'(t) = \left[\left(\frac{t}{t+1}\right)^3\right]' &= 3\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{t+1}\right)' \\ &= 3\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \cdot \frac{(t)'(t+1)-t(t+1)'}{(t+1)^2} \\ &= 3\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{3t^2}{(t+1)^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 15: derivada de cociente con composición

En la función $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$ hay, como en el ejemplo anterior, una composición (polinomio dentro de raíz) y un cociente, pero ahora el cociente es lo más grande porque contiene a la composición, y no al revés.

Por eso, primero aplicamos la regla del cociente, y en algún momento le llegará el turno a la regla de la cadena.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x)' \cdot \sqrt{1-2x} - x \cdot \left(\sqrt{1-2x}\right)'}{\sqrt{1-2x}^2} \\
&= \frac{(1) \cdot \sqrt{1-2x} - x \cdot \left[(1-2x)^{1/2}\right]'}{1-2x} \\
&= \frac{\sqrt{1-2x} - x\left[\frac{1}{2}(1-2x)^{-1/2} \cdot (1-2x)'\right]}{1-2x} \\
&= \frac{\sqrt{1-2x} - \frac{1}{2}(1-2x)^{-1/2} \cdot (-2)}{1-2x} \\
&= \frac{\sqrt{1-2x} + x(1-2x)^{-1/2}}{1-2x}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Derive

102. $3(5-6x)^5$

103. $\sqrt[3]{9t^2+5}$

104. $\dfrac{1}{(16u+1)^3}$

105. $20\sqrt[5]{(y^3+4y)^2}$

106. $105(4w^2-7)^3 - \sqrt{1-5w}$

107. $y\sqrt{1-y^2}$

108. $(5u+\sqrt{1-3u})^2$

109. $\sqrt{v+\sqrt{v}}$

110. $\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)^3$

111. $\sqrt{\dfrac{3x}{5-x}}$

112. $\dfrac{2t-5}{(t^3-4)^2}$

113. $(p^2-5p)^3\,(2p+1)^5$

114. $\sqrt[3]{3q+1}\cdot\sqrt[5]{5q-1}$

115. $\dfrac{(6r-5)^3}{(7r+2)^4}$

116. $\dfrac{3t^4}{\sqrt{t^2-5t}}$

117. $\dfrac{\sqrt{v^3-v}}{(2v+1)^4}$

118. $\sqrt{3w(4w+2)^3}$

119. $\left(\left((y^2+3)^5+1\right)^3-2\right)^4$

Calcule el valor numérico

120. $(p\circ q)'(6)$, dado que $q(6)=2$, $p'(2)=-1$ y $q'(6)=4$

121. $g'(-1)$, dado que $g(x)=r(x^2)$ donde r es alguna función con $r'(1)=5$

122. $h'(2)$, dado que $h(t)=\dfrac{f(3-t)}{t}$ donde f es alguna función con $f(1)=3$ y $f'(1)=-1$

Encuentre la ecuación de la recta…

123. … tangente a $y=(x^2-3x)^2$ en $x=1$

124. … tangente a $z=\sqrt{3+w}$ en $w=6$

125. … tangente a $w=\dfrac{1}{\sqrt{2u+5}}$ en $u=-2$

126. … tangente a $u=t^2\sqrt{2+t}$ en $t=-1$

127. … tangente a $z=2u^3-\left(\dfrac{u}{u+1}\right)^2$ en $u=0$

128. … normal a $w=2(v^2-1)^2$ en $v=2$

129. … normal a $y=3(r^2+3r)^4$ en $r=-1$

130. … normal a $y=\dfrac{\sqrt{7x+2}}{x-1}$ en $x=2$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a…

131. … $y=(6t-1)^4$ es horizontal

132. … $y=\sqrt[3]{p^2-p}$ es vertical

133. … $y=\dfrac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta $10x-y=5$

134. … $y=\sqrt{5+2x}$ es perpendicular a la recta $x+2y=1$

2.4. Derivadas de funciones algebraicas, exponenciales y logarítmicas

Para funciones exponenciales y logarítmicas tenemos estas fórmulas.

Derivadas de funciones exponencial y logarítmica naturales

Las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica naturales son

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad \text{y} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas generales

Las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas en cualquier base b son

$$(b^x)' = b^x \ln b \qquad \text{y} \qquad (\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$$

Note que las fórmulas para cualquier base se aplican también para las funciones naturales, porque si $b = \mathrm{e}$ entonces, según las fórmulas generales

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^x$$

y

$$(\ln x)' = (\log_{\mathrm{e}} x)' = \frac{1}{x \ln \mathrm{e}} = \frac{1}{x}$$

en ambos casos porque $\ln \mathrm{e} = 1$.

Ejemplo 16: derivada de función exponencial compuesta

Encontrar la derivada de 2^{3x^2-5x}.

Aquí tenemos una composición donde la función interna es $3x^2-5x$ y la externa es la función exponencial con base 2. Usando la regla de la cadena obtenemos

$$\left(2^{3x^2-5x}\right)' = 2^{3x^2-5x} \ln 2 \cdot (3x^2-5x)' = 2^{3x^2-5x}(6x-5)\ln 2$$

Ejemplo 17: derivada de función logarítmica compuesta

Derivar $y = \ln\left(\dfrac{2x+3}{4-3x}\right)$.

Veamos dos métodos, primero derivando de inmediato y luego simplifcando el logaritmo antes de derivar.

- Para derivar directamente notamos que y es una composición donde la función externa es ln, y la interna el cociente de polinomios. Usamos entonces la regla de la cadena y la regla del cociente.

$$\begin{aligned}\left[\ln\left(\frac{2x+3}{4-3x}\right)\right]' &= \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{4-3x}\right)}\left(\frac{2x+3}{4-3x}\right)' \\ &= \frac{4-3x}{2x+3}\cdot\frac{(2)(4-3x)-(2x+3)(-3)}{(4-3x)^2} \\ &= \frac{4-3x}{2x+3}\cdot\frac{17}{(4-3x)^2} = \frac{17}{(2x+3)(4-3x)}\end{aligned}$$

- Pero una manera más sencilla de calcular y' es empezar por descomponer y según las propiedades de los logaritmos, y luego derivar cada parte con la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\frac{2x+3}{4-3x}\right) = \ln(2x+3) - \ln(4-3x) \\ \Rightarrow\ y' &= \frac{1}{2x+3}(2x+3)' - \frac{1}{4-3x}(4-3x)' \\ &= \frac{2}{2x+3} + \frac{3}{4-3x}\end{aligned}$$

En general, cuando una función contiene logaritmos de productos, cocientes o potencias, es mucho mejor descomponer los logaritmos en partes más sencillas antes de derivar.

Ejemplo 18: simplificar logaritmo antes de derivar

Calcular la derivada de $p(t) = \ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{4t+1}}{\mathrm{e}^t(6t+2)}\right)^5$.

Note que esta función contiene un logaritmo, una raíz, una potencia, un producto y un cociente. Sería mala idea derivarla usando la regla de la cadena tres veces y también las reglas del producto y del cociente. Es mejor simplificar primero usando propiedades de logaritmos.

$$
\begin{aligned}
p(t) &= 5\ln\left(\frac{\sqrt[3]{4t+1}}{e^t(6t+2)}\right)\\
&= 5\left[\ln\sqrt[3]{4t+1} - \ln\left(e^t(6t+2)\right)\right]\\
&= 5\left[\tfrac{1}{3}\ln(4t+1) - \left(\ln e^t + \ln(6t+2)\right)\right]\\
&= 5\left[\tfrac{1}{3}\ln(4t+1) - t - \ln(6t+2)\right]\\
&= \tfrac{5}{3}\ln(4t+1) - 5t - 5\ln(6t+2)
\end{aligned}
$$

Hasta aquí no hemos derivado nada, pero gracias al esfuerzo por simplificar primero, la derivada ahora es casi inmediata:

$$
\begin{aligned}
p'(t) &= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4t+1}\cdot 4 - 5 - 5\cdot\frac{1}{6t+2}\cdot 6\\
&= \frac{20}{12t+3} - 5 - \frac{30}{6t+2}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Derive

135. $2t + e^t$

136. $e^u - e^{-u}$

137. $3\cdot 5^r - re^r$

138. $(1/2)^x + 2^x$

139. $\frac{1}{2}(e^{2y} - 3e^{4y})$

140. $3\ln\sqrt{t}$

141. $\ln x^5 - 3\ln x^2$

142. $\ln\left(\dfrac{3u}{u^2-1}\right)$

143. $8\log y$

144. $\log_2\sqrt[5]{x}$

145. $(w^2+1)e^{3w}$

146. e^{2x^2-5x+3}

147. $\dfrac{3x^2e^{5-2x}}{xe^{5-x^2}}$

148. $\sqrt{ue^u + u}$

149. $(q - 3e^{q/3})^5$

150. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

151. $\dfrac{\ln(t+1)}{t+1}$

152. $y10^{2-5y}$

153. $\ln(t\sqrt{t^2+1})$

154. $\ln\left[\dfrac{(p^3-1)\mathrm{e}^{-p^2}}{\sqrt{1-5p}}\right]$

155. $\log(3r^2-5r)$

156. $\ln(s-\sqrt{s^2-1})$

157. $\sqrt{1+\ln z}+\ln(1+\sqrt{z})$

158. $\ln^2(2y+6)$

159. $(q^2+q)\ln(5q^2+1)$

160. w^{w+1}

161. $\ln^2(\ln(2z^3-8z))$

162. $\mathrm{e}^{3x}\,g(\ln^2 x)$, donde g es una función derivable

Calcule el valor numérico

163. $q'(1)$, dado que $q(x)=f(\ln x)$ y $f'(0)=-3$

164. $h'(0)$, dado que $h(x)=\sqrt{f(\mathrm{e}^{x^2-x})}$, $f(1)=4$ y $f'(1)=6$

Encuentre la ecuación de la recta...

165. ... tangente a $q=5\mathrm{e}^{2-2p}$ en $p=1$

166. ... tangente a $z=t^2\,10^{t+3}$ en $t=-2$

167. ... perpendicular a $y=3\mathrm{e}^{x^2}+x^2$ en $x=0$

168. ... perpendicular a $w=\dfrac{\ln(2u+7)}{u+6}$ en $u=-3$

Encuentre los puntos donde la recta tangente a...

169. ... $y=\mathrm{e}^{u^2+2u}$ es horizontal

170. ... $y=t\,2^{t-1}$ es paralela al eje T

171. ... $y=2\mathrm{e}^{4-6q}+3\mathrm{e}^{3+4q}$ es perpendicular al eje Y

172. ... $y=x\ln x$ es paralela a $y=2x+1$

173. ... $y=(r+4)[1-\ln(2r+8)]$ es perpendicular a $y+r=6$

2.5. Derivadas de orden superior

Todo lo que hemos hablado sobre derivadas hasta el momento se ha referido a la *primera* derivada de una función. Pero una vez que se calcula la derivada de una función (como función de la variable, no en un punto particular), esa derivada es en sí una función que se puede derivar. Y esa “segunda” derivada será otra función que se puede derivar. Esas derivadas de derivadas son lo que se llama *derivadas de orden superior*.

Definición (segunda derivada o derivada de segundo orden)

Si $f(x)$ es una función y $f'(x)$ es su derivada, entonces la *segunda derivada* de $f(x)$, denotada $f''(x)$, es la derivada de $f'(x)$:

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

De manera natural se definen las derivadas de orden superior. Por ejemplo, la tercera derivada de $f(x)$, también llamada derivada de orden 3 o de tercer orden, es la derivada de la segunda:

$$f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$$

Para simplificar la notación se puede escribir también $y^{(2)}$ en vez de y'', $y^{(3)}$ en vez de y''', etc. (en esta notación, $y^{(1)}$ significa y', y $y^{(0)}$ es simplemente y sin derivar).

Con esa notación, las derivadas de orden superior se definen como sigue.

Definición (derivada de orden superior)

Si $f(x)$ es una función y $f^{(n)}(x)$ es su derivada de orden n, para algún $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces la derivada de orden $n+1$ de $f(x)$ es

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'$$

Otra notación usual es $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ para y'', y en general $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ para $y^{(n)}$.

Ejemplo 19: derivadas de orden superior

Las tres primeras derivadas de $w = 2t^3 - 5t - 6t^{-1}$ son

$$\begin{aligned} w' &= 6t^2 - 5 + 6t^{-2} \\ w'' &= 12t - 12t^{-3} \\ w''' &= 12 + 36t^{-4} \end{aligned}$$

Para la mayoría de las funciones usuales (polinomiales, radicales, exponenciales, etc.) las derivadas no se acaban, aunque pueden “estancarse”. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 20: derivadas de orden superior

Las primeras derivadas de $y = \mathrm{e}^x$ son $y' = \mathrm{e}^x$, $y'' = \mathrm{e}^x$, $y''' = \mathrm{e}^x$, etc. En general, $y^{(n)} = \mathrm{e}^x$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Las primeras derivadas de $y = 3x^2 - 7x + 4$ son

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 6x - 7 \\ y^{(2)} &= 6 \\ y^{(3)} &= 0 \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

Y en general, $y^{(n)} = 0$ para todo $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Ejercicios

Calcule la derivada que se indica

174. $(t^2 - 5\mathrm{e}^{3t})''$

175. $(\sqrt{x^2+1})''$

176. $\left(\dfrac{r}{1-r}\right)'''$

177. $(u^2 - 5u + \sqrt{u} + u^{-1})^{(4)}$

178. $(\ln p)^{(6)}$

179. $\left(\dfrac{4}{\sqrt{1-s}}\right)^{(2)}$

180. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ si $y = 3x^5 - 4x^2 + 3x + 1$

181. $\mathrm{d}^3z/\mathrm{d}q^3$ si $z = \mathrm{e}^{1-4q}$

182. $\mathrm{d}^5q/\mathrm{d}w^5$ si $q = 4w^2 - 6w - 9$

183. $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}s^2$ si $x = \dfrac{1-2s}{1+2s}$

184. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ en $(-1, 4)$ si $x^2 - xy = 5$

185. $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}p^2$ en $(0, 2)$ si $q + p\ln q = 2$

186. $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ si $r^3 + t^3 = 1$

187. $\mathrm{d}^4x/\mathrm{d}t^4$ si $x + t + \mathrm{e}^{x+t} = 1$

188. $\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}w^2$ si $z^2 = \mathrm{e}^{w+z}$

CAPÍTULO 3

Aplicaciones de la derivada

Habiendo estudiado el cálculo de derivadas en el capítulo anterior, ahora veremos algunas aplicaciones de la derivada en varias áreas.

3.1. Derivada como razón de cambio

Recuerde que en la sección 2.2.2 vimos que la derivada de una función puede interpretarse como la razón de cambio (velocidad de crecimiento o decrecimiento) de la función con respecto a su variable. Ahora veremos cómo aplicar ese concepto a funciones de costo, ingreso y utilidad.

Definición (costo, ingreso y utilidad marginal)

Si $C(q)$ es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces $C'(q)$ es el *costo marginal*, que significa el costo aproximado de producir una unidad adicional, la unidad número $q+1$.

Análogamente, si $I(q)$ y $U(q)$ son el ingreso y la utilidad, respectivamente, obtenidos al producir q unidades, entonces $I'(q)$ y $U'(q)$ son el *ingreso marginal* y la *utilidad marginal*: el ingreso aproximado y la utilidad aproximada al producir una unidad adicional.

El concepto de costo promedio ya había aparecido en el ejercicio 135 del capítulo 1:

$$\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q}$$

que es simplemente el costo total de producir q unidades dividido por el número de unidades producidas. De manera análoga se definen el ingreso promedio, $\bar{I}(q) = I(q)/q$, y la utilidad promedio, $\bar{U}(q) = U(q)/q$.

Ejemplo 1: costo marginal, promedio y promedio marginal

Si el costo de producir q unidades de un artículo es $C(q) = 1200 + 8q + 0.003q^2$, entonces:

- El costo marginal es $C'(q) = 8 + 0.006q$.
  En particular, con $q = 125$ encontramos que el costo de la unidad número $q+1$, la número 126, es aproximadamente
  $$C'(125) = 8 + 0.75 = 8.75$$
- El costo promedio al producir q unidades es
  $$\bar{C}(q) = \frac{1200 + 8q + 0.003q^2}{q} = 1200q^{-1} + 8 + 0.003q$$
  Por ejemplo, al producir 50 unidades el costo promedio de cada una es $\bar{C}(50) = 32.15$. Al producir 100 unidades el costo promedio se reduce a $\bar{C}(100) = 20.30$ cada una[1].
- El costo promedio marginal es $\bar{C}'(q) = -1200q^{-2} + 0.003$.
  Por ejemplo, que
  $$\bar{C}'(100) = -0.117$$
  significa que al producir la unidad número 101 el costo promedio disminuye aproximadamente en 0.117 por unidad.

Note con cuidado que el costo promedio marginal es la derivada del costo promedio, no el promedio del costo marginal:
$$\bar{C}' = \left(\frac{C(q)}{q}\right)'$$

Ejercicios

Calcule la función de costo marginal y el valor del costo marginal para cada función de costo y cada nivel de producción

1. $C = 640 + 3.2q;\ q = 29$

2. $C = 0.4q^2 + 2.4q + 960;\ q = 2.8$

[1] Es usual que entre mayor sea el número de unidades producidas, menor sea el costo promedio de cada una. A esto se refiere el concepto de *economía de escala*.

3. $C = -0.01q^3 + 2.142q^2 - 79q + 3207;\ q = 45$

4. $C = 0.02q^3 - 0.5q^2 + 4q + 7250;\ q = 30$

Calcule la función de costo marginal y la de costo promedio marginal para cada función de costo o costo promedio

5. $C = 2q + 1000$

6. $C = 0.1q^2 + 3q + 2$

7. $\bar{C} = 0.02q + 9 + 800/q$

8. $\bar{C} = 120 + 2400/q$

Calcule la función de utilidad marginal y la de utilidad promedio marginal para cada función de costo y cada precio unitario[2]

9. $C = 380 + 2.5q;\ p = 4$

10. $C = 1.8q + 300;\ p = 3.7$

11. $C = 0.4q^2 + 2.4q + 960;\ p = 50$

12. $C = 0.1q^2 + 3q + 2;\ p = 5$

13. $C = 0.02q^3 - 0.5q^2 + 4q + 7250;\ p = 215$

14. $C = -0.01q^3 + 2.142q^2 - 79q - 3207;\ p = 72$

Resuelva

15. El costo semanal, en dólares, de producir x refrigeradores es $C(x) = 8000 + 200x - 0.2x^2$.

a. Calcule la función de costo marginal y úsela para aproximar el costo de producir el refrigerador número 183.

b. Si los refrigeradores se venden a \$260 cada uno, calcule la función de utilidad y úsela para estimar la utilidad para el refrigerador número 212.

16. Si $\bar{C} = \dfrac{4000e^{q/400}}{q}$ es el costo promedio de producir q unidades de un producto, encuentre la función de costo marginal y úsela para aproximar el costo de la unidad número 344.

[2]Recuerde que la utilidad es $U = I - C = pq - C$.

17. La demanda mensual de cierto artículo es $q = 375\,000 - 2500\ln(0.01p)$, donde p es el precio unitario en dólares. ¿A qué tasa disminuye la demanda por cada dólar de aumento en el precio, cuando el precio es \$40?

18. Si un tanque de agua contiene 5000 litros y tarda 30 minutos en vaciarse por el fondo, entonces el volumen de agua aún en el tanque a los t minutos es $V = 5000(1-t/30)^2$ (para $0 \le t \le 30$). Calcule $V'(12)$ e interprete. ¿Cuándo es mayor el flujo de agua?

19. Si el precio unitario p de un producto y la cantidad vendida q están relacionados por $p = 100 - \sqrt{q^2+20}$, encuentre la fórmula para el ingreso marginal como función de q (el ingreso es $I = pq$).

20. En un grupo de mil personas, el número de ellas que viven hasta los x años es $N(x) = 100\sqrt{100-x}$ (para $0 \le x \le 100$). Calcule $N'(75)$ e interprete.

21. En la sección 3.6 veremos que si una cantidad P de dinero se invierte a una tasa de interés anual r compuesta continuamente , entonces a los t años el valor de la inversión será $A = P\mathrm{e}^{rt}$. Compruebe que la tasa de cambio relativa del valor con respecto al tiempo es r (la *tasa de cambio relativa* de y es y'/y).

22. Según C. F. Richter, el número de terremotos de magnitud M o mayor, por unidad de tiempo, es $N = 10^{a-bM}$, donde a y b son constantes. ¿A qué tasa cambia el número N de terremotos con respecto a la magnitud M?

23. En cierto país se estima que la cantidad de petróleo necesaria para aumentar la productividad, en número de barriles por cada \$1000 de producción, es $f(t) = 1.5 + 0.18t\mathrm{e}^{-0.12t}$, donde t es el número de años transcurridos desde 1965. Calcule $f'(25)$ e interprete.

3.2. La regla de L'Hôpital

Algunos límites en formas indeterminadas no pueden resolverse simplificando, factorizando, racionalizando ni usando ninguna de las técnicas que vimos en el capítulo 1. Considere, por ejemplo, los límites

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to 0^+} \left(\frac{1}{z} + \ln z\right) = \infty - \infty$$

Ambos son ideterminados, pero ningún procedimiento algebraico permite calcularlos.

Muchos de esos límites algebraicamente indeterminados pueden calcularse usando la regla de L'Hôpital, que involucra las derivadas de las funciones que aparecen en el límite.

Teorema (regla de L'Hôpital)

Si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\qquad \text{o}\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

esto es, si $f(x)\to 0$ y $g(x)\to 0$ o bien $f(x)\to\pm\infty$ y $g(x)\to\pm\infty$, donde a puede ser cualquier número real, ∞ o $-\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Recuerde que en el capítulo 1 vimos varios métodos para simplificar el límite de una fracción en una de las formas $0/0$ o ∞/∞. Pues ahora podemos agregar uno nuevo: la regla de L'Hôpital.

Note con cuidado que esta regla se aplica solamente para las formas $0/0$ e ∞/∞. Para otras formas indeterminadas, veremos luego en esta sección cómo ellas se pueden transformar en una de estas dos que permiten usar la regla de L'Hôpital.

3.2.1. Las formas $0/0$ e ∞/∞

Cuando un límite tiene la forma $0/0$ o la forma ∞/∞, puede aplicarse la regla de L'Hôpital inmediatamente, como en los siguientes ejemplos.

Ocasionalmente usaremos el símbolo $\stackrel{\text{L'H}}{=}$ con el significado de "igual por la regla de L'Hôpital".

Ejemplo 2: un límite con la forma ∞/∞

El límite $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln t}{t}$ es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, así que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\stackrel{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)'}{(t)'}=\lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{1}=\frac{0}{1}=0$$

Al aplicar la regla de L'Hôpital al límite de una fracción tenga cuidado de no derivar la fracción completa, sino derivar el numerador y derivar el denominador por separado.

Ejemplo 3: un límite con la forma $0/0$

Calcular el límite $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1-\mathrm{e}^x}{x^2}$.

Al sustituir $x=0$ obtenemos en el numerador $0+1-\mathrm{e}^0=0$, y en el denominador $0^2=0$, de modo que la forma de este límite es $0/0$.

Usamos la regla de L'Hôpital y encontramos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-\mathrm{e}^x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x+1-\mathrm{e}^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{2x} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

¡Otra vez $0/0$! Entonces, ¿la regla de L'Hôpital no sirve en este caso?

No es eso; es cuestión de perseverancia, porque una segunda aplicación de la regla resulta en

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{2} = \frac{-1}{2}$$

Entonces, $L=-1/2$.

Aunque la regla de L'Hôpital pueda aplicarse, no siempre es la mejor idea. Vea los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4: un límite que se resuelve mejor por álgebra

Calcular el límite $M = \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{3x^3+5x+1}{x+x^2+x^3}$.

Es claro que M tiene la forma ∞/∞. Si quisiéramos calcularlo con la regla de L'Hôpital tendríamos que hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} M = \lim_{u\to\infty} \frac{3u^3+5u+1}{u+u^2+u^3} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{9u^2+5}{1+2u+3u^2} \quad \begin{matrix} \to \infty \\ \to \infty \end{matrix} \\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{18u}{2+6u} \quad \begin{matrix} \to \infty \\ \to \infty \end{matrix} \\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

Pero habría sido mucho más eficiente usar el método que usamos en el ejemplo 11 del capítulo 1 para calcular límites al infinito de cocientes de polinomios (lo de tomar el término principal en el numerador y el término principal en el denominador):

$$M = \lim_{u\to\infty} \frac{3x^3+5x+1}{x+x^2+x^3} = \lim_{u\to\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

En general, al calcular un límite indeterminado es mejor intentar simplificar con los métodos que vimos en el capítulo 1 antes de usar L'Hôpital. Vea también el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5: otro límite que se resuelve mejor por álgebra

Para calcular el límite $N = \lim_{t\to 0} \dfrac{2t\mathrm{e}^t - t^2\mathrm{e}^t}{t+2t^2}$, que tiene la forma $0/0$, podríamos usar L'Hôpital:

$$N = \lim_{t\to 0} \frac{2t\mathrm{e}^t - t^2\mathrm{e}^t}{t+2t^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2\mathrm{e}^t + 2t\mathrm{e}^t - 2t\mathrm{e}^t - t^2\mathrm{e}^t}{1+4t} = \frac{2+0-0-0}{1+0} = 2$$

Al menos bastó con una aplicación de la regla, pero usar la regla del producto dos veces para derivar el numerador fue una complicación innecesaria.

¿Qué tal mejor simplificar factorizando (factor común) y no usar L'Hôpital?

$$N = \lim_{t\to 0} \frac{2t\mathrm{e}^t - t^2\mathrm{e}^t}{t+2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\,\mathrm{e}^t(2-t)}{\cancel{t}\,(1+2t)} = \frac{e^0(2-0)}{1+0} = 2$$

3.2.2. La forma $0\cdot\infty$

Para límites de la forma $0\cdot\infty$, el producto puede convertirse en un cociente con forma $\frac{0}{0}$ o con forma $\frac{\infty}{\infty}$. Específicamente, un producto $u\cdot v$ se reescribe como $\dfrac{u}{v^{-1}}$ o como $\dfrac{v}{u^{-1}}$ para poder usar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 6: un límite con la forma $0\cdot\infty$

El límite $\lim_{y\to 0^+} y \ln y$ tiene la forma $0\cdot\infty$ (en realidad $\ln y \to -\infty$, pero el signo no afecta la forma).

El producto $y\ln y$ puede entonces escribirse como $\dfrac{\ln y}{y^{-1}}$ para calcular el límite de esta manera:

$$\lim_{y\to 0^+} y\ln y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{y^{-1}} \quad \begin{matrix} \to -\infty \\ \to \infty \end{matrix}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{(\ln y)'}{(y^{-1})'} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{-1}}{-y^{-2}} = \lim_{y\to 0^+} -y = 0$$

Dos observaciones sobre el ejemplo anterior.

- La primera es que también pudimos haber empezado escribiendo

$$\lim_{y\to 0^+} y\ln y = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{(\ln y)^{-1}} \qquad \begin{array}{l}\to 0\\ \to 0\end{array}$$

  pero al usar L'Hôpital,

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{(\ln y)^{-1}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{-(\ln y)^{-2}\cdot\frac{1}{y}} \qquad \begin{array}{l}\to 1\\ \to 0\cdot\infty\end{array}$$

  nos complicamos porque esta última fracción es equivalente a $-y(\ln y)^2$. ¡Peor que la original!

  En general, al transformar un producto $u\cdot v$ en una fracción u/v^{-1} o v/u^{-1} habrá una buena elección y una mala elección. Elija la que lleve a derivadas más sencillas.

- La segunda observación es que en la última línea del ejemplo, después de derivar pudimos haber continuado así:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1/y}{-y^{-2}} \quad \begin{array}{l}\to 0\\ \to 0\end{array} \quad \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{-y^{-2}}{2y^{-3}} \quad \begin{array}{l}\to 0\\ \to 0\end{array} \quad \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{2y^{-3}}{-6y^{-4}} \quad \begin{array}{l}\to 0\\ \to 0\end{array}$$

  y nunca terminaríamos.

  Por el contrario, hay que saber hasta cuándo usar L'H'ôpital y cuándo regresar a lo básico y aplicar una simplificación algebraica (en este caso, simplemente restar exponentes tan pronto como nos deshicimos del logaritmo).

3.2.3. La forma $\infty - \infty$

Para la forma $\infty-\infty$, se puede separar uno de los términos como factor común para conseguir una fracción de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

En general, la expresión $u-v$ puede escribirse como $u(1-\frac{v}{u})$ o como $v(\frac{u}{v}-1)$. A diferencia del caso anterior, en este caso ninguna de las dos posibilidades es más complicada de la otra; cualquiera funciona.

Ejemplo 7: un límite con la forma $\infty - \infty$

El límite $\lim\limits_{x\to\infty} x - e^x$ tiene la forma $\infty-\infty$. Escribiendo x como factor común se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} x - e^x = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$$

Por aparte, la fracción $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ tiende a $\frac{\infty}{\infty}$, así que su límite es

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Regresando al límite original, tenemos entonces

$$\lim_{x\to\infty} x-\mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \infty(1-\infty) = -\infty$$

Si en el ejemplo anterior hubiéramos factorizado de la otra forma, habría sucedido lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} x-\mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}-1\right)$$

Por aparte,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

y entonces

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}-1\right) = \infty(0-1) = -\infty$$

Así llegamos al mismo resultado por un camino un poco distinto pero no más ni menos complicado.

3.2.4. Las formas ∞^0, 1^∞ y 0^0

Para las formas exponenciales indeterminadas ∞^0, 1^∞ y 0^0 se puede calcular primero el logaritmo del límite, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8: un límite con la forma 1^∞

El límite $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ es de la forma 1^∞. Llamémoslo L y calculemos primero su logaritmo natural:

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} \qquad \begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}\end{aligned}$$

Ahora este es de la forma $\frac{0}{0}$ y entonces aplicamos L'Hôpital.

$$\ln L = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\left[\ln(1+h)\right]'}{(h)'} = \lim_{h\to 0}\frac{1/(1+h)}{1} = 1$$

Así es que $\ln L = 1$, por lo que finalmente $L = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

En resumen, así pueden abordarse las siete formas indeterminadas usando la regla de L'Hôpital.

Para la(s) forma(s)...	**Intente...**
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$	Usar la regla de L'Hôpital
$0 \cdot \infty$	Escribir $u \cdot v$ como $\dfrac{u}{v^{-1}}$ o $\dfrac{v}{u^{-1}}$
$\infty - \infty$	Escribir $u - v$ como $u(1 - \frac{v}{u})$ o $v(\frac{u}{v} - 1)$
$\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$	Calcular el límite del logaritmo

Para terminar, recuerde que la regla de L'Hôpital no siempre es la mejor forma de calcular límites en forma indeterminada. Ya lo vimos en los ejemplos 4 y 5, y en la segunda observación luego del ejemplo 6.

Ejercicios

Calcule

24. $\displaystyle\lim_{y\to 1} \frac{y^3 - 2y^2 - y + 2}{y^3 - 7y + 6}$

25. $\displaystyle\lim_{v\to \infty} \frac{2v+1}{4v^2 + v}$

26. $\displaystyle\lim_{p\to 3} \frac{\sqrt{p+1} - 2}{p - 3}$

27. $\displaystyle\lim_{w\to \infty} \frac{e^w}{w^5}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{2t}}{t}$

30. $\displaystyle\lim_{w\to 0} \frac{e^w - w - 1}{w^2}$

31. $\displaystyle\lim_{r\to -\infty} \frac{r^2}{e^{-r}}$

32. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - 2^t}{t}$

33. $\displaystyle\lim_{z\to \infty} \frac{\ln z}{\sqrt[3]{z}}$

34. $\displaystyle\lim_{q\to \infty} \frac{\ln q}{q}$

35. $\displaystyle\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u^2 - 1}$

36. $\displaystyle\lim_{w\to \infty} \frac{(\ln w)^3}{w^2}$

37. $\displaystyle\lim_{s\to \infty} \frac{e^s}{\ln s}$

38. $\displaystyle\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{1/r}}{\ln r}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$

40. $\displaystyle\lim_{t\to \infty} \frac{t}{\ln(1 + 2e^t)}$

41. $\displaystyle\lim_{u\to 1} \ln u \ln(u-1)$

42. $\displaystyle\lim_{y\to \infty} y e^{-y^2}$

43. $\displaystyle\lim_{r\to 0} r^4 e^{-1/r}$

44. $\displaystyle\lim_{v\to 0^+} v^2 \ln v$

45. $\lim\limits_{z\to-\infty} z\mathrm{e}^{z}$

46. $\lim\limits_{v\to\infty} \mathrm{e}^{-v}\ln v$

47. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x$

48. $\lim\limits_{y\to\infty} y\ln\left(\dfrac{y}{1+y}\right)$

49. $\lim\limits_{r\to0^+} (\mathrm{e}^{r}-1)\ln r$

50. $\lim\limits_{t\to\infty} t\ln\left(\mathrm{e}^{1/t}-\dfrac{5}{t}\right)$

51. $\lim\limits_{p\to\infty} p-\ln p$

52. $\lim\limits_{t\to\infty} t\mathrm{e}^{1/t}-t$

53. $\lim\limits_{y\to\infty} 3^{y}-2^{y}$

54. $\lim\limits_{z\to0^+} \dfrac{1}{z}+\ln z$

55. $\lim\limits_{s\to-\infty} s+\mathrm{e}^{-s}$

56. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}$

57. $\lim\limits_{p\to1} \dfrac{1}{2(1-\sqrt{p})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{p})}$

58. $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t}{t-1}-\dfrac{1}{\ln t}$

59. $\lim\limits_{s\to1} \dfrac{3}{\ln s}-\dfrac{2}{s-1}$

60. $\lim\limits_{q\to0} \dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{q}-1}$

61. $\lim\limits_{y\to\infty} y^{1/y}$

62. $\lim\limits_{r\to1} r^{1/(1-r)}$

63. $\lim\limits_{q\to0} q^{3/(4+\ln q)}$

64. $\lim\limits_{t\to0}(1-t)^{1/t}$

65. $\lim\limits_{w\to0}(1-2w)^{1/w}$

66. $\lim\limits_{u\to0}(1+u^2)^{1/u}$

67. $\lim\limits_{x\to0^+}(1/x)^{x}$

68. $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\sqrt{x-1}}$

69. $\lim\limits_{z\to0} z^{\ln(1+z)}$

70. $\lim\limits_{q\to\infty}(10^{q}+q)^{1/q}$

71. $\lim\limits_{y\to\infty}(\mathrm{e}^{y}+y)^{3/y}$

72. $\lim\limits_{r\to1}(\ln r)^{1-r}$

73. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}$

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$

75. $\lim\limits_{s\to\infty}(s^{-2}+3s^{-1}+1)^{s}$

76. $\lim\limits_{u\to0^+}(u+1)^{\ln u}$

77. $\lim\limits_{v\to1^-}\left(\dfrac{1-v}{v}\right)^{\ln v}$

78. $\lim\limits_{t\to-1^+}\left(\dfrac{1}{t+1}\right)^{t+1}$

79. $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\dfrac{y}{y+1}\right)^{y-1}$

80. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$
con P, r y t constantes, $t>0$

3.3. Crecimiento y decrecimiento de funciones

Recuerde que las rectas con pendiente positiva son crecientes, y que las rectas con pendiente negativa son decrecientes. Como la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función, el siguiente teorema resulta natural.

Teorema

Sea f una función definida en un intervalo I.

- Si $f'(x) \geq 0$ en I, entonces f es creciente en I.
- Si $f'(x) \leq 0$ en I, entonces f es decreciente en I.

A diferencia de las rectas, que son siempre crecientes o siempre decrecientes (o siempre horizontales), las funciones en general pueden tener gráficos que son crecientes en algunos intervalos y decrecientes en otros.

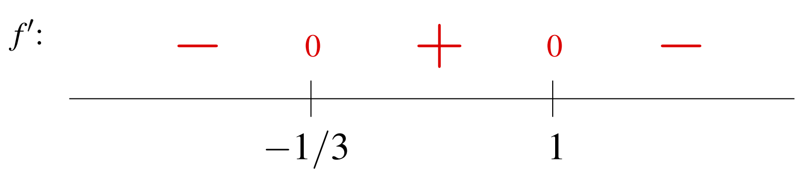
Para averiguar en cuáles intervalos una función es creciente o decreciente basta con saber en cuáles intervalos su derivada es positiva o negativa. Para esto podemos hacer un mapa de signos[3] de f' como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9: intervalos donde una función crece o decrece

Sea $f(x) = x - 1 + x^2 - x^3$. Su derivada es

$$f'(x) = 1 + 2x - 3x^2 = (3x+1)(1-x)$$

Los ceros de f' son $-1/3$ y 1, y sus signos son:

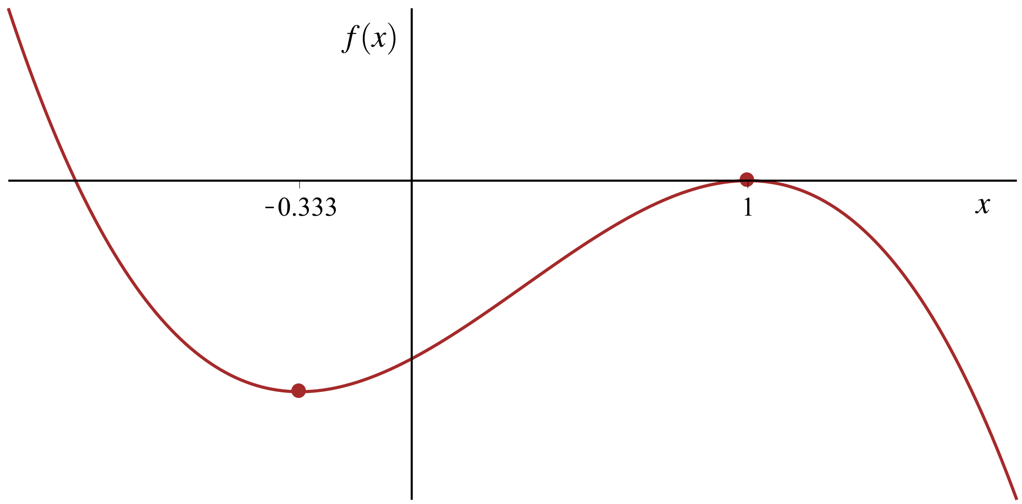


Vemos que $f'(x) \geq 0$ para x en el intervalo $[-1/3, 1]$, y que $f'(x) \leq 0$ para x en los intervalos $]-\infty, -1/3]$ y $[1, \infty[$.

Por el teorema anterior, concluimos que f es creciente en $[-1/3, 1]$, y decreciente en $]-\infty, -1/3]$ y en $[1, \infty[$.

[3]En la sección 4.5 de "Matemática para Administración" se estudió el método para construir el mapa de signos de una función.

Parte de la importancia del análisis de los signos de y' está en que no es necesario conocer el gráfico de la función para averiguar dónde es creciente o decreciente. Solo por referencia, veamos el gráfico de la función f del ejemplo anterior:



En este ejemplo, note que f decrece en $]-\infty,-1/3]$ y en $[1,\infty[$, pero no decrece en la *unión* de esos intervalos. Aunque $f'(x) \leq 0$ en $]-\infty,-1/3] \cup [1,\infty[$, no podemos decir que f sea decreciente allí, porque ese conjunto no es un intervalo. Las propiedades "$f'(x) \geq 0$ en $I \Rightarrow f$ crece en I" y "$f'(x) \leq 0$ en $I \Rightarrow f$ decrece en I" son válidas solamente si I es un intervalo.

Ejercicios

Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente

81. $1-4u-u^2$

82. y^3-3y-2

83. $r^2(3-r)$

84. $s^4+4s^3+4s^2$

85. $3w^4-4w^2+2$

86. $8u^3-18u^2-u^4$

87. $5z^{2/3}+z^{5/3}$

88. $\dfrac{w^2-5w}{\sqrt[3]{w}}$

89. $\sqrt[5]{r}$

90. $u\sqrt{u+1}$

91. $\dfrac{v+1}{v^2+v+1}$

92. $\dfrac{1}{3t-4}$

93. $\dfrac{y}{y^2+1}$

94. $x\,\mathrm{e}^x$

95. $z^3\mathrm{e}^z$

96. $6e^{4s-s^2}$

97. $e^y + e^{-y}$

98. $x^2 + x\,e^{-x} + e^{-x}$

99. $5y^2 - 2e^y(y-1)$

100. $2q^2 - 2\ln q$

101. $t^2 \ln t$

102. $(3r^3 - 81r)\ln r + 81r - r^3$

3.4. Máximos y mínimos de una función

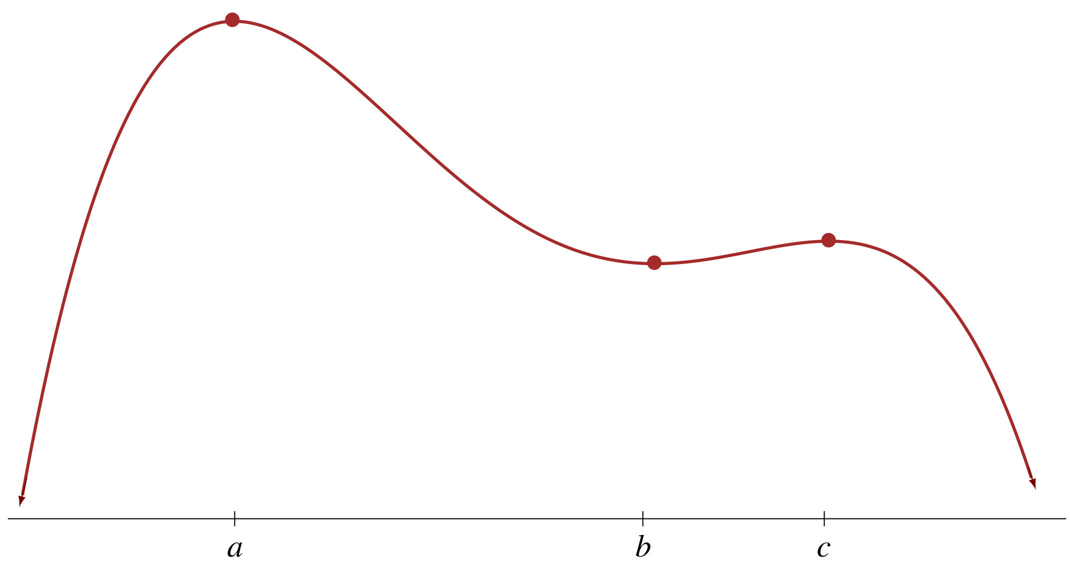
Pasemos a investigar el problema de determinar los puntos donde una función alcanza su valor máximo o su valor mínimo.

En esta sección hablaremos primero de los *extremos locales* (o relativos) de una función, que son los valores máximos o mínimos locales, y luego nos ocuparemos de los *extremos absolutos*.

Definición (extremos locales)

- Una función f alcanza un *máximo local* en un punto c si existe un intervalo I alrededor de c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$ (es decir, si $f(c)$ es el mayor valor de f en el intervalo).
- Una función f alcanza un *mínimo local* en un punto c si existe un intervalo I alrededor de c tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$ (si $f(c)$ es el menor en el intervalo).
- Un *extremo local* de una función es un máximo local o un mínimo local.

Veamos algunas posibilidades en el siguiente gráfico.



- En $x = a$ la función f alcanza un máximo local porque $f(a)$ es el valor más grande de la función cerca de a. Dicho de otra forma, el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto del gráfico alrededor de a.

- En $x = b$ la función alcanza un mínimo local porque el punto $(b, f(b))$ es el más bajo cerca de b. Note que hay otros puntos del gráfico más bajos que $(b, f(b))$, pero este es el más bajo en algún intervalo alrededor de b.

- En $x = c$ se alcanza un máximo local. Como en el punto anterior, vemos que $(c, f(c))$ no es el punto más alto del gráfico, pero sí el más alto entre los puntos cercanos a él.

En este gráfico los tres extremos locales se alcanzan en puntos donde la tangente es horizontal. Esto último equivale a que en esos puntos la derivada de f sea cero. Otra posibilidad, que veremos en el gráfico en la siguiente página, es que la función alcance un extremo en un “pico” en el gráfico, y en ese caso la derivada no existiría en ese punto.

Resulta que en general una función puede alcanzar un extremo (máximo o mínimo) solamente en los puntos donde su derivada es cero o no existe. Esos puntos se llaman *puntos críticos* de la función.

Definición (puntos críticos)

Los *puntos críticos* de una función f son los puntos c en el dominio de f donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Digamos que hay dos tipos de puntos críticos: el primer tipo de punto crítico es donde la derivada vale cero, y el segundo tipo es donde la derivada no existe.

Por ejemplo, en el gráfico anterior los puntos críticos son a, b y c, porque $f'(a)$, $f'(b)$ y $f'(c)$ son iguales a cero. Son puntos críticos del primer tipo.

Teorema

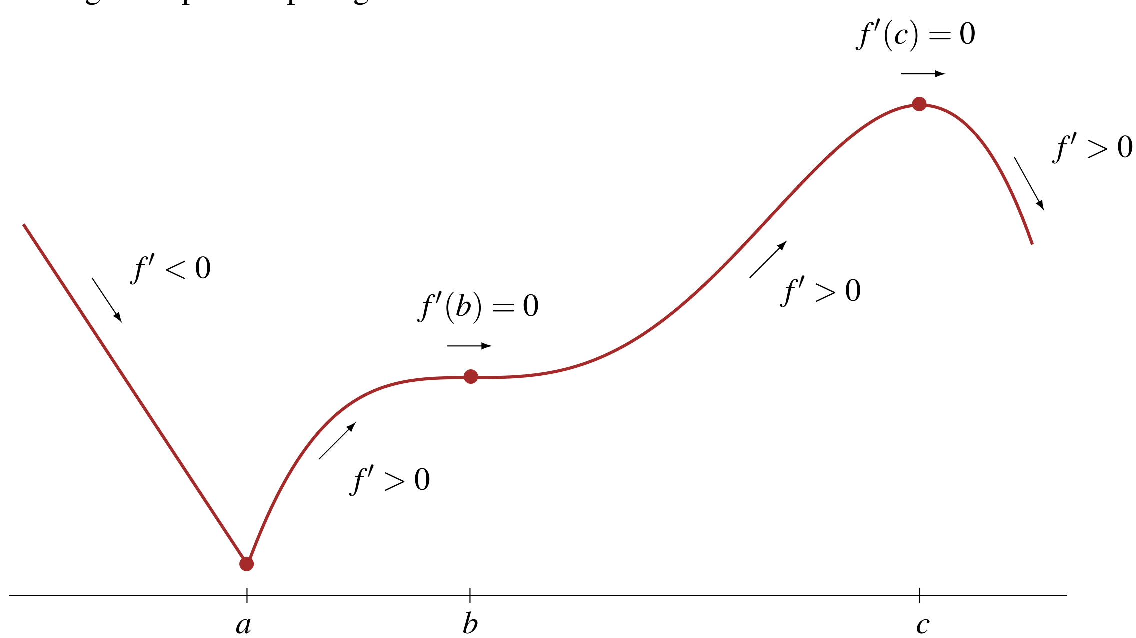
Si una función alcanza un extremo local en el punto c, entonces c es un punto crítico de la función.

Note que este teorema no dice que una función alcance extremos en todos sus puntos críticos. Lo que dice es que *si* se alcanza un extremo en c, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, todos los extremos se alcanzan en puntos críticos. Pronto veremos que puede haber puntos críticos donde no se alcanzan extremos.

3.4.1. El criterio de la primera derivada

Encontrar los puntos críticos de una función f es relativamente fácil. Solo hay que calcular $f'(x)$ y ver dónde es cero o no existe. Pero habiendo encontrado un punto crítico, ¿cómo saber si allí se alcanza un máximo, se alcanza un mínimo o no hay extremo?

El *criterio de la primera derivada* es una forma segura de averiguarlo. Analicemos el siguiente gráfico para después generalizar las ideas.



Notemos primero que hay tres puntos críticos en este gráfico. El punto a es un punto crítico del segundo tipo, porque $f'(a)$ no existe (no hay recta tangente en ese punto[4]). Los puntos b y c son puntos críticos del segundo tipo, porque $f'(b)$ y $f'(c)$ son iguales a cero (la recta tangente es horizontal en cada uno de esos puntos).

Veamos también que en este gráfico los extremos se alcanzan en a (mínimo) y en c (máximo), que son puntos críticos como debe ser. Pero también b es un punto crítico y sin embargo ahí no se alcanza ningún extremo. Entonces, todos los extremos se alcanzan en puntos críticos, como dice el teorema, pero no todos los puntos críticos resultan en extremos.

Ahora veamos más en detalle qué sucede en cada punto crítico del gráfico anterior.

- En $x = a$ la derivada no existe, pero la función alcanza un mínimo porque venía decreciendo "antes" de a y pasó a crecer "después" de a. Es decir, f' cambió de negativa a positiva al pasar por a.
- En $x = c$ la derivada es cero y la función alcanza un máximo en c, porque pasa de ser creciente (derivada positiva) a ser decreciente (derivada negativa) en c; es decir, porque f' cambia de positiva a negativa en c.
- En $x = b$ la derivada es cero, pero f crece antes de b y sigue creciendo despúes de b, de modo que su derivada no cambia de signo. No hay máximo ni mínimo en b.

La regla general es la siguiente.

Teorema (criterio de la primera derivada)

Si c es un punto crítico de f, entonces:

- Si f' cambia de signo positivo a negativo en c, entonces $f(c)$ es un máximo local.
- Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local.
- Si f' no cambia de signo en c, entonces no hay extremo local en c.

Para encontrar los extremos locales de una función vamos a dar los siguientes pasos:

a. Encontrar los puntos críticos de la función.

b. Para cada punto crítico, determinar si en él se alcanza un máximo, un mínimo o ningún extremo.

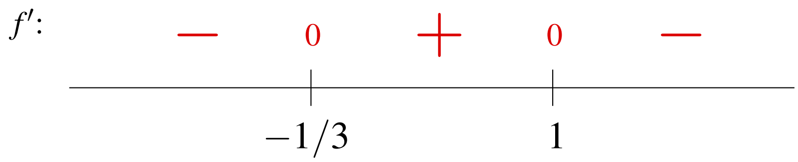
[4]Recuerde que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Si la curva no tiene tangente o si la tangente es vertical (sin pendiente), la derivada no existe.

Ejemplo 10: criterio de la primera derivada

Para encontrar los extremos de la función $f(x) = x - 1 + x^2 - x^3$, que ya vimos en el ejemplo 9, damos los dos pasos recién mencionados.

a. Los puntos críticos de f son los valores de x donde $f'(x)$ es cero o está indefinido. Ya vimos que $f'(x) = 0$ en $x = -1/3$ y $x = 1$; además, no hay puntos donde $f'(x)$ esté indefinido. Entonces, los dos puntos críticos son $x = -1/3$ y $x = 1$.

b. Para determinar qué tipo de extremo se alcanza en cada punto crítico, recordemos el mapa de signos de f'.



Así analizamos cada uno de los puntos críticos:

- En el punto $x = -1/3$ la derivada f' cambia de signo $-$ a signo $+$, lo que implica que f alcanza un mínimo local en $x = -1/3$.
- Por su lado, en $x = 1$ la derivada cambia de signo $+$ a signo $-$, por lo que f alcanza un máximo en ese punto.

Repase el gráfico de f en la página 67.

Con respecto a los extremos en el ejemplo anterior, distingamos tres aspectos de cada uno:

- En el primer extremo:
  - El mínimo *se alcanza* en $x = -1/3$ (la primera coordenada del punto).
  - El *valor* de ese mínimo es $y = f(-1/3) = -32/27$ (la segunda coordenada).
  - El *punto mínimo* es $(-1/3, -32/27)$ (el par ordenado).
- En el segundo:
  - El máximo se alcanza en $x = 1$.
  - El valor máximo es $y = 0$.
  - El punto máximo es $(1, 0)$.

Ejemplo 11: un punto crítico del segundo tipo

Encontrar los extremos locales de $g(u) = (u-2)^{2/3}$.

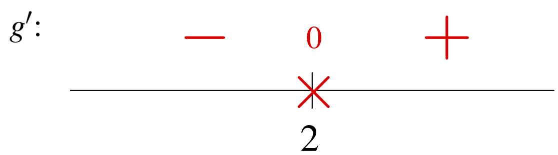
a. Primero, encontrar los puntos críticos. La derivada de $g(u)$ es

$$g'(u) = \tfrac{2}{3}(u-2)^{-1/3} = \frac{2}{3(u-2)^{1/3}}$$

Esta derivada no tiene ceros (porque la ecuación $g'(u) = 0$ no tiene solución), pero sí está indefinida cuando $u = 2$. Vemos así que no hay puntos críticos del primer tipo (donde la derivada vale cero) pero sí hay uno del segundo tipo (donde la derivada está indefinida).

El único punto crítico[5] es entonces $u = 2$.

b. Para averiguar qué tipo de extremo hay en $u = 2$ (o si no hay extremo) hacemos un mapa de signos de g'.

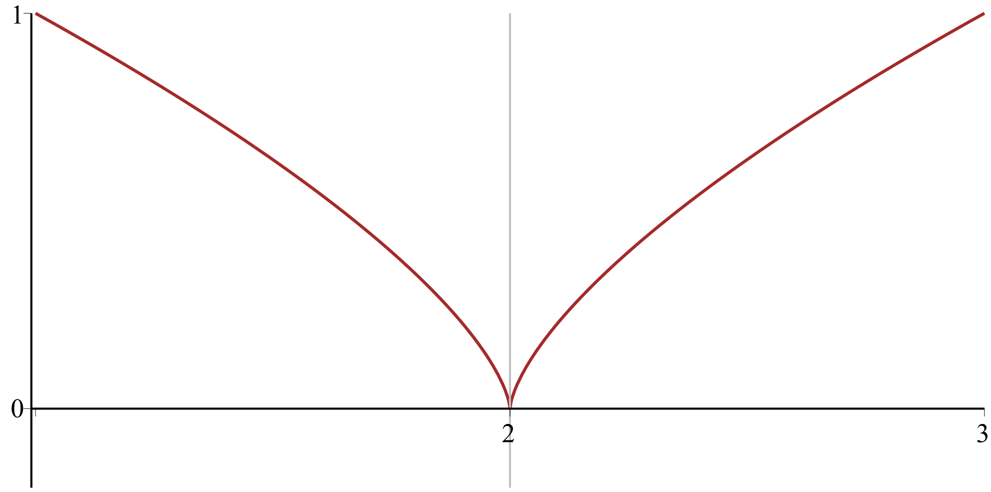


Así vemos que el signo de g' cambia de negativo a positivo en $u = 2$, indicando que en ese punto se alcanza un mínimo.

En conclusión, el único extremo local de g es un mínimo y se alcanza en $u = 2$. El valor de ese mínimo es $g(2) = 0$, y el punto mínimo es $(2,0)$.

Así es el gráfico de la función g del ejemplo anterior cerca de $u = 2$. La línea vertical por $(2,0)$ es la tangente al gráfico en ese punto.

[5]Recuerde que un punto crítico es un punto *en el dominio de la función* donde la derivada es 0 o está indefinida. El punto $u = 2$ sí está en el dominio de esta función g, porque $g(2)$ existe aunque $g'(2)$ no exista.



Ejercicios

Resuelva

103. Encuentre los extremos locales de las funciones en los ejercicios 81–102.

3.4.2. El criterio de la segunda derivada

Ya tenemos claro que los extremos locales de una función pueden alcanzarse solo en puntos críticos. Encontrar los puntos críticos de una función no es difícil, y el criterio de la primera derivada es una forma de averiguar qué se alcanza en cada punto crítico: un máximo, un mínimo o ningún extremo. El precio es encontrar los signos de la derivada en los intervalos alrededor de cada punto crítico.

Una alternativa es el *criterio de la segunda derivada*, que tiene la ventaja de no necesitar el mapa de signos de la derivada y la desventaja de que no siempre es concluyente.

Teorema (criterio de la segunda derivada)

Si c es un punto crítico de f, entonces:

- Si $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local en c.
- Si $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un máximo local en c.

La razón por la que este criterio no siempre concluye es que no menciona qué pasa si $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. En esos casos podría suceder cualquiera de las tres cosas: que f alcance un máximo en c, que alcance un mínimo en c, o que no tenga ningún extremo en c.

Ejemplo 12: criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos locales de $g(t) = 2t^3 - 17t^2 + 40t - 3$.

Demos los dos pasos que hemos usado: primero encontrar los puntos críticos y después ver qué se alcanza en cada uno.

a. Para encontrar los puntos críticos calculamos la primera derivada,

$$g'(t) = 6t^2 - 34t + 40$$

Esta derivada nunca está indefinida, pero es igual a cero en $t = 5/3$ y en $t = 4$. Esos son entonces los únicos dos puntos críticos.

b. Para determinar qué extremo se alcanza (o no) en cada punto crítico, empecemos por calcular la segunda derivada,

$$g''(t) = 12t - 34$$

Ahora analicemos cada punto crítico encontrando el signo de la segunda derivada en él.

- En $t = 5/3$ se tiene $g''(5/3) = -14$, negativo. Eso indica que $g(5/3)$ es un máximo local.
- En $t = 4$ resulta $g''(4) = 14$, positivo, por lo que $g(4)$ es un mínimo local.

Ejemplo 13: falla el criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos locales de $h(x) = x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x$.

a. ¿Cuáles son los puntos críticos? La primera derivada de h es

$$h'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 40x - 15$$

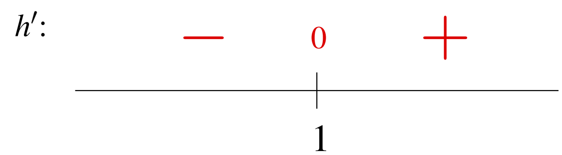
y tiene ceros $x = -3$ y $x = 1$. Estos son los puntos críticos del primer tipo. No hay puntos críticos del segundo tipo.

b. ¿Qué extremo se alcanza en cada punto crítico? La segunda derivada es

$$h''(x) = 20x^3 - 60x + 40$$

y pasamos a evaluarla en cada punto crítico.

- En $x = -3$ resulta $h''(3) = -320$, negativo, de modo que h alcanza un máximo local en $x = -3$.
- En $x = 1$ se tiene $h''(1) = 0$, así que el criterio de la segunda derivada no se aplica.
  Pero podemos regresar al criterio de la primera derivada, y viendo el mapa de signos de h' alrededor de 1 (no nos interesa más a la izquierda de -3),



concluimos que h alcanza un mínimo local en $x = 1$.

En este ejemplo confirmamos lo que acabábamos de decir: el criterio de la segunda derivada es más sencillo porque no necesita un mapa de signos, pero no siempre funciona. En los casos en que no se pueda aplicar, se puede recurrir al criterio de la primera derivada, que *siempre* es concluyente.

Ejercicios

Encuentre los extremos locales usando el criterio de la segunda derivada

104. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

105. $3u^4 - 4u^3 + 1$

106. $4z^5 - 5z^4 + 2$

107. $\dfrac{u^2}{u-1}$

108. $\dfrac{p^2 - 2p + 2}{p-1}$

109. $\dfrac{v^2}{v^2+1}$

110. $\sqrt{s^2+1}$

111. $2r\sqrt{r+3}$

112. $u - 3\sqrt[3]{u}$

113. $v^2\,\mathrm{e}^v$

114. $x^2 + \mathrm{e}^{4-x^2}$

115. $z - \ln z$

116. $\ln(t^2+5)$

3.4.3. (Opcional) Extremos absolutos

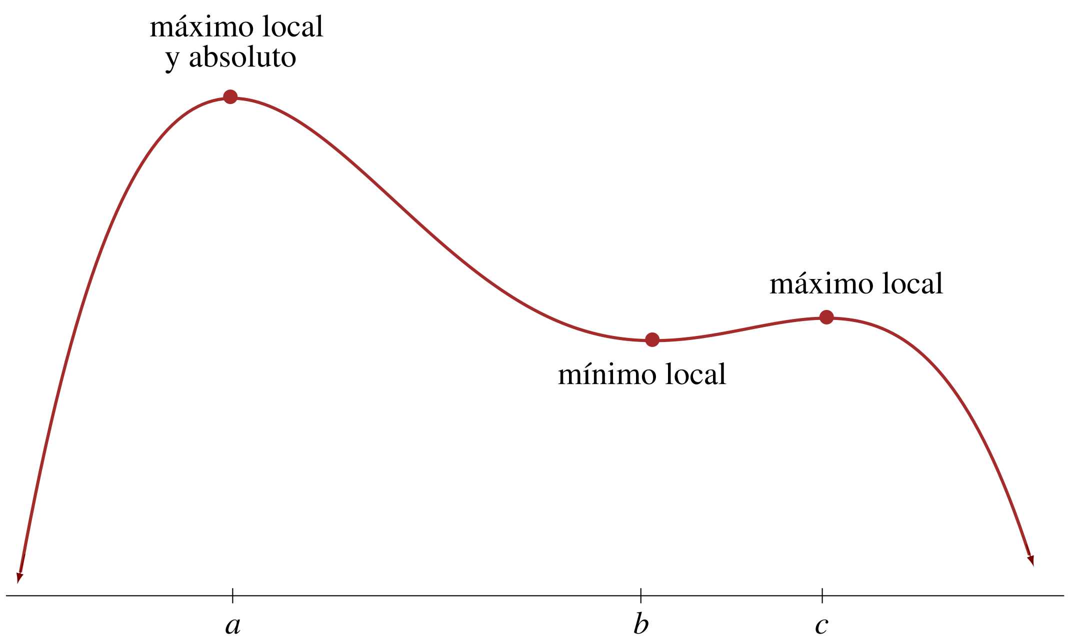
Recuerde que la definición de máximo local (o relativo) dice que una función f alcanza un máximo local en un punto c si existe un intervalo I alrededor de c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Eso no significa que $f(c) \geq f(x)$ para *todo* x en el dominio de f.

Eso último es lo que se conoce como máximo absoluto.

Definición (extremos absolutos)

- Una función f alcanza un *máximo absoluto* en un punto c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f.
- Una función f alcanza un *mínimo absoluto* en un punto c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f.
- Un *extremo absoluto* de una función es un máximo absoluto o un mínimo absoluto.

Podemos ilustrar la diferencia entre extremos absolutos y extremos locales en el siguiente gráfico, que ya habíamos visto en la página 69.



Ya habíamos notado que la función f en este gráfico alcanza máximos locales en a y en c, porque $f(a)$ y $f(c)$ son los valores más altos localmente (en algún intervalo alrededor de cada punto), y que f alcanza un mínimo local en b porque $f(b)$ es el más bajo localmente.

Pero note lo siguiente:

- $f(c)$ no es un máximo absoluto porque hay otros puntos más altos en el gráfico.

- $f(a)$ sí es un máximo absoluto porque es el valor más alto de todo el gráfico.
- $f(b)$ no es mínimo absoluto porque en el gráfico hay otros puntos más bajos.
- Las flechas en los extremos del gráfico indican que no existe un mínimo absoluto.

El siguiente teorema garantiza que las funciones continuas en intervalos cerrados y finitos siempre tienen un máximo local y un mínimo local, y que estos se alcanzan en algún punto crítico o algún borde (izquierdo o derecho) del intervalo.

Teorema

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en ese intervalo.

Esos extremos absolutos se alcanzan en algún punto crítico, en a o en b.

Ejemplo 14: extremos absolutos en un intervalo cerrado y finito

Encontrar los extremos absolutos de $h(v) = v^3 - 3v^2 - 9v$ en el dominio $[1,5]$.

Los puntos críticos se encuentran resolviendo

$$h'(v) = 3v^2 - 6v - 9 = 0$$

Las soluciones son $v = -1$ y $v = 3$, pero $v = -1$ está fuera del intervalo de interés. Así, el único punto crítico es $v = 3$ (recuerde que los puntos críticos son puntos *en el dominio* de la función).

Los extremos absolutos se pueden alcanzar entonces en $v = 3$ (por ser punto crítico), en $v = 1$ (por ser el punto inicial del intervalo) o en $v = 5$ (por ser el punto final del intervalo).

Sabiendo eso, es suficiente comparar los valores de h en esos tres puntos:

v	1	3	5
$h(v)$	-11	-27	5

En la tabla es claro que el máximo es $h(5) = 5$ y que el mínimo es $h(3) = -27$.

Ejercicios

Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo dado

117. $2z^2+6z-3$ en $[-2,3]$

118. $2p^3+3p^2-12p+1$ en $[-1,5]$

119. $2p^3+3p^2-12p+1$ en $[-10,12]$

120. $-3r^4+4r^3+72r^2$ en $[-3,2]$

121. $\dfrac{t}{t^2+1}$ en $[0,2]$

122. $\dfrac{7x}{x-2}$ en $[3,5]$

123. $\sqrt{9-w^2}$ en $[-1,2]$

124. $\dfrac{q+1}{\sqrt{q^2+5}}$ en $[-2,2]$

125. $p^{4/5}$ en $[-32,1]$

126. $x\,\mathrm{e}^{-x}$ en $[0,1]$

127. t^2/e^t en $[-1/2,1]$

128. $y\ln y-2y$ en $[1,4]$

129. $t^2(2\ln t-3)$ en $[1,4]$

130. $\dfrac{\ln(r+1)}{r+1}$ en $[0,5]$

131. $2\ln u-u$ en $[1,\infty[$

132. $\dfrac{r}{\mathrm{e}^r}$ en $[0,\infty[$

133. $q^4-2q^3-2q^2$ en $\mathbb{R}$

134. $z\,\mathrm{e}^{-3z}$ en $\mathbb{R}$

3.5. Problemas de máximos y mínimos

La *optimización*, en nuestro contexto, es el proceso de búsqueda del valor óptimo de una función, que puede ser el máximo o el mínimo según la situación. Se acostumbra llamar *función objetivo* a la función que se trata de optimizar (maximizar o minimizar).

Para resolver problemas aplicados de optimización pueden darse estos pasos:

a. Identificar las variables.

b. Plantear la función objetivo.

c. Plantear una o varias ecuaciones que relacionen las variables.

d. Escribir la función objetivo en términos de una sola variable.

e. Optimizar la función objetivo.

f. Responder la pregunta que se planteó.

3.5.1. Problemas generales

Ejemplo 15: dos números que cumplen ciertas propiedades

Encontrar dos números cuya diferencia sea 10 y su producto sea mínimo.

Sigamos los pasos dados en la página 79.

a. Identificar las variables.
Necesitamos encontrar dos números; llamémoslos x y y. Otras variables involucradas son su suma, que denotaremos S, y su producto, que denotaremos P.

b. Plantear la función objetivo.
El objetivo es minimizar el producto de los números, que en su forma más básica es $P = xy$.

c. Ecuaciones que relacionen las variables.
Como la diferencia de los números es 10, tenemos la ecuación $x - y = 10$ (también pudo ser $y - x = 10$, pero convengamos en que x es el mayor de los números).

d. Función objetivo en términos de una sola variable.
Combinando la fórmula $P = xy$ con la ecuación $x - y = 10$, de la que podemos despejar $x = 10 + y$ (o igualmente pudo ser $y = x - 10$) obtenemos

$$P = (10 + y)y = 10y + y^2$$

e. Optimizar.
Los puntos críticos de P se encuentran derivando e igualando a cero.

$$P' = 10 + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -5$$

Así es que $y = -5$ es el punto crítico, pero falta confirmar si en $y = -5$ se alcanza un mínimo. Como $P'' = 2 > 0$, resulta que sí: la función P alcanza un mínimo en $y = -5$.

f. Responder.
Ya tenemos que $y = -5$, y hace un rato habíamos expresado $x = 10 + y$. Con eso averiguamos que $x = 10 + (-5) = 5$, y entonces la respuesta es que los dos números buscados son 5 y -5.

Dos observaciones sobre el ejemplo anterior.

- El problema pide que el producto de los dos números sea mínimo, y resultó que la función P alcanzaba justo un mínimo en su único punto crítico. ¿Qué pasaría si en un problema de optimización ninguno de los puntos críticos da el extremo deseado?

  Un caso concreto: ¿qué habría pasado si en este problema se hubiera propuesto que el producto fuera máximo? Habríamos encontrado el único punto crítico, $y = -5$, pero la función no alcanza un *máximo* allí. ¿Entonces?

  Entonces, sencillamente no existe un par de números donde el producto sea máximo. De hecho, por ejemplo, los números 100 y 90 tienen diferencia 10 y su producto es 9000. Los números 200 y 190 tienen diferencia 10 y su producto es 38 000. Los números 1500 y 1490 tienen diferencia 10 y su producto es 2 235 000. ¡Ya podemos ir convenciéndonos de que no existe un producto máximo!

  Algunos problemas no tienen solución.

- En este problema la función objetivo es cuadrática. Cuando eso sucede puede ser mejor, en vez de derivar, recordar que las funciones cuadráticas alcanzan su extremo en el vértice. Aquí, la función $P = 10y + y^2$ es cuadrática y cóncava hacia arriba (porque $a = 1 > 0$), por lo que alcanza un mínimo en el vértice, dado por

$$y_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10)}{2(1)} = -5$$

  Vea también el ejemplo 18.

Ejemplo 16: encontrar el precio que maximiza la utilidad

Una fábrica produce un artículo con costos fijos de 65 000 y costo unitario 28. La ecuación de demanda del producto es $p = 4000 - 0.1q$, donde p es el precio unitario y q es la cantidad vendida.

Encontrar el precio que deben fijar para maximizar la utilidad.

a. Definir las variables. Aquí tenemos las siguientes:
   - $p =$ el precio unitario,
   - $q =$ el número de unidades vendidas,
   - $I =$ el ingreso,
   - $C =$ el costo total, y
   - $U =$ la utilidad.

b. Plantear la función objetivo. Se busca maximizar la utilidad, que en su forma más básica es $U = I - C$.

c. Plantear ecuaciones que relacionen las variables. Tenemos estas:
   - $I = pq$, la fórmula clásica de ingreso,
   - $p = 4000 - 0.1q$, la ecuación de demanda,
   - $C = 65\,000 + 28q$, la suma de costos fijos más costos variables.

d. Escribir la función objetivo en términos de una sola variable. Como la incógnita principal es el precio, intentamos escribir la función objetivo, U, en términos de p.

$$\begin{aligned} U &= I - C \\ &= pq - (65\,000 + 28q) \end{aligned}$$

En este punto tenemos U en términos de p y de q. Podríamos querer sustituir p por su fórmula ($p = 4000 - 0.1q$, la ecuación de demanda), pero eso resultaría en U como función de q, y aquí la queremos[6] en términos de p. Entonces, donde la fórmula de U dice p, mejor dejamos p, y más bien, donde la fórmula diga q, *ahí* es donde sustituiremos en términos de p.

Eso se logra despejando q en la ecuación de demanda:

$$p = 4000 - 0.1q \quad \Rightarrow \quad q = 40\,000 - 10p$$

Con eso tenemos, continuando con el desarrollo anterior, que

$$\begin{aligned} U &= p(40\,000 - 10p) - 65\,000 - 28(40\,000 - 10p) \\ &= 40\,000p - 10p^2 - 65\,000 - 1\,120\,000 + 280p \\ &= -10p^2 + 40\,280p - 1\,185\,000 \end{aligned}$$

e. Optimizar la función objetivo. Primero, los puntos críticos se encuentran resolviendo

$$U' = -20p + 40\,280 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2014$$

Segundo, ¿la función alcanza un máximo o un mínimo (o ningún extremo) en ese punto crítico? Según el criterio de la segunda derivada, como

$$U'' = -20 < 0$$

se concluye que lo que se alcanza es un máximo en $p = 2014$.

f. Responder. Deben fijar un precio $p = 2014$ para maximizar la utilidad.

[6] Pero vea el ejemplo siguiente, donde resolvemos este mismo problema dejando U en términos de q.

En el paso e, optimizar, es importante recordar que no basta con encontrar los puntos críticos de la función objetivo. Sabemos que los puntos críticos a veces resultan en un máximo, a veces en un mínimo, y a veces no resultan en ningún extremo. Por eso es necesario ir más allá de encontrar los puntos críticos y determinar dónde se alcanza el extremo deseado.

Para eso hay tres posibilidades.

- Se puede usar el criterio de la segunda derivada como hicimos en el ejemplo anterior. Hemos visto que a veces este criterio puede fallar y será necesario aplicar el criterio de la primera derivada.
- Algunas veces se puede plantear la función objetivo dentro de un dominio cerrado y finito, y allí buscar su extremo absoluto como en la sección 3.4.3. Vea el ejemplo 22.
- A veces es posible, pero *solamente si la función objetivo es cuadrática*, usar lo que sabemos sobre parábolas: que su valor extremo se encuentra en el vértice y que es un máximo o un mínimo dependiendo de la concavidad. Repase la segunda observación después del ejemplo 15, y luego vea el ejemplo 18.

Veamos dos variaciones al método que usamos en el ejemplo anterior.

Ejemplo 17: optimizar en términos de una variable secundaria

En el ejemplo anterior, cuando teníamos que

$$U = pq - (65\,000 + 28q)$$

en términos de p y q, pudimos haber sustituido inmediatamente $p = 4000 - 0.1q$ en vez de despejar q. Con eso tenemos

$$\begin{aligned} U &= (4000 - 0.1q)q - 65\,000 - 28q \qquad \text{(ya en términos de una sola variable)} \\ &= -0.1q^2 + 3972q - 65\,000 \end{aligned}$$

lo cual fue menos trabajo que despejar q de la ecuación de demanda, sustituirlo dos veces en la fórmula de U y luego desarrollar dos productos en esa fórmula, como hicimos en el ejemplo anterior.

Sigamos. Los puntos críticos de U se encuentran derivando e igualando a cero:

$$U' = -0.2q + 3972 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 19\,860$$

Como $U'' = -0.2 < 0$, lo que U alcanza es un máximo, como queríamos.

Pero eso solo dice que la utilidad máxima se alcanza vendiendo 19 860 unidades. ¿Y el precio? Esa era la pregunta: el precio. Para encontrarlo sustituimos en la ecuación de demanda:

$$p = 4000 - 0.1(19860) = 2014$$

Llegamos así al mismo resultado que en el ejemplo anterior (y tal vez con menos esfuerzo): la utilidad máxima se alcanza con un precio de 2014.

En este ejemplo acabamos de ver que puede ser posible (y a veces más sencillo) resolver un problema de optimización planteando la función objetivo en términos de una variable que no sea la incógnita principal. Lo esencial es que la función objetivo esté en términos de *una sola* variable.

Habrá casos en que no se pueda escribir la función objetivo en términos de una variable. En la sección 4.4 veremos cómo optimizar funciones con dos variables.

Ejemplo 18: optimizar una función cuadrática

En el ejemplo 16 habíamos escrito la función objetivo como

$$U = -10p^2 + 40\,280p - 1\,185\,000$$

Como esta es una función cuadrática, resulta que nos complicamos más de lo necesario cuando usamos la primera derivada para encontrar el punto crítico y la segunda derivada para determinar si en ese punto había máximo o mínimo.

La verdad es que sin necesidad de cálculo podíamos encontrar el máximo: como U es una función cuadrática cóncava hacia abajo (porque $a = -10 < 0$), entonces alcanza un máximo en el vértice, que está dado por

$$p_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40\,280}{-20} = 2014$$

Punto.

Combinando los tres ejemplos anteriores vemos que la forma más sencilla para resolver el problema planteado es la siguiente (siguiendo los pasos en la página 79).

a, b, c. Variables, función objetivo, ecuaciones: como en el ejemplo 16.

d. Objetivo en términos de una variable: mejor como en el ejemplo 17,

$$U = -0.1q^2 + 3972q - 65000$$

e. Optimizar: como U es cuadrática con $a = -0.1 < 0$, alcanza el máximo en su vértice,

$$q_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3972}{-0.2} = 19\,860$$

f. Responder: si $q = 19\,860$ entonces $p = 4000 - 0.1(19860) = 2014$.

Ejercicios

Resuelva

135. Encuentre dos números cuya suma sea 200 y cuyo producto sea máximo.

136. Encuentre dos números cuya diferencia sea 50 y cuyo producto sea mínimo.

137. Encuentre dos números positivos con producto 192 y con suma mínima.

138. Encuentre dos números en $[1,10]$ con producto 10 y con diferencia máxima.

139. Encuentre dos números en $[-10,10]$ con suma 0 y con producto mínimo.

140. El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h es $C = 0.015v^2 - 2.5v + 120$. Encuentre la velocidad más económica.

141. Un distribuidor de refrescos sabe que su ganancia (en miles de colones semanales), como función del número x de cajas de refrescos vendidas, está dada por la ecuación $U = -0.01x^2 + 9x - 1296$. ¿Cuántas cajas debe vender semanalmente para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima?

142. Un objeto es arrojado al aire de manera que su altura h (en metros) sobre el terreno, t segundos después de lanzado, es $h = 14t - 5t^2$. Encuentre la altura máxima que alcanza.

143. La función de costo promedio de un fabricante está dada por $\bar{C} = 0.25q + 3 + 400q^{-1}$, donde q es el número de unidades producidas. ¿A qué nivel de producción es mínimo el costo promedio por unidad? ¿Cuál es ese costo promedio mínimo?

144. La tasa de crecimiento de una población es $C(t) = 2t^3 - 11t^2 + 12t + 5$, donde t es el número de meses desde el 10 de abril del 2000. ¿Aproximadamente en qué fechas se alcanzaron las tasas de crecimiento máxima y mínima durante los primeros dos meses $(0 \leq t \leq 2)$?

145. El costo administrativo de un pedido de n unidades de un producto es

$$C = \frac{2}{n^2} + \frac{10n}{10n+3}$$

en miles de dólares. ¿Cuál es el tamaño del pedido con el que se minimiza el costo administrativo?

146. Un artículo tiene un costo de fabricación de \$5 por unidad. Si el precio de venta es p (en dólares), la demanda será $q = 2 - 0.01p^2$. Determine el precio que maximiza las utilidades.

147. El costo de producir q unidades de un artículo es $C = 0.5q^3 + 100q + 500$ y la ecuación de demanda es $p = 450 - 2q$. ¿Cuántas unidades deben producirse para maximizar las utilidades?

148. Un grupo de personas quiere alquilar un autobús para un viaje. Si viajan hasta 40 personas, la cuota de cada una será ₵6000. Por cada pasajero adicional a los primeros 40, la cuota por pasajero se rebaja en ₵100 para cada uno (por ejemplo, si viajan 42 personas, la cuota será ₵5800 para cada una de las 42 personas). La capacidad del autobús es de 60 pasajeros. ¿Cuál número de pasajeros minimiza la cuota por persona?

149. Suponga que la cantidad de dinero que el público deposita en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés que el banco ofrece ($P = kr^2$ para alguna constante k, donde r es la tasa de interés y P es el monto invertido). El dinero que el banco recibe lo coloca en préstamos por los que cobra un interés de 24 %. ¿Qué tasa de interés debe ofrecer el banco para maximizar sus utilidades durante un año? Use interés simple.

150. La función de costo total de un fabricante está dada por $C = 0.25q^2 + 3q + 400$, donde q es el número de unidades. ¿A qué nivel de producción es mínimo el costo promedio por unidad (el costo promedio es $\bar{C}(q) = C(q)/q$)? ¿Cuál es ese costo promedio mínimo?

151. Para cierto producto la ecuación de demanda es $p = 50/\sqrt{q}$ y la función de costo promedio es $\bar{C} = 0.5 - 1000/\sqrt{q}$. Determine el precio y el nivel de producción que maximizan las utilidades.

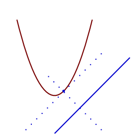
152. La ecuación de demanda de un producto es $q = 450\mathrm{e}^{-0.25p}$. ¿Qué precio debe fijarse para maximizar los ingresos?

153. La ecuación de demanda para cierto producto es $3q + 100p - 1800 = 0$, donde p es el precio unitario y q el número de unidades vendidas. Determine el nivel de producción que maximiza los ingresos del fabricante para este producto.

154. La ecuación de demanda para cierto producto es $p = \frac{3}{5}(650 - q)$, donde p es el precio unitario en dólares y q el número de unidades vendidas por semana. La capacidad máxima de producción es de 300 unidades semanales y el costo de producción es de \$24 por unidad. ¿Qué cantidad debe producirse por semana para maximizar la utilidad? ¿Cuánto es la utilidad semanal máxima?

155. Un camión consume $0.002x$ litros de gasolina por kilómetro cuando viaja a x km/h, para $70 \leq x \leq 100$. Suponga que la gasolina cuesta \$1.20 por litro y que el salario del conductor es \$6 por hora. ¿Cuál velocidad, entre 70 y 100 km/h, minimiza el costo total (gasolina más salario) de un viaje de 700 km? Recuerde que la velocidad es igual a distancia/tiempo.

156. ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola P con ecuación $y = x^2$ y la recta R con ecuación $y = x - 1$?
(Compare con el ejercicio 63 del capítulo 4.)



157. Encuentre los valores de b y c para que $f(x) = x^2 + bx + c$ tenga un mínimo en $(1,3)$.

3.5.2. Problemas de aumento/reducción

En algunos problemas se tiene que una cantidad aumenta mientras otra disminuye, y se desea encontrar el equilibrio óptimo entre ambas. Un caso típico puede ser que conforme un precio aumenta, la cantidad vendida disminuye, o viceversa, y se quiere maximizar el ingreso. En problemas así, puede ser útil plantear ambas cantidades en términos de una tercera variable y definir la función objetivo también en términos de ella, como ya habíamos hecho en la sección 6.11.3 de “Matemática para Administración”.

Es común en estos problemas que la función objetivo resulte ser cuadrática, en cuyo caso podemos encontrar su máximo o mínimo en el vértice, sin necesidad de derivar.

Ejemplo 19: optimizar el ingreso de un agricultor

Un agricultor estima que si cosecha papas ahora obtendrá 180 kg con valor de ₡450 el kilo. Si espera, la cosecha se incrementará en 30 kg por semana, pero el precio disminuirá en ₡30 por semana. ¿Cuándo debe cosechar para obtener el máximo ingreso? ¿Cuánto es ese máximo ingreso?

a. Variables. Las dos variables principales son el número de kilogramos cosechados y el precio por kilogramo, que denotaremos q y p.

   Pero el problema se simplifica significativamente al definir una nueva variable la variable n como el número de semanas por esperar.

b. Función objetivo. El objetivo es maximizar el ingreso: $I = pq$.

c. Relaciones entre variables. La cosecha aumenta en 30 kg por semana: $q = 180 + 30n$.

   El precio disminuye en ₡20 por semana: $p = 450 - 30n$.

d. Función objetivo en una sola variable. En términos de n, la función objetivo es

$$\begin{aligned} I = pq &= (450 - 30n)(180 + 30n) \\ &= -900n^2 + 8100n + 81000 \end{aligned}$$

e. Optimizar. Como I es cuadrática y cóncava hacia abajo (porque $a = -900$, negativo), su máximo se alcanza en el vértice:

$$n_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8100}{-1800} = 4.5$$

f. Responder. Debe esperar 4.5 semanas. El ingreso será $I(4.5) = 99\,225$ colones.

Ejercicios

Resuelva

158. Una revista vende 10 000 ejemplares a ₡1500 cada uno. Puede vender 100 más por cada ₡10 que disminuya el precio (por ejemplo, a ₡1480 venderán 200 más). Determine a qué precio se maximizará el ingreso.

159. Una compañía de televisión por cable da servicio actualmente a cinco mil usuarios y cobra ₡24 000 mensuales a cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada rebaja de ₡300 en la tarifa mensual, se suscribirán 85 nuevos clientes (por ejemplo, si rebajan ₡600 se suscribirán 170 nuevos clientes). Determine la cuota mensual que resulta en un ingreso mensual máximo.

160. Un agricultor calcula que si siembra 120 árboles por hectárea, entonces cada árbol adulto dará 600 naranjas al año. Por cada árbol más que plante por hectárea, la producción de cada árbol adulto disminuye en tres naranjas al año. ¿Cuántos árboles debe plantar por hectárea para obtener el mayor número posible de naranjas al año, por hectárea?

161. Una fábrica de computadoras ha estado vendiendo 1000 unidades de cierto modelo por semana, a \$600 cada una. Un estudio de mercado indica que podrían vender 80 unidades más por semana por cada \$10 de descuento en el precio.

- **a.** ¿Qué precio deben fijar para maximizar sus ingresos?
- **b.** Si el costo de producir x unidades es $C(x) = 65000 + 200x$, ¿qué precio maximizará las utilidades?

162. Un fabricante vende su producto a ₡900 la unidad, mientras que el costo unitario de producción es de ₡600. Para favorecer los pedidos de más de 100 unidades, por cada unidad adicional a 100, el precio unitario se reduce en ₡2 para todas las unidades. ¿Cuál tamaño de pedido maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

163. La edición dominical de un periódico vende 150 000 ejemplares a ₡2000 cada uno. Se ha determinado que por cada rebaja de ₡40 en el precio, las ventas aumentarán en 5000 ejemplares. Sin embargo, la capacidad de producción es de 180 000 ejemplares como máximo. ¿Qué precio deben fijar para maximizar el ingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

164. Una tienda de alquiler de videos cobra ₡1500 por película si el cliente alquila cinco videos o menos. Pero si el cliente alquila más de cinco, el precio de cada película disminuye en ₡150 por cada video adicional. ¿Cuánto es el máximo ingreso que puede tener la empresa en un alquiler?

165. Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es treinta o menos, la empresa de transportes cobra \$10 por persona. Por cada persona adicional a las primeras treinta, se reduce el cobro en \$0.40 por persona. ¿Cuál número de turistas maximiza el ingreso de la empresa por viaje, si la capacidad del bus es de sesenta pasajeros?

166. Una agencia de viajes está negociando con una aerolínea el alquiler de un avión. El avión tiene capacidad para 320 pasajeros y la aerolínea pide a la agencia vender un mínimo de 200 tiquetes. La aerolínea cobra a la agencia \$250 por persona si la agencia vende 200 tiquetes, pero rebajan en \$1 el costo de cada tiquete por cada persona adicional. ¿Cuántos tiquetes debe vender la agencia para minimizar su costo total?

167. En una ciudad, el tren subterráneo tiene una tarifa de \$1.80 y es usado por 5000 personas diariamente. Se está considerando un incremento en la tarifa y se ha determinado que por cada \$0.20 de incremento habrá mil pasajeros menos al día. ¿Qué tarifa debe fijarse para maximizar los ingresos diarios?

3.5.3. Problemas sobre pedidos y lotes de producción

Los problemas acerca de pedidos e inventarios se refieren a un productor o distribuidor de algún artículo, quien necesita balancear tres factores: la demanda de ventas por satisfacer, el costo de mantener un inventario (espacio físico, costos financieros) y el costo fijo de hacer un pedido (costos administrativos, gastos de envío). Pedidos grandes y poco frecuentes obligan a mantener un gran inventario del artículo; pedidos pequeños y frecuentes incurren en altos costos por los pedidos. El objetivo es encontrar el tamaño y la frecuencia de los pedidos que minimizan los costos totales (inventario más pedidos) satisfaciendo la demanda.

En los problemas sobre lotes de producción hay un fabricante que produce un artículo en lotes de tamaño variable. En vez del costo fijo de hacer un pedido hay un costo fijo de iniciar un lote de producción, pero el resto del modelo es idéntico al de los problemas sobre pedidos.

En todos estos problemas se supone que la demanda es uniforme en el tiempo, así que el nivel de inventario decrece a una tasa constante desde su máximo (cuando acaba de recibirse un pedido) hasta su mínimo (cuando está por recibirse el siguiente pedido). Se deduce que el nivel promedio de inventario es el promedio entre el máximo y el mínimo. Si el pedido es por x unidades y el nuevo pedido llega justo cuando el inventario se agota[7], entonces el máximo es x y el mínimo es 0, de modo que el nivel promedio de inventario es $x/2$.

[7] Es posible que el distribuidor quiera mantener un nivel mínimo de inventario, pero lo usual en estos casos es que ese mínimo sea una constante que desaparecerá al derivar la función de costo, por lo que podemos desestimarlo. Vea el ejercicio 181.

Ejemplo 20: optimizar tamaño y frecuencia de pedidos

Una licorera vende 600 bolsas de hielo cada semana. El costo semanal de mantener el inventario es de ₡15.60 por bolsa y el costo de hacer un pedido al proveedor es de ₡2400. ¿Cuántas bolsas deben pedir cada vez, y con qué frecuencia, para satisfacer la demanda y minimizar el costo total de pedidos e inventarios?

a. Denotemos con x el número de bolsas por pedido y con n el número de pedidos por semana.

b. El objetivo es minimizar el costo total: $C = CI + CP$, donde CI denota el costo de mantener el inventario y CP denota el costo de los pedidos.

c. Para satisfacer la demanda se necesita que $nx = 600$.

   Por otra parte, como el nivel promedio de inventario es $x/2$, entonces el costo promedio semanal del inventario es $CI = 15.60(x/2) = 7.8x$. Y como cada pedido cuesta ₡2400, el costo de los pedidos será $CP = 2400n$ por semana.

d. En el paso anterior teníamos que $nx = 600$, de donde podemos despejar $n = 600x^{-1}$. Así, la función objetivo es

$$\begin{aligned} C &= CI + CP = 7.8x + 2400n \\ &= 7.8x + 2400(600x^{-1}) = 7.8x + 1\,440\,000x^{-1} \end{aligned}$$

e. ¿Puntos críticos? La ecuación $C' = 7.8 - 1\,440\,000x^{-2} = 0$ tiene soluciones $x = \pm 429.67$, de donde escogemos la solución positiva. El punto crítico es entonces $x = 429.67$.

   ¿Qué extremo se alcanza? Como $C'' = 2\,880\,000x^{-3}$, positivo para $x = 429.67$, vemos que en ese punto se alcanza el costo mínimo.

f. Para la frecuencia de los pedidos, tenemos

$$n = 600x^{-1} = 600(429.67)^{-1} = 1.396$$

   pedidos por semana, o bien un pedido cada $7/1.396 = 5.01$ días. En resumen, deben pedirse aproximadamente 430 bolsas cada cinco días.

Ejercicios

Resuelva

168. Un distribuidor de bicicletas estima que la demanda para cierto modelo es de 12 000 bicicletas por año. El costo anual de inventario es de \$25 por bicicleta y el costo de cada pedido es de \$500. ¿Cuál tamaño y cuál frecuencia de pedidos minimizan el costo total?

169. Un distribuidor de motocicletas ha determinado que la demanda para cierto modelo es de seis mil unidades por año. El costo de cada embarque es de \$10 000 y el costo anual de almacenamiento es de \$200 por motocicleta. ¿De qué tamaño y con qué frecuencia debe hacer los pedidos para satisfacer la demanda, mientras minimiza los costos de embarques y almacenamiento?

170. La demanda de cierto tipo de llantas es de 3500 por mes. El costo de un pedido es de \$300 y el costo mensual de almacenamiento es de \$0.90 por llanta. ¿Cuál tamaño y cuál frecuencia de pedidos minimizan el costo total?

171. Un supermercado distribuye una marca de gaseosas para la cual se ha determinado una demanda de 1800 botellas por semana. El costo de inventario es de ₡8 por botella por semana y el costo de un pedido es de ₡24 000. ¿Con cuál tamaño y cuál frecuencia de pedidos se minimiza el costo total?

172. Un supermercado estima que la demanda de leche es de 4200 litros por semana. El costo de inventario es de ₡6 por litro por semana y el costo de un pedido es de ₡36 000. La leche debe venderse a lo sumo diez días después de recibida. ¿Con cuál tamaño y cuál frecuencia de pedidos se minimiza el costo total?

173. Un vivero consume 6000 litros de insecticida por año. El proveedor acepta pedidos por un máximo de 3000 litros, con un costo de \$25 por pedido. Al vivero le cuesta \$0.07 por año almacenar cada litro de insecticida. ¿Cuál tamaño y cuál frecuencia de pedidos minimizan el costo total?

174. Una fábrica de galletas vende 100 000 cajas por año. Cada vez que se produce un lote de galletas hay un costo inicial de \$1000 y un costo unitario de \$1 por caja. El costo anual de almacenamiento es de \$0.80 por caja. ¿De qué tamaño y con qué frecuencia se deben producir los lotes de galletas para minimizar el costo total?

175. Un taller de alfarería debe satisfacer una demanda de 2500 vasijas por mes. El costo mensual de almacenamiento es de ₡200 por vasija. Al iniciar cada producción hay un costo fijo de ₡190 000 (preparar los moldes, encender los hornos, etc.). ¿De qué tamaño deben ser los lotes de vasijas para minimizar el costo total?

176. Una fábrica de productos lácteos vende 17 250 cajas de helados cada semana. Hacer un envío a sus distribuidores cuesta ₡130 000, con una capacidad máxima de 10 000 cajas por envío. El almacenamiento cuesta ₡46 por caja por semana. ¿De qué tamaño deben ser los envíos para minimizar el costo total?

177. Resuelva el ejercicio anterior pero con una capacidad máxima de seis mil cajas por envío.

178. Se desea hornear 1200 vasijas con un mismo diseño. Construir cada molde para una vasija cuesta ₡32 000, pero el molde puede usarse repetidamente para hacer varias vasijas. El horno tiene espacio para veinte moldes y consume ₡6000 en electricidad cada vez que se usa. ¿Cuántos moldes deben construirse para minimizar el costo total (moldes más electricidad)?

179. Un fabricante debe elaborar anualmente mil unidades de cierto producto que se vende a una tasa uniforme durante el año. El costo de producción es de \$4.10 por unidad y los costos de inventario son de 6 % del costo del inventario promedio. El costo de preparación de cada lote de producción es de \$55. ¿De qué tamaño deben ser los lotes de producción para minimizar los costos totales anuales?

180. Suponga que un distribuidor debe suplir una demanda por D artículos por unidad de tiempo (semana, mes, año), donde el costo fijo de cada pedido es CFP y el costo unitario del inventario es CUI.

a. Demuestre que, si no hay restricciones, el tamaño óptimo del pedido es

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot CFP \cdot D}{CUI}}$$

b. Confirme las soluciones de los ejercicios pares de esta sección, en los que no haya restricciones, usando la fórmula en (a).

c. Confirme las soluciones de los ejercicios impares de esta sección (excepto el 179 y el 181), en los que no haya restricciones, usando la fórmula en (a).

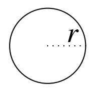
181. Con referencia al ejercicio anterior, si se considera también el costo unitario del pedido, CUP (de modo que el costo total de un pedido es $CFP + CUP \cdot x$) y un nivel mínimo de inventario NMI (tal que el nivel promedio de inventario es $NMI + x/2$), demuestre que el tamaño óptimo del pedido sigue siendo

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot CFP \cdot D}{CUI}}$$

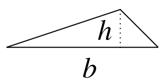
3.5.4. Problemas que involucran geometría

Para los problemas que involucran figuras geométricas, recuerde las siguientes fórmulas:

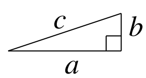
En un rectángulo con largo ℓ y ancho a, el área es $A = \ell \cdot a$ y el perímetro es $P = 2\ell + 2a$.



En un círculo con radio r, el área es $A = \pi r^2$ y el perímetro (circunferencia) es $C = 2\pi r$.

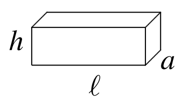


En un triángulo con base b y altura h, el área es $A = \frac{1}{2}bh$.

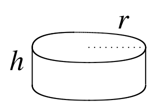


En un triángulo rectángulo con catetos a y b, e hipotenusa c, se cumple $c^2 = a^2 + b^2$.

En un sólido recto (es decir, con lados perpendiculares a la base), el volumen es $V = [\text{área de la base}] \times [\text{altura}]$. En particular:



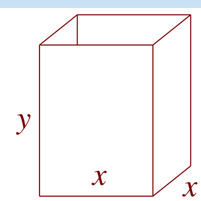
- El volumen de un prisma con lados ℓ, a y h es $V = \ell \cdot a \cdot h$.



- El volumen de un cilindro con radio basal r y altura h es $V = \pi r^2 h$.

Ejemplo 21: optimizar el volumen de una caja

Se dispone de $500\,\text{cm}^2$ de material para construir una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada. ¿Con cuáles dimensiones se obtiene el volumen máximo, aprovechando todo el material disponible?



a. Las variables son $x =$ el lado de la base, que es cuadrada, y $y =$ la altura de la caja, ambos en cm.

b. El objetivo es maximizar el volumen, $V = x^2 y$.

c. La superficie total debe ser $500\,\text{cm}^2$. Como la base mide x^2 y cada una de las cuatro caras verticales mide xy, entonces la superficie es $x^2 + 4xy = 500$.

d. De la ecuación en el paso anterior despejamos y:

$$x^2 + 4xy = 500 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{500 - x^2}{4x} = 125x^{-1} - \tfrac{1}{4}x$$

La función objetivo es entonces

$$V = x^2(125x^{-1} - \tfrac{1}{4}x) = 125x - \tfrac{1}{4}x^3$$

e. Primero, encontrar los puntos críticos.

$$V' = 125 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{500/3}$$

y como x es una longitud, debe ser positiva:

$$x = \sqrt{500/3} \approx 12.910$$

Segundo, confirmar que se alcanza un máximo.

$$V'' = -\frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad V''(\sqrt{500/3}) \approx -19.4 < 0$$

Una segunda derivada negativa indica que el volumen sí alcanza un máximo en $x = \sqrt{500/3}$.

f. Como $y = 125x^{-1} - \frac{1}{4}x$, entonces $x = \sqrt{500/3}$ implica que $y = \sqrt{125/3} \approx 6.455$. La respuesta es que el lado de la base debe medir 12.910 cm y la altura 6.455 cm.

Ejemplo 22: optimizar en un intervalo cerrado y finito

Pudimos haber resuelto el ejemplo anterior de esta manera más sencilla, limitando la función objetivo a un intervalo cerrado y finito.

Es claro que $x \geq 0$ por ser una longitud. Y también, como el material disponible es 500 cm^2, el área de la base debe ser $x^2 \leq 500$. De aquí que $x \leq \sqrt{500}$ y el dominio es $[0, \sqrt{500}]$.

Ahora buscamos el máximo absoluto entre los puntos críticos y los bordes del dominio.

De los dos puntos críticos, $x = \pm 12.91$, solamente $x = 12.91$ pertenece al dominio $[0, \sqrt{500}] \approx [0, 22.36]$. Entonces, el máximo absoluto se encuentra a partir de la siguiente tabla:

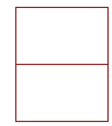
x	0	12.91	$\sqrt{500}$
$V(x)$	0	1075.83	0

Así confirmamos, por otro método, que el máximo se alcanza en $x = 12.91$.

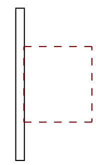
Ejercicios

Resuelva

182. Se desea cercar una superficie de 60 000 m^2 en forma rectangular, para después dividirla en dos mitades con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo y en qué dirección debe ir la división para minimizar el costo de la cerca?

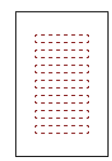


183. Se dispone de 120 m de cerca para rodear un terreno rectangular. Se usará un muro existente en uno de los lados del terreno y se cercarán los otros tres lados. Calcule las dimensiones que encierran un área máxima.



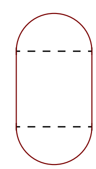
184. Se dispone de \$300 para cercar una área rectangular contigua a una pared existente (vea la figura del ejercicio anterior). El costo de la cerca paralela a la pared es \$15/m y el de los otros dos lados es \$10/m. ¿Cuáles dimensiones del rectángulo maximizan el área encerrada?

185. El diseñador gráfico en una imprenta decide que las páginas de un libro tendrán márgenes superior e inferior de 3 cm, y derecho e izquierdo de 2.5 cm. La hoja tendrá una superficie de 600 cm^2. ¿Cuáles dimensiones de la hoja maximizan el área impresa?

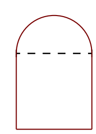


186. El diseñador gráfico en una imprenta decide que las páginas de un libro tendrán márgenes superior e inferior de 3 cm, y derecho e izquierdo de 2.5 cm. El área impresa debe medir 360 cm^2 (vea la figura del ejercicio anterior). ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel?

187. El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (en la figura, la pista es el perímetro). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.

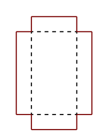


188. Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo arriba. Si el perímetro debe medir 6 m, ¿cuáles dimensiones maximizan la superficie total de la ventana?



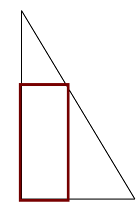
189. Una caja sin tapa y con base cuadrada debe tener un volumen de 32 dm^3 (vea la figura del ejemplo 21, página 93). Encuentre las dimensiones que minimizan la cantidad de material.

190. Una caja se construye a partir de un cartón de 10 cm $\times$ 16 cm, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas. ¿Qué tamaño de cuadrado da el máximo volumen?

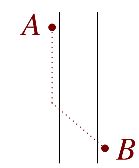


191. Una lata cilíndrica con tapa debe contener $225\,\mathrm{cm}^3$ de líquido. El costo por cm^2 de material es de 30 céntimos para el fondo y la tapa, y 20 céntimos para la pared lateral[8]. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan el costo de los materiales? ¿Cuál es el costo mínimo?

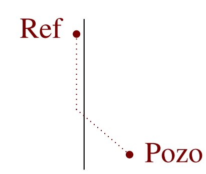
192. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.



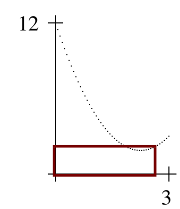
193. Una persona está en el punto A en la orilla de un río recto de 50 m de ancho y quiere llegar al punto B, en la orilla opuesta y 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en línea recta hasta llegar a B. Desestimando la corriente del río, ¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua y qué distancia debe nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuál es el tiempo mínimo? (Recuerde que la velocidad es igual a distancia/tiempo.)



194. Un pozo petrolero marítimo está bajo el mar a 1500 m de la costa. La refinería está sobre la costa a 3 km del punto más cercano al pozo. Instalar la tubería cuesta en el mar el doble de lo que cuesta en tierra. ¿Qué ruta debe seguir el oleoducto del pozo a la refinería para minimizar el costo total?



195. Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado sobre el eje X y otro lado sobre el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre el segmento de la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \le x \le 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?



3.6. Interés en tiempo continuo

Recuerde que cuando un monto P se invierte a una tasa anual de interés compuesto r, el monto acumulado a los t años será

$$A = P(1 + r/n)^{nt}$$

donde n es el número de veces al año que se compone el interés.

[8] La superficie lateral de un cilindro es $2\pi rh$, donde r es el radio de la base y h la altura.

Pero si el interés no se compone mensualmente ($n = 12$) ni diariamente[9] ($n = 360$), ni cada hora ($n = 8640$) ni cada segundo, sino *continuamente* (es decir, cuando $n \to \infty$), entonces el monto acumulado será

$$A = \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^{nt}$$

En el ejercicio 80 de este capítulo se pide calcular este límite, cuyo valor es $P\mathrm{e}^{rt}$. Usando ese resultado, tenemos la siguiente fórmula.

Interés compuesto continuamente

Si un monto P se invierte a una tasa de interés anual r, *compuesto continuamente*, al cabo de t años el valor de la inversión, llamado *valor final* o *valor futuro* será

$$A = P\mathrm{e}^{rt}$$

De este monto, P es la *inversión inicial* y la diferencia $I = A - P$ es el *interés* ganado.

Note que la fórmula de interés, $I = A - P$, se puede escribir también así:

$$I = A - P = P\mathrm{e}^{rt} - P = P(\mathrm{e}^{rt} - 1)$$

Ese factor $(\mathrm{e}^{rt} - 1)$ indica la proporción del monto P que se recibe en intereses. Al cabo de un año ($t = 1$), ese factor vale $\mathrm{e}^{r} - 1$, y se llama *tasa efectiva anual*.

Tasa efectiva anual

Para una tasa r de interés compuesto continuamente, la *tasa efectiva anual* es la tasa de interés que gana una inversión en un año. La fórmula[10] es $\mathrm{e}^{r} - 1$ y el significado es que una tasa r compuesta continuamente es equivalente a una tasa $\mathrm{e}^{r} - 1$ compuesta anualmente.

Ejemplo 23: calcular valor futuro de una inversión

Si ₡500 000 se invierten a una tasa de 13 % anual, compuesta continuamente, entonces a los dos años el monto acumulado será (con $P = 500000$, $r = 0.13$ y $t = 2$)

$$A = 500000\,\mathrm{e}^{0.13\times 2} \approx 648465.04 \text{ colones.}$$

---

[9] En matemática financiera se acostumbra considerar que cada mes tiene 30 días y cada año tiene 360 días.

[10] En la sección 7.6 de "Matemática para Administración", en el contexto de funciones exponenciales, habíamos dicho que la tasa de crecimiento de una función $f(x) = ab^{x}$ era $b - 1$. En el contexto actual de interés compuesto continuamente, esto coincide con la tasa efectiva anual, ya que el valor de la inversión, como función del tiempo, es

$$V(t) = P\mathrm{e}^{rt} = P(\mathrm{e}^{r})^{t}$$

Esto es $V(t) = ab^{t}$, donde se sustituyen $a = P$ (el valor inicial) y $b = \mathrm{e}^{r}$ (el factor de crecimiento). La tasa de crecimiento es entonces $b - 1 = \mathrm{e}^{r} - 1$, y la llamamos tasa efectiva anual.

De ese monto, los intereses son

$$I = A - P = ₡148\,465.04$$

La tasa efectiva anual es $e^{0.13} - 1 \approx 0.1388$, o 13.88 %. Esto significa que la tasa de 13 % compuesta continuamente equivale a una de 13.88 % compuesta anualmente.

Ejemplo 24: calcular tasa de interés continuo

Si se invierten \$20 000, ¿cuál debe ser la tasa de interés compuesto continuamente para que la inversión se duplique en diez años?

Que la inversión se duplique significa que el valor final será \$40 000.

La tasa de interés continuo, r, debe ser tal que (con $P = 20000$, $A = 40000$, $t = 10$)

$$\begin{aligned} A = 40\,000 &= 20\,000\, e^{r \cdot 10} \\ 2 &= e^{10r} \\ \ln 2 &= 10r \\ r &= 0.1 \ln 2 \approx 0.06931 \end{aligned}$$

Entonces, la tasa de interés es 6.931 %.

Ejemplo 25: calcular interés y tasa efectiva anual

Si \$1000 se invierten al 2.5 % compuesto continuamente, entonces el interés ganado en un año será

$$I = A - P = 1000\, e^{0.025} - 1000 \approx 25.32 \text{ dólares.}$$

Ese monto es un 2.532 % de la inversión, y esa es la tasa efectiva anual (en efecto, $e^r - 1 = e^{0.025} - 1 = 0.02532 = 2.532\,\%$).

Ejercicios

Resuelva (cada tasa de interés es anual, compuesta continuamente)

196. Si se depositan ₡500 000 a una tasa de 16 % (anual, compuesto continuamente), ¿cuánto valdrá la inversión dentro de tres años?

197. Si se depositan $22 500 al 3 %, ¿cuánto será el interés ganado dentro de cinco años?

198. Durante cuánto tiempo debe mantenerse una inversión de $150 000 a 4.5 % para que el monto acumulado llegue a $200 000?

199. Durante cuánto tiempo debe mantenerse una inversión de ₡800 000 al 15 % para que el monto acumulado alcance un millón de colones?

200. ¿Cuánto debe invertirse hoy al 2.4 % para que dentro de 4.5 años el monto acumulado sea de $60 000?

201. ¿Cuánto debe invertirse hoy al 14.8 % para que dentro de siete años el interés total sea de un millón de colones?

202. ¿A qué tasa anual, compuesta continuamente, deben invertirse $50 000 para obtener un interés de $4000 en dos años?

203. Si una inversión de un millón de colones crece hasta ₡1 400 000 en dos años y medio, ¿cuál es la tasa de interés?

204. ¿Cuál es la tasa efectiva anual de un 6 % compuesto continuamente?

205. ¿Cuál es la tasa efectiva anual de un 15 % compuesto continuamente?

206. A una tasa de 12 % anual compuesto continuamente, ¿cuánto tiempo tardará una inversión en duplicarse?

207. ¿Cuál opción deja más intereses al cabo de un año: una tasa de 20 % compuesta continuamente o una de 21 % compuesta anualmente? ¿Una tasa de 20 % compuesta continuamente o una de 21 % compuesta trimestralmente?

Capítulo 4
Cálculo con varias variables

4.1. Funciones de varias variables

En todo lo que hemos estudiado sobre funciones hasta el momento, nos hemos limitado a funciones de una sola variable. Al hablar de funciones abstractas hemos trabajado con funciones como $f(x)$, $g(t)$, que dependen de una variable x o t. Y en las aplicaciones hemos hablado de costo como función del número de unidades, o de utilidad como función del precio de venta.

En la realidad las funciones pueden depender de varias variables. Por ejemplo, las utilidades de una fábrica de quesos son función del nivel de producción del queso tipo 1, el nivel de producción del tipo 2, del precio del queso tipo 1, etcétera. Las ventas de un artículo dependen no solo de su precio, sino del precio de sus competidores.

En este capítulo estudiaremos funciones de varias variables y sus derivadas, y luego nos dedicaremos a aplicaciones de esos conceptos.

4.2. Derivadas parciales

Definición (derivada parcial de primer orden)

Si f es una función de varias variables, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces la *derivada parcial* de f con respecto a una de sus variables x_j, denotada

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \text{o bien} \quad f_{x_j},$$

es el resultado de derivar $f(x_1, \ldots, x_n)$ considerando a x_j como la única variable y a las demás como constantes.

Así, una función de n variables tendrá n derivadas parciales de primer orden, una con respecto a cada una de su variables.

Ejemplo 1: derivadas parciales

Calcular las derivadas parciales de primer orden de

$$f(u,v) = 3u^2v - 7\mathrm{e}^{2u-5v}$$

Esta es una función de dos variables, que entonces tiene dos derivadas parciales: una derivada parcial con respecto a u y una derivada parcial con respecto a v. La derivada con respecto a u se denota

$$\frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{o} \quad f_u$$

y la derivada con respecto a v es

$$\frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{o} \quad f_v$$

Calculémoslas.

- Para calcular la derivada parcial de f con respecto a u, consideramos que u es la única variable y que cualquier otra letra (específicamente e y v) son constantes.

  Entonces, el término $3u^2v$ es el producto de la constante $3v$ por la función u^2, y su derivada con respecto a u es

  $$\left[3u^2v\right]_u = \left[(3v)u^2\right]_u = (3v)\cdot 2u = 6uv$$

  Similarmente, la derivada del término e^{2u-5v} es él mismo multiplicado por la derivada del exponente. En el exponente $2u-5v$, el término $2u$ es la variable y su derivada es 2, y el término $5v$ es una constante y su derivada es 0. Entonces,

  $$\left[\mathrm{e}^{2u-5v}\right]' = \mathrm{e}^{2u-5v}(2-0) = 2\mathrm{e}^{2v-5u}$$

  De todo lo anterior resulta que

  $$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u = 6uv - 7\cdot 2\mathrm{e}^{2v-5u} = 6uv - 14\mathrm{e}^{2u-5v}$$

- Por otra parte, al derivar $f(u,v)$ con respecto a v consideramos que v es la única variable. Así el término $3u^2v$ es el producto de la constante $3u^2$ por la variable v, y su derivada con respecto a v es la constante $3u^2$.

  Y al derivar el término e^{2u-5v} resulta ahora que en el exponente $2u-5v$ el término $2u$ es constante y el término $5v$ es la variable. Por eso, la derivada del exponente es $0-5$, y uniendo lo anterior llegamos a que

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f_v = 3u^2 - 7e^{2u-5v}(-5) = 3u^2 + 35e^{2u-5v}$$

Al igual que en el caso de funciones de una variable, las funciones de varias variables tienen derivadas de órdenes superiores, pero ahora se puede derivar con respecto a una variable y luego con respecto a otra.

Definición (derivada parcial de segundo orden)

La derivada de segundo orden con respecto a x_j y a x_k, que se denota

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}, \quad \text{o bien} \quad f_{x_j x_k},$$

es la derivada de f_{x_j} con respecto a x_k.

Una propiedad importante de las derivadas parciales de segundo orden es que si son continuas, el orden de las variables no influye: $f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j}$.

Ejemplo 2: derivadas parciales de segundo orden

Continuando con el ejemplo anterior, calculemos las derivadas parciales de segundo orden de la misma función

$$f(u,v) = 3u^2v - 7e^{2u-5v}$$

Aunque f es función de dos variables y entonces tiene dos derivadas de primer orden, el número de derivadas de segundo orden es cuatro[1]: f_{uu}, f_{uv}, f_{vu} y f_{vv}.

[1] Una función de tres variables, $g(x,y,z)$, tendrá nueve derivadas de segundo orden: g_{xx}, g_{xy}, g_{xz}, g_{yx}, g_{yy}, g_{yz}, g_{zx}, g_{zy} y g_{zz}. En general, una función de n variables tendrá n derivadas de primer orden, n^2 de segundo orden, n^3 de tercer orden y así sucesivamente.

Muchas de esas derivadas serán iguales. Por ejemplo, $g_{yz} = g_{zy}$ y $g_{yzy} = g_{zyy}$.

$$f_{uu} = (f_u)_u = (6uv - 14e^{2u-5v})_u = 6v \cdot 1 - 14e^{2u-5v}(2-0) = 6v - 28e^{2u-5v}$$
$$f_{uv} = (f_u)_v = (6uv - 14e^{2u-5v})_v = 6u \cdot 1 - 14e^{2u-5v}(0-5) = 6u + 70e^{2u-5v}$$
$$f_{vu} = (f_v)_u = (3u^2 + 35e^{2u-5v})_u = 3 \cdot 2u + 35e^{2u-5v}(2-0) = 6u + 70e^{2u-5v}$$
$$f_{vv} = (f_v)_v = (3u^2 + 35e^{2u-5v})_v = 0 + 35e^{2u-5v}(0-5) = -175e^{2u-5v}$$

Que $f_{uv} = f_{vu}$ no es casualidad: así será siempre que ambas sean continuas.

Ejercicios

Derive con respecto a cada una de las variables

1. $v = p^3q^2 + 3q^2 + (p-1)^2$

2. $y = rst + rs^2 + st^2 + r^2t$

3. $w = x/(1+y)$

4. $r = p\sqrt{1+q^2}$

5. $g = x^y$

6. $z = s^2e^t$

7. $f = \sqrt{u^3+v^2}$

8. $u = \sqrt{r^2-s^3}$

9. $y = \dfrac{\sqrt{2v-3w}}{v}$

10. $q = \dfrac{s^2+st-t^2}{\sqrt{2s+t}}$

11. $s = e^{x-y}(x^2-2y^3)$

12. $w = e^{p/q}$

13. $z = ue^{v/w}$

14. $t = \ln(u+v^2)$

15. $p = 5v\ln(5v-w^2)$

16. $u = \dfrac{s}{\ln(r-s)}$

17. $s = (xy)^z$

Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden

18. Las funciones de los ejercicios 1–6 anteriores.

19. $z = 3p^2q - 5pq^3$

20. $w = r^2 - 4rs + 3s^2t - rt^2 + 2s$

21. $q = e^{-s/t}$

22. $v = \sqrt{x^2+y}$

23. $w = \ln(1+xy^2z^3)$

4.3. Aplicaciones de las derivadas parciales

En la sección 3.1 vimos que para una función $f(x)$ y un punto $x = c$, la derivada $f'(c)$ puede interpretarse como el incremento aproximado en $f(x)$ cuando x aumenta de c a $c+1$. Interpretaciones análogas pueden hacerse para las derivadas parciales.

Definición (costo marginal parcial)

Si el costo combinado de producir x unidades de un artículo y y unidades de otro es $C(x,y)$, entonces el *costo marginal* con respecto al primer artículo es $C_x = \partial C/\partial x$, y con respecto al segundo, $C_y = \partial C/\partial y$.

El valor de C_x es una aproximación del incremento en el costo total cuando la producción del primer artículo aumenta en una unidad mientras la del segundo artículo se mantiene constante, y C_y es el incremento aproximado en el costo cuando la producción del segundo aumenta en una unidad mientras la del primero se mantiene constante.

Similarmente se definen el ingreso marginal, la utilidad marginal, etc, con respecto a uno u otro producto, como las derivadas parciales del ingreso, la utilidad, etc.

Definición (función de productividad)

Una *función de productividad* es $q = f(\ell, k)$ que da la cantidad de un artículo que se puede producir como función de ℓ, el número de unidades de trabajo, y k, el número de unidades de capital que se invierten en la producción[2].

Ejemplo 3: productividad marginal

Suponga que la función de productividad de una empresa es $q = 45\ell^{0.7}k^{0.3}$, y que actualmente en la producción se están invirtiendo 50 unidades de mano de obra y 160 unidades de capital. Entonces, las derivadas parciales de la productividad con respecto a la mano de obra y al capital son, respectivamente,

$$q_\ell = 31.5\ell^{-0.3}k^{0.3} \quad \text{y} \quad q_k = 13.5\ell^{0.7}k^{-0.7}$$

que al nivel actual de producción, $\ell = 50$ y $k = 160$, valen $q_\ell = 44.65$ y $q_k = 5.98$.

Esto significa que una unidad adicional que se invierta en mano de obra (manteniendo constante el capital) causará un incremento de aproximadamente 44.65 unidades en la producción, y una unidad adicional invertida en capital (manteniendo constante la mano de obra) incrementará la producción en aproximadamente 5.98 unidades.

Se deduce que es más productivo invertir en mano de obra.

Dos artículos en el mercado son *competitivos* cuando un incremento en el precio de uno resulta en un incremento en las ventas del otro (es decir, entre más costoso es uno, más se vende el otro).

[2] Las letras ℓ y k vienen de las iniciales en alemán de “labor” (mano de obra) y “capital”.

Un ejemplo de eso son marcas rivales de gaseosas. Si aumenta el precio de la marca 1 (y se mantiene constante el precio de la marca 2) entonces el público preferirá comprar la marca 2. Eso provocará una baja en las ventas de la marca 1 y un aumento en las de la marca 2. En símbolos,

$$p_1 \nearrow \quad \Rightarrow \quad q_1 \searrow \quad \Rightarrow \quad q_2 \nearrow$$

(donde p denota precio y q denota cantidad vendida). En términos de derivadas,

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

Formalmente, los artículos competitivos se definen de la siguiente manera.

Definición (artículos competitivos o sustitutos)

Dos artículos con precios respectivos p_1 y p_2, y niveles de ventas q_1 y q_2, son *competitivos* o *sustitutos* si

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

En contraste, dos artículos son *complementarios* cuando un incremento en el precio de uno causa una baja en las ventas del otro.

Como ejemplo podemos considerar las salchichas y el pan para perros calientes. Si aumenta el precio de las salchichas, el público comprará menos salchichas y por ende menos pan para perros calientes:

$$p_1 \nearrow \quad \Rightarrow \quad q_1 \searrow \quad \Rightarrow \quad q_2 \searrow$$

En notación de derivadas,

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$$

Definición (artículos complementarios)

Dos artículos con precios respectivos p_1 y p_2, y niveles de ventas q_1 y q_2, son *complementarios* si

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$$

Ejemplo 4: ¿artículos sustitutos o complementarios?

Suponga que las marcas T y H de computadoras tienen precios unitarios respectivos p_T y p_H, y demandas respectivas q_T y q_H dadas por las ecuaciones

$$q_T = \frac{84p_H}{12+p_T} \quad \text{y} \quad q_H = \frac{120\sqrt{p_T}}{1+p_H^2}$$

Determinar si las computadoras de esas marcas son competitivas, complementarias o ninguno de los dos.

Debemos calcular estas dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_T}{\partial p_H} = \left(\frac{84}{12+p_T}\cdot p_H\right)_{p_H} = \frac{84}{12+p_T}$$

y

$$\frac{\partial q_H}{\partial p_T} = \left(\frac{120}{1+p_H^2}\cdot\sqrt{p_T}\right)_{p_T} = \frac{120}{1+p_H^2}\cdot\frac{1}{2}p_T^{-1/2}$$

Sin necesidad de simplificar notamos que, en sus dominios naturales (recuerde que los precios deben ser positivos), esas derivadas son ambas positivas.

Concluimos así que los artículos son competitivos.

Note que para cualquier par de artículos en el mercado lo más probable es que no sean competitivos ni complementarios. Para que lo sean, el requisito es fuerte: las derivadas parciales en cuestión no pueden cambiar de signo, y deben tener ambas el mismo signo. Eso no es frecuente.

Ejercicios

Resuelva

24. La estatura de un niño, en centímetros, puede estimarse como

$$E = 6.13e + 0.431p + 0.388m - 57.81$$

donde e es su edad en años, p la estatura del padre en cm y m la estatura de la madre en cm. Calcule las tres derivadas parciales de E para un niño de 9.5 años cuyo padre mide 1.73 m y cuya madre mide 1.67 m.

25. Si el costo combinado de producir una cantidad q_1 de un artículo y una cantidad q_2 de otro artículo es $C = 0.04q_1^2 + 38q_1 + 54q_2 + 900$, encuentre los costos marginales al nivel de producción $q_1 = 1200$, $q_2 = 60$. Interprete.

26. Si dos artículos cumplen las ecuaciones $q_1 = 1000 - 50p_1 + 2p_2$ y $q_2 = 500 + 4p_1 - 20p_2$ (donde p_1 y p_2 son los precios unitarios respectivos, y q_1 y q_2 las cantidades respectivas), determine si ellos son competitivos, complementarios o ninguno.

27. Si dos artículos cumplen las ecuaciones

$$q_1 = \frac{100}{p_1\sqrt{p_2}} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{500}{p_2\sqrt[3]{p_1}}$$

(donde p_1 y p_2 son los precios unitarios respectivos, y q_1 y q_2 son las cantidades respectivas) determine si ellos son competitivos, complementarios o ninguno.

28. Las ecuaciones de demanda de la mantequilla y la margarina son, respectivamente,

$$q_1 = \frac{3p_2}{1 + p_1^2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{2p_1}{1 + \sqrt{p_2}}$$

(donde p_1 y p_2 son los precios unitarios respectivos, y q_1 y q_2 las cantidades respectivas). Determine si son competitivas, complementarias o ninguna.

29. Sean p_1 y p_2 los precios unitarios de los reproductores de DVD y de los DVDs en blanco, y sean q_1 y q_2 las demandas semanales de reproductores y de DVDs, respectivamente. Si las ecuaciones de demanda son

$$q_1 = 10000 - 10p_1 - e^{0.5p_2} \quad \text{y} \quad q_2 = 50000 - 4000p_2 - 10p_1$$

determine si estos dos productos son competitivos, complementarios o ninguna de las dos opciones.

30. La función de productividad de un país es $q = 90\ell^{1/3}k^{2/3}$. ¿Cuáles son las productividades marginales con respecto a la mano de obra y con respecto al capital?

31. La función de productividad de una empresa es $q = 20\ell^{3/4}k^{1/4}$. Si se invierten $\ell = 256$ unidades de mano de obra y $k = 16$ unidades de capital, ¿cuáles son las productividades marginales con respecto a la mano de obra y al capital? ¿Es mejor invertir en mano de obra o en capital?

32. Suponga que el rendimiento R de un automóvil, en kilómetros por litro, está dado aproximadamente por

$$R = 16.64 + 0.00173\,\text{peso} - 0.0642\,\text{potencia}$$

donde el peso está en kgf y la potencia en HP. Calcule las derivadas parciales R_{peso} y R_{potencia} para un automóvil que pesa 1600 kgf y tiene 120 HP de potencia. Interprete.

33. En una tienda, la utilidad mensual depende del nivel x de inventario y de la superficie y de piso destinada a la exhibición:
$U = -0.02x^2 - 15y^2 + xy + 39x + 25y - 20000$. Si el nivel de inventario es 4000 y la superficie de exhibición es 15, encuentre la utilidad marginal con respecto a cada variable. Interprete.

34. Se estima que una nueva bebida deportiva venderá $q = 80 - 78\mathrm{e}^{-0.01x-0.02y}$ miles de unidades por mes a los x meses desde su introducción si se invierten y millones de colones mensuales en publicidad. Por seis meses se han invertido ₡45 millones mensuales en publicidad. Use derivadas para estimar cuánto más estarían vendiendo al mes si hubieran invertido ₡1 millón más en publicidad al mes.

35. La función $S(a,b) = \dfrac{47ab + 76a + 50b}{3ab + 12b + 11a + 20}$ es una medida de la satisfacción que Fulana obtiene al dedicar a horas semanales a hacer aeróbicos y b horas semanales a bailar. Si actualmente dedica 4 y 3 horas semanales a aeróbicos y baile respectivamente, calcule las satisfacciones marginales con respecto a los aeróbicos y al baile (S_a y S_b). Si Fulana dispone de una hora adicional por semana, ¿le conviene más, en términos de su satisfacción, dedicarla a aeróbicos o a bailar?

36. El tiempo que un ciclista tarda en un viaje es aproximadamente

$$t = 2.59 \cdot 1.14^p\, d^{1.03}$$

donde p es la pendiente como porcentaje, d la distancia en kilómetros y t el tiempo en minutos. Si un trayecto mide 12 km y tiene una pendiente de 4 %, calcule la derivada parcial del tiempo con respecto a la distancia e interprete.

4.4. Optimización con dos variables

En la sección 3.5 estudiamos técnicas para encontrar los máximos o mínimos de funciones de una variable. Para funciones de varias variables se conservan muchos de los conceptos (extremos locales, puntos críticos), pero tendremos que ajustar los detalles.

Para empezar, un punto crítico de una función era (en el caso de una variable) un punto donde la primera derivada era cero o estaba indefinida. Consideremos ahora solo los puntos críticos del primer tipo, donde la derivada vale cero. Pues para varias variables, se requiere que *cada* derivada parcial sea cero.

Definición (punto crítico)

Si f es una función de x_1, x_2, …, x_n, derivable en $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, entonces c es un *punto crítico* de f si

$$f_{x_1}(c) = f_{x_2}(c) = \cdots = f_{x_n}(c) = 0$$

Ejemplo 5: puntos críticos de una función de dos variables

Encontrar los puntos críticos de $h(p,q) = p^3 + 8q^3 - 12pq$.

Debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} h_p = 3p^2 - 12q = 0 \\ h_q = 24q^2 - 12p = 0 \end{cases}$$

Se puede despejar q de la primera ecuación para sustituir en la segunda (o bien despejar p de la segunda para sustituir en la primera):

$$\begin{aligned} q = \frac{3p^2}{12} = \frac{1}{4}p^2 & \qquad \text{(despejando de la primera)} \\ 24\left(\tfrac{1}{4}p^2\right)^2 - 12p = 0 & \qquad \text{(sustituyendo en la segunda)} \\ \tfrac{24}{16}p^4 - 12p = 0 & \\ 12p\left(\tfrac{1}{8}p^3 - 1\right) = 0 & \end{aligned}$$

De aquí resulta que $p = 0$ o $p = 2$, de modo que hay dos puntos críticos.

Cada punto crítico es un par ordenado (p,q), y ya tenemos los valores de p de cada uno. Para encontrar los valores de q, recordamos que $q = \frac{1}{4}p^2$ (de cuando lo despejamos de la primera ecuación), y encontramos que el primer punto tiene $q = \frac{1}{4}(0)^2 = 0$ y el segundo tiene $q = \frac{1}{4}(2)^2 = 1$.

Los dos puntos críticos son entonces $(0,0)$ y $(2,1)$.

En una variable, para determinar si un punto crítico resultaba en un máximo o un mínimo, teníamos el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada. Para dos variables vamos a concentrarnos en la generalización del criterio de la segunda derivada.

Teorema (criterio de la segunda derivada para dos variables)

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables, y sea $c = (c_1, c_2)$ un punto crítico de f. Definamos el discriminante

$$\Delta = f_{xx}(c) \cdot f_{yy}(c) - f_{xy}(c)^2$$

Entonces:

- Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(c) < 0$, f alcanza un máximo en c.
- Si $\Delta > 0$ y $f_{xx}(c) > 0$, f alcanza un mínimo en c.
- Si $\Delta < 0$, f no alcanza un máximo ni un mínimo en c.
- Si $\Delta = 0$, el criterio no se aplica.

Ejemplo 6: extremos de una función de dos variables

Continuando con el ejemplo anterior, encontremos los extremos locales de la misma función $h(p,q) = p^3 + 8q^3 - 12pq$.

Ya tenemos los puntos críticos, que son $(0,0)$ y $(2,1)$. Ahora vamos a aplicar el criterio de la segunda derivada a cada uno para investigar si él aporta un máximo, un mínimo o ningún extremo.

Primero necesitamos calcular Δ. Para nuestra función, los análogos de f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son

$$h_{pp} = 6p, \quad h_{qq} = 48q \quad \text{y} \quad h_{pq} = -12,$$

y el discriminante Δ es

$$\Delta = h_{pp}h_{qq} - h_{pq}^2 = (6p)(48q) - (-12)^2 = 288pq - 144$$

Evaluándolo en cada punto crítico averiguamos lo siguiente:

- En $(0,0)$: $\Delta = -144 < 0$, de modo que $h(0,0)$ no es un extremo relativo.
- En $(2,1)$: $\Delta = 432 > 0$, así que $h(2,1)$ sí es un extremo. ¿Pero es máximo o mínimo?

  Como además $h_{pp}(2,1) = 12 > 0$, concluimos que $h(2,1) = -8$ es un mínimo relativo.

Ejercicios

Encuentre los puntos críticos y para cada uno determine si se alcanza un mínimo, un máximo o ninguno[3]

37. $2pq - p^2 + 24q - 15p - 2q^2$

38. $x^3 + y^3 - xy$

39. $s^2 - 3t^2 + 1$

40. $2y^2 + z^2 - 4y + 6z - 7$

41. $2 + 6rs - r^3 - s^3$

42. $q^2 - 9p^2 + 2p^3 - 4q + 12p + 5$

43. $uv - \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}$

44. $st + \dfrac{4}{s} + \dfrac{2}{t}$

45. $\dfrac{x}{y^2} + xy$

46. $\mathrm{e}^{v^2} - u^2 + u$

47. $\mathrm{e}^{a-b}(a^2 - 2b^2)$

48. $\ln(qr) + 2q^2 - qr - 6q$

49. $x^3 + y^3 - 3x^2 - 12y^2 - 24x + 45y$

[3] En las soluciones los puntos se dan con las variables ordenadas alfabéticamente. Por ejemplo, si las variables son r y s, el punto $(3,5)$ se refiere a $r = 3$ y $s = 5$.

4.5. Criterio de cuadrados mínimos

Una aplicación estadística importante consiste en encontrar, dada una sucesión de puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) en el plano, una recta que pase cerca de ellos. Al considerar una posible recta $y = a+bx$, es necesario poder medir qué tan cerca de los puntos pasa ella. La distancia entre esa recta y el punto (x_i,y_i) (para cada $i = 1,2,\ldots,n$) se puede definir como la diferencia entre el valor de y estimado por la ecuación, $y = a+bx_i$, y el verdadero valor de y en ese punto, que es y_i; así, el error[4] i-ésimo se define como la diferencia

$$e_i = a+bx_i - y_i$$

Una medida del error total es la suma de los cuadrados de los errores[5],

$$\begin{aligned} SCE &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a+bx_i - y_i)^2 \\ &= (a+bx_1-y_1)^2 + (a+bx_2-y_2)^2 + \cdots + (a+bx_n-y_n)^2 \end{aligned}$$

que es una función de a y b.

En el ejercicio 78 se analiza esta función $f(a,b) = \sum(a+bx_i-y_i)^2$ y se pide encontrar su punto crítico. El siguiente teorema adelanta el resultado de ese ejercicio.

Teorema (criterio de cuadrados mínimos)

La mejor aproximación a los puntos (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) es la recta que minimiza la suma de los cuadrados de los errores, y esa recta, llamada *recta de cuadrados mínimos*, tiene ecuación $y = a+bx$, donde

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

Los coeficientes a y b dados en el criterio anterior se llaman *coeficientes de regresión* para y como función lineal de x.

4.6. Regresión lineal simple

La técnica de regresión lineal simple consiste en encontrar la recta que mejor aproxima un conjunto de puntos en el plano. En este contexto, la palabra "lineal" significa que se busca

[4] En Estadística, un "error" no es una equivocación; es simplemente la diferencia entre una estimación y una medición.

[5] Dados los valores t_1, t_2, ..., t_n, la notación $\sum_{i=1}^{n} t_i$, a veces abreviada $\sum t$, representa la suma de los valores de t: $\sum t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$.

y como función lineal de x (y en la sección 4.8 veremos algunos casos de regresión no lineal). Y la palabra "simple" se refiere a que y es función de una sola variable x (porque en regresión lineal múltiple se trata de buscar una función y de varias variables).

Existen varios criterios para definir lo que significa la "mejor" aproximación a los puntos. En esta sección estudiaremos el criterio de cuadrados mínimos, que describimos en la sección anterior.

La recta de cuadrados mínimos también se llama a veces *recta de regresión* o *recta de mejor ajuste*.

Ejemplo 7: recta de cuadrados mínimos

Encontrar la recta de cuadrados mínimos para los siguientes datos.

x	-9	-5	-2	3	6	8
y	82	31	27	33	-23	-8

Los valores que necesitamos para calcular los coeficientes a y b son

$$\begin{aligned}
n &= 6 \qquad \text{(el número de pares ordenados)} \\
\sum x &= (-9)+(-5)+(-2)+(3)+(6)+(8) &&= 1 \\
\sum y &= (82)+(31)+(27)+(33)+(-23)+(-8) &&= 142 \\
\sum xy &= (-9)(82)+(-5)(31)+\cdots+(8)(-8) &&= -1050 \\
\sum x^2 &= (-9)^2+(-5)^2+\cdots+(8)^2 &&= 219 \\
\sum y^2 &= (82)^2+(31)^2+\cdots+(-8)^2 &&= 10096
\end{aligned}$$

Entonces,

$$b = \frac{(6)(-1050)-(1)(142)}{(6)(219)-(1)^2} = -4.90632$$

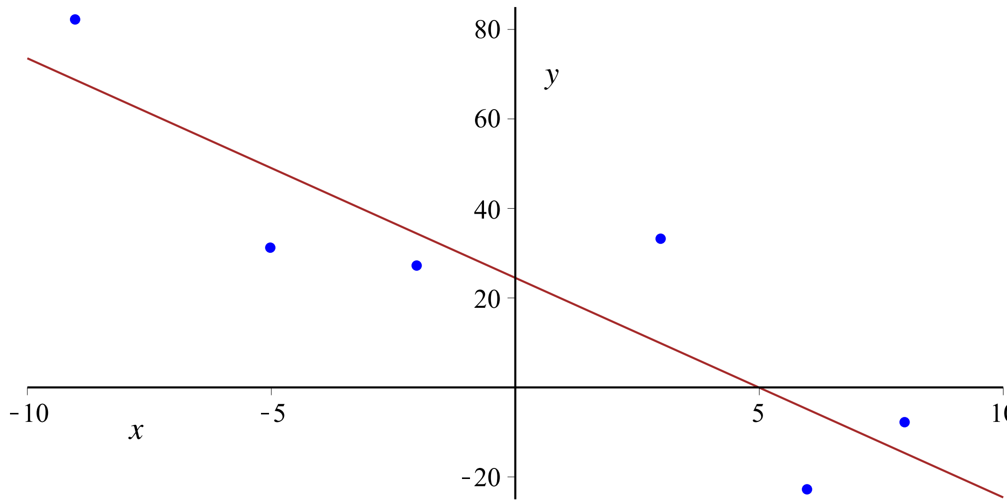
y

$$a = \frac{(142)-(-4.90632)(1)}{6} = 24.4844$$

por lo que la ecuación de la recta de cuadrados mínimos es

$$y = 24.4844 - 4.90632x$$

En este gráfico vemos los seis puntos y la recta de regresión.



Muchas calculadoras permiten resolver problemas de regresión lineal. Veamos los pasos en general; tal vez usted necesite adaptarlos según el modelo particular de su calculadora.

Empiece por ir al modo estadístico (probablemente STAT o Estadística).

Para regresión lineal seleccione la opción y=a+bx y verá una tabla con dos columnas[6] con encabezados x y y. Digite los valores que corresponden, y al terminar presione la tecla AC para salir de la tabla.

Vaya al menú de funciones estadísticas, probablemente con SHIFT 1 u OPTN (pero *no entre* al modo estadístico otra vez, porque eso borraría los datos que acaba de digitar) y escoja la opción de sumas, tal vez Sum o Sumatorios [sic]. Allí verá las opciones para todas las sumas que requiere el cálculo de los coeficientes de regresión. Puede calcular cualquiera de ellas digitando su número y la tecla =.

Un atajo es ir al menú de funciones estadísticas y escoger la opción de regresión (tal vez Reg o Regresión). Ahí encontrará opciones directas para los coeficientes a y b.

[6] Si ve una tercera columna con encabezado Frec es porque la opción de frecuencias está activada. Si es así, puede simplemente no hacerle caso, o si prefiere desactivarla vaya a la configuración de la calculadora (SETUP), busque la opción de Estadística y allí elija desactivar las frecuencias.

Ejercicios

Para cada conjunto de pares (x,y):
(a) grafique los puntos en el plano,
(b) encuentre la ecuación de cuadrados mínimos y
(c) grafique la recta de cuadrados mínimos en el mismo gráfico

50. $(-3,-15)$, $(2,0)$, $(-6,-20)$, $(2,-6)$

51. $(15,40)$, $(18,43)$, $(19,14)$, $(12,32)$

52. $(17,79)$, $(0,98)$, $(62,20)$, $(35,50)$, $(80,-11)$

53. $(1,2)$, $(3,0)$, $(2,4)$, $(4,4)$, $(5,2)$

4.7. Problemas de aplicación de optimización y regresión

Vamos a estudiar dos aplicaciones de las derivadas parciales, en problemas de optimización y de regresión lineal.

4.7.1. Problemas de optimización

Ya vimos en la sección 3.5 que algunos problemas de optimización (encontrar el máximo o el mínimo de una función objetivo) pueden resolverse usando técnicas de cálculo. Aquí estudiaremos el caso en que la función objetivo depende de dos variables.

Los pasos que usamos en aquella sección siguen siendo aplicables a funciones de dos variables. El único cambio se da en el paso (d), en el que ya no vamos a escribir la función objetivo en términos de una sino de dos variables.

a. Identificar las variables.

b. Plantear la función objetivo.

c. Plantear una o varias ecuaciones que relacionen las variables.

d. Escribir la función objetivo en términos de dos variables.

e. Optimizar la función objetivo.

f. Responder la pregunta que se planteó.

Ejemplo 8: maximizar utilidades

Un supermercado distribuye dos marcas de helados. Denotando con p_1 y p_2 los precios de venta, y con q_1 y q_2 las cantidades vendidas semanalmente para las marcas A y B, las ecuaciones de demanda son

$$q_1 = 2000 - 150p_1 + 100p_2 \quad \text{y} \quad q_2 = 1000 + 80p_1 - 120p_2.$$

El supermercado tiene costos unitarios de 12 para la marca A y 9 para la marca B. Se desea determinar los precios de venta de A y de B que maximizan las utilidades.

Siguiendo los pasos recomendados, tenemos:

a. Las variables son los precios de venta p_1 y p_2, las cantidades vendidas q_1 y q_2, el ingreso I y el costo C. Las incógnitas principales son p_1 y p_2.

b. El objetivo es maximizar $U = I - C$.

c. Además de las ecuaciones dadas arriba para q_1 y q_2, tenemos que el ingreso es
$$I = p_1 q_1 + p_2 q_2$$
y también que el costo es
$$C = 12q_1 + 9q_2$$

d. En términos de las dos incógnitas p_1 y p_2, la función objetivo es
$$\begin{aligned} U = I - C &= (p_1q_1 + p_2q_2) - (12q_1 + 9q_2) \\ &= (p_1 - 12)q_1 + (p_2 - 9)q_2 \qquad \text{(agrupando los términos con } q_1 \text{ o } q_2 \\ &= (p_1 - 12)(2000 - 150p_1 + 100p_2) \\ &\qquad + (p_2 - 9)(1000 + 80p_1 - 120p_2) \\ &= 3080p_1 + 880p_2 - 150p_1^2 - 120p_2^2 - 33000 + 180p_1p_2 \end{aligned}$$

e. Lo primero es encontrar los puntos críticos. Las derivadas parciales son
$$\begin{aligned} U_{p_1} &= 3080 - 300p_1 + 180p_2 \\ U_{p_2} &= 880 + 180p_1 - 240p_2 \end{aligned}$$
y al igualar ambas a cero obtenemos $p_1 = 68/3$ y $p_2 = 62/3$. Hay entonces un solo punto crítico, $(p_1, p_2) = (68/3, 62/3)$.
Lo segundo es confirmar que allí se obtiene un máximo.
$$\begin{aligned} \Delta &= U_{p_1,p_1} U_{p_2,p_2} - U_{p_1,p_2}^2 \\ &= (-300)(-240) - (180)^2 = 339600 > 0 \end{aligned}$$

Que sea $\Delta > 0$ significa que sí hay un extremo. Como además

$$U_{p_1,p_1} = -300 < 0$$

concluimos que en efecto U tiene un máximo en $(68/3, 62/3)$, o en decimales $(22.\bar{6}, 20.\bar{6})$.

f. Los precios que maximizan las utilidades son 22.67 para la marca A y 20.67 para la marca B.

Ejercicios

Resuelva

54. Si la función de productividad de una compañía es

$$q = 0.54\ell^2 - 0.02\ell^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3$$

¿cuáles valores de ℓ y k maximizan la productividad?

55. Se estima que para satisfacer la demanda de cierto producto usando t trabajadores y m máquinas el costo será

$$C = \frac{5}{3}t^2 + \frac{8}{5}m^2 - 20t - 16m + 108$$

¿Con cuántos trabajadores y cuántas máquinas se minimiza el costo?

56. Un vivero tiene controles para la humedad y la temperatura. Si se fija una humedad h (como porcentaje) y una temperatura t (en grados centígrados), la producción del vivero será

$$P(h,t) = -12.5h^2 + 2950h - 162t^2 + 10440t - 45ht + 250000$$

Encuentre la humedad y la temperatura que maximizan la producción.

57. La utilidad para un productor de música depende del número de muestras que envíe a las radioemisoras y del número de agentes promotores que contrate. Si x es el número de muestras y y el número de agentes, la utilidad es

$$U = -0.4x^2 - 2.5y^2 - 0.32xy + 220x + 146y$$

¿Cuántas muestras debería enviar, y cuántos agentes contratar, para maximizar su utilidad?

58. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 50 y su producto sea máximo.

59. Las ecuaciones de demanda para dos artículos son

$$q_1 = 400(p_2 - p_1) \quad \text{y} \quad q_2 = 400(9 + p_1 - 2p_2)$$

El costo unitario del primer artículo es 2, y el del segundo, 3. ¿Qué precios p_1 y p_2 deben fijarse para maximizar la utilidad?

60. Las ecuaciones de demanda para dos artículos son

$$q_1 = 1 - 2p_1 + 4p_2 \quad \text{y} \quad q_2 = 11 + 2p_1 - 6p_2$$

El costo unitario del primer artículo es 4, y el del segundo, 1. ¿Qué cantidades q_1 y q_2 deben producirse para maximizar la utilidad?

61. Una embotelladora distribuye dos marcas de gaseosa, A y B, con costos unitarios de producción $c_a = 70$ y $c_b = 90$, respectivamente, en centavos de dólar. Si los precios son p_a y p_b, en centavos de dólar, las demandas serán

$$q_a = 400p_b - 600p_a \quad \text{y} \quad q_b = 42000 + 500p_a - 1000p_b$$

¿Qué precios deben fijar para maximizar las utilidades?

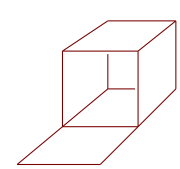
62. Un distribuidor de computadores estima que sus ventas mensuales son aproximadamente

$$q = \frac{400x}{5+x} + \frac{200y}{10+y}$$

computadores, donde x es la inversión mensual en publicidad por televisión y y la inversión mensual en publicidad por periódico, ambas en cientos de dólares. El precio de venta es US\$125 por cada computador. ¿Cuánto deben invertir mensualmente en publicidad por televisión y cuánto por periódico para maximizar la utilidad (ingreso por ventas menos gastos por publicidad)?

63. ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x - 1$? (Compare con el ejercicio 156 del capítulo 3.)

64. Un contenedor de carga en forma de caja rectangular debe tener una capacidad de $30\,\text{m}^3$. El material del frente (la puerta) cuesta US\$48/m^2, y el material para los otros cinco lados cuesta US\$32/m^2. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo de los materiales.



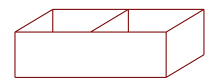
65. Se necesita construir una caja rectangular sin tapa con un volumen de $6\,\text{dm}^3$. El material del fondo cuesta ₵6000 por dm^2, el del frente y atrás cuesta ₵2000 por dm^2, y el de los lados izquierdo y derecho, ₵1000 por dm^2. ¿De qué dimensiones debe construirse la caja para minimizar el costo de los materiales?

66. Al construir una pecera rectangular, el material de la base cuesta tres veces más que el material de los lados.

a. Si el volumen debe ser $324\,\text{dm}^3$, ¿cuánto debe medir la pecera para minimizar el costo?

b. Si el costo debe ser 4500 y el material para los lados cuesta 5 por dm^2, ¿cuánto debe medir la pecera para maximizar el volumen?

67. Se quiere construir una caja rectangular sin tapa con una división paralela a dos de los lados. Si el volumen debe ser $20\,250\,\text{cm}^3$, ¿qué dimensiones de la caja minimizan la cantidad de material requerido?



4.7.2. Problemas de regresión lineal

En las aplicaciones de regresión lineal tendremos un conjunto de puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots$, (x_n,y_n) y buscaremos la recta de mejor ajuste, $y=a+bx$. Para interpretar los coeficientes de regresión tenga en cuenta lo siguiente.

- El coeficiente a en la ecuación $y=a+bx$ es el valor de y cuando $x=0$ (la intersección con el eje Y).

- El coeficiente b es la pendiente de la recta: el incremento en y por cada unidad de incremento en x.

Ejemplo 9: regresión para estatura como función de edad

Se han registrado las edades y estaturas de un grupo de niños como se muestra en el siguiente cuadro, en el que las edades están en años redondeados al décimo más cercano y las estaturas en centímetros redondeados al entero más cercano.

Edad	3.3	4.3	5.2	5.6	6.3	7.0	8.1	8.6	9.3	10.1
Estatura	94	112	115	123	117	117	125	139	134	140

A partir de estos datos podremos contestar preguntas como:

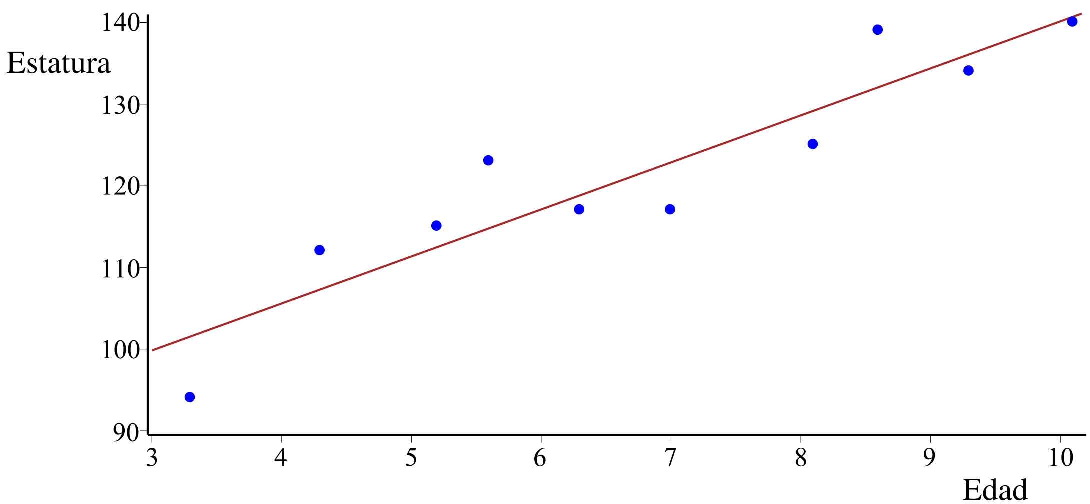
- ¿Cuál es la estatura estimada para un niño de 7.5 años?
- ¿Cuál es la edad estimada para un niño de 120 cm de estatura?
- ¿Aproximadamente cuántos centímetros por año crecen estos niños en promedio?

Compare con el ejercicio 184 del capítulo 6, página 225 de "Matemática para Administración".

Denotando con x la edad y con y la estatura, tenemos

$$
\begin{aligned}
n &= 10 && \text{(el número de puntos)}\\
(x_1, y_1) &= (3.3, 94) && \text{(el primer punto)}\\
(x_2, y_2) &= (4.3, 112) &&\\
&\vdots &&\\
(x_{10}, y_{10}) &= (10.1, 140) && \text{(el último punto)}
\end{aligned}
$$

En el siguiente gráfico, que muestra los diez puntos, vemos que ellos son aproximadamente, aunque no exactamente, colineales. El gráfico muestra también una recta que aproxima los puntos. Vamos a encontrar la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para contestar las tres preguntas recién planteadas.



Aplicando las fórmulas de b y a calculamos:

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\\
&= \frac{\begin{array}{r} 10\big[(3.3)(94) + \cdots + (10.1)(140)\big] \\ -\big[3.3 + \cdots + 10.1\big]\cdot\big[94 + \cdots + 140\big]\end{array}}{10\big[3.3^2 + \cdots + 10.1^2\big] - \big[3.3 + \cdots + 10.1\big]^2}\\
&= \frac{10(8502.8) - (67.8)(1216)}{10(504.54) - (67.8)^2} = 5.759
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum y - b\sum x}{n} \\ &= \frac{\left[94+\cdots+140\right] - 5.7589\left[3.3+\cdots+10.1\right]}{10} \\ &= \frac{1216 - 5.7589(67.8)}{10} = 82.555 \end{aligned}$$

Entonces, la recta tiene ecuación $y = 82.555 + 5.759x$. Ahora podemos contestar las tres preguntas:

- Si un niño tiene 7.5 años entonces $x = 7.5$, de donde calculamos

  $$y = 82.5548 + 5.7589(7.5) = 125.75$$

  Su estatura será aproximadamente 125.75 centímetros.
- Si un niño mide 120 cm entonces se plantea la ecuación

  $$120 = y = 82.5548 + 5.7589x$$

  y se despeja $x = 6.502$: su edad es aproximadamente 6.5 años.
- Como la pendiente de la recta, $b = 5.759$, es el incremento en y (la estatura) debido a cada unidad de incremento en x (la edad), concluimos que los niños crecen aproximadamente 5.759 cm cada año.

Ejercicios

Resuelva

68. El dueño de un teatro ha notado que la asistencia es aproximadamente lineal con respecto al precio. Ha notado que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, si cobra ₡650 asistirán 260 personas y si cobra ₡700 asistirán 225 personas (compare con el ejemplo 28 del capítulo 6, página 223 de “Matemática para Administración”).

a. Exprese la asistencia n como función del precio p.

b. Estime cuántas personas asistirán si el precio es ₡720.

c. ¿Qué precio debe cobrarse para que la asistencia esperada sea más de 450 personas?

d. ¿Aproximadamente en cuánto disminuye la asistencia por cada colón adicional en el precio?

69. Experiencias pasadas indican que la producción de huevos en una granja crece en forma aproximadamente lineal con el tiempo. En 1990 fue de 70 000 cajas; en 1995, de 76 500 cajas; en el 2000, de 82 000 cajas, y en el 2005, de 87 000 cajas (compare con el ejercicio 176 del capítulo 6, página 224 de "Matemática para Administración").

a. Encuentre una fórmula que aproxime el número N de cajas producidas t años después de 1990.

b. Estime la producción en 1998.

c. ¿Aproximadamente cuándo llegó la producción a alcanzar las 84 000 cajas anuales?

d. ¿Aproximadamente en cuánto aumenta la producción cada año?

70. En un centro de investigación médica se registraron las siguientes dosis y tiempos de recuperación para pacientes a los que se administró un medicamento (compare con el ejercicio 185 del capítulo 6, página 226 de "Matemática para Administración"):

Dosis (gramos)	0.9	1.2	1.3	1.3	1.6
Recuperación (horas)	26	22	20	18	13

a. Encuentre una ecuación de regresión para el tiempo de recuperación como función de la dosis.

b. ¿Cuánto es el tiempo esperado de recuperación si se aplica una dosis de 1.5 g?

c. ¿Cuál debe ser la dosis para que el tiempo esperado de recuperación sea menor que 20 horas?

71. En la década del 2000 la devaluación del colón con respecto al dólar fue aproximadamente lineal. Los tipos de cambio para cinco eneros, en colones por dólar, fueron los siguientes (compare con el ejercicio 187 del capítulo 6, página 226 de "Matemática para Administración"):

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Tipo de cambio	343	380	420	460	498

a. Encuentre una ecuación que estime el tipo de cambio T como función del número a de años desde enero del 2000.

b. ¿Aproximadamente cuál ha sido el aumento en el tipo de cambio por mes?

c. Estime el tipo de cambio para abril 2006.

72. La siguiente tabla relaciona el número total de años de educación (primaria, secundaria y técnica o universitaria) con el ingreso anual en dólares de varias personas.

Años	4	6	8	8	10	12	14
Ingreso	10500	9200	12400	14700	15300	18300	19500

a. Encuentre una fórmula de regresión para el ingreso anual en función de los años de educación.

b. ¿Aproximadamente en cuánto incrementa el ingreso por cada año adicional de educación?

73. Un grupo de vendedores en una tienda recibe un sueldo base más un porcentaje de comisión sobre las ventas. Los sueldos base y los porcentajes de comisión varían levemente de un vendedor a otro. En cierto mes se registraron los siguientes montos de ventas y pagos (base más comisión) a seis de los vendedores, ambos en miles de colones (compare con el ejercicio 186 del capítulo 6, página 226 de "Matemática para Administración"):

Ventas	555	660	720	834	900	960
Pago	858	864	867	876	879	885

a. Encuentre una ecuación que estime el pago recibido como función de las ventas.

b. Si en cierto mes un vendedor alcanza un nivel de ventas de ₡1 050 000, ¿cuánto puede esperar recibir como pago total?

c. ¿De cuánto deben ser las ventas para que el pago esperado sea por lo menos de ₡870 000?

d. ¿Aproximadamente cuánto es el sueldo base promedio? ¿Aproximadamente cuánto es el porcentaje de comisión promedio?

74. Una urbanizadora vende lotes con la casa ya construida. Todas las casas son iguales y su costo es el mismo en cualquier lote. Los lotes varían en tamaño, pero el precio del terreno por m^2 es casi constante (excepto por pequeñas variaciones debidas a la topografía de cada lote). Las áreas y los precios de cinco de las propiedades (lote y casa) son:

Área (m^2)	240	275	315	340	370
Precio ($1000's)	71.4	73.0	75.9	76.8	79.6

a. Encuentre una ecuación que aproxime el precio de la propiedad (lote y casa) como función del área.

b. Estime el precio de la casa sola (sin incluir el lote).

c. Estime el precio promedio del terreno (sin la casa), en dólares por metro cuadrado.

75. Algunas de las longitudes (en cm) ganadoras de medalla de oro olímpica en lanzamiento de disco son:

Año (x)	1900	1920	1960	1980
Longitud (y)	3604	4468	5918	6665

a. Encuentre una ecuación de regresión para la longitud como función del número de año.

b. Estime la longitud ganadora en las Olimpiadas del año 2000.

c. ¿En cuántos centímetros se incrementa la longitud ganadora en cada Olimpiada?

76. Un atleta vive a cierta distancia de un sendero para correr. Acostumbra salir de su casa, ir corriendo al inicio del sendero, dar varias vueltas al sendero y regresar corriendo a su casa. En varias ocasiones ha registrado los siguientes tiempos (al minuto más cercano):

Número de vueltas	1	2	2	4
Tiempo (min)	25	35	34	52

Suponga que la pérdida de velocidad por cansancio es despreciable, de modo que el tiempo depende linealmente del número de vueltas.

a. Encuentre una ecuación que prediga el tiempo como función del número de vueltas.

b. Estime el tiempo promedio para correr desde su casa hasta el inicio del sendero, suponiendo que la ida tarda lo mismo que el regreso.

c. Estime el tiempo promedio para dar una vuelta al sendero.

77. Un ciclista registra las siguientes pendientes y velocidades promedio en varios viajes[7]:

Pendiente (%)	-4.2	-1.9	-0.5	0.3	0.8	3.2	6.7
Velocidad (km/h)	43	29	26	20	21	15	9

a. Encuentre una ecuación que aproxime la velocidad como función de la pendiente.

b. ¿Aproximadamente cuál es la velocidad promedio en un trayecto horizontal?

c. Si en un viaje de 10 km el ciclista tarda 21 min, ¿cuánta altura se estima que ganó?

[7] La pendiente es el porcentaje de la altura ganada con respecto a la distancia. Por ejemplo, si en un viaje de 15 km se ganan 300 m de altura, la pendiente es $300/15000 = 2\,\%$.

78. Dados los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots$, (x_n,y_n), considere la función que a cada par de constantes a y b les asigna la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos y la aproximación lineal dada por $y = a + bx$:

$$f(a,b) = \sum (a + bx_i - y_i)^2$$

a. Calcule las derivadas parciales $\partial f/\partial a$ y $\partial f/\partial b$, en términos de los x y los y.

b. Compruebe que el único punto crítico de f tiene coordenadas $a = (\sum y - b\sum x)/n$ y $b = (n\sum xy - \sum x \sum y)/(n\sum x^2 - (\sum x)^2)$, como se planteó en el teorema de la página 112

c. Compruebe que f alcanza un mínimo en su único punto crítico.

79. La siguiente tabla muestra el área (en miles de km^2) y la población estimada para 1998 (en millones de habitantes) de tres países:

País	Costa Rica	Grecia	Guatemala
Área	52.7	139.0	112.8
Población	3.0	10.1	9.2

Tomando x como el área y y como la población, se desea encontrar una ecuación de regresión lineal $y = a + bx$.

a. Explique por qué debe ser $a = 0$.

b. Use el método de mínimos cuadrados para encontrar el valor de b en la ecuación $y = bx$.

c. ¿Cuál es la densidad promedio de población estimada por el método de mínimos cuadrados?

d. ¿Cuál es otra estimación de la densidad promedio de población?

80. Para un automóvil se han registrado las siguientes distancias y consumos de gasolina, en kilómetros y litros, respectivamente:

Distancia (km)	273	342	461	137
Gasolina (l)	29	35	37	14

Denote la distancia con x y el consumo de gasolina con y, y suponga que y depende linealmente de x.

a. Explique por qué en la ecuación $y = a + bx$ debe ser $a = 0$.

b. Use el método de mínimos cuadrados para encontrar el valor de b en la ecuación $y = bx$.

c. Dé una ecuación que prediga el consumo de combustible como función de la distancia.

d. En promedio, ¿cuántos kilómetros por litro recorre este automóvil?

e. ¿Cuál es otra estimación del rendimiento (kilómetros por litro)?

4.8. (Opcional) Regresión no lineal simple

En algunos problemas se busca una función no lineal que aproxime los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n). Dos tipos comunes de función para estos problemas son la función exponencial, $y = ab^x$, y la función potencial, $y = ax^b$. En estos dos casos se puede tomar logaritmo de y para transformar la relación en una lineal y usar las fórmulas de la sección anterior.

Ejemplo 10: regresión exponencial

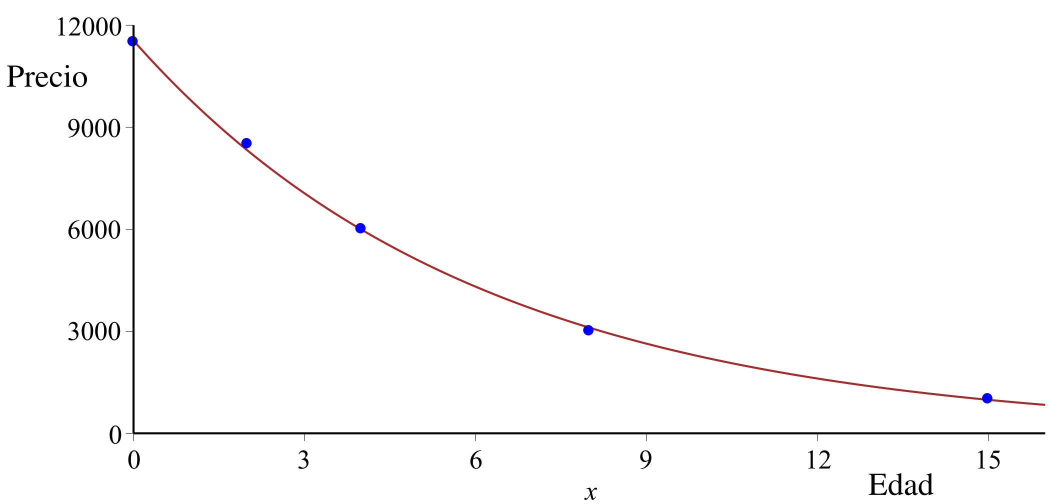
Los siguientes datos son los precios de venta de una marca y modelo de automóviles usados:

Edad (años)	0	2	4	8	15
Precio (dólares)	11 500	8500	6000	3000	1000

Vamos a contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es una ecuación que permita estimar el precio como función de la edad?
- ¿Cuál es el precio a los diez años de edad?
- ¿Cuál es el porcentaje de devaluación anual de estos carros?

Denotando con x la edad y con y el precio, al graficar los puntos notamos que y depende de x pero la dependencia no es lineal. Comparando con los gráficos de funciones exponenciales que vimos en el capítulo 7 de “Matemática para Administración”, podemos sospechar que la relación es exponencial: $y = ab^x$ para algunas constantes a y b por determinar.



Tomemos logaritmo en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} y &= ab^x \\ \ln y &= \ln(ab^x) = \ln a + \ln(b^x) = \ln a + x \ln b \end{aligned}$$

o bien

$$y_1 = a_1 + b_1 x_1$$

donde $y_1 = \ln y$, $a_1 = \ln a$, $b_1 = \ln b$ y $x_1 = x$.

Tenemos entonces una relación lineal entre dos nuevas variables x_1 y y_1. Para calcular los coeficientes a_1 y b_1 con las fórmulas de la sección anterior, primero escribimos la tabla de valores para las nuevas variables:

$x_1 = x$	0	2	4	8	15
$y_1 = \ln y$	$\ln 11500$	$\ln 8500$	$\ln 6000$	$\ln 3000$	$\ln 1000$

o, en forma decimal,

x_1	0	2	4	8	15
y_1	9.3501	9.0478	8.6995	8.0064	6.9078

De ahí calculamos

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{n\sum x_1 y_1 - \sum x_1 \sum y_1}{n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2} \\ &= \frac{\begin{array}{l} 5\big[(0)(9.3501) + \cdots + (15)(6.9078)\big] \\ \qquad\qquad - \big[0 + \cdots + 15\big] \cdot \big[9.3501 + \cdots + 6.9078\big] \end{array}}{5\big[0^2 + \ldots 15^2\big] - \big[0 + \cdots + 15\big]^2} \\ &= \frac{5(220.5610) - (29)(42.0116)}{5(309) - (29)^2} = -0.164106 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sum y_1 - b_1 \sum x_1}{n} \\ &= \frac{\big[9.3501 + \cdots + 6.9078\big] - (-0.1641)\big[0 + \cdots + 15\big]}{5} \\ &= \frac{42.0116 - (-0.164106)(29)}{5} = 9.354125 \end{aligned}$$

Recordando que $a_1 = \ln a$ y $b_1 = \ln b$, regresamos a los coeficientes originales despejándolos así:

$$\begin{aligned} \ln a = a_1 = 9.354125 \quad &\Rightarrow \quad a = \mathrm{e}^{9.354125} \approx 11\,546.36 \\ \ln b = b_1 = -0.164106 \quad &\Rightarrow \quad b = \mathrm{e}^{-0.164106} \approx 0.848652 \end{aligned}$$

Ahora contestamos las tres preguntas.

- El precio estimado y, en función de la edad x, es

$$y = 11\,546.36 \cdot 0.848652^x$$

- A los diez años, $x = 10$, el precio estimado será $y = 11\,546.36 \cdot 0.848652^{10}$, aproximadamente \$2237.40.
- La tasa de crecimiento (página **??** de “Matemática para Administración”) es $r = b - 1 \approx -0.1513$, así que la devaluación anual es 15.13 %.

Para problemas en los que la relación es potencial, $y = ax^b$, también funciona tomar logaritmo: $\ln y = \ln(ax^b) = \ln a + b \ln x$. La ecuación transformada será $y_1 = a_1 + b_1 x_1$, con $y_1 = \ln y$, $a_1 = \ln a$, $b_1 = b$ y $x_1 = \ln x$.

Ejercicios

Resuelva

81. Se invierten ₡500 000 a una tasa levemente variable de interés compuesto. Varios meses después, el valor de la inversión, en miles de colones, es

Meses	0	24	40	60
Valor	500	810	1100	1650

El valor depende exponencialmente del tiempo.

a. Encuentre una ecuación que estime el valor de la inversión como función del número de meses.

b. Estime la tasa promedio de interés mensual.

c. ¿Aproximadamente en cuántos meses llegará la inversión a valer dos millones de colones?

82. Las siguientes son las poblaciones (en miles) de Costa Rica para cinco años pasados (compare con el ejercicio 125 del capítulo 7, página 253 de "Matemática para Administración").

Año	1892	1927	1950	1973	2000
Población	243	489	859	1872	3810

Suponga que la población depende exponencialmente del tiempo y defina x como el número de años desde 1800 (por ejemplo, $x = 150$ en 1950).

a. Encuentre una ecuación que estime la población P como función de x.

b. ¿Aproximadamente cuál ha sido la tasa de crecimiento anual de la población?

c. ¿Aproximadamente en qué año llegó la población a los 2.5 millones de habitantes?

83. Durante el período 1986–1995, el colón se devaluó con respecto al dólar en forma aproximadamente exponencial. La siguiente tabla da los tipos de cambio en junio de cada año indicado, en colones por dólar (compare con el ejercicio 124 del capítulo 7, página 253 de "Matemática para Administración").

Año	1986	1987	1988	1989	1990
Tipo de cambio	55.10	61.30	74.75	80.35	88.65

Año	1991	1992	1993	1994	1995
Tipo de cambio	121.65	126.02	139.13	154.94	178.4

Defina x como el número de años desde 1900 (por ejemplo, $x = 86$ en 1986) y y como el tipo de cambio.

a. Encuentre una fórmula exponencial para y como función de x.

b. ¿Cuál fue el porcentaje promedio de devaluación anual?

c. Si la misma tendencia exponencial se hubiera mantenido unos años más, ¿cuánto habría sido el tipo de cambio en enero 2000? (El tipo de cambio en enero 2000 fue aproximadamente ₡299/$.)

d. ¿Aproximadamente en qué mes llegó el tipo de cambio a ₡120/$?

84. El ciclista del ejercicio 77 (página 124) ha notado que en pendientes extremas su velocidad varía en forma exponencial con la pendiente. La siguiente tabla incluye las observaciones de entonces y otras adicionales.

Pendiente (%)	−4.2	−1.9	−0.5	0.3	0.8	3.2	6.7
Velocidad (km/h)	43	29	26	20	21	15	9

Pendiente (%)	−2.1	−1.0	−0.4	0.5	1.5	1.8	4.3
Velocidad (km/h)	26	23	20	18	20	15	13

Encuentre una ecuación que relacione la velocidad con la pendiente.

85. Para ocho llantas de automóvil se registran los kilómetros de uso y el porcentaje de vida útil restante, de la siguiente manera:

Miles de km	2	5	10	15	25	40	60	80
% útil restante	95	85	75	60	40	25	10	5

Se supone que la vida útil restante es una función exponencial de los kilómetros de uso.

a. Encuentre una ecuación de regresión para la vida útil restante en función de la distancia recorrida.

b. ¿Cuál es la vida media de estas llantas? (La vida media es el número de km que duran antes de llegar a 50 % de utilidad.)

86. Cuando un grupo de personas desarrolla un proyecto, el tiempo T requerido para completarlo depende potencialmente del número n de participantes: $T = an^b$ donde a y b son constantes. Para un trabajo que se realiza frecuentemente se han notado los siguientes tiempos (en días) y números de participantes:

Participantes	1	4	8	11	15
Tiempo	17	5	4	2	1

a. Encuentre una fórmula que estime el tiempo como función del número de participantes.

b. ¿Cuánto tiempo deberían tardar siete personas desarrollando este proyecto?

c. Si se necesita completar el proyecto en menos de cinco días, ¿cuántas personas deben asignársele?

87. La siguiente tabla relaciona la presión de agua y la descarga, en litros por segundo, de una manguera de media pulgada de diámetro.

Presión	10	25	50	100	200
Descarga	1.49	2.35	3.33	4.72	6.68

a. Suponiendo que es potencial, encuentre la ecuación de regresión para la descarga como función de la presión.

b. Estime la presión de agua necesaria para llenar un estañón de $1.25\,\mathrm{m}^3$ en menos de 5 min (un m^3 equivale a mil litros).

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 1
Límites y continuidad de una función

55. Combine los dos logaritmos en el logaritmo de un cociente.

110. Calcule el límite de cada fracción.

111. Calcule el límite de cada fracción.

112. Calcule el límite de cada fracción.

114. Tome denominador común.

121. Racionalice.

123. Racionalice.

125. Tome denominador común.

127. Calcule los límites laterales por aparte.

130. Combine los logaritmos en uno.

153. Los límites laterales en 3 deben ser iguales.

156. Los límites laterales en -1 deben ser iguales y en 3 también.

157. Los límites laterales en 0 deben ser iguales y en b también. Si fuera $b < 0$ habría una contradicción entre las líneas primera y tercera.

Capítulo 2
Derivadas de funciones de una variable

57. Separe la fracción como resta de dos fracciones.

59. La derivada es infinita, así que la recta es vertical.

66. Recuerde convertir cada número de años en un número de meses. Por ejemplo, "al año" significa con $m = 12$.

89. $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$

120. $(p \circ q)'(6) = p'(q(6)) \cdot q'(6)$

121. $g'(x) = r'(x^2) \cdot 2x$

122. $h'(t) = [f'(3-t)(-1) \cdot t - f(3-t) \cdot 1]/t^2$

125. En vez de usar la regla del cociente, escriba $w = (2u+5)^{-1/2}$.

140. Use la identidad $\ln(A^p) = p\ln(A)$ para simplificar antes de derivar.

142. Use la identidad $\ln(A/B) = \ln(A) - \ln(B)$ para separar antes de derivar.

147. Puede evitar la regla del cociente si simplifica la fracción antes de derivar.

153. Use las reglas de descomposición de logaritmos para separar antes de derivar.

154. Use las reglas de descomposición de logaritmos para separar antes de derivar.

160. Recuerde que $b^x = e^{x \ln b}$.

163. $q'(1) = f'(\ln 1) \cdot \ln'(1)$

164. $h'(x) = [f(e^{x^2-x})]^{-1/2} f'(e^{x^2-x}) e^{x^2-x}(2x-1)$

184. $y' = (2x-y)/x$, y vale 6 en $(-1, 4)$.

185. $q' = -q\ln q/(p+q)$, y vale $-\ln 2$ en $(0, 2)$.

186. $r' = -t^2/r^2$

187. $x' = -1$

188. $z' = e^{w+z}/(2z - e^{w+z}) = z^2/(2z - z^2) = z/(2-z)$

Capítulo 3
Aplicaciones de la derivada

26. Puede ser mejor racionalizar.

49. Escriba $\ln r/(\mathrm{e}^r-1)^{-1}$. Después de usar L'Hôpital, separe $\lim(-1/\mathrm{e}^r)\cdot\lim[(\mathrm{e}^r-1)^2/r]$; el primer factor es inmediato, y solo el segundo necesita L'Hôpital.

50. Haga la sustitución $u=1/t$.

56. Tome denominador común.

57. Tome denominador común.

73. Tome $u=1/y$, y el límite se convierte en $\lim_{u\to0^+}(1+u)^{1/u}$.

74. Tome $u=1/x$, y el límite se convierte en $\lim_{u\to0^+}(1-5u)^{1/u}$.

75. Tome $u=1/s$, y el límite se convierte en $\lim_{u\to0^+}(u^2+3u+1)^{1/u}$.

80. Después de llegar a la expresión $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{t\ln(1+r/n)}{1/n}$, tome $u=1/n$.

100. El dominio es $]0,\infty[$.

101. El dominio es $]0,\infty[$.

102. El dominio es $]0,\infty[$.

131. Encuentre los puntos críticos y estime $\lim_{u\to\infty}y$ (con una tabla).

132. Encuentre los puntos críticos y calcule $\lim_{r\to\infty}y$.

133. Encuentre los puntos críticos y calcule $\lim_{q\to\pm\infty}y$.

134. Encuentre los puntos críticos y calcule $\lim_{x\to\pm\infty}y$.

135. Maximizar $P=x(200-x)$.

136. Minimizar $P=x(x-50)$.

137. Minimizar $S=x+192x^{-1}$.

138. Maximizar $D=x-10x^{-1}$ en $[1,10]$.

139. Minimizar $P=-x^2$.

146. Maximizar $U=-0.01p^3+0.05p^2+2p-10$.

147. Maximizar $U = -0.5q^3 - 2q^2 + 350q - 500$.

148. Minimizar $p = 6000 - 100n$ en $[0, 20]$, donde $n =$ número de pasajeros adicionales.

149. Maximizar $U = 0.24kr^2 - kr^3$ en $[0, 0.24]$, con k constante.

150. Minimizar $\bar{C} = 0.25q + 3 + 400q^{-1}$.

151. Maximizar $U = 1050\sqrt{q} - 0.5q$.

152. Maximizar $I = 450p\mathrm{e}^{-0.25p}$.

153. Maximizar $I = (18 - 0.03q)q$.

154. Maximizar $U = \frac{3}{5}(650 - q)q - 24q$ en $[0, 300]$.

155. El consumo de gasolina será $0.002x$ por km y el viaje es de 700 km. El viaje tardará $700/x$ horas y el conductor cuesta \$6 por hora. Se debe minimizar $C = 1.68x + 4200x^{-1}$ en $[70, 100]$.

156. La distancia mínima se alcanza entre dos puntos, uno en la recta R y otro en la parábola P, tales que el segmento que los une es perpendicular a la recta y a la parábola. Encuentre:

a. El punto p_1 en la parábola P donde la tangente a la parábola es paralela a la recta R.

b. La ecuación de la recta que pasa por p_1 y es perpendicular a la recta R.

c. El punto p_2 donde la perpendicular anterior interseca a la recta R.

d. La distancia entre p_1 y p_2.

157. $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$.

158. Tome $n =$ número de disminuciones de ₡10, de modo que $p = 1500 - 10n$ y $q = 10000 + 100n$. Maximizar $I = -1000n^2 + 50000n + 15000000$.

159. Tome $n =$ número de rebajas de ₡300, de modo que $p = 24000 - 300n$ y $q = 5000 + 85n$. Maximizar $I = -25\,500n^2 + 540\,000n + 120\,000\,000$.

160. Maximizar $N = -3n^2 + 240n + 72000$, donde $n =$ número de árboles adicionales.

161. Maximizar **a.** $I = -800n^2 + 38000n + 600000$ y **b.** $U = -800n^2 + 22000n + 335000$, donde $n =$ número de descuentos de \$10.

162. Maximizar $U = -2n^2 + 100n + 30000$, donde $n =$ número de unidades adicionales.

163. Maximizar $I = -200\,000n^2 + 4\,000\,000n + 300\,000\,000$ en $[0, 6]$, donde $n =$ número de rebajas de ₡10.

164. Maximizar $I = -150n^2 + 750n + 7500$ donde $n =$ número de videos por encima de cinco. Note que n debe ser entero.

165. Maximizar $I = -0.4n^2 - 2n + 300$ en $[0, 30]$, donde $n =$ número de pasajeros adicionales.

166. Minimizar $C = -n^2 + 50n + 50000$ en $[0, 120]$, donde $n =$ número de personas adicionales.

167. Maximizar $I = -200n^2 - 800n + 9000$, donde $n =$ número de incrementos de \$0.20. Note que n no puede ser negativo (se está considerando un incremento, no una reducción en la tarifa).

168. Minimizar $C = 12.5x + 6\,000\,000x^{-1}$.

169. Minimizar $C = 100x + 60\,000\,000x^{-1}$.

170. Minimizar $C = 0.45x + 1\,050\,000x^{-1}$.

171. Minimizar $C = 4x + 43\,200\,000x^{-1}$.

172. Minimizar $C = 3x + 151\,200\,000x^{-1}$ en $]0, 6000]$ (porque se venden 600 litros por día y la leche dura solo 10 días).

173. Minimizar $C = 0.035x + 150\,000x^{-1}$ en $]0, 3000]$.

174. Minimizar $C = 0.4x + 100\,000 + 100\,000\,000x^{-1}$.

175. Minimizar $C = 100x + 475\,000\,000x^{-1}$.

176. Minimizar $C = 23x + 2\,242\,500\,000x^{-1}$ en $]0, 10\,000]$.

177. Minimizar $C = 11.5x + 1\,121\,250\,000x^{-1}$ en $]0, 6000]$.

178. Minimizar $C = 32\,000x + 7\,200\,000x^{-1}$ en $]0, 20]$, donde $x =$ número de moldes.

179. El costo de producción es $4.1x$, el de inventario es $0.06(4.1x/2)$ y el de preparación de lotes es $55n$. El objetivo es minimizar $C = 4.223x + 55000x^{-1}$.

180. Minimizar $C = CFP \cdot D/x + CUI \cdot x/2$. Los problemas sobre la leche, el vivero, los helados y los moldes tienen restricciones.

181. Minimizar $C = (CFP + CUP \cdot x)D/x + CUI(NMI + x/2)$.

182. Minimizar $C = 3x + 120000x^{-1}$, donde $x =$ longitud del lado paralelo a la división.

183. Maximizar $A = x(120 - 2x)$, donde $x =$ longitud del lado perpendicular.

184. Maximizar $A = x(20 - 4x/3)$, donde $x =$ longitud del lado perpendicular.

185. Maximizar $A = (b-5)(600b^{-1} - 6)$, donde $b =$ base de la hoja.

186. Minimizar $b[6 + 360/(b-5)]$, donde $b =$ base de la hoja.

187. Maximizar $A = 2r(400 - \pi r)$, donde $r =$ radio de los semicírculos.

188. Maximizar $A = 2r(3 - r - r\pi/2) + \pi r^2/2$, donde $r =$ radio del semicírculo.

189. Minimizar $M = x^2 + 128x^{-1}$, donde $x =$ lado de la base.

190. Maximizar $V = (10-2x)(16-2x)x$ en $[0,5]$, donde $x =$ lado del cuadrado.

191. Minimizar $C = 60\pi r^2 + 9000r^{-1}$, donde $r =$ radio de la base.

192. El triángulo pequeño a la derecha del rectángulo y el triángulo pequeño encima del rectángulo tienen sus lados proporcionales al triángulo grande. Se debe maximizar $A = x(12 - 12x/5)$ en $[0,5]$, donde $x =$ lado del rectángulo sobre el lado de 5 cm.

193. Minimizar $T = x/250 + \sqrt{50^2 + (75-x)^2}/30$ en $[0,75]$, donde $x =$ distancia que corre.

194. Sean k el costo por km de instalar en tierra (constante), $2k$ el costo de instalar en el mar, y x la distancia en tierra, en km. Se debe minimizar $C = kx + 2k\sqrt{1.5^2 + (3-x)^2}$ en $[0,3]$.

195. Maximizar $A = x(2x^2 - 9x + 12)$ en $[0,3]$.

201. Si la inversión es P y el interés total es un millón, entonces el monto acumulado será $A = P + 1\,000\,000$.

206. Si la inversión es P, el monto acumulado será $A = 2P$.

207. Al 20 % compuesto continuamente, un monto P crece hasta $Pe^{0.20}$, al 21 % compuesto anualmente crece hasta $P(1 + 0.21/1)^1$ y al 21 % compuesto trimestralmente crece hasta $P(1 + 0.21/4)^4$.

Capítulo 4
Cálculo con varias variables

58. Maximizar $P = xy(50 - x - y)$.

59. Maximizar $U = -400p_1^2 - 800p_2^2 - 400p_1 + 5200p_2 + 800p_1p_2 - 10800$.

60. Maximizar $U = -2p_1^2 - 6p_2^2 + 6p_1p_2 + 7p_1 + p_2 - 15$; la solución es $p_1 = 15/2$, $p_2 = 23/6$. Luego encuentre q_1 y q_2.

61. Maximizar $U = -600p_a^2 - 1000p_b^2 - 3000p_a + 104000p_b + 900p_a p_b - 3780000$.

62. Maximizar $U = 50000x/(5+x) + 25000y/(10+y) - 100x - 100y$.

63. La distancia entre un punto (x_1, y_1) en la parábola y un (x_2, y_2) en la recta es

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - (x_2 - 1))^2}$$

Esa es la función por minimizar.

64. Si x es el frente, y el fondo y z la altura, todos en m, entonces $z = 30/(xy)$, y el objetivo es minimizar $C = 64xy + 1920/x + 2400/y$.

65. Si x es el frente, y el fondo y z la altura, todos en dm, entonces $z = 6/(xy)$ y el objetivo es minimizar $C = 6xy + 24/y + 12/x$.

66. **a.** Si c es el costo por dm^2 del material de los lados, entonces el material del fondo cuesta $3c$ por dm^2 y el volumen es $xyz = 324$. El objetivo es minimizar $C = 3cxy + 648c/y + 648c/x$, con c constante.
b. $15xy + 10xz + 10yz = 4500$, y el objetivo es maximizar $V = xyz$.

67. $V = xyz = 20250$, y el objetivo es minimizar $M = xy + 2xz + 3yz$.

71. **b.** La pendiente es el incremento *anual*.
c. $a = 6$ corresponde a enero 2006. Abril 2006 es 3 meses (1/4 de año) más tarde.

73. **d.** En $p = a + bv$, a es el valor de p cuando $v = 0$ y b es el incremento en p por cada unidad de incremento en v.

74. **b.** El precio de la casa, sin lote, es lo que costaría la propiedad en un terreno de $0\,\mathrm{m}^2$.
c. La pendiente de la recta es el incremento en el costo debido a cada m^2 de incremento en el área.

75. **c.** Las Olimpiadas son cada cuatro años.

76. **b.** Si no da ninguna vuelta, su tiempo es $y(0)$.
c. La pendiente es el incremento en el tiempo debido a cada vuelta adicional.

77. **b.** En un trayecto horizontal la pendiente es $0\,\%$.
c. A partir de la distancia y el tiempo calcule la velocidad (en km/h), y luego la pendiente. Por último, con la pendiente y la distancia calcule la altura.

78. **b.** Despeje a en $\partial f/\partial a = 0$ y sustituya en $\partial f/\partial b = 0$.

79. **b.** Defina $f(b) = SCE = \sum_{i=1}^{3}(bx_i - y_i)^2$, y encuentre el valor de b que minimiza $f(b)$.
c. b es el incremento en población debido a cada km^2 adicional de área.
d. Calcule la suma de las poblaciones y la suma de las áreas.

80. **b.** Defina $f(b) = SCE = \sum_{i=1}^{4}(bx_i - y_i)^2$, y encuentre el valor de b que minimiza $f(b)$.
d. Para $y = 1$ (un litro), despeje x (cuántos kilómetros).
e. Calcule el total de kilómetros y el total de litros.

82. **c.** Plantee $P = 2500$; el año será $x + 1800$.

83. **c.** $x = 100$ sería junio 2000; enero 2000 es 5 meses (5/12 de año) antes.
d. Al plantear $y = 120$ y despejar x, la solución será el número de años después de junio 1900; 91.83 años es aproximadamente 91 años y 10 meses.

87. **b.** Son 1250 litros en 300 segundos: $4.1\bar{6}$ litros por segundo.

Apéndice B
Soluciones

Capítulo 1
Límites y continuidad de una función

1. 1

2. 0

3. 1

4. 2

5. 3

6. 2

7. 3

8. 1

9. 2

10. 0

11. 1

12. 2

13. $-1/2$

14. -10

15. 1/2

16. $-1/4$

17. 1

18. $-1/4$

19. 0

20. -1

21. -1

22. 0

23. $\mathrm{e} \approx 2.7183$

24. $\mathrm{e}^2 \approx 7.3891$

25. $\ln 2 \approx 0.6931$

26. -2

27. $\sqrt{28}$

28. 160

29. -7

30. -4

31. $16/7$

32. 2

33. No existe (3 izq, 1 der)

34. -4

35. -4

36. -1

37. No existe

38. 6

39. 5

40. 6

41. No existe

42. 2

43. 2

44. 2

45. 2

46. -5

47. -2

48. 5

49. $c/2$

50. $1/2$

51. $-5/4$

52. 1

53. $-3/e^3$

54. 2

55. $\ln(4/3)$

56. 4

57. $2k$

58. 0

59. $-1/8$

60. $5/4$

61. $1/\sqrt{a}$

62. -20

63. -1

64. 2

65. ∞

66. $-\infty$

67. $-\infty$

68. $-\infty$

69. ∞

70. 1

71. 1

72. ∞

73. ∞

74. $-\infty$

75. ∞

76. 1

77. $-\infty$

78. ∞ izq, $-\infty$ der

79. $e^{0.2} \approx 1.2214$

80. ∞

81. 0

82. ∞ izq, $-\infty$ der

83. ∞

84. 0

85. $-\infty$ izq, ∞ der

86. $-\infty$ izq, ∞ der

87. ∞ izq, $-\infty$ der

88. $-\infty$

89. ∞ izq, $-\infty$ der

90. ∞ izq, $-\infty$ der

91. $-\infty$ izq, ∞ der

92. ∞

93. $-\infty$ izq, ∞ der

94. $-\infty$ izq, ∞ der

95. ∞ izq, $-\infty$ der

96. ∞

97. ∞

98. -1

99. $-\infty$

100. $-\infty$

101. $-1/2$

102. $1/2$

103. 0

104. ∞

105. 0

106. -2

107. $2/7$

108. $-\infty$

109. 0

110. $13/5$

111. ∞

112. $-\infty$

113. $-\infty$

114. -9

115. $-3/2$

116. $1/\sqrt{5}$

117. -1

118. ∞

119. $2/3$

120. 2

121. $-1/2$

122. $-\infty$

123. ∞

124. 0

125. 1/2

126. ∞

127. 0 izq, ∞ der

128. ∞

129. ∞ izq, $-\infty$ der

130. $-\ln 4$

131. ∞

132. 1

133. A 21

134. 1.8074, 6.2651, 19.98 m/s. A ∞ m/s.

135. A 6.

136. 300 km/h; 800 km/h; a 900 km/h

137. US$54.286 millones; US$87.692 millones; a US$95 millones

138. A seis meses

139. No, $f(2)$ no existe

140. Sí

141. No, los límites laterales son distintos

142. No, $p(-1) \neq \lim_{r \to -1} p(r)$

143. No, $y(-5)$ no existe

144. $t = 3$ y $t = -3$

145. $y = 1$

146. $u = -1$

147. $u = -5$

148. $x = 3$

149. $t = 1$

150. $t = 0$

151. $x = -2$

152. $y = -1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$

153. $a = 9$

154. $b = -2$

155. $a = 2$ o $a = -1$

156. $a = -1$, $b = 1$

157. $a = 1$, $b = 2$

Capítulo 2
Derivadas de funciones de una variable

1. 3

2. -6

3. 6

4. -15

5. 1

6. 5

7. 11

8. 1

9. -6

10. $-1/2$

11. -11

12. -10

13. $-5/3$

14. 12/5

15. $1/4$

16. $-3/10$

17. $1 - \sqrt{3}/6$

18. $4/\sqrt{3}$

19. 1

20. $-1/8$

21. **1.** 3
3. $2u-4$
5. $10p-29$
7. $15q^2+4q$
9. $-6/(2w+5)^2$
11. $-11/(v-4)^2$
13. $(2t^2+12t-15)/(t+3)^2$
15. $1/(2\sqrt{v+3})$
17. $1-1/\left(2\sqrt{1-t}\right)$
19. $1/\sqrt{1-2u}$

22. **2.** -6
4. $2x-3$
6. $6y^2-1$
8. $1/(1-z)^2$
10. $-2/y^2$
12. $-10/(2+x)^2$
14. $-20u/(u^2-4)^2$
16. $-3/(2\sqrt{x})$
18. $2y/\sqrt{2y^2-5}$
20. $-1/\left[2\sqrt{r}(1+\sqrt{r})^2\right]$

23. $9x^8$

24. $15t^2$

25. $7u^3$

26. $-36y^{-4}$

27. $2r^{-2/3}$

28. $52t^3-10t+6$

29. $18y^{1/2}-3y^{-1/2}+3y^{-2}$

30. $-10x+3$

31. $11/4$

32. $-1/5+u$

33. $10y^3$

34. $-5\sqrt{8}\,x^{-6}$

35. $3t^{-2}-2t^{-3}$

36. $5w^{-2}-4w^{-3}$

37. $\frac{3}{2}r^{1/2}-\frac{5}{2}r^{-7/2}$

38. $18u^2+18u-2$

39. $9x^2-14x+7$

40. $9t^2$

41. $4s^3+3s^2+6s+2$

42. $5y^{3/2}+y^{-3/2}$

43. $3v^2-6v+2$

44. $72w-48$

45. $\frac{7}{2}x^{5/2}-1+\frac{1}{2}x^{-1/2}$

46. $2+3y^{-2}$

47. $20t^{3/2}-1/5$

48. -1

49. -4

50. 4

51. No existe

52. $y-4=3(x-1)$

53. $y=3$

54. $z=0$

55. $y+5=16(r+1)$

56. $q+1=-(p+1)$

57. $y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(r-2)$

58. $y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{48}(x-8)$

59. $u=0$

60. $(2,-16)$ y $(-2,16)$

61. $(0,1)$

62. $(3/2,15/2)$

63. Al ser comprada, \$8000 por año.
Diez años después, \$8000 por año.

64. Al ser comprada, \$10 500 por año.
A los cinco años, \$7000 por año.
A los diez años, \$3500 por año.
A los quince años, \$0 por año.

65. Al ser lanzado, 17 m/s.
Después de un segundo, 7.2 m/s.
Después de tres segundos, −12.4 m/s (12.4 m/s hacia abajo, por el signo negativo).

66. Al año, ₡19 498.4 por mes.
A los 2.5 años, ₡16 766 por mes.
A los diez años, ₡3 104 por mes.

67. $20x^4-48x^3+63x^2-20x+26$

68. $5s^4-9s^2-2s-4$

69. $2y+\frac{5}{2}y^{3/2}$

70. $\frac{5}{6}t^{-1/6}+t^{-2/3}$

71. $25w^{3/2}-5-2w^{-1/2}-2w^{-2}$

72. $(12z^3+3z^4-5)/(3+z)^2$

73. $(19-4x-3x^2)/(x^2-5x+3)^2$

74. $-t(t+2)/(t^2+2t+2)^2$

75. $(u^2-2u-2)/(u^2+u+1)^2$

76. $(ad-bc)/(cx+d)^2$

77. $1/(y+1)^2-4/(y+3)^2$

78. $(12x^2+12x+1)/(2x+1)^2$

79. $2t+1/(3-t)^2$

80. $(2s^3-5s^2-4s-3)/(s-2)^2$

81. $(2x^2+8x-1)/(x+2)^2$

82. $-24p^3-3p^2-8p-1$

83. $66u^{9/2}-81u^{7/2}+30u^{3/2}-9u^{1/2}-9u^{-1/2}$

84. $(4w^5+2w^4-4w^3)/(w+1)^2$

85. $(10-2x)/(x+1)^3$

86. $[-4t^2+6t-1]/[(1-t)^2(t-2)^2]$

87. $[u^4+8u^3-13u^2-14u-18]/[(u-1)^2(5+u)^2]$

88. $[64r^2+48r-12]/[r^2(1-2r)^2]$

89. 5

90. -6

91. 8

92. $3/16$

93. $q-4=4(p+2)$

94. $w+1=\frac{1}{5}(u-9)$

95. $r=t$

96. $y+\frac{3}{4}=-\frac{2}{3}(w-\frac{1}{4})$

97. $y+\frac{1}{3}=18(x-4)$

98. $0.054966\,\mathrm{m/s^2}$

99. $I'(12) \approx 0.316535$. Después de 12 meses, el ingreso adicional para el siguiente mes será aproximadamente US$316 535.

100. 0.032, 0.8. Después de eliminar 50 %, el siguiente 1 % costará aproximadamente US$32; después de 90 %, el siguiente 1 % costará aproximadamente US$800.

101. $x = 18$ toneladas; $U(18) = 24$ millones de colones

102. $-90(5-6x)^4$

103. $6t(9t^2+5)^{-2/3}$

104. $-48(16u+1)^{-4}$

105. $(24y^2+32)(y^3+4y)^{-3/5}$

106. $2520w(4w^2-7)^2+\frac{5}{2}(1-5w)^{-1/2}$

107. $(1-2y^2)/\sqrt{1-y^2}$

108. $2(5u+\sqrt{1-3u})[5-\frac{3}{2}(1-3u)^{-1/2}]$

109. $\frac{1}{2}(v+v^{1/2})^{-1/2}(1+\frac{1}{2}v^{-1/2})$

110. $27(x-7)^2/(x+2)^4$

111. $\frac{15}{2}(5-x)^{-3/2}(3x)^{-1/2}$

112. $(-10t^3+30t^2-8)/(t^3-4)^3$

113. $3(p^2-5p)^2(2p+1)^5(2p-5)+10(p^2-5p)^3(2p+1)^4$

114. $8q(3q+1)^{-2/3}(5q-1)^{-4/5}$

115. $-2(6r-5)^2(21r-88)/(7r+2)^5$

116. $(18t^5-105t^4)/(2\sqrt{t^2-5t}^{\,3})$

117. $(-5v^3+\frac{3}{2}v^2+7v-\frac{1}{2})(v^3-v)^{-1/2}(2v+1)^{-5}$

118. $[3w(4w+2)^3]^{-1/2}(4w+2)^2(24w+3)$

119. $120(((y^2+3)^5+1)^3-2)^3((y^2+3)^5+1)^2(y^2+3)^4y$

120. -4

121. -10

122. $-1/4$

123. $y-4=4(x-1)$

124. $z-3=\frac{1}{6}(w-6)$

125. $w-1=-(u+2)$

126. $u-1=-\frac{3}{2}(t+1)$

127. $z=0$

128. $w-18=-\frac{1}{48}(v-2)$

129. $y-48=\frac{1}{96}(r+1)$

130. $y-4=\frac{8}{25}(x-2)$

131. $(1/6,0)$

132. $(0,0)$ y $(1,0)$

133. $(2,4)$

134. $(-19/8,1/2)$

135. $2+\mathrm{e}^t$

136. $\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}$

137. $3\cdot 5^r\ln 5-\mathrm{e}^r-r\mathrm{e}^r$

138. $(1/2)^x\ln(1/2)+2^x\ln 2$

139. $\mathrm{e}^{2y}-6\mathrm{e}^{4y}$

140. $3/(2t)$

141. $-1/x$

142. $1/u-2u/(u^2-1)$

143. $8/(y\ln 10)$

144. $1/(5x\ln 2)$

145. $\mathrm{e}^{3w}(3w^2+2w+3)$

146. $(4x-5)\mathrm{e}^{2x^2-5x+3}$

147. $3e^{x^2-2x}+3xe^{x^2-2x}(2x-2)$

148. $(e^u+ue^u+1)/(2\sqrt{ue^u+u})$

149. $5(q-3e^{q/3})^4(1-e^{q/3})$

150. $2e^x/(e^x+1)^2$

151. $(1-\ln(t+1))/(t+1)^2$

152. $10^{2-5y}-5y10^{2-5y}\ln 10$

153. $1/t+t/(t^2+1)$

154. $3p^2/(p^3-1)-2p+5/(2-10p)$

155. $(6r-5)/[(3r^2-5r)\ln 10]$

156. $(-1/\sqrt{s^2-1}$

157. $\frac{1}{2}z^{-1}(1+\ln z)^{-1/2}+\frac{1}{2}z^{-1/2}(1+\sqrt{z})^{-1}$

158. $2\ln(2y+6)/(y+3)$

159. $(2q+1)\ln(5q^2+1)+10(q^3+q^2)/(5q^2+1)$

160. $w^{w+1}(\ln w+1+w^{-1})$

161. $2\ln(\ln(2z^3-8z))(6z^2-8)\,/\,[(2z^3-8z)\ln(2z^3-8z)]$

162. $3e^{3x}g(\ln^2 x)+2e^{3x}g'(\ln^2 x)\ln x/x$

163. -3

164. $-3/2$

165. $q-5=-10(p-1)$

166. $z-40=40(\ln 10-1)(t+2)$

167. $x=0$

168. $w=-\frac{3}{2}(u+3)$

169. $(-1,e^{-1})$

170. $(-1/\ln 2,-e^{-1}/\ln 4)$

171. $(0.1,5e^{3.4})$

172. (e, e)

173. $(\mathrm{e}^{-1}/2-4, \mathrm{e}^{-1})$

174. $2-45\mathrm{e}^{3t}$

175. $(x^2+1)^{-3/2}$

176. $6/(1-r)^4$

177. $-\frac{15}{16}u^{-7/2}+24u^{-5}$

178. $-120p^{-6}$

179. $3(1-s)^{-5/2}$

180. $60x^3-8$

181. $-64\mathrm{e}^{1-4q}$

182. 0

183. $16(1+2s)^{-3}$

184. 10

185. $\ln 2$

186. $-2t(t^3+r^3)/r^5$

187. 0

188. $2z/(2-z)^3$

Capítulo 3
Aplicaciones de la derivada

1. $C' = 3.2$; 3.2

2. $C' = 0.8q+2.4$; 4.64

3. $C' = -0.03q^2+4.284q-79$; 53.03

4. $C' = 0.06q^2-q+4$; 28

5. $C' = 2$; $\bar{C}' = -1000q^{-2}$

6. $C' = 0.2q + 3;\ \bar{C}' = 0.1 - 2q^{-2}$

7. $C' = 0.04q + 9;\ \bar{C}' = 0.02 - 800q^{-2}$

8. $C' = 120;\ \bar{C}' = -2400q^{-2}$

9. $U' = 1.5;\ \bar{U}' = 380q^{-2}$

10. $U' = 1.9;\ \bar{U}' = 300q^{-2}$

11. $U' = 47.6 - 0.8q;\ \bar{U}' = 960q^{-2} - 0.4$

12. $U' = 2 - 0.2q;\ \bar{U}' = -0.1 + 2q^{-2}$

13. $U' = -0.06q^2 + q + 211;\ \bar{U}' = 7250q^{-2} + 0.5 - 0.04q$

14. $U' = 0.03q^2 - 4.284q + 151;\ \bar{U}' = 0.02q - 2.142 - 3207q^{-2}$

15. **a.** $C'(x) = 200 - 0.4x$; el número 183 costará aprox. $C'(182) = 127.2$ dólares.
b. $U(x) = 60x - 8000 + 0.2x^2$; la utilidad del número 212 será aprox. $U'(211) = 144.4$ dólares.

16. $C'(q) = 10e^{q/400}$; $C'(343) \approx 23.5726$

17. $q'(40) = -62.5$: cuando el precio es \$40, la demanda disminuye en 62.5 unidades por cada dólar de aumento

18. $V'(12) = -200$: a los 12 minutos el agua sale a 200 litros por minuto. El flujo es mayor a los 0 minutos.

19. $I' = 100 - \dfrac{2q^2 + 20}{\sqrt{q^2 + 20}}$

20. $N'(75) = -10$: de los 75 a los 76 años de edad el número de personas disminuye en 10.

21. $A'(t) = Pre^{rt} \Rightarrow A'/A = r$

22. $-10^{a-bM} b \ln 10$

23. $f'(25) = -0.36e^{-3} \approx -0.01792$: de 1990 a 1991 la cantidad de petróleo necesaria para cada \$1000 de producción disminuyó en 0.01792 barriles.

24. $1/2$
25. 0
26. $1/4$
27. ∞
28. 2
29. -1
30. $1/2$
31. 0
32. $-\ln 2$
33. 0
34. 0
35. $1/2$
36. 0
37. ∞
38. $-\infty$
39. $-1/6$
40. 1
41. 0
42. 0
43. ∞ izq, 0 der
44. 0
45. 0
46. 0
47. 0
48. -1
49. 0
50. -4
51. ∞
52. 1
53. ∞
54. ∞
55. ∞
56. $1/5$
57. $1/12$
58. $1/2$
59. $-\infty$ izq, ∞ der
60. $1/2$
61. 1
62. e^{-1}
63. e^{3}
64. e^{-1}
65. e^{-2}
66. 1
67. 1
68. 1
69. 1
70. 10
71. e^{3}
72. 1
73. e
74. e^{-5}
75. e^{3}
76. 1
77. 1
78. 1
79. e^{-1}
80. $P\mathrm{e}^{rt}$

81. Crece en $]-\infty,-2]$; decrece en $[-2,\infty[$

82. Crece en $]-\infty,-1]$ y en $[1,\infty[$; decrece en $[-1,1]$

83. Crece en $[0,2]$; decrece en $]-\infty,0]$ y en $[2,\infty[$

84. Crece en $[-2,-1]$ y en $[0,\infty[$; decrece en $]-\infty,-2]$ y en $[-1,0]$

85. Crece en $[-\sqrt{6}/3,0]$ y en $[\sqrt{6}/3,\infty[$; decrece en $]-\infty,-\sqrt{6}/3]$ y en $[0,\sqrt{6}/3]$

86. Crece en $]-\infty,0]$; decrece en $[0,\infty[$

87. Crece en $]-\infty,-2]$ y en $[0,\infty[$; decrece en $[-2,0]$

88. Crece en $]-\infty,0[$ y en $[2,\infty[$; decrece en $]0,2]$

89. Crece en $\mathbb{R}$

90. Crece en $[-2/3,\infty[$; decrece en $[-1,-2/3]$

91. Crece en $[-2,0]$; decrece en $]-\infty,-2]$ y en $[0,\infty[$

92. Decrece en $]-\infty,4/3[$ y en $]4/3,\infty[$

93. Crece en $[-1,1]$; decrece en $]-\infty,-1]$ y en $[1,\infty[$

94. Crece en $[-1,\infty[$; decrece en $]-\infty,-1]$

95. Crece en $[-3,\infty[$; decrece en $]-\infty,-3]$

96. Crece en $]-\infty,2]$; decrece en $[2,\infty[$

97. Crece en $[0,\infty[$; decrece en $]-\infty,0]$

98. Crece en $]-\infty,-\ln 2]$ y en $[0,\infty[$; decrece en $[-\ln 2,0]$

99. Crece en $[0,\ln 5]$; decrece en $]-\infty,0]$ y en $[\ln 5,\infty[$

100. Crece en $[1/\sqrt{2},\infty[$; decrece en $]0,1/\sqrt{2}]$

101. Crece en $[e^{-1/2},\infty[$; decrece en $]0,e^{-1/2}]$

102. Crece en $]0,1]$ y en $[3,\infty[$; decrece en $[1,3]$

103. **81.** Máx en $(-2,5)$
82. Máx en $(-1,0)$; mín en $(1,-4)$
83. Mín en (0,0); máx en (2,4)
84. Mín en $(-2,0)$; máx en $(-1,1)$; mín en $(0,0)$
85. Mín en $(-\sqrt{6}/3,2/3)$; máx en $(0,2)$; mín en $(\sqrt{6}/3,2/3)$
86. Máx en $(0,0)$
87. Máx en $(-2,3\sqrt[3]{4})$; mín en $(0,0)$
88. Mín en $(2,-6/\sqrt[3]{2})$
89. No tiene extremos
90. Máx en $(-1,0)$; mín en $(-2/3,-2\sqrt{3}/9)$
91. Mín en $(-2,-1/3)$; máx en $(0,1)$
92. No tiene extremos
93. Mín en $(-1,-1/2)$; máx en $(1,1/2)$
94. Mín en $(-1,-e^{-1})$
95. Mín en $(-3,-27e^{-3})$

96. Máx en $(2, 6e^4)$
97. Mín en $(0, 2)$
98. Máx en $(-\ln 2, 1.09416)$; mín en $(0, 1)$
99. Mín en $(0, 2)$; máx en $(\ln 5, 6.85707)$
100. Mín en $(1/\sqrt{2}, 1 + \ln 2)$
101. Mín en $(e^{-1/2}, -1/(2e))$
102. Máx en $(1, 80)$, mín en $(3, 38.0248)$

104. Máx en $(-2, 13)$; mín en $(1, -14)$

105. Mín en $(1, 0)$

106. Máx en $(0, 2)$; mín en $(1, 1)$

107. Máx en $(0, 0)$; mín en $(2, 4)$

108. Máx en $(0, -2)$; mín en $(2, 2)$

109. Mín en $(0, 0)$

110. Mín en $(0, 1)$

111. Máx en $(-3, 0)$; mín en $(-2, -4)$

112. Máx en $(-1, 2)$; mín en $(1, -2)$

113. Máx en $(-2, 4e^{-2})$; mín en $(0, 0)$

114. Máx en $(0, e^4)$; mín en $(-2, 5)$ y en $(2, 5)$

115. Mín en $(1, 1)$

116. Mín en $(0, \ln 5)$

117. Máx en $(3, 33)$; mín en $(-3/2, -15/2)$

118. Máx en $(5, 266)$; mín en $(1, -6)$

119. Máx en $(12, 3745)$; mín en $(-10, -1579)$

120. Máx en $(-3, 297)$; mín en $(0, 0)$

121. Máx en $(1, 1/2)$; mín en $(0, 0)$

122. Máx en $(3, 21)$; mín en $(5, 35/3)$

123. Máx en $(0, 3)$; mín en $(2, \sqrt{5})$

124. Máx en $(2, 1)$; mín en $(-2, -1/3)$

125. Máx en $(-32, 16)$; mín en $(0, 0)$

126. Máx en $(1, e^{-1})$; mín en $(0, 0)$

127. Máx en $(-1/2, 0.41218)$; mín en $(0, 0)$

128. Máx en $(1, -2)$; mín en $(e, -e)$

129. Máx en $(1, -3)$; mín en $(e, -e^2)$

130. Máx en $(e - 1, e^{-1})$; mín en $(0, 0)$

131. Máx en $(2, \ln 4 - 2)$

132. Mín en $(0, 0)$; máx en $(1, e^{-1})$

133. Mín en $(2, -8)$

134. Máx en $(1/3, e^{-1}/3)$

135. 100 y 100

136. 25 y -25

137. $8\sqrt{3}$ y $8\sqrt{3}$

138. 10 y 1

139. 10 y -10

140. $83.\bar{3}$ km/h

141. 450 cajas; ₡729 000

142. 9.8 m

143. $q = 40$ unidades; $\bar{C} = 23$

144. Máx el 30 de abril ($t = 2/3$); mín el 10 de junio ($t = 2$)

145. 13.91 unidades

146. \$10

147. 14 unidades

148. 60 pasajeros

149. 16 %

150. 40 unidades; $\bar{C} = 23$

151. $p = 0.0476$, $q = 1\,102\,500$

152. $p = 4$

153. 300 unidades

154. 300 unidades; \$55 800

155. 70 km/h

156. $3\sqrt{2}/8$, entre $(1/2, 1/4)$ y $(7/8, -1/8)$

157. $b = -2$, $c = 4$

158. ₡1250

159. ₡20 823.53

160. 160 árboles

161. **a.** \$362.50.
b. \$462.50.

162. 125 unidades; ₡31 250

163. ₡1760; ₡316 800 000

164. ₡8400

165. 30 turistas

166. 320 tiquetes

167. \$1.80

168. Aprox. 693 bicicletas cada 21 días

169. Aprox. 775 motocicletas cada 47 días

170. Aprox. 1528 llantas cada 13 días

171. Aprox. 3286 botellas cada 13 días

172. 6000 litros cada 10 días

173. Aprox. 2070 litros cada 126 días

174. Aprox. 15 811 cajas cada 57.7 días

175. Aprox. 2179 vasijas cada 26 días

176. Aprox. 9874 cajas cada 4 días

177. 6000 cajas aprox. cada 2.4 días

178. 15 moldes

179. Aprox. 114 unidades por lote, cada 42 días

182. $200\,\text{m} \times 300\,\text{m}$, con la división paralela al lado de 200 m

183. 30 m el lado perpendicular a la pared, 60 m el paralelo

184. 7.5 m el lado perpendicular a la pared, 10 m el paralelo

185. 22.36 cm de base y 26.83 cm de altura

186. 22.32 cm de base y 26.78 cm de altura

187. 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos

188. Rectángulo: 1.68 m de base y 0.84 m de altura; semicírculo: 0.84 m de radio

189. 4 dm el lado de la base, 2 dm la altura

190. 2 cm de lado

191. 2.8794 cm el radio de la base, 8.6382 cm la altura; costo ₡46.88

192. $2.5\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$

193. Correr 68.956 m, nadar 50.364 m; 1.955 min (aprox. 1 min 57.3 s)

194. 2133.97 m en tierra a lo largo de la costa y 1732.05 m en línea recta hacia el pozo bajo el mar

195. $A = 9$ cuando $x = 3$

196. ₡808 037.20

197. \$3641.27

198. 6.393 años (6 años, 4 meses, 21 días)

199. 1.488 años (1 año, 5 meses, 26 días)

200. \$53 857.66

201. ₡550 078.38

202. 3.848 %

203. 13.459 %

204. 6.184 %

205. 16.183 %

206. 5.776 años (5 años, 9 meses, 9 días)

207. La primera. La segunda.

Capítulo 4
Cálculo con varias variables

1. $v_p = 3p^2q^2 + 2p - 2$, $v_q = 2p^3q + 6q$

2. $y_r = st + s^2 + 2rt$, $y_s = rt + 2rs + t^2$, $y_t = rs + 2st + r^2$

3. $w_x = 1/(1+y)$, $w_y = -x/(1+y)^2$

4. $r_p = \sqrt{1+q^2}$, $r_q = pq/\sqrt{1+q^2}$

5. $g_x = x^{y-1}y$, $g_y = x^y \ln x$

6. $z_s = 2s\mathrm{e}^t$, $z_t = s^2\mathrm{e}^t$

7. $f_u = \frac{3}{2}u^2/\sqrt{u^3+v^2}$, $f_v = v/\sqrt{u^3+v^2}$

8. $u_r = r/\sqrt{r^2-s^3}$, $u_s = -\frac{3}{2}s^2/\sqrt{r^2-s^3}$

9. $y_v = (3w-v)/(v^2\sqrt{2v-3w})$, $y_w = -3/(2v\sqrt{2v-3w})$

10. $q_s = (3s^2+3st+2t^2)(2s+t)^{-3/2}$, $q_t = \frac{1}{2}(3s^2-7st-3t^2)(2s+t)^{-3/2}$

11. $s_x = \mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^3+2x)$, $s_y = -\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^3+6y^2)$

12. $w_p = \mathrm{e}^{p/q}/q$, $w_q = -p\mathrm{e}^{p/q}/q^2$

13. $z_u = \mathrm{e}^{v/w}$, $z_v = u\mathrm{e}^{v/w}/w$, $z_w = -uv\mathrm{e}^{v/w}/w^2$

14. $t_u = 1/(u+v^2)$, $t_v = 2v/(u+v^2)$

15. $p_v = 5\ln(5v-w^2) + 25v/(5v-w^2)$, $p_w = -10vw/(5v-w^2)$

16. $u_r = -s(r-s)^{-1}\ln^{-2}(r-s)$, $u_s = [\ln(r-s) + s(r-s)^{-1}]\ln^{-2}(r-s)$

17. $s_x = x^{z-1}y^z z$, $s_y = x^z y^{z-1} z$, $s_z = (xy)^z \ln(xy)$

18. **1.** $v_{pp} = 6pq^2 + 2$, $v_{pq} = v_{qp} = 6p^2q$, $v_{qq} = 2p^3 + 6$.
2. $y_{rr} = 2t$, $y_{rs} = y_{sr} = t + 2s$, $y_{rt} = y_{tr} = s + 2r$, $y_{ss} = 2r$, $y_{st} = y_{ts} = r + 2t$, $y_{tt} = 2s$.
3. $w_{xx} = 0$, $w_{xy} = w_{yx} = -(1+y)^{-2}$, $w_{yy} = 2x(1+y)^{-3}$.
4. $r_{pp} = 0$, $r_{pq} = r_{qp} = q(1+q^2)^{-1/2}$, $r_{qq} = p(1+q^2)^{-3/2}$.
5. $g_{xx} = x^{y-2}y(y-1)$, $g_{xy} = g_{yx} = x^{y-1}(y\ln x + 1)$, $g_{yy} = x^y \ln^2 x$.
6. $z_{ss} = 2\mathrm{e}^t$, $z_{st} = z_{ts} = 2s\mathrm{e}^t$, $z_{tt} = s^2\mathrm{e}^t$.

19. $z_{pp} = 6q$, $z_{pq} = z_{qp} = 6p - 15q^2$, $z_{qq} = -30pq$

20. $w_{rr} = 2$, $w_{rs} = w_{sr} = -4$, $w_{rt} = w_{tr} = -2t$, $w_{ss} = 6t$, $w_{st} = w_{ts} = 6s$, $w_{tt} = -2r$

21. $q_{ss} = t^{-2}e^{-s/t}$, $q_{st} = q_{ts} = (t-s)t^{-3}e^{-s/t}$, $q_{tt} = s(s-2t)t^{-4}e^{-s/t}$

22. $v_{xx} = y(x^2+y)^{-3/2}$, $v_{xy} = v_{yx} = -\frac{1}{2}x(x^2+y)^{-3/2}$, $v_{yy} = -\frac{1}{4}(x^2+y)^{-3/2}$

23. $w_{xx} = -y^4z^6(1+xy^2z^3)^{-2}$, $w_{xy} = w_{yx} = 2yz^3(1+xy^2z^3)^{-2}$,
$w_{xz} = w_{zx} = 3y^2z^2(1+xy^2z^3)^{-2}$, $w_{yy} = 2xz^3(1-xy^2z^3)(1+xy^2z^3)^{-2}$,
$w_{yz} = w_{zy} = 6xyz^2(1+xy^2z^3)^{-2}$, $w_{zz} = 3xy^2z(2-xy^2z^3)(1+xy^2z^3)^{-2}$

24. $E_e = 6.13$, $E_p = 0.431$, $E_m = 0.388$

25. $\partial C/\partial q_1 = 134$ y $\partial C/\partial q_2 = 54$. Si se mantiene $q_2 = 60$, el costo de aumentar q_1 de 1200 a 1201 es aproximadamente 134; si se mantiene $q_1 = 1200$, el costo de aumentar q_2 de 60 a 61 es aproximadamente 54

26. Competitivos

27. Complementarios

28. Competitivas

29. Complementarios

30. $q_\ell = 30\ell^{-2/3}k^{2/3}$, $q_k = 60\ell^{1/3}k^{-1/3}$

31. $q_\ell(256,16) = 15/2, q_k(256,16) = 40$; mejor invertir en capital

32. $R_{\text{peso}} = 0.00173$ y $R_{\text{potencia}} = -0.0642$. Si el peso aumenta en 1 kgf, el rendimiento aumenta en 0.00173 km/l, y si la potencia aumenta en 1 HP, el rendimiento disminuye en 0.0642 km/l

33. $U_x(4000,15) = -106$, $U_y(4000,15) = 3575$. Si el nivel de inventario aumenta en una unidad, la utilidad disminuirá aproximadamente en 106 unidades; si la superficie de exhibición aumenta en una unidad, la utilidad aumentará aproximadamente en 3575 unidades

34. $q_y(6,45) = 1.56e^{-0.96} \approx 0.597$: habrían vendido aproximadamente 597 unidades más al mes

35. $S_a = 2(207b^2+651b+760)/(3ab+12b+11a+20)^2 \approx 0.4948$,
$S_b = (289a^2+578a+1000)/(3ab+12b+11a+20)^2 \approx 0.4291$; le conviene más dedicarla a hacer aeróbicos

36. $\partial t/\partial d = 4.854$. Si la distancia aumenta en 1 km, el tiempo aumentará aproximadamente en 4.854 min

37. $(-3, 9/2)$: máximo

38. $(0,0)$: ninguno; $(1/3, 1/3)$: mínimo

39. $(0,0)$: ninguno

40. $(1,-3)$: mínimo

41. $(0,0)$: ninguno; $(2,2)$: máximo

42. $(1,2)$: ninguno; $(2,2)$: mínimo

43. $(-1,-1)$: mínimo

44. $(2,1)$: mínimo

45. $(0,-1)$: ninguno

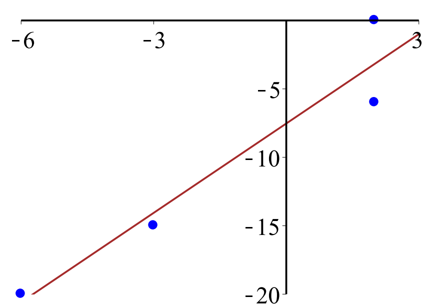
46. $(1/2,0)$: ninguno

47. $(0,0)$: ninguno; $(-4,-2)$: máximo

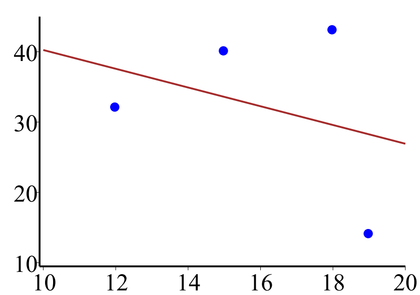
48. $(3/2,2/3)$: ninguno

49. $(-2,3)$: máximo; $(-2,5)$: ninguno; $(4,3)$: ninguno; $(4,5)$: mínimo

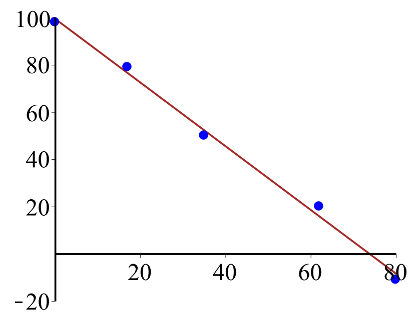
50. **b.** $y = 2.1765x - 7.5294$.



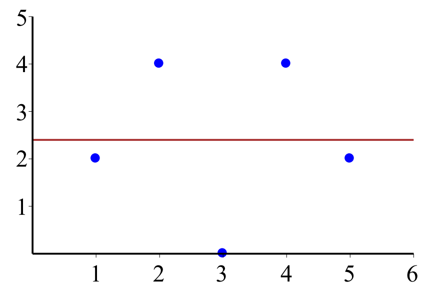
51. **b.** $y = -1.3333x + 53.583$.



52. **b.** $y = -1.3482x - 99.509$.



53. **b.** $y = 2.4$.



54. $\ell = 18$, $k = 14$

55. 6 trabajadores y 5 máquinas

56. 80 % y 21.11 °C

57. $x \approx 270.2$, $y \approx 11.9$: unas 270 muestras y unos 12 agentes

58. $50/3$, $50/3$ y $50/3$

59. $p_1 = 5.5$, $p_2 = 6$

60. $q_1 = 4/3$, $q_2 = 3$

61. $p_a = 55.1$ y $p_b = 76.8$, en centavos

62. US$4 500 por televisión y US$4 000 por periódico

63. $3\sqrt{2}/8$, entre $(1/2, 1/4)$ y $(7/8, -1/8)$

64. 2.884 m de frente, 3.606 m de fondo y 2.884 m de alto

65. 1 dm de frente, 2 dm de fondo y 3 dm de alto

66. **a.** 6 dm × 6 dm de base, 9 dm de altura.
b. 10 dm × 10 dm de base, 15 dm de altura.

67. 45 cm × 30 cm de base con la división paralela al lado corto, 15 cm de altura.

68. **a.** $n = 749.17 - 0.75p$.
b. Aprox. 209 personas.
c. Menos de ₡398.89.
d. En 0.75 personas.

69. **a.** $N = 70400 + 1130t$.
b. 79 440 cajas.
c. En el 2002.
d. En 1130 cajas.

70. **a.** $T = 43.5 - 18.81d$.
b. 15.29 hrs.
c. Mayor que 1.249 g.

71. **a.** $T = 264.2 + 39a$.
b. ₡3.25/\$.
c. ₡507.95/\$.

72. **a.** $I = 4925 + 1055.24a$.
b. En \$1055.24 anuales.

73. **a.** $p = 820.49 + 0.065988v$.
b. ₡889 878.
c. Al menos ₡748 769.
d. ₡820 590; 6.6 %.

74. **a.** $P = 56.22 + 0.06208a$.
b. \$56 220.
c. \$62.08/m^2.

75. **a.** $y = -68\,284.65 + 37.86x$.
b. 7435.35 cm.
c. En 151.44 cm.

76. **a.** $t = 16.3684 + 8.9474n$.
b. 8.1842 min.
c. 8.9474 min.

77. **a.** $v = 25.14 - 2.95p$.
b. 25.14 km/h.
c. Perdió 116.3 m.

78. **a.** $\partial f/\partial a = 2an + 2b\sum x - 2\sum y$, $\partial f/\partial b = 2a\sum x + 2b\sum x^2 - 2\sum xy$.

79. **a.** Porque si el área es cero la población debe ser cero.
b. $b = 0.07466$.
c. 74.66 hab/km^2.
d. 73.23 hab/km^2.

80. **a.** Porque si la distancia es cero el consumo debe ser cero.
b. $b = 0.09192$.
c. $y = 0.09192x$.
d. 10.88 km/l.
e. 10.55 km/l.

81. **a.** $V = 500.485 \cdot 1.02004^m$, en miles de colones.
b. 2.004 %.
c. En 69.8 meses.

82. **a.** $P = 19.948 \cdot 1.02629^x$, en miles de habitantes.
b. 2.629 %.
c. En 1986.

83. **a.** $y = 0.00063203 \cdot 1.14151^x$.
b. 14.151 %.
c. ₡334.69/$.
d. En abril 1992.

84. $v = 21.6755 \cdot 0.876536^p$

85. **a.** $U = 105.74 \cdot 0.96249^d$.
b. 19 593 km.

86. **a.** $T = 18.80n^{-0.9505}$.
b. 2.96 días.
c. Más de cuatro personas.

87. **a.** $D = 0.46915p^{0.501177}$.
b. Mayor que 78.072.