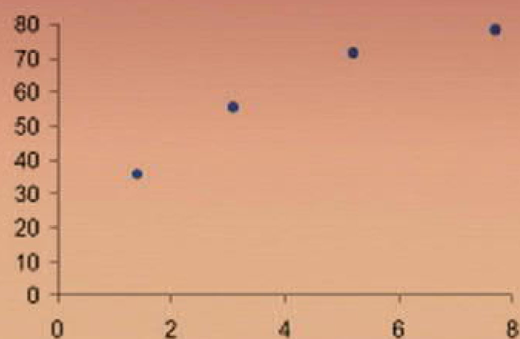
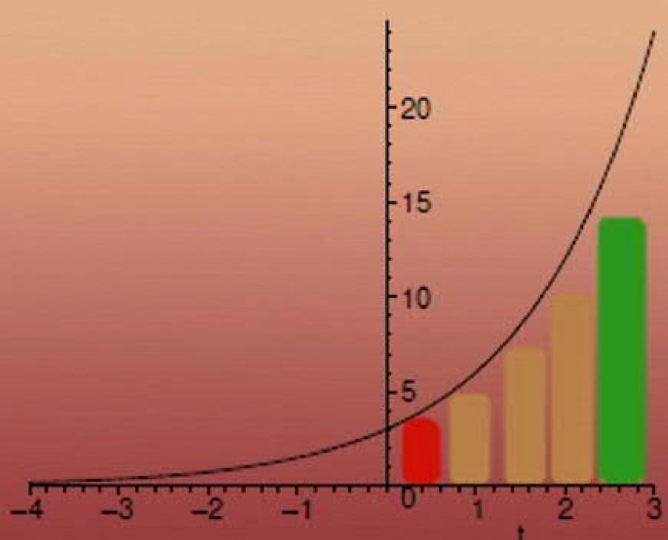
Matemática para Administración

Inversión en publicidad ($1000s / mes)	Ventas ($1000s / mes)
1.4	35.7
3.1	55.3
5.2	71.4
7.7	78.3



$$A = P(1+r)^n$$



$$\begin{cases} x - 4y = -2 \\ -3 + 12y = 6 \end{cases}$$

Febrero 2023

Luis Alejandro Acuña Prado

Índice general

CAPÍTULO 1
Los números reales

1.1. El conjunto de los números reales

Los números reales pueden organizarse en varias categorías. Los siguientes conjuntos representan formas usuales de agruparlos.

- $\mathbb{N}$, el conjunto de los números *naturales*, o enteros positivos:
$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$
- $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, incluye a los anteriores, al cero y a los enteros negativos:
$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$
- $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, incluye a todos los enteros y también a los cocientes de enteros. No podríamos enumerar a los números racionales en orden de tamaño como hicimos con los naturales y los enteros, pero algunos números racionales (en ningún orden particular) son:
$$5,\ 8,\ 0,\ -2,\ -9,\ \frac{1}{2},\ \frac{14}{33},\ -\frac{121}{50},\ \ldots$$
- $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales, incluye a todos los racionales y también a los irracionales, que son simplemente los números reales que no se pueden escribir como cocientes de enteros. En la siguiente lista vemos algunos números reales, de los cuales los primeros cuatro son racionales y el resto son irracionales:
$$-6,\ 4231,\ -\frac{82}{17},\ \frac{1}{1000},\ \sqrt[3]{7},\ -\pi/3,\ \log_2 5,\ \ldots$$

Los números reales pueden representarse en forma decimal, aunque esta no será exacta para los números irracionales. Algunos ejemplos:

- $-3 = -3.0 = -3.000$
- $\frac{5}{2} = 2.5 = 2.50$. También se puede escribir $5/2$ en vez de $\frac{5}{2}$.
- $1/3 = 0.\bar{3}$, donde la barra sobre el dígito 3 indica que ese decimal se repite infinitas veces: $0.\bar{3} = 0.3333333\ldots$
- $52/11 = 4.\overline{72} = 4.72727272\ldots$
- $\pi \approx 3.141592654$, pero eso es solo una aproximación; como π es irracional, es imposible escribirlo en forma exacta usando decimales.
- $\sqrt{2} \approx 1.414213562$, pero eso es solo una aproximación; tampoco es posible escribir $\sqrt{2}$ en forma exacta con decimales.

Otra forma de agrupar los números reales, independiente de la anterior, es por sus signos:

- Los números positivos son los números mayores que cero, como

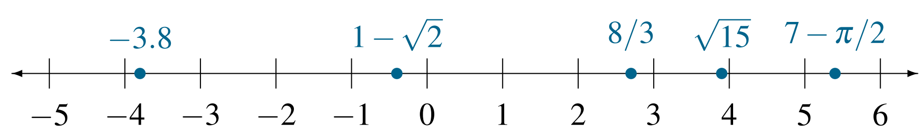
$$5,\ \ 8/3 = 2.\bar{6},\ \ \sqrt{15} \approx 3.87298,\ \ 7 - \pi/2 \approx 5.4292$$

- Los números negativos son los menores que cero, como

$$-9,\ \ -3.8,\ \ 1 - \sqrt{2} \approx -0.41421$$

- El número cero no es positivo ni negativo. Se dice que es neutro o nulo porque no tiene signo (aunque es válido escribir $+0$ o -0 y ambos valen lo mismo que 0).

La *recta real* es una forma geométrica de representar los números reales. Consiste en una recta horizontal en la que los números mayores se ubican a la derecha de los números menores. En particular, los números positivos se representan a la derecha de 0 y los negativos a la izquierda. El punto que representa el número 0 se llama *origen* de la recta real.



Ejercicios

Seleccione todas las opciones que se apliquen

1. El número -5 es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

2. El número 24 es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

3. El número $-12/7$ es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

4. El número $\sqrt{10}$ es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

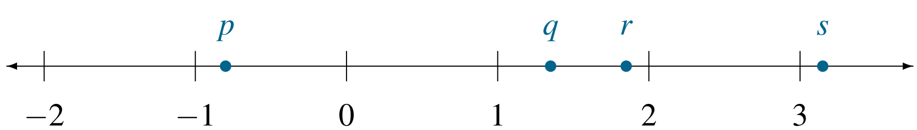
5. El número $36/12$ es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

6. El número $-\sqrt{100}/5$ es

(a) Natural
(b) Entero
(c) Racional

Escoja la opción correcta con base en la siguiente recta real



7. El valor de p solamente podría ser

(a) $-\sqrt{3}$
(b) -0.8
(c) $-1/8$
(d) 0.8

8. El valor de q solamente podría ser

(a) 0.4
(b) $\sqrt{2}$
(c) $\pi/2$
(d) 1.8

9. El valor de r solamente podría ser

(a) $3/2$
(b) $\sqrt{5}$
(c) $28/15$
(d) 2.9

10. El valor de s solamente podría ser

(a) -3.1
(b) $1+\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{8}$
(d) π

1.2. Operaciones en $\mathbb{R}$

Hay cuatro operaciones básicas entre los números reales: adición, sustracción, multiplicación y división. Dados dos números a y b, ellas se representan con las notaciones respectivas

$$a+b, \qquad a-b, \qquad a\cdot b = a\times b = ab \qquad \text{y} \qquad a\div b = a/b = \frac{a}{b} \ \ (\text{si } b\neq 0)$$

Note que la adición y la multiplicación son conmutativas (el orden de los operandos no afecta el resultado); por ejemplo, $3+5=5+3$ y $3\cdot 5 = 5\cdot 3$. En cambio, la sustracción y la división no son conmutativas: $3-5\neq 5-3$ y $3\div 5\neq 5\div 3$.

Note también que la división entre cero no está definida: $a\div 0$ no existe para ningún $a\in\mathbb{R}$.

Un poco de nomenclatura:

- En una adición, cada término se llama *sumando*, y el resultado se llama *suma*.

  Ejemplo: en la operación $3+5$ los sumandos son 3 y 5, y la suma es 8.

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{sumando}\\ \downarrow}}{3} \quad + \quad \overset{\substack{\text{sumando}\\ \downarrow}}{5}}_{\text{suma}}$$

- En una sustracción el primer término se llama *minuendo* y el segundo *sustraendo*, y el resultado es la *resta* o *diferencia*.

  Ejemplo: en la operación $7-3$ el minuendo es 7, el sustraendo es 3 y la resta o diferencia es 4.

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{minuendo}\\ \downarrow}}{7} \quad - \quad \overset{\substack{\text{sustraendo}\\ \downarrow}}{3}}_{\text{resta o diferencia}}$$

- En una multiplicación, cada término es un *factor*, y el resultado es el *producto*.

  Ejemplo: en 3×5 los factores son 3 y 5, y el producto es 15.

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{factor}\\ \downarrow}}{3} \quad \times \quad \overset{\substack{\text{factor}\\ \downarrow}}{5}}_{\text{producto}}$$

- En una división el primer término se llama *dividendo* y el segundo *divisor*. Al escribir la división en forma de fracción también se les llama *numerador* y *denominador*. El resultado se llama *cociente*.

  Ejemplo: en la división $24 \div 3 = 24/3$, 24 es el dividendo o numerador, y 3 es el divisor o denominador. El cociente es 8.

$$\underbrace{\overset{\text{dividendo}}{\overset{\downarrow}{24}} \quad \div \quad \overset{\text{divisor}}{\overset{\downarrow}{3}}}_{\text{cociente}} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\begin{array}{r} \text{numerador} \longrightarrow \\ \text{denominador} \longrightarrow \end{array} \frac{24}{3}\right\} \text{cociente}$$

En la práctica es frecuente usar las palabras adición y suma como sinónimos, y lo mismo con sustracción y resta, multiplicación y producto, y también división y cociente.

Las cuatro operaciones mencionadas tienen las siguientes propiedades, para cualesquiera números a, b y c:

- $a+(b+c)=(a+b)+c$
- $a+0=0+a=a$
- $a+(-a)=0$
- $a+b=b+a$
- $a(b+c)=ab+ac$
- $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
- $a\cdot 1=1\cdot a=a$
- $a\cdot(1/a)=1$ si $a\neq 0$
- $a\cdot b=b\cdot a$

Además se cumplen las siguientes leyes de signos:

- $-(-a)=a$
- $(a)(-b)=(-a)(b)=-(a\cdot b)$
- $(-a)(-b)=a\cdot b$
- $a+(-b)=a-b$
- $(-a)\div b=a\div(-b)=-(a\div b)$
- $(-a)\div(-b)=a\div b$

Cuando una expresión involucra varias de estas operaciones, ellas se interpretan en el siguiente orden.

Orden de evaluación de operaciones

a. Primero se evalúan los paréntesis, si los hay.

b. En segundo lugar multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha entre ellas.

c. En tercer lugar adiciones y sustracciones, de izquierda a derecha entre ellas.

Ejemplo 1: orden de operaciones

La expresión $1-3\times 5$ *no* se evalúa restando primero $1-3=-2$; es erróneo decir que $1-3\times 5$ es igual a -2×5. Lo correcto es multiplicar primero y restar después:

$$1-\boxed{3\times 5}=1-\boxed{15}=-14$$

En $(1-3)\times 5$, la primera operación sí es $1-3$, por estar entre paréntesis:

$$\boxed{(1-3)}\times 5=\boxed{(-2)}\times 5=-10$$

El valor de $2\div 6\times 5$ *no* es igual a $2\div 30$. La división y la multiplicación se evalúan de izquierda a derecha:

$$\boxed{2\div 6}\times 5=\boxed{\frac{1}{3}}\times 5=\frac{5}{3}$$

Finalmente, en la expresión $2\div(6\times 5)$ sí empezamos calculando el producto, dado el paréntesis:

$$2\div\boxed{(6\times 5)}=2\div\boxed{30}=\frac{1}{15}$$

Ejercicios

Evalúe

11. $-3+8$

12. $4+(-3)$

13. $-6+\dfrac{7}{2}$

14. $\dfrac{5}{3}+(-4)$

15. $11-(-2)$

16. $-9-4+6$

17. $\dfrac{2}{3}+2-\dfrac{-3}{5}$

18. $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{15}{7}$

19. $-3\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{-9}{8}$

20. $6+4\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

21. $\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-1}{4}$

22. $3\cdot\dfrac{2}{-5}+\dfrac{-6}{-7}\cdot\dfrac{1}{9}$

23. $\dfrac{3}{5}\div(-2)$

24. $\dfrac{1}{8}\div\dfrac{2}{7}$

25. $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{-1}{6}+4\div\dfrac{1}{3}$

26. $\left(1+\dfrac{-5}{2}\right)\div\left(\dfrac{3}{2}-3\right)$

27. $4\div 2\div 2$

28. $4\div(2\div 2)$

29. $\left[\dfrac{-3}{4}-\dfrac{3}{2}\div(-2)\right]\div 7$

30. $7\div\left[\dfrac{-3}{2}\div(-2)-\dfrac{3}{4}\right]$

31. $\dfrac{(1/2)\div(3/4)\div(3/2)}{(1-1/3)\div(1-1/5)}$

32. $\dfrac{-2\cdot 15+10}{3-7\cdot 2+1}-\dfrac{5(-4-1)-7(-6)}{-3-3(-5)}$

33.
$$\frac{7\cdot\frac{1}{9}-2\cdot\frac{14}{15}}{2\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{5}}-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right]\left[-\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right]$$

1.3. Potencias

Una quinta operación en los números reales es la de elevar una base a un exponente. En la expresión b^x, la base es b, el exponente es x, y el resultado se llama *potencia*.

$$\text{base} \longrightarrow \underbrace{b^{x}}_{\text{potencia}} \longleftarrow \text{exponente}$$

Elevar una base a un exponente entero y positivo significa multiplicar varios factores iguales a la base, tantos como indica el exponente:

$$b^n = b\cdot b\cdots b \qquad (n \text{ factores})$$

Ejemplo 2: potencia, base y exponente

En la potencia 7^3, la base es 7 y el exponente es 3. El resultado de la potencia es el producto de tres factores iguales a 7:

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

En general, $(-x)^n = (x)^n$ si n es par, pero $(-x)^n = -(x^n)$ si n es impar.

Ejemplo 3: bases negativas

El valor de $(-3)^2$ es 9 porque $(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$.

Pero el valor de -3^2 es -9 porque $-3^2 = -(3)(3) = -9$.

En cambio, $(-5)^3$ y -5^3 son ambos iguales a -125:

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125 \quad \text{y} \quad -5^3 = -(5)(5)(5) = -125$$

Elevar un número distinto de cero a la potencia 0 da por resultado 1:

$$b^0 = 1 \quad \text{si } b \neq 0.$$

Un exponente negativo indica el recíproco de la potencia con exponente positivo (definido solo si la base es distinta de cero):

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n} \quad \text{si } b \neq 0.$$

Si la base es una fracción distinta de cero, lo anterior es equivalente a invertir la fracción y cambiar el signo del exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Ejemplo 4: exponentes negativos

Los resultados de elevar 12^{-3} y $(5/4)^{-2}$ son:

- $12^{-3} = \dfrac{1}{12^3} = \dfrac{1}{1728}$
- $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2} = \dfrac{16}{25}$
- $0^{-1} = \dfrac{1}{0}$, que no existe. En general, no se puede elevar la base 0 a exponentes negativos.

Para cualesquiera bases a y b reales, y exponentes n y m enteros, se cumplen las siguientes igualdades:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$
- $a^0 = 1$, si $a \neq 0$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, si $b \neq 0$

Cuando una expresión involucra varias operaciones, ellas se interpretan en este orden:

Orden de evaluación de operaciones

a. Primero se evalúan los paréntesis, si los hay, de dentro hacia fuera.

b. En segundo lugar potencias (y raíces, que veremos en la siguiente sección).

c. En tercer lugar multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha entre ellas.

d. En cuarto lugar adiciones y sustracciones, de izquierda a derecha entre ellas.

Ejemplo 5: orden de operaciones

La expresión $3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 6 \cdot 3^{-1}) \cdot 3 + 2$ se evalúa en este orden:

Se empieza con el paréntesis.	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 6 \cdot 3^{-1}) \cdot 3 + 2$
Dentro del paréntesis, primero la potencia...	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 6 \cdot 3^{-1}) \cdot 3 + 2$
	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 3 + 2$
segundo el producto...	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 3 + 2$
	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 2) \cdot 3 + 2$
y tercera la suma.	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (1 + 2) \cdot 3 + 2$
	$3 \cdot 5^2 - 4 \div (3) \cdot 3 + 2$
En el primer sumando, primero la potencia...	$3 \cdot 5^2 - 4 \div 3 \cdot 3 + 2$
	$3 \cdot 25 - 4 \div 3 \cdot 3 + 2$
y luego el producto.	$3 \cdot 25 - 4 \div 3 \cdot 3 + 2$
	$75 - 4 \div 3 \cdot 3 + 2$

En el sustraendo, primero la división... $75 - \boxed{4 \div 3} \cdot 3 + 2$

$75 - \boxed{\frac{4}{3}} \cdot 3 + 2$

y segundo el producto. $75 - \boxed{\frac{4}{3} \cdot 3} + 2$

$75 - \boxed{4} + 2$

De izquierda a derecha, primero la sustracción... $\boxed{75 - 4} + 2$

$\boxed{71} + 2$

y por último la adición. 73

Ejemplo 6: fracciones y exponentes

El valor de la expresión $\left(\dfrac{5^2 \cdot 4^{-3}}{5^{-1}}\right)^{-3}$ es

$$\left(\frac{5^2 \cdot 4^{-3}}{5^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{5^{-1}}{5^2 \cdot 4^{-3}}\right)^{3} = \frac{5^{-3}}{5^6 \cdot 4^{-9}} = \frac{4^9}{5^6 \cdot 5^3} = \frac{(2^2)^9}{5^{6+3}} = \frac{2^{18}}{5^9}$$

Ejercicios

Simplifique

34. $\dfrac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^3}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

35. $\dfrac{1 - 3^{-1} - 2 \cdot 5^{-2}}{3^{-1} + 3^{-2}}$

36. $\dfrac{1 + 4^{-2} - 2 \cdot 4^{-2}}{6 \cdot 4^{-2} + 1 + 5 \cdot 4^{-1}}$

37. $\dfrac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$

38. $\dfrac{(2 - 3 \cdot 7)^{-1}}{-7^{10} \cdot 10^{10}}$

39. $\dfrac{25^6 \cdot 14^{10}}{-7^{10} \cdot 10^{10}}$

40. $\dfrac{(1/2) + (3/4)^2}{-5^2/4}$

41. $\dfrac{5}{2} + \left(\dfrac{2 \cdot 3^{-2}}{2^{-1}}\right)^{-2}$

42. $\dfrac{2 \cdot 5 + 3^{-1}}{\frac{5}{4} \div 5 - 3^{-1}}$

43. $\dfrac{3 \cdot 2^{-2} - 1}{2^{-2} + 1} \cdot (4^{-2} - 3)$

44. $\dfrac{2 - (7 \cdot 5^{-2} - 3 \cdot 5^{-2})}{(3^{-1} \cdot 2)^2 - (-1)^3 - 2 \cdot 3^{-1}}$

45. $\left(\dfrac{4 \cdot 2^{-4} - 1}{2^{-2} + 2^{-2}}\right) \div \left(2^2 \cdot 4^{-2} - 3^{-1}\right)^{-2}$

1.4. Radicales

Las expresiones radicales son las que involucran raíces. En la expresión radical $\sqrt[n]{b}$, el *índice* es n, el *subradical* es b y el resultado se llama *raíz*. La raíz es cuadrada cuando $n = 2$, cúbica cuando $n = 3$, y en general raíz n-ésima para cualquier índice n.

$$\text{índice} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[n]{b}}_{\text{raíz}} \longleftarrow \text{subradical}$$

En general, la raíz n-ésima de b, $\sqrt[n]{b}$, es el número que elevado a la n da por resultado b:

$$\sqrt[n]{b} = x \quad \text{si} \quad x^n = b$$

- Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$, y $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$.

Pero cuando $b > 0$ y n es par hay dos raíces posibles. Por ejemplo, 5 y -5 son raíces cuadradas de 25, porque tanto $(5)^2 = 25$ y también $(-5)^2 = 25$. En ese caso, se dice que *la* raíz es el valor positivo.

- Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$ (aunque también $(-3)^4 = 81$).

Note que si $b < 0$ y n es par, la raíz no existe; es decir, no existen las raíces pares de números negativos.

- Por ejemplo $\sqrt[4]{-5}$ no existe porque no hay ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 = -5$ (recuerde que $x^4 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

1.4.1. Exponentes fraccionarios

Un exponente de la forma $1/n$, con n entero positivo, representa una raíz n-ésima:

$$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$$

y un exponente de la forma m/n, con m y n enteros, n positivo, se refiere a la raíz n-ésima elevada a la m:

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b}^{\,m}$$

Si la base b es positiva, el exponente m podría estar dentro o fuera de la raíz indistintamente:

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b}^{\,m} = \sqrt[n]{b^m} \quad \text{si } b > 0.$$

Ejemplo 7: exponente fraccionario

El resultado de la potencia $64^{1/3}$ es la raíz cúbica de 64:

$$64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

El resultado de $25^{7/2}$ es la raíz cuadrada de 25 elevada a la 7:

$$25^{7/2} = \sqrt{25}^{\,7} = 5^7 = 78125$$

Repetimos aquí las propiedades que ya habíamos visto para potencias enteras, extendiéndolas ahora a exponentes racionales.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^0 = 1$, si $a \neq 0$
- $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, si $b \neq 0$

Ejemplo 8: simplificar la raíz de un producto

Para simplificar la expresión $\sqrt[3]{777\,600}$ empezamos por notar que el número 777 600 se factoriza como

$$777\,600 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2$$

Entonces,

$$\sqrt[3]{777\,600} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2}$$

Como el índice de la raíz es 3, escribimos ahora cada exponente en la forma [múltiplo de 3] + [residuo], así:

- El exponente de 2 es $7 = 6 + 1$.
- El exponente de 3 es $5 = 3 + 2$.
- El exponente de 5 es $2 = 0 + 2$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{777\,600} &= \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2} \\
&= \sqrt[3]{2^{6+1} \cdot 3^{3+2} \cdot 5^2} \\
&= \sqrt[3]{2^6 \cdot 2^1 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} \\
&= \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2} \\
&= \left(2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2\right)^{1/3} \\
&= \left(2^6\right)^{1/3} \cdot \left(3^3\right)^{1/3} \cdot \left(2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2\right)^{1/3} \\
&= 2^{6/3} \cdot 3^{3/3} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 25)^{1/3} \\
&= 2^2 \cdot 3^1 \cdot (450)^{1/3} = 4 \cdot 3 \cdot (450)^{1/3} \\
&= 12\sqrt[3]{450}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9: simplificar la raíz de una fracción

La expresión $\sqrt[5]{\dfrac{4^7 \cdot 5^9}{(-2)^3}}$ puede simplificarse así:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{\frac{4^7 \cdot 5^9}{(-2)^3}} &= \sqrt[5]{\frac{4^7 \cdot 5^9}{(-2)^3}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{(2^2)^7 \cdot 5^9}{-2^3}} \\
&= \sqrt[5]{-\frac{2^{2\times 7} \cdot 5^9}{2^3}} \\
&= \sqrt[5]{-2^{14-3} \cdot 5^9} \\
&= \sqrt[5]{-2^{11} \cdot 5^9}
\end{aligned}$$

Como la raíz es quinta, escribimos cada exponente en la forma [múltiplo de 5] + residuo:

$$
\begin{aligned}
&= -\sqrt[5]{2^{10+1}\cdot 5^{5+4}}\\
&= -\sqrt[5]{2^{10}\cdot 2^{1}\cdot 5^{5}\cdot 5^{4}}\\
&= -\left(2^{10}\cdot 5^{5}\cdot 2^{1}\cdot 5^{4}\right)^{1/5}\\
&= -\left(2^{10}\right)^{1/5}\cdot\left(5^{5}\right)^{1/5}\cdot\left(2^{1}\cdot 5^{4}\right)^{1/5}\\
&= -2^{10/5}\cdot 5^{5/5}\cdot(2\cdot 625)^{1/5} = -4\cdot 5\cdot 1250^{1/5}\\
&= -20\sqrt[5]{1250}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Simplifique

46. $\sqrt{200}$

47. $\sqrt{540}$

48. $\sqrt[3]{3969}$

49. $\sqrt[5]{\dfrac{46656}{25}}$

50. $\sqrt[6]{\dfrac{12^5\,15^4}{10^7}}$

51. $2^{-1/3}(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16})$

52. $24^{3/2}$

53. $(-48)^{2/3}$

54. $-(25)^{5/3}$

55. $720^{5/4}$

56. $-64800^{3/5}$

57. $\left(\dfrac{675}{56}\right)^{4/3}$

58. $3\sqrt{18}-2\sqrt{50}+2\sqrt{98}$

59. $\frac{4}{5}\sqrt{10}\sqrt{50}$

60. $6\sqrt{6}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{6}$

61. $\sqrt{(-5)^2}$ y $-\sqrt{5^2}$

62. $\sqrt[3]{(-5)^3}$ y $-\sqrt[3]{5^3}$

63. $\dfrac{\sqrt[4]{5^3\,2^5\,6^3}}{\sqrt{10^3\,3^4}}$

64. $\dfrac{2^{3/5}\cdot 3^{-1/2}\cdot 5^{3/2}}{6^{-2/5}\cdot 15^{1/2}}$

65. $(4\sqrt{2})^3\cdot(-5^2\cdot 3^{-2})^{-1}\cdot\sqrt{8}^{\,-3}$

1.5. (Opcional) Racionalización

Cuando una fracción contiene raíces en el denominador, a veces es deseable encontrar una expresión equivalente cuyo denominador no contenga raíces. Por ejemplo, las expresiones $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ son equivalentes (ambas son iguales a $2^{-1/2}$), pero la segunda no tiene raíces en el denominador. Se dice que el denominador en la segunda expresión está racionalizado, porque es un número racional.

Para racionalizar el denominador en una fracción cuyo denominador no contenga sumas ni restas, puede multiplicarse tanto el numerador como el denominador de la fracción por la raíz del factor que haga falta para que la raíz en el denominador se pueda cancelar. Para esto usualmente será necesario factorizar el denominador primero.

Ejemplo 10: racionalizar un denominador con raíz cuadrada

Racionalizar el denominador de $\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}}$.

El número en la raíz del denominador se factoriza como

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

y para que su raíz cuadrada sea exacta están faltando un factor 2 y un factor 5 (para que los exponentes sean todos múltiplos de 2, el índice de la raíz).

Multiplicamos entonces numerador y denominador por $\sqrt{2 \cdot 5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}} &= \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}} \cdot \frac{\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2\cdot 5}} \\
&= \frac{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 5}\cdot\sqrt{2\cdot 5}} \\
&= \frac{18\sqrt{2^2\cdot 5}}{\sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2}} = \frac{18\cdot 2\sqrt{5}}{2^3\cdot 3\cdot 5} = \frac{3}{10}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Si la raíz por simplificar no es cuadrada, se usa la misma idea anterior, como en el ejemplo siguiente. Ahora multiplicamos por los factores que falten para que cada exponente dentro de la raíz sea múltiplo del índice.

Ejemplo 11: racionalizar un denominador con raíz quinta

Racionalizar el denominador de $\dfrac{20}{\sqrt[5]{2^8 \cdot 7^2}}$.

Para que la raíz quinta sea exacta se necesita que todos los exponentes en el subradical sean múltiplos de 5. Entonces, faltan un factor 2^2 y un factor 7^3.

$$\begin{aligned}
\frac{20}{\sqrt[5]{2^8 \cdot 7^2}} &= \frac{20}{\sqrt[5]{2^8 \cdot 7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2 \cdot 7^3}}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 7^3}} \\
&= \frac{20\sqrt[5]{2^2 \cdot 7^3}}{\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}} \\
&= \frac{20\sqrt[5]{2^2 \cdot 7^3}}{2^{10/5} \cdot 7^{5/5}} \\
&= \frac{20\sqrt[5]{1372}}{28} \\
&= \frac{5\sqrt[5]{1372}}{7}
\end{aligned}$$

Cuando el denominador contiene una suma o resta de raíces cuadradas, multiplicamos numerador y denominador por la operación conjugada[1] . Esto se hace para usar la fórmula

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

y así cancelar las raíces cuadradas.

Ejemplo 12: racionalizar una suma de raíces cuadradas

Racionalizar el denominador de $\dfrac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}$.

[1]El *conjugado* de una resta es la suma de los mismos términos, y el conjugado de una suma es la resta. Por ejemplo, el conjugado de $1+\sqrt{3}$ es $1-\sqrt{3}$.

El conjugado del denominador es $2\sqrt{6}-\sqrt{15}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}} &= \frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}} \cdot \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{15}}{2\sqrt{6}-\sqrt{15}} \\
&= \frac{21\sqrt{3}(2\sqrt{6}-\sqrt{15})}{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{15})^2} \\
&= \frac{42\sqrt{18}-21\sqrt{45}}{4\cdot 6-15} \\
&= \frac{42\cdot 3\sqrt{2}-21\cdot 3\sqrt{5}}{9} \\
&= 14\sqrt{2}-7\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Si el denominador contiene una suma o resta con raíces cúbicas, la fórmula que usamos en el caso anterior debe ser sustituida por una de las dos siguientes:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3
\end{aligned}$$

como veremos en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 13: racionalizar una suma de raíces cúbicas

Racionalizar el denominador de $\dfrac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})}$.

Este denominador contiene una raíz cuadrada multiplicando, $\sqrt{5}$. Podemos empezar por deshacernos de ella como en los primeros ejemplos de esta sección, multiplicando por $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}
\frac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} &= \frac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{75\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} \\
&= \frac{75\sqrt{5}}{5(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} = \frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a racionalizar la suma de raíces cúbicas. Necesitamos identificar el denominador, $3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}$, con la expresión $a+b$ en la primera de las dos fórmulas anteriores; esto es, tomamos $a = 3\sqrt[3]{2}$ y $b = \sqrt[3]{6}$, para multiplicar numerador y denominador por $(a^2 - ab + b^2)$ y obtener el producto

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6}} &= \frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6}} \cdot \frac{(3\sqrt[3]{2})^2 - 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6}^2}{(3\sqrt[3]{2})^2 - 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6}^2} \\
&= \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{36})}{(3\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{6})^3} \\
&= \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{36})}{(3^3 \cdot 2) + 6} \\
&= \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{36})}{60} \\
&= \frac{\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{36})}{4}
\end{aligned}$$

Es importante notar que en todos los ejemplos anteriores se racionalizó el denominador. En algunos casos puede requerirse racionalizar el numerador, para lo cual se usa el mismo método pero con miras a simplificar cualquier raíz en el numerador.

Ejemplo 14: racionalizar un numerador

Racionalizar el numerador de $\dfrac{1 - 5\sqrt{3}}{2}$.

Como el numerador contiene una resta con un raíz cuadrada, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 5\sqrt{3}}{2} &= \frac{1 - 5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + 5\sqrt{3}}{1 + 5\sqrt{3}} \\
&= \frac{(1)^2 - (5\sqrt{3})^2}{2(1 + 5\sqrt{3})} \\
&= \frac{1 - 25 \cdot 3}{2(1 + 5\sqrt{3})} \\
&= \frac{-74}{2(1 + 5\sqrt{3})} = \frac{-37}{1 + 5\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Así llegamos a una fracción equivalente a la original pero con el numerador racionalizado. El denominador no está racionalizado, pero el objetivo era solo racionalizar el numerador. Si a partir de ese resultado racionalizáramos el denominador, obtendríamos de nuevo la expresión original. Para esta fracción es imposible llegar a una forma en la que el numerador y el denominador estén ambos racionalizados.

Ejercicios

Racionalice el denominador y simplifique

66. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

67. $\dfrac{-30\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

68. $\dfrac{4\sqrt{18}}{7\sqrt{12}}$

69. $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$

70. $\dfrac{-80\sqrt{35}}{\sqrt[4]{125}\sqrt{10}}$

71. $\dfrac{3\sqrt[5]{2^8}-2\sqrt[5]{2^{13}}}{\sqrt[5]{8}}$

72. $\dfrac{39}{4-\sqrt{3}}$

73. $\dfrac{\sqrt{5}-4}{2+\sqrt{5}}$

74. $\dfrac{15}{\sqrt{3}+\sqrt{8}}$

75. $\dfrac{55}{2\sqrt{15}-3\sqrt{3}}$

76. $\dfrac{4}{-2+\sqrt[3]{10}}$

77. $\dfrac{100}{\sqrt[3]{18}-2\sqrt[3]{-4}}$

Racionalice el numerador y simplifique

78. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

79. $\dfrac{\sqrt{3}-4}{6\sqrt{2}}$

80. $\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{8}$

81. $\dfrac{\sqrt{1/5}-3}{15-\sqrt{5}}$

82. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5}$

83. $1+\sqrt[3]{4}$

Simplifique, racionalizando el denominador si es necesario y dejando la respuesta en términos de exponentes positivos

84. $\sqrt{30}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{45}^{-1}$

85. $\dfrac{6^{-1/2}\cdot 3^{3/2}}{1-\sqrt{3}}$

86. $\left[\dfrac{(2-3\cdot 2^{1/2})(5^{-1/3}\cdot 4^{-1/6})^3}{(9^{1/4}\cdot 6^{-1/2})^2}\right]^{-1}$

87. $\dfrac{(50^{1/3}\cdot 6^{-1/4})^2}{\sqrt[3]{5}\,(1-\sqrt{2})}$

88. $(-12\sqrt{2})^{2/3}\cdot\sqrt[6]{100}\cdot\sqrt[3]{-25}\cdot(\sqrt[3]{3}+1)^{-1}$

CAPÍTULO 2
Expresiones algebraicas

2.1. Variables, constantes y expresiones algebraicas

Se acostumbra llamar *constantes* a los números explícitos, los que tienen un valor definido, como $3,\ -8,\ \frac{21}{17},\ \sqrt[3]{5},\ \pi$.

Se llama *variables* a las letras que representan algún número indeterminado. Es común usar las letras x, y, z para denotar variables, aunque es válido usar casi cualquier letra para eso (dos excepciones notables son las letras e y π, que realmente denotan constantes: $\mathrm{e} \approx 2.71818$ y $\pi \approx 3.14159$).

Una *expresión algebraica* es una combinación de constantes y variables a través de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o elevación a potencias.

Por ejemplo, la expresión $-8ax^2$ es una combinación de las constantes -8 y 2 (el exponente) y las variables a y x.

Una expresión más compleja es

$$5p^2q - \frac{3\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + 4q^2}$$

que involucra las constantes 5, 3, 1, 4, 2 (como exponente en p^2 y en q^2) y $1/2$ (como exponente en $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y en $\sqrt{y} = y^{1/2}$), y también las variables p, q, x, y.

2.2. Valor numérico de una expresión algebraica

En Matemáticas es común tener expresiones cuyo valor numérico depende del valor de una o varias variables. Por ejemplo, la expresión $3x^2 - 5y$ puede tomar distintos valores dependiendo de lo que valgan x y y. Las reglas algebraicas que vimos en el capítulo anterior se mantienen cuando las expresiones involucran variables (siempre que estén definidas).

Ejemplo 1: valor numérico de una expresión

Así se evalúa la expresión $3x^2 - 5y$ para $x = -2$ y $y = 4$:

$$3x^2 - 5y = 3(-2)^2 - 5(4) = 3(4) - 20 = -8$$

Entonces, el valor numérico de esa expresión, para los valores dados de las variables, es -8.

Ejercicios

Determine el valor numérico

1. $\dfrac{2x + y - (x+y)^{-2}}{(x-y)^{1/3}}$ para $x = 3$, $y = -5$
2. $2\sqrt{9n} - 5\sqrt{4n} + 4\sqrt{n}$ para $n = 3$
3. $2\sqrt{a}(4\sqrt{5ab} - 5\sqrt{b})$ para $a = 5$, $b = 4$
4. $\dfrac{x^{-2} - y^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}}$ para $x = -3$, $y = 6$
5. $\frac{3}{5}x^3y^2z$ para $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = \frac{5}{3}$
6. $\sqrt[3]{x} \cdot y^{-2}z$ para $x = -8$, $y = 2$, $z = 1/4$
7. $-2x^2 + ax - b$ para $a = -2$, $b = -7$, $x = -3$
8. $3x^3 + \dfrac{ax}{c} + 3$ para $a = 49$, $c = 7$, $x = -1$
9. $3x^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4z - \frac{3}{4}y^2z^3$ para $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$, $z = -1$
10. $\dfrac{\left(\dfrac{2p+3}{p}\right)(1 - 2/q)}{p^3 + p/q}$ para $p = -2$, $q = 1/2$

2.3. Sumas, restas y productos de expresiones algebraicas

Al sumar o restar expresiones algebraicas pueden agruparse los términos semejantes, que son los sumandos que contienen las mismas variables y con los mismos exponentes.

Al multiplicar o dividir expresiones deben recordarse las leyes de suma o resta de exponentes:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y} \qquad \text{y} \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

También debe tenerse en cuenta la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $a(x+y) = ax+ay$, que se generaliza a

$$(a+b)(x+y) = ax+ay+bx+by$$

y a otras formas más complejas dependiendo del número de sumandos en cada factor.

Ejemplo 2: simplificar una expresión algebraica

Simplificar la expresión $A = 3ax^2(\sqrt{x}+a^2y-a)+(2ay+1)(1-a^2x^2)$.

$$\begin{aligned} A &= 3ax^2(x^{1/2}+a^2y-a)+(2ay+1)(1-a^2x^2) \\ &= (3ax^2)(x^{1/2})+(3ax^2)(a^2y)+(3ax^2)(-a) \\ &\qquad +(2ay)(1)+(2ay)(-a^2x^2)+(1)(1)+(1)(-a^2x^2) \\ &= 3ax^{5/2}+3a^3x^2y-3a^2x^2+2ay-2a^3x^2y+1-a^2x^2 \end{aligned}$$

En este punto vemos que hay dos parejas de términos semejantes: una pareja es $3a^3x^2y$ con $-2a^3x^2y$, y la otra pareja es $-3a^2x^2$ con $-a^2x^2$. Sus sumas respectivas son

$$3a^3x^2y-2a^3x^2y = a^3x^2y \qquad \text{y} \qquad -3a^2x^2-a^2x^2 = -4a^2x^2$$

Combinando estos resultados con el resto de la operación llegamos a

$$A = 3ax^{5/2}+a^3x^2y-4a^2x^2+2ay+1$$

Ejercicios

Desarrolle y simplifique

11. $3x+2y-4x$

12. $2(5t-1)+10(t+1)\div 4$

13. $2p(p-q)-2q(q-p)$

14. $(a+b)(a-b)-3(a+b)-2(a-b)$

15. $(b^x-b^{x+1})b^2x$

16. $2a^x-3a^{x-1}(a^x+2a)$

17. $(x^{2-a}+x^{1+a}+1)(x^a-x^2)$

18. $(2\sqrt{3}x^{5/2}-7x^{3/2})(2\sqrt{3}x^{5/2}-7x^{3/2})$

19. $\left(3c\sqrt{d}-\frac{4}{3}x^{-2/5}\right)\left(\frac{4}{3}x^{-2/5}+3c\sqrt{d}\right)$

2.4. Monomios

Un *monomio* es un producto de constantes y variables. Las variables pueden tener exponentes naturales (o cero, considerando que una variable con exponente cero simplemente está ausente, como en $3xz=3x^1y^0z^1$).

Algunos ejemplos de monomios son

$$6ax^2,\ \ -8bc^5z,\ \ 0.8s^2,\ \ \tfrac{1}{3}\pi r^2h,\ \ 4,\ \ 0$$

Los siguientes no son monomios porque incluyen sumas o restas: $4x-2a$, $3x^2-2ax+5a^2$. Estos se llaman *polinomios* y se estudiarán en la siguiente sección.

La suma o resta de dos monomios generalmente no resulta en un monomio. Por ejemplo, $4x$ y $2a$ son monomios, pero su resta es $4x-2a$, que no es monomio (aunque sí polinomio).

Dos o más monomios son *semejantes* entre sí cuando su suma o su resta son monomios. Por ejemplo, los monomios $3x^2$, $-x^2$ y $5x^2$ son semejantes porque su suma es

$$3x^2+(-x^2)+5x^2=7x^2,$$

un monomio.

El producto de dos o más monomios es un monomio. Al multiplicar monomios debe recordarse la ley de suma de exponentes:

$$b^x\cdot b^y=b^{x+y}.$$

Ejemplo 3: monomios semejantes y no semejantes

Considere los monomios $7ay^2z,\ 4ay^2z$ y $-3a^2bx^5y$.

Los dos primeros son semejantes, porque su suma es

$$7ay^2z + 4ay^2z = 11ay^2z$$

y su resta es

$$7ay^2z - 4ay^2z = 3ay^2z,$$

ambos monomios.

El tercer monomio arriba no es semejante a los dos primeros.

El producto de esos tres monomios es (agrupando las constantes, luego las a, las b, las x, las y y las z)

$$\begin{aligned}(7ay^2z)(4ay^2z)(-3a^2bx^5y) &= (7)(4)(-3)(a)(a)(a^2)(b)(x^5)(y^2)(y^2)(y)(z)(z)\\ &= -84a^4bx^5y^5z^2\end{aligned}$$

Ejercicios

Determine si son monomios, o por qué no

20. $-5ax^2y$

21. $3x^{-1}y$

22. $\frac{3}{8}p^2q^3r$

23. $\sqrt{6}pq$

24. $6abc - 1$

25. $-4a + b$

26. $\frac{2}{7}bc/x$

27. $7u\sqrt{t}$

Calcule el producto de los monomios

28. $3ax,\ -2by$

29. $6st,\ \frac{1}{2}c^2t^4$

30. $\frac{5}{2}x^5y^3,\ 4x^2yz$

31. $-3a^2bx,\ \frac{1}{4}ab^3y^6,\ -6axy^5$

32. $pq^4r,\ 2q,\ 5r^3t$

33. $\frac{2}{3}u^4vw^3,\ -\frac{3}{4}u^5v^3w^4,\ -\frac{4}{5}u^5v^2w^5$

2.5. Polinomios

Un *polinomio* es el resultado de sumar o restar uno o varios monomios, como por ejemplo

$$3x^2y - 5axy^3 + ab^2x$$

Los *términos* del polinomio son los monomios que están sumados. El ejemplo anterior es un polinomio con tres términos, que son $3x^2y,\ -5axy^3,\ ab^2x$.

Un *monomio* es un polinomio con un solo sumando, como ya conocemos.

Un *binomio* es un polinomio con dos términos no semejantes, como $8x^2 - 5$.

Un *trinomio* es un polinomio con tres términos no semejantes, como $4.9at^2 - 5at + 20a$.

El *grado* de un polinomio en una de sus variables es el exponente más alto con el que aparece esa variable.

Ejemplo 4: grado de un polinomio en cada variable

Sea $P = 4ax^3 - 6a^2bx^2 + 5a^4b^2x + a^5b$.

Entonces, P es un polinomio con variables a, b, x, que consta de cuatro términos:

$$4ax^3,\ -6a^2bx^2,\ 5a^4b^2x,\ a^5b$$

El grado de P en la variable a es 5. El grado en la variable b es 2. Y el grado en la variable x es 3.

Cuando un polinomio tiene solo una variable, se habla simplemente del grado del polinomio, sin necesidad de indicar la variable.

Ejemplo 5: grado de un polinomio de una variable

Sea $Q = -2t^2 + 3t + 8$.

Este Q es un trinomio (un polinomio con tres términos no semejantes) con variable t. El grado de Q es 2.

Ejercicios

Resuelva

34. Sea $P = x^3y^2 - axy^4$.

a. ¿P es monomio, binomio, trinomio o ninguno de los anteriores?
b. ¿Cuál es el grado de P en la variable a?
c. ¿Cuál es el grado de P en la variable x?
d. ¿Cuál es el grado de P en la variable y?
e. ¿Cuál es el grado de P en la variable z?

35. Sea $Q = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

a. ¿Q es monomio, binomio, trinomio o ninguno de los anteriores?
b. ¿Cuál es el grado de Q en la variable a?
c. ¿Cuál es el grado de Q en la variable b?
d. ¿Cuál es el grado de Q en la variable x?

2.6. Suma, resta y multiplicación de polinomios

Al sumar, restar o multiplicar polinomios el resultado será un polinomio[1]

Recuerde la ley de suma de exponentes, $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$, y también la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, $a(x+y) = ax + ay$.

Ejemplo 6: suma de polinomios

La suma de los polinomios $a^3 + 4a^2b - 5ab + b^3$ y $2ab - 3ab^2 - 2a^3$ es

$$\begin{aligned}(a^3 + 4a^2b - 5ab + b^3) + (2ab - 3ab^2 - 2a^3)&\\ &= a^3 - 2a^3 - 5ab + 2ab + 4a^2b + b^3 - 3ab^2\\ &= -a^3 - 3ab + 4a^2b + b^3 - 3ab^2\end{aligned}$$

[1] No así al dividir polinomios; por ejemplo $(x^2) \div (x^5) = x^{-3}$ no es un polinomio (por el exponente negativo; recuerde que en un polinomio solamente se permiten exponentes naturales o cero). La división de polinomios se puede complicar más que este ejemplo, y la estudiaremos en la sección 2.9.

Ejemplo 7: producto de polinomios

El producto de $4x-2a$ con $3x^2-2ax+5a^2$ es

$$\begin{aligned}
(4x-2a)&(3x^2-2ax+5a^2)\\
&= (4x)(3x^2)+(4x)(-2ax)+(4x)(5a^2)\\
&\quad +(-2a)(3x^2)+(-2a)(-2ax)+(-2a)(5a^2)\\
&= 12x^3-8ax^2+20a^2x-6ax^2+4a^2x-10a^3\\
&= 12x^3-14ax^2+24a^2x-10a^3
\end{aligned}$$

Algunos productos ocurren frecuentemente y es importante reconocerlos y recordar sus fórmulas. A esos productos se les llama *productos especiales*, y sus fórmulas se llaman *fórmulas notables*.

Las más importantes son:

Fórmulas notables

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplo 8: tercera fórmula notable

Al multiplicar $(3pq^2-\frac{1}{2}p^3)(3pq^2+\frac{1}{2}p^3)$ reconocemos la tercera de las fórmulas recién mencionadas, con $a=3pq^2$ y $b=\frac{1}{2}p^3$. El producto es entonces

$$(3pq^2-\tfrac{1}{2}p^3)(3pq^2+\tfrac{1}{2}p^3) = (3pq^2)^2-(\tfrac{1}{2}p^3)^2 = 9p^2q^4-\tfrac{1}{4}p^6$$

Ejemplo 9: quinta fórmula notable

Para desarrollar la potencia $(4v^3w-2uvw^2)^3$ usamos la quinta fórmula notable con $a=4v^3w$ y $b=2uvw^2$.

$$\begin{aligned}(4v^3w-2uvw^2)^3 &= (4v^3w)^3-3(4v^3w)^2(2uvw^2)\\ &\quad +3(4v^3w)(2uvw^2)^2-(2uvw^2)^3\\ &= 64v^9w^3-3(16v^6w^2)(2uvw^2)\\ &\quad +3(4v^3w)(4u^2v^2w^4)-8u^3v^3w^6\\ &= 64v^9w^3-96uv^7w^4+48u^2v^5w^5-8u^3v^3w^6\end{aligned}$$

Ejercicios

Simplifique, dados $A=6pq^2-4pr$, $B=5pr+q^3$ y $C=2q^3-7pq^2$

36. $A+2B$

37. $4C-3A$

38. $-2A+B+5C$

39. $B-3A+C-17pr$

40. $4A+B-2C-(pq-3q^3)$

41. $A\cdot B$

42. $A\cdot C$

43. $p\cdot B\cdot C$

Desarrolle el producto

44. $(3x-5x^2)(1+4x)$

45. $(a-b)(2a+3b-c)$

46. $(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

47. $r(s-5t)(15t+3s)$

48. $(2v+w)^2$

49. $(3ab^2+5ac)^2$

50. $(\frac{3}{2}p^2-2q^3)^2$

51. $(4i+6j)(4i-6j)^2$

52. $(2m+5n)^3$

53. $(\frac{4}{3}x^2+xy)^3$

54. $(5\sqrt[3]{2p}-\frac{1}{3}p)^3$

55. $(4x^2y^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2/3}y)^3$

Simplifique

56. $3x+4y+x-[x-2(y-x)-y]$

57. $(x+y)(x^2-1)$

58. $(2+3x^2b^2)(3+2x^2b^2)$

59. $3-\{2x-[1-(x+y)]+x-2y\}$

60. $6a^2-a[2a^2-3(-2a-4b)]-3ab$

61. $3(x-y)^2(x+y)-3(x+y)^2(x-y)$

62. $(x^2-5x+6)(x-3)-x(x^2-5x+6)$

63. $(a+4b-c)(a-4b+c)$

64. $\left(\frac{4}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab+\frac{3}{14}bc-\frac{1}{5}ac\right)$

65. $(-4xy^2w)(-\frac{3}{2}x^2y)(-5x^2y^3w)$

66. $\frac{1}{2}(m^2+m+1)-(4m^2-4m+2)$

67. $(2a-b)[(4a+b)a+b(a+b)]x^2$

68. $5a+\{3b+[6c-2a-(a-c)]\}-[9c-(7b+c)]$

69. $3(x^2-2yz+y^2)-4(x^2-y^2-3yz)+x^2+y^2$

70. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)(x+a)$

71. $2(x-3)^2+5(x-3)+(x-3)^2-3(x-3)$

72. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a-b)(a+b)^2$

73. $(4xy-10x^2y-3xy^2)-(7x^2y-5xy+12xy^2)$

2.7. Ceros de un polinomio en una variable

Si P es un polinomio en una variable, entonces los *ceros* de P son los valores de esa variable que hacen que el valor de P sea cero.

Ejemplo 10: comprobar algunos ceros de un polinomio

Sea $P=2x^3-11x^2+2x+15$.

Entonces, $x=5$ es un cero de P porque al sustituir $x=5$ en P el valor, que se puede denotar $P(5)$, es

$$P(5)=2(5)^3-11(5)^2+2(5)+15=2(125)-11(25)+10+15=0$$

También $x=-1$ es un cero de P porque con $x=-1$ se obtiene

$$P(-1)=2(-1)^3-11(-1)^2+2(-1)+15=-2-11-2+15=0$$

Un tercer cero de P es $x=3/2$, porque al sustituirlo el valor es

$$P(\tfrac{3}{2})=2(\tfrac{3}{2})^3-11(\tfrac{3}{2})^2+2(\tfrac{3}{2})+15=\frac{27}{4}-\frac{99}{4}+3+15=0$$

El número $x = 1$ no es un cero de P, porque con $x = 1$ el resultado no es 0 sino

$$P(1) = 2(1)^3 - 11(1)^2 + 2(1) + 15 = 8$$

En el capítulo 3 veremos cómo se encuentran los ceros de un polinomio.

Ejercicios

Determine si el valor dado es un cero del polinomio dado

74. 1 de $3x+8$

75. $-8/3$ de $3x+8$

76. 1 de t^2+1

77. -1 de t^2+1

78. 0 de $6+2t^3-5t$

79. -2 de $6+2t^3-5t$

80. -1 de $6+2t^3-5t$

81. 0 de $3c^5-13c^3-2c^2$

82. 2 de $3c^5-13c^3-2c^2$

83. -2 de $3c^5-13c^3-2c^2$

2.8. Teorema del factor

Dado un polinomio, sus ceros y sus factores están relacionados por el siguiente teorema.

Teorema del factor

Si P es un polinomio en la variable x, y c es un cero de P, entonces P se factoriza como

$$P = (x - c)Q$$

donde Q es algún otro polinomio.

Por cierto, si el grado de P es n entonces el grado de Q será $n - 1$.

Ejemplo 11: el teorema del factor

Sea $P = x^3 + 2x^2 - 3x$, un polinomio de grado 3.

Como $x = 1$ es un cero de P (en efecto, $(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1) = 0$) entonces el Teorema del factor garantiza que P puede factorizarse como

$$P = (x - 1)Q$$

donde Q es algún otro polinomio.

Note que el teorema del factor no dice qué es ni cómo puede encontrarse el polinomio Q, pero de hecho[2]

$$P = x^3 + 2x^2 - 3x = (x-1)(x^2+3x)$$

como puede comprobarse desarrollando el producto a la derecha, de modo que el polinomio Q garantizado por el teorema resulta ser $Q = x^2 + 3x$.

Continuando con el mismo polinomio, $P = x^3 + 2x^2 - 3x$, tenemos que también $x = 0$ es un cero de P (porque $(0)^3 + 2(0)^3 - 3(0) = 0$), así que el teorema del factor garantiza que P se factoriza también como

$$P = (x-0)R = xR$$

para algún polinomio R.

En la sección 2.10 se estudia la factorización de polinomios, pero si usted recuerda lo que es un factor común, fácilmente puede notar que

$$P = x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$$

de modo que el segundo factor es $R = x^2 + 2x - 3$.

Por último, resulta que también $x = -3$ es un cero del polinomio original, $P = x^3 + 2x^2 - 3x$ (ya que $(-3)^3 + 2(-3)^2 - 3(-3) = 0$). Entonces, el teorema del factor garantiza que existe un tercer polinomio S tal que

$$P = (x - (-3))S = (x+3)S$$

En efecto,

$$P = x^3 + 2x^2 - 3x = (x+3)(x^2 - x)$$

como se comprueba desarrollando el producto a la derecha.

En el ejemplo anterior, note que el grado de P es 3, y que los polinomios Q, R y S tienen cada uno grado $3 - 1 = 2$.

Note también que para el cero $x = 1$ el factor fue $(x-1)$; para el cero $x = 0$ el factor fue $(x-0) = x$, y para el cero $x = -3$ el factor fue $(x-(-3)) = (x+3)$.

[2] En la sección 2.10 veremos cómo factorizar polinomios. La factorización que vemos aquí, $P = (x-1)(x^2 + 3x)$, no es completa, pero de momento el objetivo es solamente ver que $(x-1)$ es *uno* de los factores.

Ejemplo 12: determinar si un binomio es factor de un polinomio

Para cada uno de los binomios $(x-1)$, $(x-4)$, (x) y $(x+1/2)$, determinar si es un factor del polinomio $P = 2x^2 - 7x - 4$.

- El binomio $(x-1)$ correspondería al cero $x=1$, si lo fuera. ¿Es $x=1$ realmente un cero de P? Al evaluar P en $x=1$ resulta

$$P(1) = 2(1)^2 - 7(1) - 4 = -9 \neq 0$$

  por lo que $x=1$ no es un cero de P. Entonces, $(x-1)$ no es un factor de P.

- El binomio $(x-4)$ correspondería al cero $x=4$. Para averiguar si $x=4$ es un cero de P evaluamos

$$P(4) = 2(4)^2 - 7(4) - 4 = 0$$

  de modo que $x=4$ sí es un cero de P. Entonces, $(x-4)$ sí es un factor de P.

- El binomio (x) correspondería al cero $x=0$. Evaluando encontramos que

$$P(0) = 2(0)^2 - 7(0) - 4 = -4 \neq 0$$

  por lo que $x=0$ no es un cero de P y entonces (x) no es un factor de P.

- El binomio $(x+1/2)$ correspondería al cero $x=-1/2$. Evaluando vemos que

$$P(-1/2) = 2(-1/2)^2 - 7(-1/2) - 4 = 0$$

  así que $x=-1/2$ sí es un cero de P y entonces $(x+1/2)$ sí es un factor de P.

Ejercicios

Determine si el binomio dado es un factor del polinomio dado

84. (u) de $3u^2+5u$

85. $(u-2)$ de $3u^2+5u$

86. $(u-5/3)$ de $3u^2+5u$

87. $(u+5/3)$ de $3u^2+5u$

88. (y) de y^2-y-20

89. $(y-4)$ de y^2-y-20

90. $(y+4)$ de y^2-y-20

91. $(y-5)$ de y^2-y-20

92. $(a-2)$ de $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

93. $(a+2)$ de $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

94. $(a-3)$ de $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

95. $(a-1/2)$ de $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

2.9. División de polinomios

Al dividir dos números enteros, sabemos que el resultado podría ser exacto o incluir un residuo. Un ejemplo de lo primero es $91 \div 7$, donde el cociente es 13 con residuo 0, porque $91 = 7 \times 13$ exactamente. Y un ejemplo de lo segundo es $56 \div 9$, donde el cociente es 6 (porque $6 \times 9 = 54$ "cabe" en 56 pero 7×9 se excede) y el residuo es 2 porque $56 = 6 \times 9 + 2$.

En general, una división $a \div b$ tendrá un cociente c y un residuo r, lo que significa que $a = b \cdot c + r$ (en el último ejemplo teníamos $a = 56$, $b = 9$, $c = 6$ y $r = 2$). En palabras,

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{residuo}$$

La siguiente es una forma equivalente de escribir el resultado de una división.

Resultado de una división de polinomios

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

En el último ejemplo habíamos escrito $56 = 6 \times 9 + 2$. La otra forma de escribir este resultado es

$$\frac{56}{9} = 6 + \frac{2}{9}$$

Lo mismo sucede al dividir dos polinomios: la división puede ser exacta, como en

$$\frac{t^2 - 1}{t - 1} = t + 1 \quad \text{porque } t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

o puede incluir un residuo, como en

$$\frac{c^2 + 2c + 3}{c + 2} = c + \frac{3}{c+2} \quad \text{porque } c^2 + 2c + 3 = (c+2)c + 3.$$

La división de polinomios procede como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 13: división de polinomios

Para dividir $(5p^3 + 3p^2 - p + 2) \div (p^2 + p - 2)$ se escribe el dividendo y a su derecha el divisor, cada uno con sus términos en orden decreciente de exponente.

$$\begin{array}{rrrr|l} 5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2 + p - 2 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Se divide el primer término del dividendo, $5p^3$, entre el primero del divisor, p^2: $5p^3 \div p^2 = 5p$, y este resultado se escribe bajo el divisor

$$\begin{array}{rrrr|l} 5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2 + p - 2 \\ \cline{5-5} & & & & 5p \end{array}$$

Luego ese resultado se multiplica por cada término del divisor, escribiendo cada producto debajo del dividendo, en la columna apropiada a su exponente y con el signo cambiado:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p
\end{array}$$

Se suman los términos semejantes en cada columna del dividendo hacia abajo:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p \\ \cline{1-4}
 & -2p^2 & +9p & +2 &
\end{array}$$

y se repite el procedimiento, usando la última línea a la izquierda como el nuevo dividendo y acumulando los resultados bajo el divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p-2 \\ \cline{1-4}
 & -2p^2 & +9p & +2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|ll}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 & \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p-2 & \longleftarrow \text{ cociente} \\ \cline{1-4}
 & -2p^2 & +9p & +2 & & \\
 & +2p^2 & +2p & -4 & & \\ \cline{2-4}
 & & +11p & -2 & \longleftarrow \text{ residuo} &
\end{array}$$

El proceso termina cuando el nuevo dividendo tenga grado menor que el divisor, como es el caso ahora. El cociente es $5p-2$ y el residuo es $11p-2$. El resultado de la división se escribe

$$\frac{5p^3+3p^2-p+2}{p^2+p-2} = 5p-2+\frac{11p-2}{p^2+p-2}$$

Ejemplo 14: división de polinomios

Calcular $(6+2t^3-5t)\div(2t-3)$.

Empezamos por plantear la división, cuidando de escribir los términos del dividendo y del divisor en orden decreciente de exponente, y dejando espacios en blanco para los términos ausentes del dividendo. En este caso, el término t^2 está ausente en el dividendo, pero en el planteo debe reservársele una columna, así:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2t^3 & & -5t & +6 & 2t-3 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Una opción, para forzarse a escribir todos los términos y reducir el riesgo de olvidar alguno, es escribir $0t^2$ para el término ausente:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2t^3 & +0t^2 & -5t & +6 & 2t-3 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

El procedimiento es así:

$$\begin{array}{rrrr|ll} 2t^3 & +0t^2 & -5t & +6 & 2t-3 & \\ \cline{5-5} -2t^3 & +3t^2 & & & t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4} & \longleftarrow \ \text{cociente} \\ \cline{1-4} & +3t^2 & -5t & +6 & & \\ & -3t^2 & +\frac{9}{2}t & & & \\ \cline{2-4} & & -\frac{1}{2}t & +6 & & \\ & & +\frac{1}{2}t & -\frac{3}{4} & & \\ \cline{3-4} & & & +\frac{21}{4} & \longleftarrow \ \text{residuo} & \end{array}$$

Y el resultado es $t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}+\dfrac{21/4}{2t-3}$.

2.9.1. División sintética

Cuando el divisor tiene la forma $x-c$, donde x es la variable y c alguna constante, puede usarse el método de *división sintética*, un procedimiento abreviado de división. Note que c es la constante que se resta de la variable. Por ejemplo, en $x-4$ se tiene $c=4$; en $v+8$, $c=-8$, y en $y+3/2$, $c=-3/2$.

En el planteo se escriben los coeficientes del dividendo (solamente los coeficientes, sin la variable), también en orden decreciente e incluyendo ceros para los términos ausentes, y a su derecha el valor de la constante c. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15: división sintética

Para dividir $(-4w^5+12w^3-3w^2-15)\div(w+2)$, escribimos

$$\begin{array}{rrrrrr|ll} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 & \longleftarrow \ c=-2 \\ & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Se empieza por copiar el primer coeficiente, -4, debajo de la línea horizontal.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 \\ \hline -4 & & & & & & \end{array}$$

En adelante, cada número que se escriba bajo esa línea se multiplicará por $c = -2$; el producto se escribirá sobre la línea en la siguiente columna hacia la derecha, y la suma de esa columna se escribirá bajo la línea. Empezamos con el -4,

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 \\ & 8 & & & & & \\ \hline -4 & 8 & & & & & \end{array}$$

y seguimos con el resto hasta terminar:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 \\ & 8 & -16 & 8 & -10 & 20 & \\ \hline -4 & 8 & -4 & 5 & -10 & 5 & \end{array}$$

Al final, el último número bajo la línea horizontal es el residuo (5 en este caso), y los números anteriores son los coeficientes del cociente, que tendrá un grado menos que el dividendo. En este ejemplo el resultado es

$$-4w^4 + 8w^3 - 4w^2 + 5w - 10 + \frac{5}{w+2}$$

Si el divisor es lineal pero no de la forma $x - c$ sino $ax - c$ (donde x tiene algún coeficiente distinto de 1), todavía puede usarse división sintética si el dividendo y el divisor se dividen ambos por a (lo que da un nuevo divisor $x - c/a$), como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16: adaptación antes de división sintética

Para dividir $(6y^3 - 8y^2 - 5) \div (3y - 5)$, empezamos por dividir el dividendo y el divisor por 3 (o, equivalentemente, multiplicarlos por $1/3$).

$$\frac{6y^3 - 8y^2 - 5}{3y - 5} \cdot \frac{1/3}{1/3} = \frac{2y^3 - \frac{8}{3}y^2 - \frac{5}{3}}{y - \frac{5}{3}}$$

Procedemos entonces como en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -8/3 & 0 & -5/3 & 5/3 \\ & 10/3 & 10/9 & 50/27 & \\ \hline 2 & 2/3 & 10/9 & 5/27 & \end{array}$$

El resultado es $2y^2+\frac{2}{3}y+\frac{10}{9}+\dfrac{5/27}{y-5/3}$.

Ejercicios

Divida, usando división sintética siempre que sea posible

96. $(6y^4+y^3-15y^2)\div(2y^2)$

97. $(12z^3-3z^2-8z)\div(3z)$

98. $(13c^5-6c^3+8c^2)\div(4c^2)$

99. $(3q^3-2q^2+1)\div(q^2-1/2)$

100. $(t^5-t)\div(t^2+3)$

101. $(4p^3+4p^2-29p+21)\div(2p-2)$

102. $(27b^3-64)\div(3b-4)$

103. $(4c^3-5c^2+3c-2)\div(c+1)$

104. $(1-w^2+w^4)\div(1-w)$

105. $(2a^3+a^5-3a-2)\div(a^2-3a+1)$

106. $(4v^3+5v^2+v^4+2v)\div(v^2+2+3v)$

107. $(2c^5-18c)\div(c^3+3c)$

108. $(3u-3+u^2)\div(1-u)$

109. $(r^3+3r^2+3r+1)\div(r+1)$

110. $(2x^4-x^3+2x^2-3x-5)\div(x+2)$

111. $(4t^3+5t+3)\div(t+1/2)$

112. $(16q^4-2q^3-3q^2+4q-5)\div(q-5/2)$

113. $(6z^3+5z^2-4z+3)\div(2z-3)$

114. $(4v^3+20v^2+11v-35)\div(2v+1)$

115. $(x^6+3)\div(2-x)$

116. $(b^2-8b^4-3b+b^3-4)\div(b-7)$

117. $(w^3+125)\div(w+5)$

2.10. Factorización

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como un producto de polinomios. Por ejemplo, el polinomio $x^2 - 5x + 6$ puede factorizarse como

$$(x-3)(x-2)$$

porque al desarrollar este último producto el resultado es el polinomio original.

Los principales métodos de factorización, en orden de complejidad, son: factor común, agrupación, fórmula notable, suma/diferencia de cubos, tanteo, fórmula cuadrática y división sintética. Al tratar de factorizar un polinomio deberían intentarse los métodos en ese orden, hasta encontrar uno que funcione. A veces habrá que usar varios hasta factorizar completamente.

2.10.1. Factor común

Si todos los sumandos en un polinomio tienen un factor en común, puede escribirse ese factor común multiplicando al resultado de dividir el polinomio original entre el factor común.

Ejemplo 17: factor común monomio

Para factorizar

$$24a^2xy^3 - 60ab^2y^4 + 90a^3bx^2y^2$$

notamos que entre los coeficientes numéricos (24, -60 y 90) hay un factor común 6, y entre los factores literales se repiten a y y^2. Entonces, el factor común es $6ay^2$, y la factorización es

$$24a^2xy^3 - 60ab^2y^4 + 90a^3bx^2y^2 = 6ay^2\left(4axy - 10b^2y^2 + 15a^2bx^2\right)$$

El factor común podría no ser un monomio sino un polinomio, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18: factor común binomio

En el polinomio

$$15p^4(2a-b)^2 - 25p^3q^2(2a-b)$$

se repiten los factores 5, p^3 y $(2a-b)$. Entonces,

$$15p^4(2a-b)^2 - 25p^3q^2(2a-b) = 5p^3(2a-b)\left[3p(2a-b) - 5q^2\right]$$

Si hay fracciones, el factor común también puede incluir al denominador común.

Ejemplo 19: factor común y denominador común

Al factorizar

$$\frac{35}{12}(t-1)^2(t+3)+\frac{49}{8}(t+1)(t-1)(t+3)^4$$

el factor común es $7(t-1)(t+3)$, y el mínimo denominador común es 24. La factorización es

$$\begin{aligned}
&\frac{35}{12}(t-1)^2(t+3)+\frac{49}{8}(t+1)(t-1)(t+3)^4\\
&\qquad=7(t-1)(t+3)\left[\frac{5}{12}(t-1)+\frac{7}{8}(t+1)(t+3)^3\right]\\
&\qquad=7(t-1)(t+3)\left[\frac{10}{24}(t-1)+\frac{21}{24}(t+1)(t+3)^3\right]\\
&\qquad=\frac{7}{24}(t-1)(t+3)\left[10(t-1)+21(t+1)(t+3)^3\right]
\end{aligned}$$

2.10.2. Agrupación

El método de agrupación consiste en hacer, entre los términos del polinomio, grupos que tengan algún factor común, para factorizar esos grupos por aparte y luego buscar algún factor común entre todos los grupos.

Ejemplo 20: agrupar cuatro términos

En el polinomio

$$6a^2bxy-15a^3x^2+10by^2-25axy$$

puede notarse que, aunque no hay ningún factor que sea común a todos los términos, los dos primeros términos tienen el factor común $3a^2x$, y los dos últimos tienen $5y$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&6a^2bxy-15a^3x^2+10by^2-25axy\\
&\qquad=3a^2x(2by-5ax)+5y(2by-5ax)
\end{aligned}$$

Esta expresión no está factorizada (es una suma, no un producto), pero sus dos términos tienen el factor común $(2by-5ax)$. Se puede entonces factorizar así:

$$3a^2x(2by-5ax)+5y(2by-5ax)=(2by-5ax)(3a^2x+5y)$$

Esa es la factorización completa del polinomio original.

Al usar el método de agrupación no siempre tendremos la suerte de que los grupos aparezcan ordenados en el polinomio. A veces será necesario probar varias agrupaciones hasta dar con la que permite factorizar. Por ejemplo, el mismo polinomio anterior podría presentarse como $6a^2bxy - 25axy + 10by^2 - 15a^3x^2$. Si agrupáramos los dos primeros y los dos últimos términos obtendríamos

$$6a^2bxy - 25axy + 10by^2 - 15a^3x^2 = axy(6ab - 25) + 5(2by^2 - 3a^3x^2)$$

que no está factorizado ni puede factorizarse más, porque sus dos términos no comparten ningún factor común.

Recuerde intentar todos los métodos de factorización en el orden en que se mencionaron. Antes de factorizar por agrupación intente sacar algún factor común a todo el polinomio.

Ejemplo 21: factor común y agrupación

Para factorizar

$$60p^4q + 88p^2q - 48p^3q^2 + 12p^2q^3 - 22pq^2 - 110p^3$$

empezamos por notar que sí hay un factor común a sus seis términos: $2p$. Como primer paso escribimos

$$\begin{aligned} &60p^4q + 88p^2q - 48p^3q^2 + 12p^2q^3 - 22pq^2 - 110p^3 \\ &\quad = 2p(30p^3q + 44pq - 24p^2q^2 + 6pq^3 - 11q^2 - 55p^2) \end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis pueden agruparse para factorizar, notando que el primero, el tercero y el cuarto comparten el factor $6pq$, y los otros tres comparten un 11.

$$\begin{aligned} &30p^3q + 44pq - 24p^2q^2 + 6pq^3 - 11q^2 - 55p^2 \\ &\quad = 30p^3q - 24p^2q^2 + 6pq^3 \quad + \quad 44pq - 11q^2 - 55p^2 \\ &\quad = 6pq(5p^2 - 4pq + q^2) + 11(4pq - q^2 - 5p^2) \end{aligned}$$

Ahora los factores entre paréntesis no son idénticos: difieren en el orden, que no importa, y en el signo, que sí importa. Para arreglar el signo puede sacarse un signo $-$ como factor común (lo que equivale a sacar un factor común -1) del segundo paréntesis.

$$\begin{aligned} &30p^3q + 44pq - 24p^2q^2 + 6pq^3 - 11q^2 - 55p^2 \\ &\quad = \cdots \\ &\quad = 6pq(5p^2 - 4pq + q^2) - 11(-4pq + q^2 + 5p^2) \\ &\quad = (5p^2 - 4pq + q^2)(6pq - 11) \end{aligned}$$

Para terminar, la factorización completa de $60p^4q+88p^2q-48p^3q^2+12p^2q^3-22pq^2-110p^3$ es entonces

$$2p(5p^2-4pq+q^2)(6pq-11)$$

Al factorizar por agrupación, generalmente es posible agrupar de distintas maneras para llegar al mismo resultado. En el ejemplo anterior, los términos de $30p^3q+44pq-24p^2q^2+6pq^3-11q^2-55p^2$ podrían agruparse en parejas después de ordenarlos así:

$$\begin{aligned} 30p^3q-55p^2 \;-\; 24p^2q^2+44pq \;+\; 6pq^3-11q^2 &\\ &= 5p^2(6pq-11)-4pq(6pq-11)+q^2(6pq-11) \\ &= (6pq-11)(5p^2-4pq+q^2) \end{aligned}$$

2.10.3. Fórmulas notables

Unas páginas atrás habíamos mencionado las fórmulas notables:

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ahora podemos usarlas para factorizar, si reconocemos en un polinomio la forma de una de ellas.

Ejemplo 22: factorizar con la segunda fórmula notable

En el polinomio

$$25x^2y^4-20tx^4y^2+4t^2x^6$$

empezamos por sacar un factor común, x^2:

$$x^2(25y^4-20tx^2y^2+4t^2x^4)$$

En el paréntesis reconocemos la segunda fórmula notable: el primer término es el cuadrado de $a=5y^2$, el último término es el cuadrado de $b=2tx^2$ y el término del medio, excepto por su signo, es el doble producto de ambos. Factorizamos entonces

$$\begin{aligned} 25x^2y^4 - 20tx^4y^2 + 4t^2x^6 &= x^2(25y^4 - 20tx^2y^2 + 4t^2x^4) \\ &= x^2\left[(5y^2)^2 - 2(5y^2)(2tx^2) + (2tx^2)^2\right] \\ &= x^2(5y^2 - 2tx^2)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 23: factor común y dos fórmulas notables

Para factorizar $45r^2 + 30r + 5 - 20u^2$ empezamos por sacar el factor común 5:

$$45r^2 + 30r + 5 - 20u^2 = 5(9r^2 + 6r + 1 - 4u^2)$$

En los tres primeros términos entre paréntesis reconocemos la primera fórmula notable con $a = 3r$, $b = 1$:

$$9r^2 + 6r + 1 - 4u^2 = (3r + 1)^2 - 4u^2$$

Ahora reconocemos la tercera fórmula notable con $a = (3r + 1)$ y $b = 2u$. Entonces,

$$\begin{aligned} 45r^2 + 30r + 5 - 20u^2 &= 5\left[(3r + 1)^2 - 4u^2\right] \\ &= 5\left[(3r + 1) + 2u\right]\left[(3r + 1) - 2u\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 24: factorizar con la quinta fórmula notable

En $150ax^4 + 8a^3 - 125x^6 - 60a^2x^2$ los términos no están en orden, pero al escribirlos según el exponente de a, como

$$8a^3 - 60a^2x^2 + 150ax^4 - 125x^6$$

reconocemos la quinta fórmula notable: el primer término es el cubo de $2a$, el último es el cubo de $5x^2$ y los dos en el medio son lo que deben ser.

$$\begin{aligned} &8a^3 - 60a^2x^2 + 150ax^4 - 125x^6 \\ &\qquad = (2a)^3 - 3(2a)^2(5x^2) + 3(2a)(5x^2)^2 - (5x^2)^3 \\ &\qquad = (2a - 5x^2)^3 \end{aligned}$$

2.10.4. Sumas y diferencias de cubos

Para cualesquiera números reales a y b se cumplen las siguientes fórmulas (que no deben confundirse con las fórmulas notables de $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$).

Suma o diferencia de cubos

- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ejemplo 25: suma de cubos

Para factorizar $5p^4q^6+40pr^9$ notamos en primer lugar que hay un factor común, $5p$, de modo que

$$5p^4q^6+40pr^9=5p(p^3q^6+8r^9)$$

Ahora la expresión entre paréntesis es una suma de cubos: a^3+b^3 con $a=pq^2$ y $b=2r^3$:

$$\begin{aligned}p^3q^6+8r^9&=(pq^2)^3+(2r^3)^3\\&=\left[(pq^2)+(2r^3)\right]\left[(pq^2)^2-(pq^2)(2r^3)+(2r^3)^2\right]\\&=(pq^2+2r^3)(p^2q^4-2pq^2r^3+4r^6)\end{aligned}$$

Por fin, la factorización completa es

$$5p(pq^2+2r^3)(p^2q^4-2pq^2r^3+4r^6)$$

Ejemplo 26: diferencia de cuadrados antes que de cubos

El polinomio $64x^6-y^6$ es una diferencia de cubos. Pero recuerde que los métodos de factorización deberían intentarse en el orden en que se presentaron. Y resulta que $64x^6-y^6$ es también una diferencia de cuadrados; por ahí debemos empezar.

$$64x^6-y^6=(8x^3)^2-(y^3)^2=(8x^3+y^3)(8x^3-y^3)$$

Ahora el primer paréntesis es la suma de los cubos de $2x$ y y, y el segundo su diferencia, así que factorizamos cada uno según su fórmula:

$$\begin{aligned} 64x^6 - y^6 &= (8x^3 + y^3) \cdot (8x^3 - y^3) \\ &= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \cdot (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) \end{aligned}$$

Note que si hubiéramos empezado usando la fórmula de diferencia de cubos para el polinomio original obtendríamos

$$64x^6 - y^6 = (4x^2)^3 - (y^2)^3 = (4x^2 - y^2)(16x^4 + 4x^2y^2 + y^4)$$

El primer paréntesis fácilmente se factoriza como $(2x-y)(2x+y)$, pero el segundo no es fácil de factorizar. Por eso es preferible factorizar primero la diferencia de cuadrados, y después la suma y la resta de cubos[3].

2.10.5. Tanteo

Si un polinomio cuadrático con una sola variable, como $ax^2 + bx + c$, tiene todos sus coeficientes enteros y además $a = 1$, a veces es posible factorizarlo por *tanteo* o *inspección*: buscando dos enteros d_1 y d_2 que permitan la factorización

$$x^2 + bx + c = (x + d_1)(x + d_2)$$

Como $(x + d_1)(x + d_2) = x^2 + (d_1 + d_2)x + d_1d_2$, entonces para que la factorización sea correcta es necesario que $d_1 + d_2 = b$ y que $d_1d_2 = c$; es decir, que d_1 y d_2 sean dos números cuya suma sea b y su producto sea c.

Ejemplo 27: factorizar por tanteo

[3] El polinomio $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$ puede factorizarse con un método que no cubrimos: el de completar cuadrados. En este caso, consiste en notar que la forma del polinomio se parece a la primera fórmula notable, excepto que el término del medio debería ser $8x^2y^2$. Para eso, al polinomio le falta $4x^2y^2$; entonces sumamos y restamos esa cantidad así:

$$16x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = 16x^4 + \boxed{4x^2y^2} + 4x^2y^2 + y^4 - \boxed{4x^2y^2} = 16x^4 + 8x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2$$

Ahora los tres primeros términos forman la primera fórmula notable y se factorizan como $(4x^2 + y^2)^2$. Junto con el cuarto término se forma entonces la tercera fórmula notable.

$$(4x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = \left[(4x^2 + y^2) + 2xy\right]\left[(4x^2 + y^2) - 2xy\right]$$

En el polinomio $3t^2 - 6t - 24$ encontramos en primer lugar el factor común 3.

$$3t^2 - 6t - 24 = 3(t^2 - 2t - 8)$$

Para el polinomio entre paréntesis, que tiene la forma $t^2 + bt + c$ con $b = -2$ y $c = -8$, buscamos dos números cuya suma sea -2 y su producto sea -8: ellos pueden ser -4 y 2, en cualquier orden. Entonces, $t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$, y

$$3t^2 - 6t - 24 = 3(t-4)(t+2)$$

2.10.6. A partir de los ceros

Para factorizar un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$, si no es fácil encontrar los números d_1 y d_2 por el método de tanteo, si $a \neq 1$ o si los coeficientes no son todos enteros, puede usarse también un método basado en el teorema del factor (sección 2.8, página 35).

Resulta como consecuencia de ese teorema que si r_1 y r_2 son los dos ceros (también llamados raíces) del polinomio $ax^2 + bx + c$, entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Esos ceros r_1 y r_2 pueden encontrarse con la *fórmula cuadrática*.

Fórmula cuadrática (o fórmula general)

Los ceros del polinomio $ax^2 + bx + c$ son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siempre que el *discriminante* $b^2 - 4ac$ sea mayor o igual que cero.

Si el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, entonces no tiene raíz cuadrada real, y el polinomio no tiene ceros reales y no puede factorizarse[4].

Ejemplo 28: factorizar polinomio cuadrático a partir de los ceros

Para factorizar $16p^3 + 32p^2 - 20p$, empezamos por sacar el factor común, $4p$:

$$16p^3 + 32p^2 - 20p = 4p\,(4p^2 + 8p - 5)$$

[4] Esto es, no puede factorizarse en el conjunto de números reales, pero sí en el conjunto de los números complejos, donde existen las raíces cuadradas de números negativos. Pero eso está fuera de nuestro contexto.

Ahora, el polinomio $4p^2+8p-5$ no puede factorizarse con los métodos de las secciones anteriores. Pero notemos que es cuadrático con $a=4$, $b=8$ y $c=-5$, y que entonces su factorización será $4(p-r_1)(p-r_2)$, donde

$$r_1 = \frac{-8+\sqrt{8^2-4(4)(-5)}}{2(4)} = \frac{-8+\sqrt{144}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

y

$$r_2 = \frac{-8-\sqrt{8^2-4(4)(-5)}}{2(4)} = \frac{-8-\sqrt{144}}{8} = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2}$$

así que $4p^2+8p-5 = a(p-r_1)(p-r_2) = 4(p-\frac{1}{2})(p+\frac{5}{2})$. Entonces,

$$16p^3+32p^2-20p = 4p\cdot 4(p-\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{5}{2}) = 16p\,(p-\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{5}{2})$$

Después de llegar a esta expresión, que ya nos muestra el polinomio factorizado, tenemos la opción de tomar denominador común dentro de las fracciones así:

$$\begin{aligned} 16p^3+32p^2-20p &= 16p\left(\frac{2p-1}{2}\right)\left(\frac{2p+5}{2}\right) \\ &= \frac{16p\,(2p-1)(2p+5)}{2\cdot 2} = 4p\,(2p-1)(2p+5) \end{aligned}$$

Ejemplo 29: factorizar polinomio cuadrático a partir de los ceros

Para el polinomio $\frac{2}{5}c^2-\frac{2}{3}c-\frac{4}{15}$ no podemos aplicar ninguno de los métodos anteriores. Pero como es cuadrático, podemos factorizarlo con ayuda de sus ceros.

Estos se encuentran con la fórmula cuadrática, notando que los coeficientes son $A=2/5$, $B=-2/3$ y $C=-4/15$ (usamos A, B y C para no confundir el coeficiente C con la variable del polinomio, c).

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\frac{2}{3}+\sqrt{(-\frac{2}{3})^2-4(\frac{2}{5})(-\frac{4}{15})}}{2\cdot\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{196}{225}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{14}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{8/5}{4/5} = 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\frac{2}{3}-\sqrt{(-\frac{2}{3})^2-4(\frac{2}{5})(-\frac{4}{15})}}{2\cdot\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{196}{225}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{14}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{-4/15}{4/5} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Factorizamos entonces $\frac{2}{5}c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{4}{15} = A(c-r_1)(c-r_2) = \frac{2}{5}(c-2)(c+\frac{1}{3})$.

Tomando denominador común como en el ejemplo anterior, podemos dar el resultado también como $\frac{2}{15}(c-2)(3c+1)$.

Al usar el método de la fórmula cuadrática, es útil notar que los valores de r_1 y r_2 también se pueden obtener de la calculadora al plantear la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Recuerde, sin embargo, que la calculadora no factoriza polinomios; solamente encuentra los valores de r_1 y r_2. No puede faltar el coeficiente a en la factorización $a(x-r_1)(x-r_2)$.

Recuerde de la sección 2.7 que los ceros de un polinomio en una variable son los valores de la variable que hacen que el polinomio valga cero. Entonces, decir que r_1 y r_2 son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$ es equivalente a que r_1 y r_2 son los ceros del polinomio ax^2+bx+c.

Ejemplo 30: factorizar polinomio cuadrático a partir de los ceros

El polinomio w^2-2w-1 tiene todos sus coeficientes enteros, pero es imposible encontrar por tanteo dos números enteros cuya suma sea -2 y su producto -1. Al resolver la ecuación $w^2-2w-1=0$ en calculadora, obtenemos los ceros $r_1 \approx -0.41421$ y $r_2 \approx 2.41421$. Entonces, la factorización aproximada es

$$w^2-2w-1 = a(w-r_1)(w-r_2) \approx (w+0.41421)(w-2.41421)$$

Para obtener la factorización exacta necesitamos[5] la fórmula cuadrática, que da

$$r_1 = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

y

$$r_2 = \frac{2-\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

La factorización es entonces

$$\begin{aligned} w^2-2w-1 &= [w-(1+\sqrt{2})][w-(1-\sqrt{2})] \\ &= [w-1-\sqrt{2}][w-1+\sqrt{2}] \end{aligned}$$

[5] O tal vez su calculadora resuelva la ecuación $w^2-2w-1=0$ dando las soluciones en forma exacta como $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$. En ese caso no es necesaria la fórmula cuadrática.

Acabamos de mencionar que es posible usar una calculadora para encontrar los valores de r_1 y r_2 en la factorización $a(x-r_1)(x-r_2)$ de un polinomio cuadrático.

Si su calculadora resuelve ecuaciones cúbicas, entonces también puede ayudarle a factorizar polinomios cúbicos. La clave está en que cualquier ax^3+bx^2+cx+d se factoriza como

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

donde r_1, r_2 y r_3 son los ceros del polinomio.

Ejemplo 31: factorizar polinomio cúbico con tres ceros distintos

Para factorizar el polinomio $6y^3-2y^2-12.5y+6$ vemos que no funciona ninguno de los métodos de las secciones anteriores.

Vamos entonces a la calculadora. En el modo de ecuación cúbica digitamos los coeficientes $a=6$, $b=-2$, $c=-12.5$, $d=6$, y encontramos que los ceros son $r_1=-3/2$, $r_2=4/3$ y $r_3=1/2$. Con esa información, y sin olvidar el coeficiente principal $a=6$, escribimos de inmediato la factorización:

$$6y^3-2y^2-12.5y+6 = 6(y+\tfrac{3}{2})(y-\tfrac{4}{3})(y-\tfrac{1}{2})$$

Como ya hemos visto, una opción es tomar denominadores comunes y escribir la factorización así:

$$\begin{aligned}6y^3-2y^2-12.5y+6 &= 6\left(\tfrac{2y+3}{2}\right)\left(\tfrac{3y-4}{3}\right)\left(\tfrac{2y-1}{2}\right)\\ &= \tfrac{6}{2\cdot3\cdot2}(2y+3)(3y-4)(2y-1)\\ &= \tfrac{1}{2}(2y+3)(3y-4)(2y-1)\end{aligned}$$

Ejemplo 32: factorizar polinomio cúbico con tres ceros iguales

Para el polinomio $12-18t+9t^2-1.5t^3$ tampoco funcionan los métodos de las secciones anteriores. Y al digitar los coeficientes en la calculadora[6], ella responde con un solo cero: $r_1=2$.

En realidad todos los polinomios cúbicos tienen tres ceros, aunque no siempre son reales y no siempre son distintos. Cuando hay ceros repetidos, la calculadora no menciona las repeticiones y da solo los ceros distintos. Aquí debemos deducir que entonces los otros dos ceros son $r_2=2$ y $r_3=2$ (porque deben ser tres, y si hubiera otro distinto la calculadora lo habría mencionado).

Así, la factorización es (no olvidando nunca el coeficiente principal al usar este método)

$$12-18t+9t^2-1.5t^3 = -1.5(t-2)(t-2)(t-2)$$

[6]Tenga cuidado de digitarlos en orden decreciente de exponente: $a=-1.5$, $b=9$, $c=-18$ y $d=12$.

Ejemplo 33: una alternativa al ejemplo anterior

Note que antes de habernos dado por vencidos con los métodos de las secciones anteriores pudimos haber escrito 1.5 como fracción y sacado denominador común:

$$12-18t+9t^2-1.5t^3 = 12-18t+9t^2-\frac{3}{2}t^3 = \frac{24-36t+18t^2-3t^3}{2}$$

Factorizando ahora el numerador por factor común obtenemos

$$\frac{3(8-12t+6t^2-t^3)}{2} = \tfrac{3}{2}(8-12t+6t^2-t^3)$$

Este último polinomio puede factorizarse con la quinta fórmula notable:

$$8-12t+6t^2-t^3 = (2)^3-3(2)^2(t)+3(2)(t)^2-(t)^3 = (2-t)^3$$

de modo que finalmente obtenemos la factorización

$$\tfrac{3}{2}(2-t)^3$$

equivalente a la que teníamos en el ejemplo anterior.

Si su calculadora resuelve también ecuaciones cuárticas (de grado cuatro), puede usarla para ayudarse a factorizar polinomios de grado cuatro en una variable. Para eso hay que saber que

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$$

donde r_1, r_2, r_3, r_4 son los ceros del polinomio. Es necesario que sean cuatro ceros reales.

Ejemplo 34: factorizar polinomio cuártico a partir de los ceros

Para factorizar $60-200r+135r^2+65r^3-30r^4$, digitamos sus coeficientes en la calculadora, en el modo de ecuación cuártica y en orden decreciente de exponentes: -30, 65, 135, -200 y 60.

La calculadora responde con los ceros 3, 1/2, 2/3 y -2. Como son cuatro ceros reales y distintos, la factorización es (sin olvidar el coeficiente principal, -30)

$$60-200r+135r^2+65r^3-30r^4 = -30(r-3)(r-1/2)(r-2/3)(r+2)$$

Opcionalmente, sacando denominador común y simplificando, podemos escribir también

$$60-200r+135r^2+65r^3-30r^4 = -5(r-3)(2r-1)(3r-2)(r+2)$$

Si la calculadora no ofrece tres ceros reales y distintos para un polinomio de grado 3, o cuatro ceros reales y distintos para un polinomio de grado 4, entonces no se podrá usar la fórmula anterior para factorizar completamente en los números reales. Pero si hay al menos un cero real, él puede usarse para factorizar por el método de la división sintética, que veremos en la siguiente sección. Sobre esto, vea en particular los ejemplos 37 y siguiente.

2.10.7. División sintética

Si una división de polinomios tiene un cociente exacto,

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

(con residuo igual a cero) entonces el dividendo se factoriza como

$$\text{dividendo} = [\text{divisor}] \times [\text{cociente}]$$

Por ejemplo, $(2x^3 - 11x^2 + 16x - 3) \div (x-3) = 2x^2 - 5x + 1$ con residuo cero, así que

$$2x^3 - 11x^2 + 16x - 3 = (x-3)(2x^2 - 5x + 1)$$

Dado un polinomio en una sola variable y con coeficientes enteros, puede intentarse la división sintética con varios divisores de la forma $(x-c)$ con c constante, hasta encontrar un valor de c que dé un residuo cero.

Si el coeficiente principal del polinomio (el coeficiente numérico del término con exponente mayor) es igual a 1, los únicos valores racionales de c que podrían dar residuo cero son los divisores del término constante del polinomio.

Ejemplo 35: factorizar por división sintética dos veces

Para factorizar $v^5 + 2v^4 + v^3 - 6v^2 - 12v - 6$ notamos que su coeficiente principal (el de v^5) es 1. Entonces, vamos a intentar división sintética[7] con divisores de la forma $(v-c)$ donde c será algún divisor del coeficiente constante, -6. Los divisores de -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Intentemos con $c = 1$, es decir, dividiendo $(v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50) \div (v-1)$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 2 & 1 & -6 & -12 & -6 & 1 \\ & 1 & 3 & 4 & -2 & -14 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & -2 & -14 & -20 & \end{array}$$

[7] Aquí estamos ilustrando el método de división sintética. Pero vea después de este ejemplo una forma mucho más sencilla de factorizar este polinomio.

El residuo es -20, no 0, así que la división no es exacta. Probamos con $c = -1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 & -12 & -6 & -1 \\ & -1 & -1 & 0 & 6 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & -6 & -6 & 0 & \end{array}$$

Esta vez la división es exacta, con cociente $v^4 + v^3 - 6v - 6$ y residuo 0, lo que implica que

$$v^5 + 2v^4 + v^3 - 6v^2 - 12v - 6 = (v+1)(v^4 + v^3 - 6v - 6)$$

Ahora pasamos a factorizar $v^4 + v^3 - 6v - 6$, también por división sintética[8]. El coeficiente principal es 1 y el coeficiente constante es -6, cuyos divisores son todavía ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6. Pero ya probamos con $c = 1$ y no funcionó. Si un divisor no funciona una vez, no funcionará nunca más en aplicaciones repetidas de división sintética para factorizar un polinomio.

Pero el divisor con $c = -1$ no está descartado, de modo que lo probamos de nuevo.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & -6 & -6 & -1 \\ & -1 & 0 & 0 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -6 & 0 & \end{array}$$

Otra vez funcionó, y el resultado nos dice que

$$v^4 + v^3 - 6v - 6 = (v+1)(v^3 - 6)$$

La factorización del polinomio original ahora va así:

$$v^5 + 2v^4 + v^3 - 6v^2 - 12v - 6 = (v+1)(v+1)(v^3 - 6)$$

El último paréntesis puede factorizarse como diferencia de cubos, notando que $6 = (\sqrt[3]{6})^3$. Entonces,

$$v^5 + 2v^4 + v^3 - 6v^2 - 12v - 6 = (v+1)^2(v - \sqrt[3]{6})(v^2 + \sqrt[3]{6}v + \sqrt[3]{36})$$

es la factorización completa.

Dos observaciones importantes sobre el ejemplo anterior.

- A veces será necesario usar división sintética varias veces. En ese caso, cuando un posible divisor se descarta, ya nunca más va a funcionar en ese polinomio. En cambio, cuando un posible divisor funciona, puede seguir funcionando en otras divisiones siguientes.

[8] De nuevo, usamos este método solo para ilustrarlo, pero es claro que $v^4 + v^3 - 6v - 6$ se factoriza mejor por agrupación.

- Note que violamos la recomendación que hemos visto varias veces, de usar los métodos de factorización en el orden en que se presentaron. La verdad es que el polinomio $v^5+2v^4+v^3-6v^2-12v-6$ se factoriza mejor por agrupación, fórmula notable y diferencia de cubos:

$$\begin{aligned} v^5+2v^4+v^3-6v^2-12v-6 &= v^3(v^2+2v+1)-6(v^2+2v+1) \\ &= (v^2+2v+1)(v^3-6) \\ &= (v+1)^2(v-\sqrt[3]{6})(v^2+\sqrt[3]{6}v+\sqrt[3]{36}) \end{aligned}$$

  que es mucho más simple que todo el trabajo que hicimos en el ejemplo.

  > *Moraleja: no olvide intentar los métodos de factorización en el orden en que los hemos presentado.*

Continuando con los posibles ceros racionales de un polinomio, resulta que si el coeficiente principal de un polinomio no es 1 (pero todos los coeficientes son enteros), entonces los valores racionales de c posibles son las fracciones de la forma a/b, donde a es un divisor del coeficiente constante y b un divisor del coeficiente principal.

Ejemplo 36: factorizar por división sintética y fórmula notable

Al usar división sintética[9] en $6y^5-y^4+36y^3-6y^2+54y-9$, debemos probar divisores de la forma $(y-c)$ donde $c=a/b$ con a divisor de 9 y b divisor de 6. Como los divisores de 9 son ±1, ±3 y ±9, y los divisores de 6 son ±1, ±2, ±3 y ±6, entonces la lista de valores racionales posibles de c es

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad \tfrac{1}{2},\quad \tfrac{3}{2},\quad \tfrac{9}{2},\quad \tfrac{1}{3},\quad \tfrac{2}{3},\quad \tfrac{3}{3},\quad \tfrac{1}{6},\quad \tfrac{2}{6},\quad \tfrac{9}{6},$$

cada uno positivo o negativo. Eliminando repeticiones, los valores posibles son

$$\pm1,\quad \pm3,\quad \pm9,\quad \pm\tfrac{1}{2},\quad \pm\tfrac{3}{2},\quad \pm\tfrac{9}{2},\quad \pm\tfrac{1}{3},\quad \pm\tfrac{2}{3},\quad \pm\tfrac{1}{6}$$

Después de descartar varias posibilidades llegamos a

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 6 & -1 & 36 & -6 & 54 & -9 & 1/6 \\ & 1 & 0 & 6 & 0 & 9 & \\ \hline 6 & 0 & 36 & 0 & 54 & 0 & \end{array}$$

donde el residuo 0 indica que la división por $(y-1/6)$ es exacta.

Entonces,

$$6y^5-y^4+36y^3-6y^2+54y-9=(y-1/6)(6y^4+36y^2+54)$$

[9] Como en el ejemplo anterior, estamos ilustrando este método, aunque la mejor estrategia sería primero factorizar por agrupación. Vea el comentario después de este ejemplo.

Note que en el segundo paréntesis hay un factor común, 6, y al sacarlo nos encontramos con la primera fórmula notable:

$$6y^4 + 36y^2 + 54 = 6(y^4 + 6y^2 + 9) = 6(y^2 + 3)^2$$

Como $y^2 + 3$ no se factoriza en los reales (no tiene ceros reales), la factorización completa del polinomio original es

$$\begin{aligned} 6y^5 - y^4 + 36y^3 - 6y^2 + 54y - 9 &= (y - 1/6) \cdot 6(y^2 + 3)^2 \\ &= (6y - 1)(y^2 + 3)^2 \end{aligned}$$

Insistimos, como en el ejemplo anterior, en que habría sido mucho más sencillo factorizar por otro método antes de probar división sintética. En efecto, agrupando los términos positivos y los negativos, y luego usando la primera fórmula notable, obtenemos la factorización completa

$$\begin{aligned} 6y^5 - y^4 + 36y^3 - 6y^2 + 54y - 9 &= 6y(y^4 + 6y^2 + 9) - (y^4 + 6y^2 + 9) \\ &= (y^4 + 6y^2 + 9)(6y - 1) \\ &= (y^2 + 3)^2(6y - 1) \end{aligned}$$

¡en solo tres renglones!

Ejemplo 37: factorizar polinomio cúbico con un solo cero real

Para factorizar $6z^3 - 13z^2 - 3z - 5$, notamos que no tiene factor común, que no se puede factorizar agrupando ni por otros métodos anteriores al método de los ceros. Entonces, probemos encontrar sus ceros en la calculadora.

Al digitar sus coeficientes $a = 6$, $b = -13$, $c = -3$, $d = -5$, encontramos que hay un único cero real, $z_1 = 5/2$ (y dos ceros no reales que se reconocen por la presencia de le letra i en la calculadora). Aunque esto no permite conocer la factorización completa en los números reales, nos guía en la elección de c al hacer división sintética: tenemos seguridad de que $c = 5/2$ funcionará. Por eso dividimos

$$\begin{array}{rrrr|l} 6 & -13 & -3 & -5 & 5/2 \\ & 15 & 5 & 5 & \\ \hline 6 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

de modo que $6z^3 - 13z^2 - 3z - 5 = (z - 5/2)(6z^2 + 2z + 2)$.

Este último polinomio cuadrático tiene discriminante negativo,

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(6)(2) = -44,$$

así que no se factoriza más que por factor común.

$$\begin{aligned} 6z^3 - 13z^2 - 3z - 5 &= (z - 5/2) \cdot 2(3z^2 + z + 1) \\ &= (2z - 5)(3z^2 + z + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 38: factorizar polinomio cúbico con un cero repetido

En $w^5 - 3w^3 - 2w^2$ el término constante es cero, lo que significa que hay un factor común. En efecto, podemos sacar w^2 y obtener

$$w^5 - 3w^3 - 2w^2 = w^2(w^3 - 3w - 2)$$

Para factorizar $w^3 - 3w - 2$, probemos encontrar sus ceros con calculadora. Cuando digitamos los coeficientes $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ y $d = -2$, la calculadora reporta solo dos ceros: $w_1 = 2$ y $w_2 = -1$. Sabemos que los polinomios cúbicos tienen tres ceros, y si la calculadora reporta solo dos tiene que ser porque uno de ellos es repetido (pero la calculadora no dice cuál).

Por lo menos tenemos certeza de que al dividir por $(w - 2)$ o por $(w + 1)$ la división será exacta. Al usar el método de factorización por división sintética con $c = 2$ encontramos que

$$w^3 - 3w - 2 = (w - 2)(w^2 + 2w + 1)$$

El segundo paréntesis se factoriza por fórmula notable: $(w^2+2w+1) = (w+1)^2$, y así la factorización completa es

$$w^5 - 3w^3 - 2w^2 = w^2(w - 2)(w + 1)^2$$

Note que como alternativa, si en el momento de factorizar $w^3 - 3w - 2$ hubiéramos usado división sintética con $c = -1$, habríamos obtenido la factorización

$$w^3 - 3w - 2 = (w + 1)(w^2 - w - 2)$$

y después de factorizar el segundo paréntesis por tanteo, $(w - 2)(w + 1)$, llegaríamos al mismo resultado final.

Ejercicios

Factorice por factor común o por agrupación

118. $15axy^2 - 30a^2by + 20a^3bx^2y$

119. $21p^2q + 14p^3q^5 + 14p^4q^2$

120. $3x(2a+b) - 15y(2a+b) + 6z(2a+b)$

121. $34a^2b(x-4y) + 85a^3(2x-8y) - 34ab^2(4y-x)$

122. $12ax + 6aw - 10xb - 5bw$

123. $27a^2bxy + 9a^2bp - 12cx^2y - 4cpx$

124. $6a^2r^2s - 3a^2rt - 96ar^2s + 48art + 150r^2s - 75rt$

125. $6abx^2 - 9ax^2 + 15bx^2 - 8abxy + 12axy - 20bxy + 16aby^2 - 24ay^2 + 40by^2$

Factorice por fórmula notable o alguno de los métodos anteriores

126. $25a^2 - 150a^2b + 225a^2b^2$

127. $6r^6s^3 + 36ar^4s^2 + 72a^2r^2s + 48a^3$

128. $12t^6 + 147 + 84t^3$

129. $450r^4 - 81r^8 - 625$

130. $24a^5x^3 - 108a^4bx^2 + 162a^3b^2x - 81a^2b^3$

131. $4a^2x + 8a^2y - b^6x - 2b^6y$

Factorice por suma o diferencia de cubos, o por alguno de los métodos anteriores

132. $54x^6y^5 - 250y^2z^3$

133. $3av^6 + bv^7 - 24aw^3 - 8bvw^3$

134. $x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6 - c^3$

135. $a^{12} - b^{12}$

Factorice por tanteo o fórmula cuadrática, o por alguno de los métodos anteriores

136. $t^2 + 3t - 40$

137. $b^2 - 2b - 48$

138. $2y^3 + 8y^2 - 24y$

139. $2u^2 + 7u - 15$

140. $2 + 5x - 7x^2$

141. $3c^2 - 3c - \frac{9}{4}$

142. $-7v^2 - \frac{392}{3}v - 84$

143. $2w^2 - 29.2w - 12$

144. $4x^2 - 24x + 23.04$

145. $5m^2 + 6m - 3$

Factorice por división sintética o alguno de los métodos anteriores

146. $k^5 - 3k^3 - 2k^2$

147. $8v^3 + 20v^2 + 14v + 3$

148. $y^4 - 3y^2 + 4 - 2y^3 + 4y$

149. $9r^5 - 108r^4 + 513r^3 - 1206r^2 + 1404r - 648$

150. $3z^4 - 5z^3 - 9z^2 + 15z$

Factorice completamente, usando los métodos más apropiados para cada caso

151. $5y + y^2$

152. $m^2 + 2mb + b^2$

153. $a^2 + a - ab - b$

154. $u^2 - 36$

155. $9x^2 - 6xy + y^2$

156. $1 + z^3$

157. $27a^3 - 1$

158. $a^3 - 6a^2b + 5ab^2$

159. $2xy - 6y + xz - 3z$

160. $-6r^2 + 36r + \frac{854}{27}$

161. $1 - 4r + 4r^2$

162. $4x^2 - 5xy^2 + y^4$

163. $q^2 - q - 30$

164. $15w^2 + 11w - 14$

165. $108 + 18w - 24w^2 - 6w^3$

166. $8m^3 - 27y^6$

167. $-4y^2 - 28y - \frac{152}{9}$

168. $8v^3 - 12v^2 + 6v - 1$

169. $1 - 3b^2$

170. $125x^6 + 1$

171. $a^2 - m^2 + 2ab + b^2$

172. $5z^3 + 37z^2 + 67.2z + 36$

173. $c^5 - c^4 + c - 1$

174. $5r^2 + 40r - 201.25$

175. $6t^2 - 19t - 20$

176. $25x^4 - 81y^2$

177. $16a^2 - 24ab + 9b^2$

178. $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

179. $42p^2 - 86p - 2p^4 + 6p^3 - 120$

180. $7m^5n^3 - 21m^4n^2 + 21m^3n - 7m^2$

181. $72pr^2 - 15p^3r^2 + 25.5p^2r^2$

182. $a^4 - 2a^3 + 2a - 1$

183. $a^2 + 12ab + 36b^2$

184. $6x^2 - 3x + 0.5 - 4x^3$

185. $343 + 8p^3$

186. $20 - t - t^2$

187. $6u^2 + \frac{2910}{7}u - 300$

188. $n^2 + n - 42$

189. $v^3 - 64$

190. $r^3 - 64r^5$

191. $(z+1)^4 - 81$

192. $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9$

193. $9u^3 + 45u - 45u^2$

194. $7u^4 - 14u^2 - 56$

195. $4t^2 - 4t^5 - 5t^3 - t + 4t^4$

196. $18x^4y^3 + 6x^3y^3 - 60x^2y^3$

197. $15q^4 - 15q^3 + 20q^2$

198. $a^2-x+a-x^2$

199. $9m^2+4a^2-12am$

200. $9x^2-57.6x+63$

201. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

202. $8c^2-22c-21$

203. $1+18ab+81a^2b^2$

204. $15+14x-8x^2$

205.
$3yw^2+cw^2-\frac{7}{2}cw-\frac{45}{2}y-\frac{15}{2}c-\frac{21}{2}yw$

206. $b^{10}-b^8-b^6+b^4$

207. $a^2-b^3+2b^3x^2-2a^2x^2$

208. $2am-3b-c-cm-3bm+2a$

209. $w^2-2w/3+1/9$

210. $27t^2+45t+5.4t^3+25$

211. $9a^2-x^2-4x+12a$

212. $9x^2-y^2+3x-y$

213. $-3w^2+18w-\frac{861}{64}$

214. $a^2-m^2-9n^2-6mn+4ab+4b^2$

215. $49x^2-77x+30$

216. $125y^3-225y^2+135y-27$

217. $1+6a^3+9a^6$

218. $1-9x^2+24xy-16y^2$

219. $1-2p+2p^3-p^4$

220. q^5-32

221. $4-(x^2+b^2)+2xb$

222. x^3-y^3+x-y

223. $21-y^2-\frac{68}{5}y$

224. $2a^2x-4abx+2b^2x$

225. $-4w^2+12w-8.96$

226. $m^3+3m^2-16m-48$

227. $2b^3-5.5b^2+4.5-3b+2b^4$

228. x^3-x+x^2y-y

229. $u^4-2u^3-5u^2+4u+6$

230. $9(x-y)^3-x+y$

231. $2p^4+5p^3-54p-135$

232. $z^5-3z^3-3z^4+13z^2-12$

233.
$ax(t-3)-at+3a+2xt-6x-2t+6$

234. c^6-1

235. $2v^4+6v^3-2v-6$

236. $2b^5-8b^4+3b-12$

237. $60-15t^2-20t+5t^3$

238. $-y^2+\frac{251}{5}y-10$

239. $r^4+5r^3+r^2-21r-18$

240. $8w^4-18w^3-75w^2+46w+120$

241. $x^5+2x^4-15x^3-3x^2-6x+45$

242. $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

243.
$t^6-9t^5+13t^4+81t^3-230t^2+288$

244. $18i^5-129i^4+222i^3+156i^2-600i+288$

245. $t^6-8t^5+6t^4+103t^3-344t^2+396t-144$

246. $-9z^2+32.4z+63$

2.11. Fracciones racionales

En una fracción entre dos expresiones algebraicas, como en cualquier fracción, será posible simplificar cuando el numerador y el denominador compartan algún factor común. Por ejemplo, la fracción numérica $\frac{12}{15}$ puede simplificarse porque 12 y 15 tienen el factor común 3.

$$\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$$

De la misma forma, para simplificar cualquier fracción deben factorizarse el numerador y el denominador de manera que sean evidentes cualesquiera factores que compartan.

Ejemplo 39: factorizar y simplificar

Simplificar la fracción racional $\dfrac{4p - pt^2}{2pt^2 + pt^3}$.

Empezamos por factorizar el numerador: $4p - pt^2 = p(4 - t^2) = p(2+t)(2-t)$, y el denominador: $2pt^2 + pt^3 = pt^2(2+t)$. Entonces,

$$\frac{4p - pt^2}{2pt^2 + pt^3} = \frac{\cancel{p}\,\cancel{(2+t)}(2-t)}{\cancel{p}t^2\cancel{(2+t)}} = \frac{2-t}{t^2}$$

Así la fracción está simplificada al máximo.

Para sumar o restar fracciones conviene tomar el mínimo común denominador, para lo cual es necesario conocer los factores de cada denominador.

Ejemplo 40: denominador común

Para calcular la resta

$$\frac{7y}{3y^2 - 5y - 2} - \frac{10}{3y^2 - 7y + 2}$$

primero factorizamos cada denominador.

$$3y^2 - 5y - 2 = (3y+1)(y-2)$$

y

$$3y^2 - 7y + 2 = (3y-1)(y-2)$$

El mínimo común denominador es entonces $(3y+1)(y-2)(3y-1)$, y se sigue que

$$\begin{aligned}
&\frac{7y}{3y^2-5y-2}-\frac{10}{3y^2-7y+2}\\
&\qquad=\frac{7y}{(3y+1)(y-2)}-\frac{10}{(3y-1)(y-2)}\\
&\qquad=\frac{7y(3y-1)-10(3y+1)}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{(21y^2-7y)-(30y+10)}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{21y^2-37y-10}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{(21y+5)\cancel{(y-2)}}{(3y+1)\cancel{(y-2)}(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{21y+5}{(3y+1)(3y-1)}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Simplifique al máximo

247. $\dfrac{4a/3}{2a}$

248. $\dfrac{-9z^3}{z/3}$

249. $\dfrac{v^2-4}{2v^2-v-6}$

250. $\dfrac{5x^3+9x^2-7x+1}{10x^2+13x-3}$

251. $\dfrac{bx^2-b-x^2+1}{b^2x-x+b^2-1}$

252. $\dfrac{z^2-4}{z^2+2z}\cdot\dfrac{z^2}{z-2}$

253. $\dfrac{3p}{p+2z}\cdot\dfrac{5p+10z}{6}$

254. $\dfrac{4q+12}{q+2}\cdot\dfrac{3q+6}{2q-1}$

255. $\dfrac{p^{-1}+q^{-1}}{p^{-2}+q^{-2}}$

256. $\dfrac{v^2+2v}{3v^2-18v+24}\div\dfrac{v^2-v-6}{v^2-4v+4}$

257. $\dfrac{\dfrac{t+x}{t}}{\dfrac{t-x}{2t}}$

258. $\dfrac{2+\dfrac{2}{u}}{u-\dfrac{2}{u}}$

259. $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{a+b}$

260. $(1+p^{-3})^2$

261. $(w-r^{-1})^{-2}$

262. $\dfrac{6t^2-5t-6}{6t^2+13t+6} \div \dfrac{6t^2-13t+6}{9t^2-12t+4}$

263. $\dfrac{1}{y^2-y-2}+\dfrac{1}{y^2-1}$

264. $\dfrac{wy+rc}{wy-ry}+\dfrac{wc-ry}{rc-wc}$

265. $\dfrac{2t-1}{t+2}-\dfrac{t+3}{t-1}$

266. $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+x}{(x+1)^2}+2x$

267. $\dfrac{6}{u^2+u-2}-\dfrac{9}{u^2+2u-3}+\dfrac{3}{u^2+5u+6}$

268. $\dfrac{2b-3}{2b^2+11b-6}-\dfrac{3b+1}{3b^2+16b-12}+\dfrac{1}{3b-2}$

269. $\dfrac{2x+1}{2x^2-x-1}-\dfrac{x+1}{2x^2+3x+1}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}$

2.12. Aplicaciones

Ejemplo 41: interés simple

Si una candidad de dinero P se invierte ganando un porcentaje de interés anual simple $r\,\%$ durante n años, entonces el interés ganado durante ese período será $I = 0.01Prn$, y el monto acumulado al final del período será $A = P + I$.

Suponga que \$50 000 se invierten a una tasa anual simple de 3 % durante cinco años. ¿Cuánto será el interés ganado y cuánto será el monto acumulado al final de los cinco años?

Para responder necesitamos encontrar los valores de las expresiones $I = 0.01Prn$ y $A = P + I$, dados los valores de las variables $P = 50000$ (la cantidad invertida), $r = 3$ (el porcentaje de interés) y $n = 5$ (el número de años).

El interés ganado será entonces

$$I = 0.01Prn = 0.01(50000)(3)(5) = 7500$$

y el monto acumulado será

$$A = P + I = 50000 + 7500 = 57500$$

La respuesta entonces es que el interés ganado será \$7500 y el monto acumulado \$57 500.

Ejercicios

Evalúe la expresión que se pide

270. Cuando el precio unitario de un artículo es p, el proveedor ofrece una cantidad $q = \dfrac{105p^2}{5p^2+48}$ de unidades por semana. ¿Cuántas unidades por semana ofrecerá si el precio es 13.5?

271. Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por $I = \dfrac{95n^2}{n^2+3}$, en millones de dólares. ¿Cuánto es el ingreso total después de 6 meses?

272. La población de Costa Rica durante el siglo 20 estuvo dada aproximadamente por la fórmula $P = 206\,065 \cdot 1.02973^t$, donde t es el número de años desde 1900. ¿Cuánto fue la población de Costa Rica en 1985?

273. El costo combinado de producir una cantidad q_1 de un artículo y una cantidad q_2 de otro artículo es $C = 0.04q_1^2 + 38q_1 + 54q_2 + 900$. ¿Cuál es el costo de producir 120 unidades del primero y 150 del segundo?

274. El costo promedio al producir un lote de varios artículos idénticos está dado por $\dfrac{CF + c \cdot n}{n}$, donde CF es el costo fijo de producción, c el costo unitario y n el número de artículos. Calcule el costo promedio si el costo fijo es 250 000, el costo unitario es 28 y el número de artículos es 5000.

275. La altura de un objeto que se lanza hacia arriba, en metros después de t segundos, es $h = h_0 + v_0 t - 4.9t^2$, donde h_0 es la altura desde donde se lanza y v_0 la velocidad con que se lanza. Si un objeto se lanza desde un techo a 7 m de altura, a una velocidad de 15 m/s, ¿cuál será su altura tres segundos después?

276. Si una cantidad de dinero D se invierte a un porcentaje de interés compuesto $p\,\%$ anual durante n años, el monto acumulado al cabo de ese tiempo será $A = D(1 + 0.01p)^n$. ¿Cuánto se acumula si se invierte \$10 000 al 4 % anual durante ocho años?

2.13. (Opcional) Racionalización

En una fracción con variables, si el denominador contiene raíces, pueden aplicarse los mismos principios que vimos en la Sección 1.5, sobre racionalización.

Ejemplo 42: racionalizar denominador

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{5rw+3w}{w-2\sqrt{w}}$.

Empezamos por multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{5rw+3w}{w-2\sqrt{w}}\cdot\frac{w+2\sqrt{w}}{w+2\sqrt{w}}=\frac{(5rw+3w)(w+2\sqrt{w})}{w^2-4w}$$

Ahora factorizamos numerador y denominador y cancelamos sus factores comunes.

$$\frac{\cancel{w}(5r+3)(w+2\sqrt{w})}{\cancel{w}(w-4)}=\frac{(5r+3)(w+2\sqrt{w})}{w-4}$$

Ejemplo 43: racionalizar numerador

Racionalizar el numerador y simplificar $\dfrac{\sqrt[3]{12w^4x^8}}{2w^2y}$.

Recuerde que para una raíz con índice 3 necesitamos que los exponentes en el radical sean múltiplos de 3. Notando que $12=2^2\cdot 3$, multiplicamos así:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{2^2\cdot 3w^4x^8}}{2w^2y}\cdot\frac{\sqrt[3]{2\cdot 3^2w^2x}}{\sqrt[3]{2\cdot 3^2w^2x}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3 3^3 w^6x^9}}{2w^2y\sqrt[3]{2\cdot 9w^2x}}\\
&= \frac{2^{3/3}3^{3/3}w^{6/3}x^{9/3}}{2w^2y\sqrt[3]{18w^2x}}\\
&= \frac{\cancel{2}\cdot 3\cancel{w^2}x^3}{\cancel{2w^2}y\sqrt[3]{18w^2x}}\\
&= \frac{3x^3}{y\sqrt[3]{18w^2x}}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Racionalice el denominador y simplifique

277. $\dfrac{1-4t^2}{\sqrt{2t-1}}$

278. $\dfrac{3u^3-1-3u+u^2}{\sqrt{3u+1}}$

279. $\dfrac{u\sqrt{u}}{\sqrt{1+u}}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}$

280. $\dfrac{16a^2-24a}{\sqrt{6a}+2a}$

281. $\dfrac{9bc-15b^2}{\sqrt[3]{12bc^2}}$

282. $\dfrac{2r-r^2-r^3}{\sqrt{5r+4p}+2\sqrt{p}}$

283. $\dfrac{9v^2(x^2+5)-4x^3-20x+4x^2+20}{3v-2\sqrt{x-1}}$

284. $\dfrac{72wy^3-36y^3z}{\sqrt[4]{8y^2}(3\sqrt{ty}-\sqrt{wz})}$

285. $\dfrac{24q+30-6q^2}{2+\sqrt[3]{3q-5}}$

286. $\dfrac{3z^3+8z^2-6z+1}{z+2+\sqrt{z+5}}$

Capítulo 3
Ecuaciones

3.1. Ecuaciones y soluciones

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones que involucran alguna variable, llamada *incógnita*. La igualdad puede ser cierta o no dependiendo del valor de la incógnita, y una *solución* de la ecuación es un valor de la incógnita que haga cierta la igualdad[1].

Ejemplo 1: ecuación, incógnita, solución

La igualdad $3t^2 - 5t + 2 = 4 - 6t$ es una ecuación con incógnita t. Si fuera $t = 2$, la igualdad diría

$$\begin{aligned} 3(\,2\,)^2 - 5(\,2\,) + 2 &= 4 - 6(\,2\,) \\ 12 - 10 + 2 &= 4 - 12 \\ 4 &= -8 \end{aligned}$$

lo cual es falso. Por eso, $t = 2$ no es una solución.

Con $t = -1$,

$$\begin{aligned} 3(\,-1\,)^2 - 5(\,-1\,) + 2 &= 4 - 6(\,-1\,) \\ 3 + 5 + 2 &= 4 + 6 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

lo que indica que $t = -1$ sí es una solución de la ecuación.

Hay ecuaciones que no tienen ninguna solución en los números reales (por ejemplo, las ecuaciones $x \cdot 0 = 1$ y $x^2 = -1$ no tienen soluciones: ningún número real multiplicado por 0 da 1, y ningún número real elevado al cuadrado da -1).

Algunas ecuaciones tienen una sola solución, otras tienen varias soluciones y algunas tienen infinitas soluciones.

[1]También hay ecuaciones con varias incógnitas; de ellas nos ocuparemos en el capítulo 5.

Ejercicios

Compruebe que el valor dado de la incógnita es solución de la ecuación planteada

1. $t = \dfrac{2}{3}$; $3t^2 - 5t + 2 = 4 - 6t$
2. $y = 1 - \sqrt{2}$; $y^2 + 2 - y = y + 3$
3. $w = -3$; $\sqrt{w^2 - 5} + w = 1 + \dfrac{6}{w}$
4. $p = 4$; $\dfrac{p-6}{p-2} = \dfrac{2p-10}{6-p}$
5. $r = 0.1$; $(1+r)^4 - 1 = 4r + 0.0641$
6. $x = -1$; $4^{x+2} = 2^{1-x}$

3.2. Ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* es una igualdad entre dos polinomios cuyo grado mayor es 1 (con la misma variable).

Esto es una ecuación en la que la incógnita aparece solamente multiplicada por constantes y sumada a constantes, pero no en denominadores o raíces, ni con exponentes distintos de 1. Para resolver una ecuación lineal debe despejarse la incógnita, lo que significa cancelar todos los términos que la rodean hasta dejarla sola en su lado de la igualdad.

Para despejar la incógnita deben aplicarse operaciones a cada lado de la igualdad, cada vez la misma operación en ambos lados, hasta que la incógnita quede sola en un lado de la igualdad.

Para resolver una ecuación lineal

a. Dejar todos los términos con incógnita en un lado de la ecuación y todos los términos sin incógnita en el otro.

b. Despejar la incógnita.

Ejemplo 2: ecuación lineal con solución única

Resolver la ecuación $3x - 2(1-x) = 3(2+x) + 8$.

Se empieza por simplificar cada lado de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3x - 2 + 2x &= 6 + 3x + 8 \\ 5x - 2 &= 14 + 3x \end{aligned}$$

Ahora agruparemos todos los términos con incógnita a la izquierda y los términos sin incógnita a la derecha, cancelando el -2 a la izquierda y el $+3x$ a la derecha. Como dijimos, en cada caso debe aplicarse una misma operación en ambos lados de la igualdad.

Para cancelar el -2 a la izquierda, sumamos 2 en ambos lados:

$$\begin{array}{rcl} 5x-2 & = & 14+3x \\ +2 & & +2 \\ \hline \end{array}$$

$$5x = 16+3x$$

Para cancelar el $+3x$ a la derecha, restamos $3x$ en ambos lados:

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 16+3x \\ -3x & & -3x \\ \hline \end{array}$$

$$2x = 16$$

Por último necesitamos cancelar el 2 que multiplica a x, para lo cual dividimos ambos lados de la igualdad entre 2:

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 16 \\ \div 2 & & \div 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 8$$

La respuesta puede expresarse en términos del valor de la solución, $x = 8$, o en términos del *conjunto de soluciones*, $x \in \{8\}$.

En algunas ecuaciones, que la igualdad sea cierta o falsa no depende del valor de la incógnita. Por ejemplo, la igualdad $5q = 5q$ es siempre cierta, independientemente del valor de q, mientras que la igualdad $2q = 2q+1$ no puede ser cierta para ningún valor de q. Pero lo más común es que esta situación no sea evidente hasta haber resuelto la ecuación.

Ejemplo 3: ecuación lineal sin solución

Resolver la ecuación $6-3(u-1) = u-2+4(1-u)$.

$$6-3u+3 = u-2+4-4u$$

$$\begin{array}{rcl} 9-3u & = & -3u+2 \\ +3u & & +3u \\ \hline \end{array}$$

$$9 = 2$$

Nos quedamos sin incógnita, y la igualdad que queda, $9 = 2$, es falsa para cualquier valor de u. Esto significa que la ecuación no tiene solución: no existe un valor de la incógnita que haga verdadera la igualdad.

El conjunto de soluciones es vacío, denotado ϕ o bien $\{\ \}$.

El conjunto vacío es el conjunto que no contiene ningún elemento, y puede denotarse ϕ o $\{\ \}$. Pero sería un error denotarlo $\{\phi\}$, porque este último en realidad es un conjunto que no es vacío porque contiene a un elemento (contiene al conjunto vacío).

En el ejemplo anterior, la razón por la que el conjunto de soluciones es vacío no es que la incógnita se haya cancelado. Compare con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: ecuación lineal con infinitas soluciones

Resolver la ecuación $6-3(u-1) = u+5+4(1-u)$.

$$\begin{array}{rcl} 6-3u+3 &=& u+5+4-4u \\ 9-3u &=& -3u+9 \\ +3u & & +3u \\ \hline & 9=9 & \end{array}$$

Otra vez perdimos la incógnita, pero la igualdad que resulta ahora, $9 = 9$, es verdadera para cualquier valor de u, así que cualquier número u es solución de la ecuación.

El conjunto de soluciones es el de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Si una ecuación tiene fracciones, se recomienda tomar denominador común en cada lado para luego cancelarlos.

Ejemplo 5: ecuación lineal con fracciones

Para resolver $y+\frac{1}{2}-\frac{y}{3} = 1-\frac{3y}{4}$ empezamos por tomar denominador común en cada lado:

$$\begin{aligned} \frac{6y+3-2y}{6} &= \frac{4-3y}{4} \\ \frac{4y+3}{6} &= \frac{4-3y}{4} \end{aligned}$$

para luego cancelarlos al multiplicar cada lado por 6 y por 4 a la vez (o primero por uno y después por el otro, o de una vez multiplicando por 24; resulta lo mismo):

$$
\begin{aligned}
\frac{4y+3}{6} &= \frac{4-3y}{4} \\
{\scriptstyle \times 6\times 4} &\quad {\scriptstyle \times 6\times 4} \\
\hline
4(4y+3) &= 6(4-3y) \\
16y+12 &= 24-18y \\
{\scriptstyle +18y-12} &\quad {\scriptstyle +18y-12} \\
\hline
34y &= 12 \\
{\scriptstyle \div 34} &\quad {\scriptstyle \div 34} \\
\hline
y &= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}
\end{aligned}
$$

También existe la opción de tomar un solo denominador común para ambos lados. En este caso, como los denominadores inicialmente son 2, 3 y 4, el mínimo común denominador es 12:

$$
\begin{aligned}
\frac{12y+6-4y}{12} &= \frac{12-9y}{12} \\
\frac{8y+6}{12} &= \frac{12-9y}{12} \\
{\scriptstyle \times 12} &\quad {\scriptstyle \times 12} \\
\hline
8y+6 &= 12-9y \\
{\scriptstyle +9y-6} &\quad {\scriptstyle +9y-6} \\
\hline
17y &= 6 \\
{\scriptstyle \div 17} &\quad {\scriptstyle \div 17} \\
\hline
y &= \frac{6}{17}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Resuelva

7. $3.6-0.2a=-1.4a$

8. $-3.6a+1.3=0.2(a-3)$

9. $y-(2-y)=3(y+1)+y$

10. $\dfrac{2v-3}{4}=\dfrac{6v+7}{3}$

11. $\dfrac{z+8}{4}=\dfrac{3z+14}{2}$

12. $12r+\frac{3}{2}=\frac{3}{5}r+3$

13. $\dfrac{c}{5}+\dfrac{2(c-4)}{10}=7$

14. $3t+\dfrac{t}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5t$

15. $\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}=-1$

16. $\frac{1}{3}(z-2)+\frac{4}{3}z=2z+\frac{4}{3}$

17. $(5t-1)(4t+2)=(10t-1)(2t+3)-2(t+13)$

18. $q^2+5=-(10q-q^2)$

3.3. Ecuaciones cuadráticas

Una *ecuación cuadrática* es una igualdad entre dos polinomios cuyo grado mayor es 2 (con la misma variable).

Esto es una ecuación en la que la incógnita aparece solamente elevada al cuadrado, multiplicada por constantes o sumada a constantes, pero no en denominadores, raíces ni con exponentes distintos de 1 o 2.

Para resolver una ecuación cuadrática se empieza por reducirla a la forma $ax^2+bx+c=0$, con x la incógnita y a, b y c constantes. Luego se factoriza el lado izquierdo, si es posible, y se resuelven dos ecuaciones lineales.

Aquí se usa una propiedad de los números reales que dice que si un producto de dos números es igual a cero, al menos alguno de ellos (o tal vez ambos) debe ser igual a cero:

$$A\cdot B=0 \quad\Rightarrow\quad A=0 \text{ o } B=0$$

Para resolver una ecuación cuadrática

a. Igualar a cero.

b. Factorizar, si es posible.

c. Separar en dos ecuaciones.

d. Resolver cada ecuación.

Ejemplo 6: resolver ecuación cuadrática factorizando

Para resolver la ecuación que vimos en el ejemplo 1, $3t^2 - 5t + 2 = 4 - 6t$, empezamos por igualar a cero y luego factorizamos el lado izquierdo:

$$\begin{array}{rcl} 3t^2 - 5t + 2 & = & 4 - 6t \\ +6t-4 & & +6t-4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3t^2 + t - 2 &= 0 \\ (t+1)(3t-2) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora tenemos un producto de dos factores que es igual a cero, lo que implica que necesariamente alguno de los factores debe ser igual a cero. Por eso igualamos cada factor a cero y resolvemos las respectivas ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} t+1 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} 3t-2 &= 0 \\ 3t &= 2 \\ t &= 2/3 \end{aligned}$$

Entonces, puede ser[2] $t = -1$ o $t = 2/3$. En otros símbolos, $t \in \{-1, 2/3\}$.

Si el lado izquierdo en una ecuación cuadrática no puede factorizarse fácilmente, puede usarse la fórmula cuadrática, que dice que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(esas son las soluciones que obtendríamos si primero factorizáramos por fórmula cuadrática y después igualáramos a cero cada factor lineal). Pero si el discriminante, $b^2 - 4ac$, es negativo, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 7: resolver usando la fórmula cuadrática

En la ecuación $6p^2 - 4p - 4 = 0$, el lado izquierdo no se factoriza fácilmente (más que por factor común, 2, pero eso no ayuda). Tomando $a = 6$, $b = -4$ y $c = -4$, con la fórmula cuadrática encontramos las soluciones:

$$\begin{aligned} p &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(6)(-4)}}{2(6)} = \frac{4 + \sqrt{112}}{12} \\ &= \frac{4 \pm 4\sqrt{7}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

[2] Tenga cuidado de no decir que $t = -1$ y $t = 2/3$: ¡es imposible para t tomar dos valores! Lo correcto es que $t = -1$ o $t = 2/3$ ("o", no "y"). Pero sí estaría bien decir que las dos soluciones son $t_1 = -1$ y $t_2 = 2/3$.

Lo anterior significa que hay dos soluciones:

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$$

Ejercicios

Resuelva

19. $w^2 + 3w + 2 = 0$

20. $4x = 1 + 4x^2$

21. $(y+2)(y-3) = -6$

22. $16w^2 + 25 = 40w$

23. $13z = -5 - 6z^2$

24. $8(5-3b)^2 + 14(5-3b) = 15$

25. $10 = u(17-3u)$

26. $3b^2 - 5 = 11b - 1$

27. $8z^2 + 15 = 22z$

28. $2.4 + t + 0.1t^2 = 0$

29. $3t^2 - 12 = 12t$

30. $4 + b^2 = 2b$

31. $r^2 + r = 3$

32. $3p(p+3) = p - 3$

33. $2c(2c+1) = c(c-3) - 3$

34. $5(w-1)^2 = 4$

35. $10(p^2 - p - 1) = 10p - 11$

36. $\frac{1}{2}u^2 + u = 5$

3.4. Ecuaciones polinomiales

Una *ecuación polinomial* es una de la forma $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es algún polinomio. Para resolverla se usa el mismo principio de las cuadráticas: una vez igualado todo a cero, se factoriza el lado izquierdo y por aparte se iguala cada factor a cero.

Para resolver una ecuación polinomial

a. Igualar a cero.

b. Factorizar, si es posible.

c. Separar en varias ecuaciones.

d. Resolver cada ecuación.

Ejemplo 8: resolver ecuación polinomial factorizando

Para resolver
$$4a^2(a+1) = a^2(a^2 - 5a + 6a^3)$$
sería un error grave empezar dividiendo ambos lados por a^2. Es cierto que eso simplificaría bastante la ecuación, a $4(a+1) = a^2 - 5a + 6a^3$. Pero esta última ecuación no es equivalente a la original (como se comprueba fácilmente al ver que $a = 0$ es una solución de la ecuación original pero no de la ecuación simplificada). Esto es porque la división es posible solamente si el divisor es distinto de cero, pero al dividir por a^2 no se sabe si el divisor, a^2, es o no es cero.

Lo correcto es simplificar cada lado e igualar a cero:

$$\begin{aligned} 4a^2(a+1) &= a^2(a^2 - 5a + 6a^3) \\ 4a^3 + 4a^2 &= a^4 - 5a^3 + 6a^5 \\ -6a^5 - a^4 + 9a^3 + 4a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se factoriza el lado izquierdo, primero por factor común y luego por división sintética:

$$\begin{aligned} -6a^5 - a^4 + 9a^3 + 4a^2 &= 0 \\ a^2(-6a^3 - a^2 + 9a + 4) &= 0 \\ a^2(a+1)(-6a^2 + 5a + 4) &= 0 \end{aligned}$$

En este punto tenemos dos opciones. Podemos separar ya los tres factores para resolverlos por aparte:

$$\begin{array}{ccc} a^2 = 0 & a+1 = 0 & -6a^2 + 5a + 4 = 0 \\ a = 0 & a = -1 & a = -1/2 \;\text{ o }\; a = 4/3 \end{array}$$

O bien continuamos factorizando $-6a^2 + 5a + 4$, que es igual a $(2a+1)(4-3a)$, para resolver los cuatro factores por aparte:

$$\begin{array}{cccc} a^2 = 0 & a+1 = 0 & 2a+1 = 0 & 4-3a = 0 \\ a = 0 & a = -1 & a = -1/2 & a = 4/3 \end{array}$$

De cualquier manera llegamos a la misma solución:
$$a \in \{0, -1, -1/2, 4/3\}$$

Algunas ecuaciones complicadas pueden simplificarse haciendo un cambio de variable.

Ejemplo 9: resolver usando un cambio de variable

Resolver $(3a-1)^{2/3}+10=7(3a-1)^{1/3}$.

Notando que la expresión $(3a-1)^{1/3}$ aparece dos veces en la ecuación (a la derecha multiplicada por 7, y a la izquierda elevada al cuadrado porque $[(3a-1)^{1/3}]^2=(3a-1)^{2/3}$), definimos una nueva incógnita, $y=(3a-1)^{1/3}$.

Con eso la ecuación se reescribe así:

$$\begin{aligned} \left[\, (3a-1)^{1/3} \,\right]^2 + 10 &= 7\left[\, (3a-1)^{1/3} \,\right] \\ y^{\,2} + 10 &= 7\,y \end{aligned}$$

Ahora simplemente se iguala a 0, se factoriza y se separan las dos ecuaciones lineales:

$$\begin{gathered} y^2-7y+10=0 \\ (y-5)(y-2)=0 \\ y-5=0 \quad \text{o} \quad y-2=0 \end{gathered}$$

así que $y=5$ o $y=2$.

Recordando que $y=(3a-1)^{1/3}$, la solución $y=5$ significa, en términos de la incógnita original, que

$$\begin{aligned} (3a-1)^{1/3} &= 5 \\ [\ldots]^3 \quad & \quad [\ldots]^3 \\ \hline 3a-1 &= 125 \\ a &= \frac{126}{3} = 42 \end{aligned}$$

Por su parte, la solución $y=2$ da

$$\begin{aligned} (3a-1)^{1/3} &= 2 \\ [\ldots]^3 \quad & \quad [\ldots]^3 \\ \hline 3a-1 &= 8 \\ a &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Finalmente, $a\in\{42,3\}$.

Ejercicios

Resuelva

37. $x^4 + 5 = 6x^2$

38. $27c^6 + 215c^3 = 8$

39. $24q^3 = 3q$

40. $a^2 + 12a - 3 = 3a^3 + 1$

41. $v^2(v^3 - 4) = 3v^4 + 2(v^3 + v^2 + 4v)$

42. $12u(u^3 + u^2 - 1) = 6u(u - 2)$

43. $2c^3 + \frac{1}{5}c^2 = 10c + 1$

44. $2(r^2 + 1)^3 + 12 = 14(r^2 + 1)$

45. $6t(t^3 - 1) = 7t^2(2t - 1) - 5t$

46. $4c^4 + 12c^3 - c^2 - 3c = 0$

47. $u^4 + 4u^3 + 4u = 4u^2 + 5$

48. $2y^4 + y^3 + y^2 - y = 0$

3.5. Ecuaciones racionales o fraccionarias

Una *ecuación racional* es una que tiene alguna fracción con incógnita en su denominador.

Algunas ecuaciones racionales tienen soluciones falsas, y tal vez el ejemplo más simple de eso sea

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

que, al restar $1/x$ en cada lado, lleva a la solución aparente $x = 0$. Pero x no puede ser cero, porque entonces $1/x$ estaría indefinido. Así, la ecuación planteada no tiene ninguna solución.

En algunas ecuaciones racionales todas las soluciones aparentes son válidas; en algunas todas son falsas, y en otras puede haber soluciones válidas y soluciones falsas. El método de solución es, como siempre que hay fracciones, eliminar los denominadores y resolver la ecuación resultante. Pero antes de dar por terminado el proceso deben validarse las soluciones *en la ecuación original* y descartar las soluciones falsas.

Para resolver una ecuación fraccionaria

a. Sacar denominador común.

b. Cancelar los denominadores.

c. Resolver la ecuación resultante.

d. Comprobar las soluciones *en la ecuación original* y descartar las falsas.

Ejemplo 10: ecuación fraccionaria

Resolver $\dfrac{2}{r-5} - 3 = \dfrac{6}{r^2-7r+10}$.

Tomemos un solo denominador común para ambos lados. Como $r^2-7r+10 = (r-5)(r-2)$, ese será el denominador común:

$$\frac{2(r-2)-3(r-5)(r-2)}{(r-5)(r-2)} = \frac{6}{(r-5)(r-2)}$$

Cancelamos los denominadores multiplicando por $(r-5)(r-2)$:

$$2r-4-3(r^2-7r+10) = 6$$

Resolvemos la resultante ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} 2r-4-3r^2+21r-30-6 &= 0 \\ -3r^2+23r-40 &= 0 \\ -3(r-5)(r-\tfrac{8}{3}) &= 0 \end{aligned}$$

y encontramos las soluciones *tentativas* $r = 5$ y $r = 8/3$.

Al ver los denominadores de la ecuación original notamos que $r = 5$ es imposible porque es un cero de al menos un denominador (de hecho, ambos). Esta solución debe ser descartada porque al sustituirla en la ecuación original haría que los denominadores sean iguales a cero.

En cambio, la solución $r = 8/3$ no es cero de ningún denominador, y por eso la aceptamos.

En conclusión, la única solución es $r = 8/3$.

Ejercicios

Resuelva

49. $2w-1 = \dfrac{-5(3w+2)}{2w+1}$

50. $a - \dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{2}{a+1}$

51. $5\dfrac{t-3}{t-4} = \dfrac{5}{t-4} - t$

52. $3 - \dfrac{2u}{u+1} = \dfrac{u^2}{(u+1)^2}$

53. $\dfrac{1}{r-2} = \dfrac{2r+1}{r^2-4}$

54. $\dfrac{y-6}{y}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{y+6}{y-6}$

55. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$

56. $2r=\dfrac{4}{r}-3+r$

57. $\dfrac{v^2+v}{2v+1}=v-3$

58. $\dfrac{4}{(t-2)^2}+\dfrac{7}{t-2}+3=0$

59. $\dfrac{3}{c-4}+\dfrac{c-3}{c}=2$

60. $1=\dfrac{2z}{3z+1}-\dfrac{3-2z}{2z+5}$

61. $1+\dfrac{16}{(z^2+1)^2}=\dfrac{8}{z^2+1}$

62. $\dfrac{2b^2+5b-3}{b^2+7b+12}=\dfrac{b}{b+4}-\dfrac{2}{b+3}$

63. $\dfrac{a+1}{a-3}+\dfrac{a+1}{a-1}$
$=\dfrac{2a}{a-3}-\dfrac{a+1}{a^2-4a+3}$

64. $\dfrac{5}{p+5}-\dfrac{2}{p-3}=\dfrac{-6(p+1)}{15-2p-p^2}$

65. $\dfrac{3}{t+1}+\dfrac{4}{t}=\dfrac{7}{t+2}$

66. $\left(\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{w-1}\right)\div\dfrac{2}{w^2-1}=w+5$

3.6. Aplicaciones de las ecuaciones

Algunos problemas aplicados pueden resolverse usando ecuaciones con una incógnita. La variedad de tales problemas es inmensa, pero muchos de los que nos interesan pueden agruparse en grandes categorías, de las cuales presentaremos algunas aquí.

Se recomienda dar los siguientes cinco pasos para plantear y resolver problemas aplicados con una incógnita.

Para resolver un problema de aplicación de ecuaciones

a. Definir la incógnita principal, y escribir cualquier incógnita adicional en términos de la principal.

b. Escribir la igualdad requerida por el problema, en palabras si es necesario.

c. Refinar cada lado de la igualdad hasta escribir ambos en términos de la incógnita.

d. Resolver la ecuación resultante del paso anterior.

e. Responder la pregunta que se planteó.

3.6.1. Problemas de matemática financiera

Si un monto P (llamado principal) se invierte a una tasa de interés simple r durante un plazo de n períodos[3] entonces el valor de la inversión (principal más intereses) al final del plazo es

$$A = P(1+nr)$$

La misma fórmula se aplica cuando se toma un préstamo por un monto P a una tasa de interés simple r durante n períodos. En este caso, $A = P(1+nr)$ será el monto de la deuda al final del plazo.

En matemática financiera se acostumbra considerar que cada mes tiene 30 días, y que los años tienen 360 días.

Ejemplo 11: interés simple

Si se invierten \$3000 a una tasa anual simple de 3 %, ¿en cuántos años llegará la inversión a valer \$3500?

Empecemos por reconocer que $P = 3000$ (el valor inicial), que $r = 3\,\% = 0.03$ (la tasa anual) y que los períodos son años.

a. La incógnita es n, el número de períodos.

b. El objetivo es que el valor final sea \$3500: $A = 3500$.

c. De acuerdo con la fórmula $A = P(1+rn)$, y sustituyendo los valores conocidos, tenemos

$$3500 = 3000(1+0.03n)$$

d. Entonces,

$$\begin{aligned} 3500 &= 3000+90n \\ 500 &= 90n \\ n &= 500/90 = 5.\bar{5} \end{aligned}$$

e. El número de años requeridos es $5.\bar{5}$, lo que equivale a 5 años, 6 meses y 20 días.

[3] La tasa de interés puede ser anual, en cuyo caso un período es un año. También podría ser mensual y entonces un período es un mes. Hay otras posibilidades.

Ejercicios

Resuelva

67. Doña Celia tomó hace cierto tiempo un préstamo por cinco millones de colones a una tasa anual fija de 13 %. Hoy el monto adeudado es de seis millones de colones. ¿Hace cuánto tomó doña Celia el préstamo?

68. Si una inversión de $5000 creció a $5500 en tres años, ¿cuánto fue la tasa anual de interés?

69. ¿Cuánto debe invertirse hoy a una tasa mensual de 0.75 % para que dentro de dos años el valor de la inversión sea ₡5 000 000?

70. ¿Cuánto tiempo tomará una inversión en duplicarse al 7.5 % de interés anual?

71. Una motocicleta tiene un precio de ₡3 400 000 de contado. Don Julio la compra pagando ₡1 000 000 en el momento de la compra y ₡2 850 000 dieciocho meses después. ¿Cuál fue la tasa anual de interés?

72. Un televisor cuesta ₡500 000 de contado. Marco paga una prima de ₡100 000 y conviene en pagar el resto luego de seis meses, con una tasa de interés mensual de 1.2 %. ¿Cuánto deberá pagar al cabo de seis meses?

3.6.2. Problemas sobre ingreso y utilidad

En los problemas sobre *utilidad* necesitaremos relacionar costos, ingresos y ganancias. Si para producir un artículo hay un costo fijo CF (el costo inicial, independiente del número de unidades producidas) y un costo unitario c (el costo de producir una unidad), entonces el costo total al producir q unidades será

$$CT = CF + cq$$

Si, por otra parte, cada unidad de ese artículo se vende a un precio unitario p, entonces el ingreso al vender q unidades será $I = pq$ y la utilidad o ganancia será

$$U = I - CT = pq - (CF + cq)$$

Ejemplo 12: costos, ventas y utilidades

Una fábrica de lápices tiene costos fijos de ₡5 000 000 al mes, y costos unitarios de ₡80 por lápiz. Si cada lápiz se vende por ₡180, ¿cuántos deben producir y vender en un mes para tener utilidades de ₡2 000 000?

a. La incógnita es el número de lápices, que denotaremos q.

b. La igualdad por resolver es $U = 2\,000\,000$.

c. Según la fórmula de la utilidad, la ecuación será

$$\begin{aligned} U = I - C &= 2\,000\,000 \\ (180q) - (5\,000\,000 + 80q) &= 2\,000\,000 \end{aligned}$$

d. Simplificamos la ecuación a $100q - 5\,000\,000 = 2\,000\,000$, de donde despejamos

$$q = 7\,000\,000/100 = 70\,000$$

e. Deben producir y vender setenta mil lápices.

Ejercicios

Resuelva

73. Una fábrica produce un artículo con un costo unitario de \$2.20, que venden a \$3 por unidad. Si los costos fijos son de \$75 000, ¿cuántas unidades deben vender para obtener ganancias de \$50 000?

74. Una fábrica produce un artículo con un costo de ₡150 por unidad, más un costo fijo de ₡350 000. Si el producto se vende a ₡200 por unidad, ¿cuántas unidades deben vender para tener una ganancia de ₡82 500?

75. Una línea aérea opera una ruta con un costo fijo de \$8000 (pilotos, combustible, aeromozas) y un costo variable de \$120 por pasajero (seguros, alimentación). Si el tiquete se vende a \$400 por pasajero, ¿cuántos pasajeros necesitan transportar para tener una utilidad de \$15 000 por viaje?

76. Un agricultor produce naranjas con un costo unitario de ₡20. Los costos fijos son de ₡100 000 por semana. Si las naranjas se venden a ₡70 la unidad, ¿cuántas debe vender por semana para no tener pérdidas ni ganancias?

77. El operador de un ferry tiene costos fijos de ₡120 000 por viaje y costos variables de ₡900 por persona. Si la capacidad del ferry es de cien personas, y usualmente viaja lleno, ¿cuánto debe cobrar por persona para tener ₡300 000 de utilidades en cada viaje?

78. Una fábrica de camisas tiene un costo de \$1.20 por camisa, y costos fijos de \$9000 al mes. Saben que pueden vender 5000 camisas por mes. ¿Qué precio deben fijar para obtener utilidades mensuales de \$15 000?

79. Si un producto se vende a p colones por unidad, el público comprará $200-0.1p$ unidades. ¿Qué precio debe fijarse para obtener ingresos de ₡80 000? Dé su respuesta con dos decimales.

80. Un grupo de personas está planeando un paseo en yate. El alquiler cuesta ₡540 000, y acuerdan distribuirlo en partes iguales. A última hora, tres de las personas se retiran, lo que eleva la cuota de cada persona restante en ₡750. ¿Cuántas personas había en el grupo original?

81. Doña Rebeca compró hoy unas acciones por \$720. Si las hubiera comprado ayer, cuando cada una costaba \$15 menos, habría podido comprar cuatro acciones más con el mismo dinero. ¿Cuántas acciones compró?

82. Una compañía adquirió un terreno en ₡600 millones. Recuperaron el costo al vender todas excepto tres hectáreas, con una ganancia de ₡10 millones por hectárea. ¿Cuántas hectáreas medía el terreno comprado?

3.6.3. Problemas de aumento/reducción

Los problemas de aumento/reducción involucran una variable que aumenta mientras otra disminuye. Un caso típico se da cuando un aumento en el precio de un artículo causa una reducción en la demanda.

En estos problemas el mejor modo de ataque es definir una variable auxiliar como el número de aumentos o reducciones (digamos en general el número de variaciones).

Ejemplo 13: precio necesario para obtener cierto ingreso

Una empresa ofrece un servicio por una cuota mensual de ₡8000 y actualmente tiene 2300 clientes. Un estudio de mercado indica que por cada rebaja de ₡100 en la cuota obtendrán 50 clientes adicionales[4]. ¿Cuánto deben cobrar para tener ingresos de ₡19 000 000 mensuales?

En vez de definir la incógnita como p, el precio por cobrar, vamos a definir una variable auxiliar que será el número de rebajas.

a. Sea n el número de rebajas de ₡100 en la cuota mensual. Como la cuota actual es ₡8000, al hacer n rebajas de ₡100 el resultado será

$$p = 8000 - 100n$$

Por otra parte, como el número de clientes es 2300 y por cada rebaja habrá 50 más, entonces el número de clientes será

$$q = 2300 + 50n$$

[4]Por ejemplo, con una rebaja la cuota bajará a ₡7900 y el número de clientes aumentará a 2350. Con tres rebajas la cuota será ₡7700, y el número de miembros, 2450.

b. El objetivo es que el ingreso sea ₡19 000 000, así que planteamos la igualdad

$$I = 19\,000\,000$$

c. Como $I = pq$ entonces sustituimos p y q por las fórmulas que acabamos de escribir, y llegamos a la ecuación

$$19\,000\,000 = (8000 - 100n)(2300 + 50n)$$

con incógnita n.

d. Así resolvemos:

$$\begin{aligned} 19\,000\,000 &= 18\,400\,000 + 170\,000n - 5000n^2 \\ 0 &= -5000n^2 + 170\,000n - 600\,000 \\ 0 &= -5000(n-4)(n-30) \end{aligned}$$

Hay entonces dos soluciones: n puede ser 4 o 30.

e. Como el problema pregunta por el precio, la respuesta es que hay dos precios posibles. Para $n = 4$ el precio correspondiente es

$$p = 8000 - 100(4) = 7600$$

y para $n = 30$ el precio es

$$p = 8000 - 100(30) = 5000$$

Respuesta final: pueden cobrar ₡7600 o ₡5000.

En efecto, con $n = 4$ el precio será ₡7600 y el número de clientes será $q = 2300 + 50(4) = 2500$. Eso dará un ingreso de $7600 \times 2500 = 19\,000\,000$, como se planteó.

Y con $n = 30$ el precio será ₡5000, el número de clientes $q = 2300 + 50(30) = 3800$, y el ingreso $5000 \times 3800 = 19\,000\,000$ también[5].

[5] Como cuestión administrativa, puede ser preferible la primera opción, ya que por el mismo ingreso es más sencillo atender a 2500 clientes que a 3800 clientes. Para tomar una mejor decisión habría se podrían considerar las utilidades en vez de los ingresos, pero eso va más allá del objetivo de este ejemplo.

Ejercicios

Resuelva

83. Un grupo de escolares está recogiendo fondos para una excursión a un parque. El costo es ₡3000 por niño, pero para grupos de 20 a 40 estudiantes, el costo por niño se reduce en ₡100 por cada niño adicional a los primeros 20. Si ya han recogido ₡62 500, ¿cuántos niños pueden ir al parque?

84. Un edificio tiene 18 apartamentos, que se alquilan a ₡600 000 mensuales. Por cada incremento de ₡40 000 en el precio mensual quedará un apartamento sin alquilar. ¿Qué precio debe cobrar el administrador para recibir en total ₡8 000 000 en alquiler mensual?

3.6.4. Problemas sobre mezclas

Los problemas de mezclas son acerca de mezclar objetos con distintos valores de cierta propiedad (la propiedad puede ser costo, concentración de algún químico, etc) para obtener una mezcla con otro valor de la propiedad.

Ejemplo 14: mezcla de pinturas con distintos precios

¿Cuántos galones de una pintura que cuesta ₡60 000/gal deben mezclarse con ocho galones de otra, que cuesta ₡45 000/gal, para obtener una mezcla que cueste ₡54 000/gal?

a. La incógnita es el número de galones de la primera pintura:

$$x = \text{número de galones de la primera pintura}$$

b. La mezcla debe costar ₡54 000 por galón, así que su costo total será

$$\text{costo de la mezcla} = 54\,000 \times (\text{número de galones de mezcla})$$

c. El lado izquierdo de esta igualdad, el costo de la mezcla, será el costo de la primera pintura más el de la segunda:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{la mezcla}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{la primera}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{la segunda}\end{bmatrix}\\ &= [(\text{costo por galón})_1 \times (\text{número de galones})_1] + [\text{ídem}]_2\\ &= (60\,000) \times (x) + (45\,000) \times (8)\end{aligned}$$

El lado derecho de la igualdad en el paso b es $(54000) \times (x+8)$ (porque son x galones de la primera pintura más ocho de la segunda).

d. La ecuación resultante es

$$60000x + (45000)(8) = 54000(x+8)$$

cuya solución es $x = 12$.

e. Son 12 galones de la primera pintura.

Ejercicios

Resuelva

85. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡4800 el kilo, con pasas, que cuestan ₡11 200 el kilo. Desea obtener 25 kilos de una mezcla con un costo de ₡6464 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces y de pasas debe mezclar?

86. Una gasolinera compra gasolina regular a ₡600 el litro, y gasolina súper a ₡900 el litro. En una compra de 60 000 litros de gasolina pagaron en total ₡46 963 200. ¿Cuántos litros de regular y cuántos de súper compraron?

87. Se busca producir una barra de metal de 40 g que sea 15 % plata, mezclando parte de una barra de metal que es 20 % plata con otra que es 12 % plata. ¿Cuántos gramos de cada una deben usarse?

88. El radiador de un automóvil contiene 2.5 litros de una mezcla compuesta por 80 % agua y 20 % anticongelante. Se desea aumentar la proporción de anticongelante a 50 %, vaciando parte de la mezcla actual y remplazándola por anticongelante puro. ¿Qué cantidad de la mezcla actual debe vaciarse?

89. Una bebida contiene 2.5 % de alcohol por volumen, y otra contiene 4 %. ¿Cuántos mililitros de cada una deben mezclarse para obtener 235 ml de mezcla con 3 % de alcohol?

3.6.5. Problemas sobre movimiento

Para los problemas de movimiento necesitamos recordar la fórmula de la velocidad promedio de un objeto que recorre cierta distancia en cierto tiempo:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

de la que se derivan otras dos, al despejar respectivamente la distancia o el tiempo:

$$\text{distancia} = [\text{velocidad}] \times [\text{tiempo}] \qquad \text{y} \qquad \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Ejemplo 15: distancia, tiempo y velocidad

Un bote viaja una hora río abajo y regresa en una hora y veinte minutos. Si la velocidad del río es 3 km/h, ¿cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas, y qué distancia recorrió río abajo?

a. Sea $v =$ la velocidad propia del bote, en km/h, y sea $d =$ la distancia río abajo, en km. Luego veremos qué es d en términos de v.

b. Aunque el problema no lo dice, es obvio que

$$\text{distancia río abajo} = \text{distancia río arriba}$$

Este será el punto de partida.

c. Como la velocidad río abajo es $v+3$ (porque el río contribuye 3 km/h a la velocidad) y la velocidad río arriba es $v-3$, la fórmula de distancia da que $d = (v+3)(1)$ bajando, y $d = (v-3)(4/3)$ subiendo (una hora y veinte minutos es igual a $4/3$ de hora). Entonces,

$$(v+3)(1) = (v-3)(4/3)$$

d. La solución de la ecuación es $v = 21$.

e. Como $v = 21$ y $d = v+3 = 24$, la respuesta es: la velocidad del bote en aguas tranquilas es 21 km/h, y la distancia río abajo fue 24 km.

Ejercicios

Resuelva

90. Daniela y Francisco viven a 30 km de distancia, y empiezan al mismo tiempo a viajar cada uno desde su casa hacia la casa del otro, por el mismo camino. Daniela viaja a 50 km/h y Francisco a 55 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse?

91. Un avión tarda el mismo tiempo en viajar 400 km con viento en contra que en viajar 450 km con viento a favor. Si el viento sopla a 20 km/h, ¿cuál es la velocidad propia del avión?

92. Un auto viaja de A a B a 55 km/h y regresa a 50 km/h. Si el viaje de ida y vuelta toma tres horas, ¿cuál es la distancia de A a B?

93. Dos lanchas parten de un muelle al mismo tiempo. Una viaja hacia el norte a 29 km/h, y la otra hacia el oeste a 38 km/h. ¿Qué distancia las separa 90 minutos más tarde?

94. Una bola se lanza hacia arriba, y t segundos después su altura es $15t - 4.9t^2$ metros. ¿Cuánto tarda la bola en alcanzar una altura de 10 m? ¿Cuánto tarda en caer al suelo?

3.6.6. Problemas sobre trabajo compartido

En los problemas de trabajo compartido hay dos o más agentes que pueden hacer un trabajo, y el problema generalmente relaciona el tiempo que cada agente tarda en hacer el trabajo solo con el tiempo que tardan trabajando juntos. En estos problemas la igualdad debe plantearse en términos de la proporción del trabajo que cada agente realiza en cada unidad de tiempo (por ejemplo, si un agente tarda cuatro horas en hacer un trabajo, la ecuación se plantea en términos de que realiza $1/4$ del trabajo en una hora).

Ejemplo 16: tiempo para completar un trabajo

Un pintor puede pintar un techo en seis horas. Si le ayuda su asistente, juntos lo hacen en cuatro horas. ¿Cuánto tardaría el asistente trabajando solo?

a. Sea $t =$ el tiempo que tarda el asistente, en horas.

b. La igualdad se plantea en términos del trabajo que hacen en una unidad de tiempo (horas, en este caso):

$$\begin{bmatrix}\text{trabajo que}\\ \text{hacen juntos}\\ \text{en una hora}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{trabajo que}\\ \text{hace el pintor}\\ \text{en una hora}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{trabajo que}\\ \text{hace el asistente}\\ \text{en una hora}\end{bmatrix}$$

c. Como juntos tardan cuatro horas, en una hora pintan $1/4$ del techo. El pintor, trabajando solo, tarda seis horas, así que en una hora hace $1/6$ del trabajo. El asistente, solo, tarda t horas, así que en una hora hace $1/t$. La ecuación entonces es

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{t}$$

d. Esta es una ecuación fraccionaria. Empezamos por tomar denominador común, que puede ser $12t$ para toda la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{t}\\ \frac{3t}{12t} &= \frac{2t+12}{12t}\\ 3t &= 2t + 12\\ t &= 12\end{aligned}$$

Recuerde que en las ecuaciones fraccionarias debe validarse la solución: $t = 12$ no causa problemas con ningún denominador, así que la aceptamos.

e. El asistente, solo, tardaría 12 horas.

Ejercicios

Resuelva

95. Mariana tarda seis horas en limpiar la casa, su hermano Carlos tarda diez horas, y su hermana menor doce horas. ¿Cuánto tardarían los tres trabajando juntos?

96. Don Evelio puede arreglar un jardín en 50 minutos. Si su hijo le ayuda, tardan 30 minutos. ¿Cuánto tardaría el hijo trabajando solo?

97. Una manguera normalmente llena un tanque en diez horas. Pero ahora el tanque tiene un derrame y se tarda doce horas en llenarlo con esa manguera. Si el tanque se deja lleno, ¿cuántas horas tarda en vaciarse su contenido?

98. En el ejercicio anterior, si otra manguera más delgada normalmente tardaba quince horas en llenar el tanque, ¿cuánto tiempo tardarán las dos mangueras juntas ahora que el tanque tiene un derrame?

99. Para inflar un bote se necesitaban 120 "tiros" con un inflador manual. Una vez se empezó a inflar el bote, pero el inflador se dañó a los 45 tiros. Se sustituyó el inflador dañado por otro nuevo, y con ese se terminó de inflar el bote en 60 tiros más. ¿En adelante, cuántos tiros se necesitarán para inflar todo el bote con el inflador nuevo?

3.6.7. Otros tipos de problemas

Aparte de las seis categorías de problemas que acabamos de cubrir, existe muchísima variedad de aplicaciones, no siempre fáciles de categorizar.

Veamos dos ejemplos de aplicaciones diversas.

Ejemplo 17: número de unidades de cada artículo

Marco va a la librería por lápices y borradores. Cada lápiz cuesta ₡240, y cada borrador, ₡150. Si compró quince artículos y gastó ₡3060, ¿cuántos lápices y cuántos borradores compró Marco?

a. Hay dos incógnitas, explícitas en la pregunta: el número de lápices y el número de borradores. Escojamos una de ellas, digamos el número de lápices, como la incógnita principal, y llamémosla x. La otra incógnita es el número de borradores, que es $15-x$. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= \text{número de lápices} \\ 15-x &= \text{número de borradores} \end{aligned}$$

b. El problema dice que Marco gastó ₡3060, así que planteamos la igualdad

$$\text{Gasto total} = 3060$$

c. El gasto total es [gasto en lápices] + [gasto en borradores]. Por su parte, el gasto en lápices es

$$[\text{precio de un lápiz}] \times [\text{número de lápices}] = 240x$$

y el gasto en borradores es

$$[\text{precio de un borrador}] \times [\text{número de borradores}] = 150(15-x)$$

Entonces, la igualdad del punto anterior dice que

$$240x + 150(15-x) = 3060$$

d. Resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 240x + 2250 - 150x &= 3060 \\ 90x &= 810 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

e. Como x es el número de lápices y $15-x$ el de borradores, y como $x=9$, entonces la respuesta es 9 lápices y 6 borradores.

Ejemplo 18: dimensiones de un rectángulo

Un agricultor ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular que mida 15 m de ancho y 72 m de perímetro. ¿Cuánto debe ser el largo del rectángulo?

a. La incógnita es el largo del rectángulo. Definamos x = el largo del rectángulo, en metros.

b. El objetivo es que el perímetro sea de 72 m:

$$\text{Perímetro} = 72$$

c. Como el perímetro del rectángulo es la suma de sus cuatro lados, entonces

$$\begin{aligned} [\text{largo}] + [\text{largo}] + [\text{ancho}] + [\text{ancho}] &= 72 \\ 2[\text{largo}] + 2[\text{ancho}] &= 72 \end{aligned}$$

d. Como el ancho mide 15 m y el largo es x, la ecuación es

$$2(15) + 2x = 72$$

e. Resolver:

$$\begin{aligned} 2x &= 72 - 2(15) \\ x &= \frac{72-30}{2} = 21 \end{aligned}$$

f. El largo del rectángulo debe medir 21 m.

Ejercicios

Resuelva

100. Encuentre dos números pares consecutivos cuya suma sea 146.

101. Encuentre dos enteros impares consecutivos cuyo producto sea 4355.

102. Dentro de cinco años, Andrea tendrá tres veces la edad que tenía hace siete años. ¿Cuál es su edad?

103. El costo de producir n podadoras es $C = 1500 - 60n + 3n^2$, en dólares. ¿Cuántas podadoras pueden producirse con $1200?

104. Una factura es por un total de ₡46 556, con el 13 % de impuesto de ventas ya incluido en ese total. ¿Cuál es el monto del impuesto de ventas?

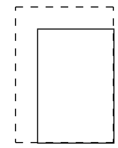
105. Hay doce monedas de ₡100 y ₡500, mezcladas, que valen en total ₡3200. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?

106. Para un concierto hay tiquetes de platea a ₡18 000 y tiquetes de gradería a ₡12 000. El número de tiquetes de gradería es el triple del número de platea, y se vendieron todos para un ingreso total de ₡7 020 000. ¿Cuántos tiquetes de cada tipo se vendieron?

107. Un agricultor ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular que tenga un perímetro de 76 m y una área de 360 m^2. Encuentre las dimensiones del huerto.

108. La base de un triángulo mide 3 cm más que la altura, y el área es 119 cm^2. ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo?

109. Un estacionamiento tiene 35 m de largo por 25 m de ancho. Se quiere duplicar el área del estacionamiento añadiendo franjas de igual ancho al fondo y a un lado, como en la figura a la derecha. ¿De qué ancho deben ser las franjas?



3.7. (Opcional) Ecuaciones radicales

Las *ecuaciones radicales* son las que tienen alguna raíz con incógnita dentro. También estas, como las ecuaciones fraccionarias[6] pueden tener soluciones falsas, y posiblemente el ejemplo más simple de eso sea

$$\sqrt{x} = -1$$

Aquí, para despejar x es necesario elevar ambos lados al cuadrado, lo que lleva a $x = 1$. Pero obviamente esa solución es falsa, porque $\sqrt{1} \neq -1$. De hecho, ningún número real tiene raíz cuadrada igual a -1, así que la ecuación no tiene solución.

En general, para resolver una ecuación radical se debe despejar la raíz para luego elevar ambos lados de la igualdad a la potencia necesaria para cancelar la raíz (por ejemplo, para una raíz cuadrada se eleva al cuadrado; para una raíz quinta se eleva a la 5). Como en las fraccionarias, en las ecuaciones radicales también es necesario validar las posibles soluciones en la ecuación original y eliminar las falsas.

Para resolver una ecuación radical

a. Despejar la raíz (o alguna, si hay varias).

b. Elevar ambos lados a la potencia necesaria para cancelar la raíz.

c. Resolver la ecuación resultante.

d. Comprobar las soluciones *en la ecuación original* y descartar las falsas.

[6] Y como las ecuaciones logarítmicas, que se estudiarán en el capítulo 7.

Ejemplo 19: ecuación con una raíz cuadrada

Resolver $y-2\sqrt{6-y}=3y-8$.

Como dijimos, se debe despejar la raíz para luego elevar al cuadrado (note el uso de la primera fórmula notable al elevar al cuadrado):

$$\begin{aligned}
y-2\sqrt{6-y} &= 3y-8\\
-2\sqrt{6-y} &= 2y-8\\
\underbrace{\sqrt{6-y}}_{[\cdots]^2} &= \underbrace{-y+4}_{[\cdots]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6-y &= (-y)^2+2(-y)(4)+(4)^2\\
6-y &= y^2-8y+16\\
0 &= y^2-7y+10\\
0 &= (y-2)(y-5)
\end{aligned}$$

Tenemos entonces dos soluciones tentativas: $y=2$ y $y=5$. Debemos validarlas en la ecuación original.

Para $y=2$:

$$\begin{aligned}
(2)-2\sqrt{6-(2)} &\stackrel{?}{=} 3(2)-8\\
2-2\sqrt{4} &\stackrel{?}{=} 6-8\\
2-4 &= -2
\end{aligned}$$

Para $y=5$:

$$\begin{aligned}
(5)-2\sqrt{6-(5)} &\stackrel{?}{=} 3(5)-8\\
5-2\sqrt{1} &\stackrel{?}{=} 15-8\\
3 &\neq 7
\end{aligned}$$

Aquí vemos que la segunda solución, $y=5$, es inválida, pero la primera, $y=2$, sí funciona.

Entonces, la única solución es $y=2$, y el conjunto de soluciones es $\{2\}$.

Si una ecuación tiene más de una raíz, debe despejarse una para cancelarla, y luego despejar la siguiente para cancelarla, hasta haberlas cancelado todas.

Ejemplo 20: ecuación con dos raíces cuadradas

Para resolver $5\sqrt{q+10} - 3\sqrt{2+q} = 12$ empezamos por despejar una de las raíces (cualquiera) y cancelarla.

$$5\sqrt{q+10} - 3\sqrt{2+q} = 12$$

$$\begin{array}{rcl} 5\sqrt{q+10} & = & 3\sqrt{2+q} + 12 \\ {\scriptstyle [\cdots]^2} & & {\scriptstyle [\cdots]^2} \\ \hline \end{array}$$

$$5^2(q+10) = (3\sqrt{2+q})^2 + 2(3\sqrt{2+q})(12) + (12)^2$$
$$25q + 250 = 9(2+q) + 72\sqrt{2+q} + 144$$

Todavía hay una $\sqrt{2+q}$, así que la despejamos para cancelarla:

$$25q + 250 - 18 - 9q - 144 = 72\sqrt{2+q}$$
$$16q + 88 = 72\sqrt{2+q}$$

Antes de elevar al cuadrado podemos dividir todo por 8 para no obtener números tan grandes:

$$\begin{array}{rcl} 16q + 88 & = & 72\sqrt{2+q} \\ {\scriptstyle \div 8} & & {\scriptstyle \div 8} \\ \hline 2q + 11 & = & 9\sqrt{2+q} \\ {\scriptstyle [\cdots]^2} & & {\scriptstyle [\cdots]^2} \\ \hline \end{array}$$

$$(2q+11)^2 = 81(2+q)$$
$$4q^2 + 44q + 121 = 162 + 81q$$
$$4q^2 - 37q - 41 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $q = -1$ y $q = 41/4$. Comprobémoslas en la ecuación original:

Para $q = -1$:

$$5\sqrt{(-1) + 10} - 3\sqrt{2 + (-1)} \stackrel{?}{=} 12$$
$$5\sqrt{9} - 3\sqrt{1} \stackrel{?}{=} 12$$
$$15 - 3 = 12$$

Para $q = 41/4$:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{\boxed{\tfrac{41}{4}}+10}-3\sqrt{2+\boxed{\tfrac{41}{4}}} &\stackrel{?}{=} 12 \\ 5\sqrt{\tfrac{81}{4}}-3\sqrt{\tfrac{49}{4}} &\stackrel{?}{=} 12 \\ 5\cdot\tfrac{9}{2}-3\cdot\tfrac{7}{2} &\stackrel{?}{=} 12 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

Concluimos que ambas soluciones son válidas: $q \in \{-1, 41/4\}$.

Ejercicios

Resuelva

110. $\sqrt{3+6c^2} = 2$

111. $\sqrt{1+\frac{t}{2}} = \frac{2}{3}$

112. $p + \sqrt{p} = 20$

113. $\sqrt{2y+1} = y - 7$

114. $w + 2\sqrt{w+7} = 8$

115. $\sqrt{2z+3} + 6 = z$

116. $\sqrt{2z+3} + z = 6$

117. $1 + \sqrt{x+7} = 2x$

118. $1 - \sqrt{x+7} = 2x$

119. $4 - 3\sqrt{q} = q$

120. $4 + 3\sqrt{q} = q$

121. $\sqrt{b+1} + b = 1$

122. $\sqrt{b+1} - b = 1$

123. $r + \sqrt{3r^2+r+1} = 2$

124. $t(\sqrt{t+1} - 1) = 6 - t$

125. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

126. $\sqrt[3]{3y-1} + 1 = y$

127. $\sqrt{2b+2+\sqrt{2b+6}} = 4$

128. $\sqrt{2+\sqrt{v}} = \sqrt{2v-4}$

129. $\sqrt{2y} - 2\sqrt{y+1} + 2 = 0$

130. $3\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 8$

131. $\sqrt{2t-3} + \sqrt{t+2} = \sqrt{3t+3}$

132. $\sqrt{3-v} + \sqrt{2+v} = 3$

133. $2 = \sqrt{1-5p} + \sqrt{1-p}$

134. $\sqrt[3]{u+1} = \sqrt[6]{3u+7}$

3.8. (Opcional) Ecuaciones con valor absoluto

El *valor absoluto* de un número real x, denotado $|x|$, es la distancia desde 0 hasta x en la recta real. Si x es positivo, esa distancia es igual a x, y si x es negativo, es su opuesto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|5| = 5$, y $|-3| = -(-3) = 3$. El valor absoluto siempre es mayor o igual que cero.

Si a es un número positivo, entonces existen dos valores de x que cumplen la ecuación

$$|x| = a$$

específicamente, $x = a$ o $x = -a$ (por ejemplo, la ecuación $|x| = 2$ tiene dos soluciones: $x = 2$ o $x = -2$). Pero si a es negativo, la ecuación $|x| = a$ no tiene soluciones (por ejemplo, no existe solución a la ecuación $|x| = -2$ porque ningún x real tiene valor absoluto igual a -2).

Para resolver una ecuación con valor absoluto debe empezarse por despejar el valor absoluto y luego usar el principio enunciado en el párrafo anterior:

$$|x| = a \quad \Rightarrow \quad x = a \text{ o } x = -a \quad \text{si } a \geq 0$$

Para resolver una ecuación con valor absoluto

a. Despejar el valor absoluto.

b. Si el otro lado de la ecuación (opuesto al valor absoluto) es mayor o igual que cero, convertir la ecuación con valor absoluto en dos ecuaciones sin valor absoluto.

c. Resolver las dos ecuaciones.

Ejemplo 21: incógnita dentro de un valor absoluto

Para resolver $5 - 3|2q + 1| = 4$ empezamos por despejar el valor absoluto.

$$\begin{aligned} 5 - 3|2q + 1| &= 4 \\ -3|2q + 1| &= -1 \\ |2q + 1| &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Según el principio del valor absoluto, la cantidad en valor absoluto debe ser igual a $1/3$ o a $-1/3$:

$$\begin{aligned} 2q+1 &= \tfrac{1}{3} & \text{o} \quad 2q+1 &= -\tfrac{1}{3} \\ 2q &= -\tfrac{2}{3} & 2q &= -\tfrac{4}{3} \\ q &= -\tfrac{1}{3} & q &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces, $q = -1/3$ o $q = -2/3$.

Si la cantidad fuera del valor absoluto no es una constante se aplica el mismo principio, con la salvedad de que las soluciones deben comprobarse porque en el procedimiento podrían introducirse soluciones falsas.

Ejemplo 22: incógnita dentro y fuera de un valor absoluto

Resolver $|r+2|+2r = 3$.

Al despejar el valor absoluto obtenemos $|r+2| = 3-2r$, donde el lado derecho, $a = 3-2r$, no es constante. De todos modos separamos y resolvemos:

$$\begin{aligned} r+2 &= 3-2r & \text{o} \quad r+2 &= -(3-2r) \\ 3r &= 1 & r+2 &= -3+2r \\ r &= 1/3 & -r &= -5 \\ & & r &= 5 \end{aligned}$$

Hay al menos dos formas de comprobar las soluciones tentativas, $r = 1/3$ y $r = 5$. Una es sustituir cada valor de la incógnita en la ecuación original y ver si la igualdad es verdadera.

Para $r = 1/3$:

$$\begin{aligned} |(1/3)+2|+2(1/3) &\stackrel{?}{=} 3 \\ |7/3|+2/3 &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Para $r = 5$:

$$\begin{aligned} |(5)+2|+2(5) &\stackrel{?}{=} 3 \\ |7|+10 &\stackrel{?}{=} 3 \\ 17 &\neq 3 \end{aligned}$$

Es evidente que la primera solución, $r = 1/3$, es verdadera, pero la segunda, $r = 5$, es falsa.

La otra forma de comprobar las soluciones es recordar que $|x| = a$ tiene solución solo si $a \geq 0$. Como en este caso $a = 3-2r$, basta con ver si $3-2r \geq 0$:

Para $r = 1/3$:

$$3 - 2(\,1/3\,) \overset{?}{\geq} 0$$
$$7/3 \geq 0$$

Para $r = 5$:

$$3 - 2(\,5\,) \overset{?}{\geq} 0$$
$$-7 \ngeq 0$$

Así vemos de otra manera que $r = 1/3$ cumple el requisito pero $r = 5$ no. Este método de comprobación es más eficiente porque solo requiere evaluar, para cada solución posible, el lado derecho de la ecuación y no la ecuación entera.

En definitiva, la única solución de la ecuación es $r = 1/3$.

Ejercicios

Resuelva

135. $|x-3| = 6$

136. $3|1-v| = 8$

137. $5+3|2q-7| = 38$

138. $5+|4y+3| = y$

139. $3v-|v+5| = 2$

140. $2|4z-7| = 0$

141. $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{3}{2}c\right| = 1$

142. $y = 9-|y-7|$

143. $|3-x|+2x+3 = 0$

144. $|1-q^2| = 8$

145. $\dfrac{|4r+3|}{|r-5|} = 1$

146. $13 = 6p+2|p-5|-5$

147. $\sqrt{(7u-6)^2} = u$

148. $5-2|b-2b^2| = 7+11b$

149. $\left|\dfrac{t}{1-t}\right| = 2$

150. $q^2-|4-5q| = 0$

CAPÍTULO 4
Inecuaciones

Una *inecuación* es una relación de desigualdad entre dos expresiones que involucran alguna variable, llamada *incógnita*. La relación puede ser cierta o no dependiendo del valor de la incógnita, y una *solución* de la inecuación es un valor de la incógnita que haga cierta la desigualdad[1].

Existen cuatro tipos de desigualdades en los números reales:

Estrictamente menor: La relación $a < b$ significa que a es estrictamente menor que b (está estrictamente a la izquierda en la recta real).

Por ejemplo, las desigualdades $-5 < -3$, $1 < 4$ y $0 < 10$ son verdaderas, pero no es cierto que $9 < 8$, que $-1 < -2$ ni que $7 < 7$.

Menor o igual: La relación $a \leq b$ significa que a es menor que b o igual a b.

Por ejemplo, las desigualdades $-5 \leq -3$, $1 \leq 4$ y $7 \leq 7$ son verdaderas, pero no es cierto que $-1 \leq -2$ ni que $10 \leq 0$.

Estrictamente mayor: La relación $a > b$ significa que a es estrictamente mayor que b (está estrictamente a la derecha en la recta real).

Por ejemplo, es cierto que $4 > 1$, $-3 > -5$ y $10 > 0$, pero no es cierto que $-2 > -1$ ni que $7 > 7$.

Mayor o igual: La relación $a \geq b$ significa que a es mayor que b o igual a b.

Por ejemplo, las desigualdades $4 \geq 1$, $-3 \geq -5$ y $7 \geq 7$ son verdaderas, pero no es cierto que $-2 \geq -1$ ni que $0 \geq 10$.

Note que $a < b$ es equivalente a $b > a$ (a es menor que b, b es mayor que a, a está a la izquierda de b, b está a la derecha de a).

De igual manera, $a \leq b$ es lo mismo que $b \geq a$.

[1] También hay inecuaciones con varias incógnitas; de ellas nos ocuparemos en el capítulo 6.

Ejercicios

Indique si cada desigualdad es verdadera o falsa

1. $9 < 11$

2. $4 \geq 2$

3. $2 > 4$

4. $8 > 8$

5. $6 \leq 5$

6. $5 > 0$

7. $3 \leq 3$

8. $-2 \geq -5$

9. $1 < -5$

10. $-4 \leq 2$

11. $-9 \geq 2$

12. $-8 \geq -8$

13. $0 > -3$

14. $-2 < -2$

15. $3 \leq -4$

16. $-3 < 1$

17. $-4 > -1$

18. $-5 \geq 3$

19. $3/5 < 5/7$

20. $-9/4 > -7/2$

21. $28/3 < 50/6$

22. $0.7^6 < 0.7^2$

23. $0.7^{-3} < 0.7^{-1}$

24. $1.2^5 > 1.2^3$

25. $1.2^{-3} > 1.2^{-2}$

26. $\sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{9}$

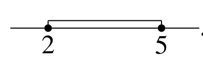
27. $\sqrt{2} < \pi/2$

4.1. Intervalos

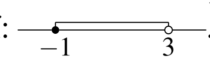
Un *intervalo* en la recta real es un segmento entre dos puntos, o bien una semirrecta a la izquierda o a la derecha de un punto.

Lo anterior no aclara si los puntos extremos se incluyen o no en el intervalo, y es que algunos intervalos incluyen a sus extremos y otros no. Estos son los tipos de intervalos:

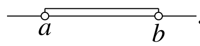
- $[a,b]$ es el intervalo entre los puntos a y b, que incluye a ambos.

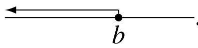
  Por ejemplo, el intervalo $[2,5]$ incluye a todos los números reales desde 2 hasta 5, ambos inclusive, y se puede representar gráficamente así: 
.

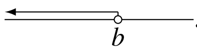
- $[a,b[$ es el intervalo entre los puntos a y b, que incluye a a pero no a b.

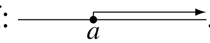
  Por ejemplo, el intervalo $[-1,3[$ incluye a todos los números reales desde -1 hasta 3, incluyendo a -1 pero no a 3, y se puede representar gráficamente así: 
.

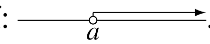
- $]a,b]$ es el intervalo entre los puntos a y b, que incluye a b pero no a a, y se representa gráficamente así: 
.

- $]a,b[$ es el intervalo entre los puntos a y b, que no incluye a a ni a b, y se representa gráficamente así: 

.
- $]-\infty,b]$ es el intervalo a la izquierda del punto b, incluyendo a b, y se puede graficar así: 

.
- $]-\infty,b[$ es el intervalo a la izquierda del punto b, sin incluir a b, y se puede graficar así: 

.
- $[a,\infty[$ es a la derecha del punto a, incluyendo a a, y se grafica así: 

.
- $]a,\infty[$ es a la derecha del punto a, sin incluir a a, y se grafica así: 

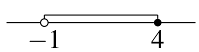
.

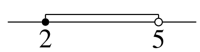
4.1.1. Operaciones entre intervalos

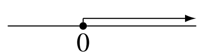
Sean A y B dos conjuntos.

- Su *unión*, denotada $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B (o a ambos). Todos están invitados; bienvenidos los elementos que están solo en A, los que están solo en B y los que están en ambos conjuntos.
- Su *intersección*, denotada $A \cap B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a ambos A y B. Esto es más exclusivo; un elemento se admite en la intersección solo si está en A *y también* en B.

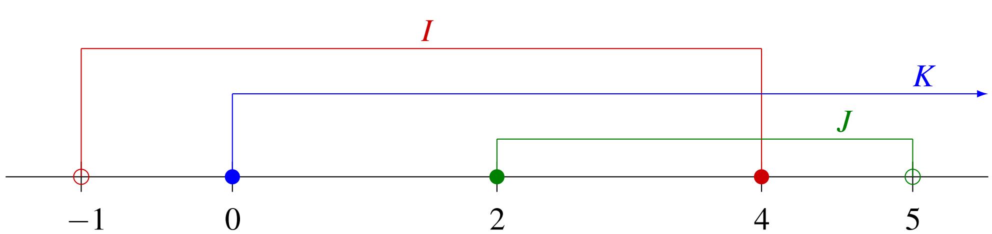
Ejemplo 1: unión e intersección de intervalos

Sea $I =]-1,4]$: 

Sea $J = [2,5[$: 

Y sea $K = [0,\infty[$: 

Podemos graficar los tres en una misma recta de esta forma:



A partir de ese gráfico no es difícil hacer las siguientes operaciones (y en general es recomendable graficar los intervalos para visualizar su unión o intersección).

La unión $I \cup J$ es el intervalo que contiene a todos los números que están en I o en J, o en ambos (los números cubiertos por la línea roja o la verde, o las dos):

$$I \cup J = \left]-1, 5\right[$$

La intersección $I \cap J$ está formada por los números que pertenecen a ambos I y J (los que están cubiertos por las dos líneas roja y verde, no solo una):

$$I \cap J = [2, 4]$$

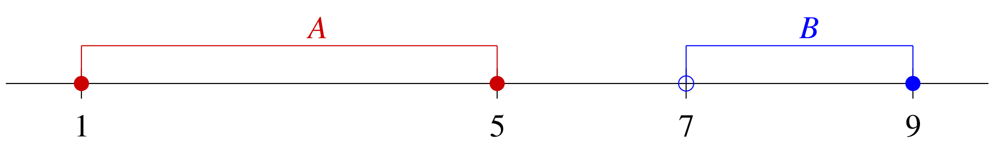
Otras uniones e intersecciones entre estos intervalos son:

$$\begin{aligned} I \cup K &= \left]-1, \infty\right[\\ I \cap K &= [0, 4] \\ J \cup K &= \left[0, \infty\right[\\ J \cap K &= \left[2, 5\right[\end{aligned}$$

La intersección de dos intervalos siempre es un intervalo[2], pero la unión de dos intervalos podría no serlo.

Ejemplo 2: unión e intersección de intervalos separados

Sean A y B los intervalos $A = [1, 5]$ y $B = \left]7, 9\right]$.



Entonces,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \qquad \text{(el conjunto vacío)} \\ A \cup B &= [1, 5] \cup \left]7, 9\right] \end{aligned}$$

El resultado de la segunda operación queda expresado de esa manera y no se puede simplificar.

[2] Incluso si es vacía, ya que el conjunto vacío es un intervalo. Por ejemplo, $\emptyset = \left]0, 0\right[$.

Ejercicios

Evalúe la operación entre intervalos

28. $[-1,3[\cap[2,3]$

29. $]0,2[\cup]-2,5]$

30. $[-4,0]\cup]-2,4[$

31. $[-6,1[\cap]2,5[$

32. $[0,\infty[\cup]-2,1]$

33. $]-6,5[\cap[-5,3[$

34. $]3,\infty[\cap]-2,0]$

35. $[-4,3]\cup]-\infty,-1]$

36. $]-\infty,0[\cup[3,6]$

37. $]-2,0[\cap]-4,1]$

38. $[5,9[\cup]5,\infty[$

39. $]2,8]\cap[3,\infty[$

40. $\big([0,3]\cup[2,4]\big)\cap[1,5]$

41. $\big([3,5]\cup[6,9]\big)\cap[2,8]$

42. $\big(]-\infty,3]\cap[-2,\infty[\big)\cup[0,4]$

4.2. Definición de inecuación

Una *inecuación* es una relación de desigualdad entre dos expresiones que involucran alguna variable, llamada incógnita. La desigualdad puede ser cierta o no dependiendo del valor de la incógnita, y una solución de la inecuación es un valor de la incógnita que haga cierta la desigualdad. Las inecuaciones tienen usualmente un conjunto infinito de soluciones.

Ejemplo 3: inecuación, soluciones

La desigualdad $3x+1\leq 7$ es una inecuación con incógnita x.

Las soluciones de la inecuación son los valores de x que hacen que la desigualdad sea cierta.

Investiguemos algunos valores de x para determinar si son o no solución de la inecuación.

Valor de x	Resultado al sustituir	Resultado simplificado	¿Es cierta la desigualdad?	¿x es solución?
$x=-5$	$3(-5)+1\leq 7$	$-14\leq 7$	Sí	Sí
$x=0$	$3(0)+1\leq 7$	$1\leq 7$	Sí	Sí
$x=2$	$3(2)+1\leq 7$	$7\leq 7$	Sí	Sí
$x=2.001$	$3(2.001)+1\leq 7$	$7.003\leq 7$	No	No
$x=4$	$3(4)+1\leq 7$	$13\leq 7$	No	No
$x=50$	$3(50)+1\leq 7$	$151\leq 7$	No	No

Ejercicios

Determine si cada número dado es solución de la inecuación dada

43. $3-2(a-1)<2(4+a)$; $\;4,\ 1,\ -2,\ -5,\ -7,\ 2$

44. $\dfrac{3-t}{4}<\dfrac{2}{3}$; $\;6,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -4$

45. $(x+3)^2-3x\geq(x-1)^2+5$; $\;3,\ 0,\ 8,\ -2,\ -5$

46. $4x-x^2>3$; $\;0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 1,\ -2$

47. $(v-1)(v+2)\leq(v+1)(v-3)$; $\;-5,\ 0,\ 4,\ -2,\ 3,\ -3$

48. $8p^2+11p\leq 4p^3-3$; $\;-3,\ 3,\ 4,\ 1,\ -0.5,\ -2$

49. $\dfrac{q^2-q}{(q+1)(2-q)}\geq 0$; $\;0,\ 1.5,\ 2,\ 4,\ -4,\ 1,\ -1$

50. $\dfrac{2}{2-r}+\dfrac{1}{r}\leq 3$; $\;0,\ 1,\ 3,\ 2/3,\ -2,\ 2$

51. $\dfrac{-2}{v}\geq\dfrac{-5v}{v^2+6}$; $\;1,\ -2,\ 3,\ 0,\ -1,\ 2,\ -3$

52. $\dfrac{r+4}{3r-6}-\dfrac{r-6}{4r-8}<\dfrac{r+1}{r-2}$; $\;-2,\ 0.5,\ -41,\ -1,\ 3.2,\ 20$

4.3. Teoremas sobre desigualdades

A diferencia de lo que sucede en las ecuaciones, donde cualquier operación que se aplique a ambos lados conserva la igualdad, algunas operaciones pueden cambiar la dirección de una desigualdad. Específicamente:

- Sumar o restar una misma cantidad no altera la desigualdad.

  Por ejemplo, $-3<5$, y si se suma 4 en ambos lados se obtiene

  $$\begin{aligned}-3&<5\\ -3+4&<5+4\\ 1&<9\end{aligned}$$

  que también es cierto.

  También se puede restar (lo que es sumar un número negativo), como aquí al restar 3 (sumar -3) en esta desigualdad:

  $$\begin{aligned}8&\geq 2\\ 8-3&\geq 2-3\\ 5&\geq -1\end{aligned}$$

  lo cual es correcto.

- Multiplicar o dividir por una cantidad *positiva* no altera la desigualdad.

  Por ejemplo, al dividir ambos lados de la desigualdad $15 > 9$ por 3 se obtiene

$$\begin{aligned} 15 &> 9 \\ 15 \div 3 &> 9 \div 3 \\ 5 &> 3 \end{aligned}$$

- Multiplicar o dividir por una cantidad *negativa* invierte la desigualdad.

  Por ejemplo, al multiplicar la desigualdad $-4 \leq 1$ por -3, la desigualdad se invierte:

$$\begin{aligned} -4 &\leq 1 \\ -4 \cdot (-3) &\geq 1 \cdot (-3) \\ 12 &\geq -3 \end{aligned}$$

  Note que la desigualdad se invierte en el momento de indicar la operación (en este ejemplo, en el segundo renglón), incluso antes de calcular los resultados.

Algunas otras operaciones que podrían aplicarse a igualdades, como elevar al cuadrado o invertir una fracción, no tienen reglas sencillas en desigualdades. Por ejemplo, ¿qué sucede al elevar al cuadrado una desigualdad? La desigualdad $-3 < 5$ es cierta, y al elevar ambos lados al cuadrado la desigualdad se mantiene:

$$\begin{array}{ccc} \underset{[\cdots]^2}{-3} & < & \underset{[\cdots]^2}{5} \\ \hline 9 & < & 25 \end{array}$$

Pero también la desigualdad $-3 \leq 2$ es cierta, y al elevar al cuadrado se invierte:

$$\begin{array}{ccc} \underset{[\cdots]^2}{-3} & \leq & \underset{[\cdots]^2}{2} \\ \hline 9 & \geq & 4 \end{array}$$

En resumen, no contamos más que con las tres siguientes propiedades.

Sumar o multiplicar ambos lados de una desigualdad

- Si $x < y$ entonces $x + c < y + c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
- Si $x < y$ entonces $cx < cy$ para cualquier $c > 0$.
- Si $x < y$ entonces $cx > cy$ para cualquier $c < 0$.

El cuadro anterior menciona solo la desigualdad $<$, pero las propiedades son ciertas también para las desigualdades $>$, $\leq$ y $\geq$.

- Sumar (o restar) una misma cantidad conserva la desigualdad.
- Multiplicar (o dividir) por una misma cantidad *positiva* conserva la desigualdad.
- Multiplicar (o dividir) por una misma cantidad *negativa* invierte la desigualdad.

4.4. Inecuaciones lineales

Una *inecuación lineal* es una en la que la incógnita aparece solamente multiplicada por constantes y sumada a constantes, pero no en denominadores o raíces, ni con exponentes distintos de 1. Para resolver una inecuación lineal debe despejarse la incógnita, prácticamente de la misma manera que en una ecuación lineal, pero recordando que las desigualdades a veces se invierten como vimos en la sección anterior.

Por regla general, no deben usarse más que las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división para despejar una incógnita en una inecuación.

Para resolver una inecuación lineal

a. Dejar todos los términos con incógnita en un lado de la inecuación y todos los términos sin incógnita en el otro.

b. Despejar la incógnita.

Ejemplo 4: inecuación lineal

Resolver la inecuación $3(2-r)+5 \geq 7-r$.

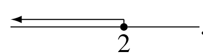
Primero desarrollamos el paréntesis al lado izquierdo, y luego efectuamos las operaciones necesarias para despejar r, teniendo cuidado de mantener o invertir la desigualdad en cada paso.

Así tendremos

$$
\begin{array}{rcll}
6-3r+5 & \geq & 7-r & \\
-3r+11 & \geq & 7-r & \\
-11 & & -11 & \\
\hline
-3r & \geq & -4-r & \text{(se conserva la desigualdad)} \\
+r & & +r & \\
\hline
-2r & \geq & -4 & \text{(se conserva la desigualdad)} \\
\div(-2) & & \div(-2) & \\
\hline
& r \leq 2 & & \text{(se invierte la desigualdad)}
\end{array}
$$

La desigualdad se conserva al restar 11 y al sumar r, pero se invierte al dividir por -2.

Ahora r está despejado, y la solución es $r \leq 2$: cualquier número menor o igual que 2 es solución de la inecuación. La respuesta puede darse en cualquiera de estas tres formas:

- En notación de desigualdad: $r \leq 2$.
- En notación de intervalo: $r \in \,]-\infty, 2]$.
- En notación gráfica: 

.

A veces se dan inecuaciones "dobles", de la forma $a < b < c$ donde a y c son constantes y b es una expresión que incluye la incógnita. Estas inecuaciones pueden resolverse despejando la incógnita en la expresión central.

Ejemplo 5: inecuación lineal doble

La inecuación

$$-6 \leq 7-5u < 11$$

es equivalente a las dos inecuaciones

$$-6 \leq 7-5u \quad \text{y} \quad 7-5u < 11.$$

Cualquiera de ellas se resolvería restando 7 y dividiendo por -5. Al aplicar esas dos operaciones a lo largo de la inecuación doble (es decir, en cada uno de los tres componentes de la inecuación) obtenemos

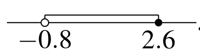
$$\begin{array}{ccccc} -6 & \leq & 7-5u & < & 11 \\ {\scriptstyle -7} & & {\scriptstyle -7} & & {\scriptstyle -7} \\ \hline -13 & \leq & -5u & < & 4 \\ {\scriptstyle \div(-5)} & & {\scriptstyle \div(-5)} & & {\scriptstyle \div(-5)} \\ \hline 2.6 & \geq & u & > & -0.8 \end{array}$$

(se conservan las desigualdades)

(se invierten las desigualdades)

La solución es entonces $2.6 \geq u > -0.8$ o, en forma equivalente, $-0.8 < u \leq 2.6$; en notación de desigualdad son válidas esas dos opciones.

En notación de intervalo, la única forma correcta de escribir la solución es $u \in]-0.8, 2.6]$.

Y en notación gráfica, la forma es 

.

Ejercicios

Resuelva y dé la respuesta en las tres formas

53. $4c - 13 \geq 7$

54. $2q - 3 < 4 + 7q$

55. $-(1-x) \leq 2x - 1$

56. $2 + 5(3-b) > 4(b+1)$

57. $17 + 5(z+2) \leq z - 3(z-2)$

58. $3 - 2(a-1) < 2(4+a)$

59. $\dfrac{3-t}{4} < \dfrac{2}{3}$

60. $-3p + 2\sqrt{2} \geq p - 2\sqrt{2}$

61. $9 - 0.1v > \dfrac{2 - 0.01v}{0.2}$

62. $\dfrac{4z+5}{2} \leq \dfrac{3-3z}{-4}$

63. $w^2 > (w-1)^2 + 5$

64. $(v-1)(v+2) < (v+1)(v-2)$

65. $(x+3)^2 - 3x \geq (x-1)^2 + 5$

66. $-4 < 6q - 1 \leq 5$

67. $-9 < 3c - 7 < 1$

68. $6 \geq 2(4-t) \geq 0$

69. $7 < u - 4(2+u) \leq -1$

70. $3 \geq \dfrac{x-1}{3} > -4$

71. $\dfrac{8}{3} > \dfrac{3-2p}{-6} \geq \dfrac{1}{2}$

72. $-3 \geq \dfrac{2-t}{-3} > -5$

73. $a + 3 \leq 3a + 1 \leq a + 7$

4.5. Inecuaciones polinomiales

Las inecuaciones no lineales, así como las ecuaciones no lineales, no se resuelven despejando la incógnita. Más bien se agrupan todos los términos en un lado de la desigualdad, dejando cero en el lado opuesto, para después factorizar el lado con los términos y analizar su signo según los signos de sus factores.

Estos son los pasos, que ilustraremos en los ejemplos que siguen:

Para resolver una inecuación polinomial

a. Agrupar todos los términos en un lado de la desigualdad ("desigualar" a cero).

b. Encontrar los ceros del lado que no es cero.

c. Hacer un mapa de signos.

d. Leer la solución a partir del mapa.

Ejemplo 6: inecuación cuadrática

Resolver la inecuación $7x - 2x^2 \leq 5$.

Así son los pasos recién enumerados.

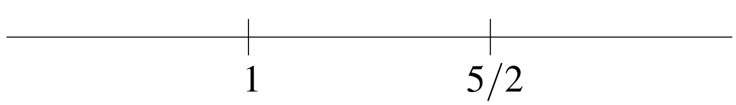
a. Agrupamos todos los términos a la izquierda:

$$7x - 2x^2 - 5 \leq 0$$

b. Encontrar los ceros de $7x - 2x^2 - 5$: ellos son 1 y $5/2$. Estos son los únicos puntos donde el signo del polinomio puede cambiar.

c. Un *mapa de signos* del polinomio $7x - 2x^2 - 5$ es una recta real donde se indican los signos del polinomio en cada intervalo a los lados de sus ceros.

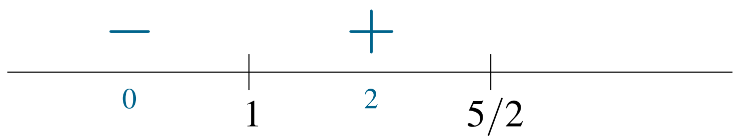
Empezamos por representar la recta real indicando los dos ceros:



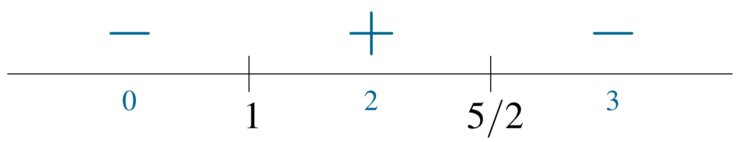
Luego buscamos un *punto de prueba* en cada uno de los tres intervalos: a la izquierda de 1, entre 1 y $5/2$, y a la derecha de $5/2$ (un punto de prueba es cualquier número en el intervalo, sin incluir los extremos). En cada punto de prueba buscamos el signo del polinomio y lo indicamos en el mapa.

A la izquierda de 1 podemos escoger el punto de prueba $x = 0$. Evaluar el polinomio en $x = 0$ da por resultado -5, negativo, y así lo indicamos:

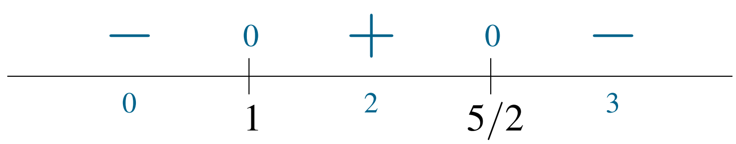
Para el segundo intervalo, entre 1 y $5/2$, tomamos el punto de prueba $x = 2$. Al sustituirlo en el polinomio el resultado es 1, positivo:



Por último, en el tercer intervalo podemos tomar $x = 3$, donde el polinomio vale -2. El cuadro de signos ahora luce así:



El último paso es indicar qué sucede en cada uno de los ceros: sucede que el polinomio es cero (pero compare con lo que sucede en las inecuaciones fraccionarias, sección 4.6 donde la expresión podría estar indefinida).



d. Leer la solución en el mapa: es momento de recordar que estamos resolviendo

$$7x - 2x^2 - 5 \leq 0$$

lo que significa que estamos buscando los intervalos donde el polinomio sea menor o igual que cero. En nuestro mapa, menor que cero se indica sobre el eje con el signo $-$, e igual a cero se indica con un 0. Con eso, la solución es fácilmente visible: a la izquierda de 1 y a la derecha de $5/2$, incluyendo a ambos.

En notación de intervalos, el conjunto de soluciones es $]-\infty, 1] \cup [5/2, \infty[$.

Ejercicios

Resuelva

74. $a^2 > a$

75. $r^3 > r^2$

76. $4x - x^2 > 3$

77. $2y^2 < 5$

78. $4c^2 + 3c < 1$

79. $(4q-6)^2(q^2+5) \leq 0$

80. $(v-1)(v+2) \leq (v+1)(v-3)$

81. $3t^2 \geq \frac{2}{3}t^3 - 6t$

82. $w^3 - 2w^2 - 4w + 8 > 0$

83. $8p^2 + 11p \leq 4p^3 - 3$

84. $(u-2)^2(u+5/3)^2 < 0$

85. $8a^4 - 8a^5 - 8a^3 > 27a - 27a^2 - 27$

4.6. (Opcional) Inecuaciones fraccionarias

Una *inecuación fraccionaria* es una que involucra alguna fracción con una incógnita en su denominador.

El procedimiento para resolver una inecuación fraccionaria es muy parecido al de inecuaciones polinomiales: desigualar a cero, encontrar los ceros, hacer un mapa de signos y leer la solución en el mapa.

Una diferencia importante es que en el segundo paso, encontrar los ceros, vamos a necesitar una sola fracción en un lado de la inecuación, y encontrar los ceros del numerador y los ceros del denominador.

Para resolver una inecuación fraccionaria

a. Agrupar todos los términos en un lado de la desigualdad (“desigualar” a cero) y escribir ese lado como una sola fracción.

b. Encontrar los ceros del numerador y los del denominador.

c. Hacer un mapa de signos.

d. Leer la solución a partir del mapa.

Ejemplo 7: inecuación fraccionaria

Resolver la inecuación $\dfrac{z(z^2+3)}{-6(4-z)} \leq 0$.

a. Desigualar a cero y escribir todo el lado como una sola fracción: ya está listo.

   Para hacer algo, podemos despachar la constante -6 en el denominador multiplicando ambos lados de la desigualdad por -6:

$$\frac{z(z^2+3)}{4-z} \geq 0$$

   La desigualdad se invierte porque el multiplicador es negativo, y el lado derecho sigue siendo $0(-6) = 0$. Note que sería un error grave querer cancelar el denominador completo multiplicando ambos lados por $-6(4-z)$, porque no sabemos si la desigualdad se mantendrá o se invertirá: el signo de $-6(4-z)$ es desconocido.

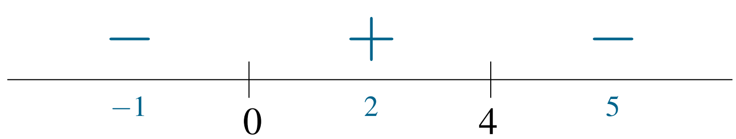
b. La lista de ceros del numerador y del denominador es la siguiente: $z = 0$ en el numerador y $z = 4$ en el denominador.

c. Pasemos al mapa de signos. Como los ceros son 0 y 4, empezamos por marcarlos en la recta real. De una vez escojamos los puntos de prueba (digamos -1, 2 y 5), y así va el mapa:

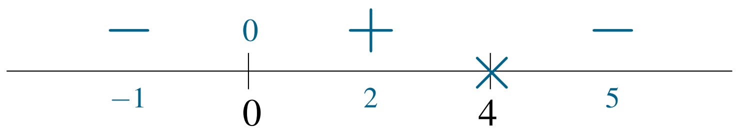
   Para cada intervalo evaluamos la fracción en el punto de prueba respectivo y encontramos lo siguiente (suponiendo que llamamos $f(z)$ a la fracción):

z	-1	2	5
$f(z)$	$-4/5$	7	-140

   Solamente nos interesan los signos, y así los indicamos en el mapa:



   Lo último es indicar qué sucede en cada cero. En $z = 0$ la fracción vale 0 porque tiene un cero en su numerador. Pero en $z = 4$ la fracción está indefinida porque tiene un cero en su denominador. Eso se indica de esta manera:



d. Por último, como la inecuación es $\dfrac{z(z^2+3)}{4-z} \geq 0$, buscamos los intervalos donde la fracción sea mayor o igual a cero: eso sucede solo entre 0 y 4, incluyendo a 0 pero no a 4.

El conjunto de soluciones es entonces el intervalo $[0,4[$.

Ejemplo 8: inecuación fraccionaria

Resolver la inecuación fraccionaria (o racional) $\dfrac{5u}{u-6} \geq \dfrac{5}{2-u}$.

a. Desigualar a cero y agrupar el lado izquierdo en una sola fracción:

$$\frac{5u}{u-6} - \frac{5}{2-u} \geq 0$$
$$\frac{5u(2-u)-5(u-6)}{(u-6)(2-u)} \geq 0$$
$$\frac{-5u^2+5u+30}{(u-6)(2-u)} \geq 0$$

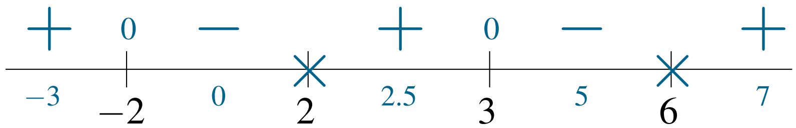
b. Los ceros del numerador son -2 y 3, y los del denominador, 6 y 2.

c. Dibujamos una recta real incluyendo los cuatro ceros, e incluyendo ya los puntos de prueba:

Al evaluar la fracción del lado izquierdo en cada punto de prueba se obtienen estos signos:

Para completar el mapa de signos falta indicar qué sucede en cada cero: ¿la fracción vale cero o está indefinida? En los ceros del numerador (que son

-2 y 3) la fracción vale cero, y para los ceros del denominador (6 y 2) la fracción está indefinida. Ahora tenemos aquí el mapa completo:



d. Por último, para leer la solución recordamos que estamos buscando dónde la fracción es mayor o igual que cero: positiva o cero. Eso sucede a la izquierda de -2 incluyendo a -2, entre 2 y 3 incluyendo a 3 pero no a 2, y a la derecha de 6 sin incluirlo.

En notación de intervalos, la solución es $]-\infty,-2]\cup]2,3]\cup]6,\infty[$.

Ejemplo 9: inecuación no lineal doble

Resolver la inecuación doble

$$\frac{3}{x-1} \leq 1 \leq 6+4x-x^2$$

Aquí tenemos dos inecuaciones simultáneas, pero no podemos usar el método del ejemplo 5 porque allá las inecuaciones eran lineales, de las que se resuelven despejando la incógnita. Aquí tenemos dos inecuaciones no lineales, y para cada una hay que empezar por desigualar a cero.

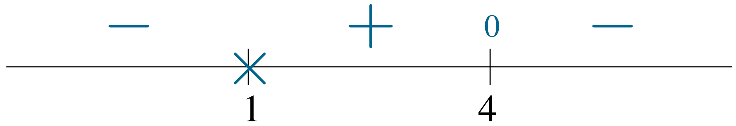
Será necesario separar las inecuaciones y resolverlas por aparte. Las dos inecuaciones separadas son

$$\frac{3}{x-1} \leq 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq 6+4x-x^2$$

- Para resolver la primera, desigualamos a cero y sacamos denominador común:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1}-1 &\leq 0 \\ \frac{3-(x-1)}{x-1} &\leq 0 \\ \frac{4-x}{x-1} &\leq 0 \end{aligned}$$

  Los ceros son 1 y 4, y el mapa de signos es



Como la desigualdad pide ≤ 0, la solución es $A =]-\infty, 1[\cup [4, \infty[$.

- La segunda inecuación es polinomial. Al desigualar a cero obtenemos

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

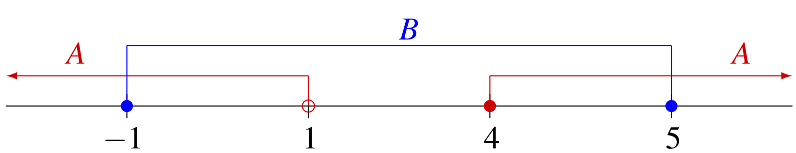
Los ceros son -1 y 5, y el mapa de signos es

La solución es $B = [-1, 5]$.

Para combinar las soluciones de las dos inecuaciones y llegar a una solución final es necesario tener en cuenta que lo que buscamos es el conjunto de puntos que satisface ambas ecuaciones. Esos son los números que están en ambas soluciones, o en otras palabras, en la intersección de las soluciones:

$$A \cap B = \big(\,]-\infty, 1] \cup [4, \infty[\, \big) \; \cap \; [-1, 5]$$

Esa intersección es más fácil de encontrar de manera gráfica. Grafiquemos ambas soluciones en una misma recta, la primera en color rojo y la segunda en azul.



La intersección es la parte de la recta que pertenece a ambas soluciones A y B: la unión de los intervalos $[-1, 1[$ y $[4, 5]$, es decir,

$$[-1, 1[\, \cup \, [4, 5]$$

En el ejemplo 12 (página 120) veremos otro caso de inecuación no lineal doble.

Ejercicios

Resuelva

86. $\dfrac{1}{z-3} \leq \dfrac{3}{z+1}$

87. $\dfrac{2t}{1-2t} \leq \dfrac{3-t}{t}$

88. $\dfrac{2}{2-r} + \dfrac{1}{r} \leq 3$

89. $\dfrac{q^2-q}{(q+1)(2-q)} \geq 0$

90. $\dfrac{9}{b+2} - \dfrac{21}{b+4} > -2$

91. $\dfrac{3t+2}{t-5} < \dfrac{4t-7}{t-5}$

92. $\dfrac{3}{p} \geq \dfrac{7}{p+2}$

93. $\dfrac{x-2}{x+2} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$

94. $\dfrac{-2}{v} \geq \dfrac{-5v}{v^2+6}$

95. $\dfrac{t^2-2t+3}{t+1} \geq 1$

96. $\dfrac{u}{u-2} - \dfrac{u+2}{u-1} \geq \dfrac{3u}{u^2-3u+2}$

97. $\dfrac{-2a^2+2a-1}{(a-1)(a+3)} \leq 0$

98. $\dfrac{r+4}{3r-6} - \dfrac{r-6}{4r-8} < \dfrac{r+1}{r-2}$

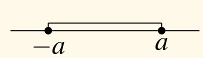
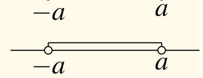
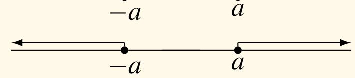
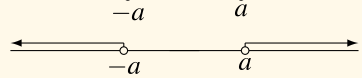
99. $\dfrac{1}{q} - \dfrac{q}{2q-1} \geq 1$

100. $\dfrac{6}{y} \leq 3y-7 \leq 2y^2-6y-12$

101. $2-x < \dfrac{x}{x-1} \leq 3x-4$

4.7. (Opcional) Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver inecuaciones con valor absoluto es necesario conocer estas propiedades, para una constante $a > 0$:

Tipo de inecuación	Solución como desigualdad	Solución en intervalos	Solución gráfica
$\lvert x\rvert \leq a$	$-a \leq x \leq a$	$[-a,a]$	
$\lvert x\rvert < a$	$-a < x < a$	$]-a,a[$	
$\lvert x\rvert \geq a$	$x \leq -a$ o $x \geq a$	$]-\infty,-a] \cup [a,\infty[$	
$\lvert x\rvert > a$	$x < -a$ o $x > a$	$]-\infty,-a[\cup]a,\infty[$	

Si a es negativo, las inecuaciones $|x| \leq a$ y $|x| < a$ no tienen solución porque no existen valores absolutos menores que números negativos (por ejemplo, $|x| < -1$ no tiene solución). Y las inecuaciones $|x| \geq a$ y $|x| > a$ tienen por solución todos los números reales porque cualquier valor absoluto es mayor que cualquier número negativo (por ejemplo, $|x| > -1$ tiene por solución el conjunto $\mathbb{R}$).

Generalmente x será no simplemente una incógnita, sino alguna expresión que involucra la incógnita. En todo caso, el primer paso para resolver una inecuación con valor absoluto es despejar el valor absoluto para llegar a una de las cuatro formas en el cuadro anterior.

Para resolver una inecuación con valor absoluto

a. Despejar el valor absoluto.

b. Convertir la inecuación con valor absoluto en dos inecuaciones sin valor absoluto (usando el cuadro arriba).

c. Resolver las dos inecuaciones sin valor absoluto.

Ejemplo 10: inecuación con valor absoluto menor

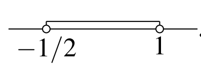
Para resolver $6+3|1-4r| < 15$ se empieza por despejar el valor absoluto:

$$\begin{aligned} 6+3|1-4r| &< 15 \\ 3|1-4r| &< 9 \\ |1-4r| &< 3 \end{aligned}$$

Estamos en el segundo caso del cuadro arriba, con un valor absoluto estrictamente menor que una constante positiva. Pasamos entonces a la forma $-3 < 1-4r < 3$ y resolvemos esta inecuación doble:

$$\begin{aligned} -3 < 1-4r &< 3 \\ -4 < -4r &< 2 \\ 1 > r &> -1/2 \end{aligned}$$

En notación de intervalo escribimos $r \in \left]-1/2, 1\right[$.

En forma gráfica dibujamos 

.

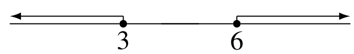
Ejemplo 11: inecuación con valor absoluto mayor

Al resolver $w-|2w-9| \leq w-3$, no podemos suponer todavía que estamos en el primer caso de la tabla, hasta haber despejado el valor absoluto:

$$\begin{aligned} w-|2w-9| &\leq w-3 \\ -|2w-9| &\leq -3 \\ |2w-9| &\geq 3 \end{aligned}$$

Estamos realmente en el tercer caso, con un valor absoluto mayor o igual que una constante positiva. Pasamos entonces a dos inecuaciones:

$$\begin{aligned} 2w-9 &\leq -3 & \quad \text{o} \quad 2w-9 &\geq 3 \\ 2w &\leq 6 & 2w &\geq 12 \\ w &\leq 3 & w &\geq 6 \end{aligned}$$

La solución puede darse en desigualdades, $w \leq 3$ o $w \geq 6$; en intervalos, $]-\infty,3] \cup [6,\infty[$, o bien en en forma gráfica, 

Ejemplo 12: polinomio cuadrático dentro de valor absoluto

Para resolver $|c^2+6c| < 5$ empezamos por usar las reglas para desigualdades con valor absoluto, y convertir en una inecuación doble:

$$-5 < c^2+6c < 5$$

Como no se puede despejar la incógnita, se debe resolver cada inecuación por separado (ya habíamos tenido que hacer esto en el ejemplo 9, página 116). La primera inecuación,

$$\begin{aligned} -5 &< c^2+6c \\ 0 &< c^2+6c+5 \\ 0 &< (c+5)(c+1) \end{aligned}$$

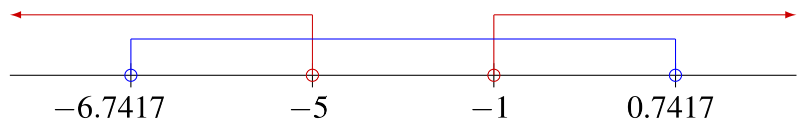
tiene solución (no mostramos el procedimiento) $]-\infty,-5[\cup]-1,\infty[$.

Y la segunda,

$$\begin{aligned} c^2+6c &< 5 \\ c^2+6c-5 &< 0 \\ (c+3-\sqrt{14})(c+3+\sqrt{14}) &< 0 \\ (c-0.7417)(c+6.7417) &< 0 \qquad \text{(aproximadamente)} \end{aligned}$$

tiene solución aproximada $]-6.7417, 0.7417[$.

Como deben cumplirse las dos desigualdades, la solución final será la intersección de las dos soluciones, y tal vez la mejor forma de encontrarla sea gráficamente. Veamos aquí la primera solución en color rojo y la segunda en azul:



La intersección (la región que pertenece a ambas soluciones) es

$$]-6.7417, -5[\cup]-1, 0.7417[$$

Ejercicios

Resuelva

102. $2|4p-3|-6 \leq 0$

103. $\frac{3}{5}|4v-4|-6 \leq 18$

104. $8-|4-z| > 5$

105. $1-|5-t| < -\frac{2}{5}$

106. $8-2|1-4r| \geq 2$

107. $\frac{3}{2} > \frac{5}{3}|6z-1|$

108. $0 \geq 4|x-6|+2$

109. $1-\frac{2}{5}|3-4u| \leq \frac{5}{4}$

110. $\frac{4}{3} > -5\left|\frac{5}{6}y+5\right|+\frac{3}{2}$

111. $-3\left|5b-\frac{1}{4}\right| \geq 2$

112. $4 \leq \left|\dfrac{6c+4}{5}\right|-10$

113. $\frac{3}{4} < \frac{1}{2}|a+5|+3$

114. $3+12q < 6(2q-\frac{3}{2}|2q+3|+1)$

115. $1 \leq \frac{4}{5}\left|\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right|-6$

116. $7(2-|3v+1|) \geq 14$

117. $2\sqrt{(z-4)^2} \leq 8$

118. $5-\sqrt{(2c-1)^2} \leq 0$

119. $2\sqrt{2}+3\sqrt[6]{\dfrac{(1-y)^6}{8}} > 5\sqrt{2}$

120. $6-3x > 3(\sqrt{25-30x+9x^2}-x)$

121. $2 \leq |u+4| < 6$

122. $5 < |1-3p| \leq 11$

123. $|w^2-16| < 4$

124. $\left|3-\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$

125. $|t^3-3t| \geq 2$

126. $\left|\dfrac{5b+3}{2b}\right| \geq 3$

4.8. (Opcional) Aplicaciones de las inecuaciones

Para resolver problemas de aplicación de inecuaciones se siguen prácticamente los mismos pasos que vimos en las aplicaciones de ecuaciones. La diferencia será que en vez de plantear una igualdad se planteará una desigualdad, y en vez de resolver una ecuación se resolverá una inecuación.

Para resolver un problema de aplicación de inecuaciones

a. Definir la incógnita.

b. Escribir la desigualdad requerida por el problema, en palabras si es necesario.

c. Refinar cada lado de la desigualdad hasta escribir ambos en términos de la incógnita.

d. Resolver la inecuación resultante del paso anterior.

e. Responder la pregunta que se planteó.

Es útil tener presentes estas equivalencias entre desigualdades y afirmaciones (estos son algunos ejemplos; existen otras formas):

- $A < B$: A es menor que B, A es menos que B.
- $A > B$: A es mayor que B, A es más que B.
- $A \leq B$: A es a lo sumo B, A es como máximo B, A no excede B.
- $A \geq B$: A es al menos B, A es como mínimo B, A es B o más.
- $A < B < C$: B está estrictamente entre A y C.
- $A \leq B \leq C$: B está entre A y C inclusive.

Ejemplo 13: costos, ventas, utilidades

Un artículo se produce con un costo unitario de \$8 y se vende a un precio de p dólares. Hay un costo fijo de producción de \$1000, y la ecuación de demanda es $n = 600 - 15p$. ¿Qué precio debe fijarse para que la utilidad sea por lo menos \$2500?

a. La incógnita principal es el precio, p. Una variable secundaria es el número de unidades, $n = 600 - 15p$.

b. La desigualdad requerida es [Utilidad] ≥ 2500.

c. Como la utilidad es el ingreso menos el costo, tendremos

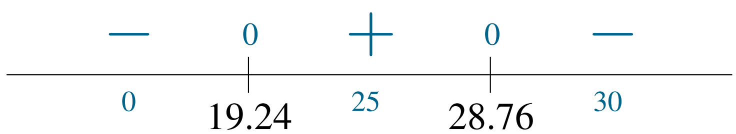
$$\begin{aligned}
[\text{Ingreso}] - [\text{Costo}] &\geq 2500 \\
[np] - [1000 + 8n] &\geq 2500 \\
[(600 - 15p)p] - [1000 + 8(600 - 15p)] &\geq 2500 \\
600p - 15p^2 - 1000 - 4800 + 120p &\geq 2500 \\
720p - 15p^2 - 5800 &\geq 2500
\end{aligned}$$

y esta es la inecuación por resolver.

d. Como es una inecuación cuadrática, primero desigualamos a cero

$$-15p^2 + 720p - 8300 \geq 0$$

Los ceros son 19.24 y 28.76, de manera que el mapa de signos es así:



y la solución es $19.24 \leq p \leq 28.76$.

e. Debe fijarse un precio entre \$19.24 y \$28.76, inclusive.

Ejemplo 14: depreciación

Una máquina comprada por diez millones de colones se deprecia a razón de ₡750 000 por año. ¿Durante cuál intervalo de tiempo, en años después de comprada, estará su valor entre cuatro millones y seis millones de colones, ambos inclusive?

a. La incógnita es t, el número de años desde que se compró la máquina.

b. La desigualdad es que el valor esté entre cuatro millones y seis millones de colones: $4\,000\,000 \leq [\text{Valor}] \leq 6\,000\,000$.

c. El valor es el precio de compra, ₡10 000 000, menos la depreciación, y esta es de ₡750 000 por año. De ahí que

$$4\,000\,000 \leq [\text{Precio}] - [\text{Depreciación}] \leq 6\,000\,000$$
$$4\,000\,000 \leq 10\,000\,000 - 750\,000t \leq 6\,000\,000$$

d. Resolvemos las dos inecuaciones simultáneamente como ya hemos hecho:

$$\begin{gathered}
4\,000\,000 - 10\,000\,000 \leq -750\,000t \leq 6\,000\,000 - 10\,000\,000 \\
-6\,000\,000 \leq -750\,000t \leq -4\,000\,000 \\
\frac{-6\,000\,000}{-750\,000} \geq t \geq \frac{-4\,000\,000}{-750\,000} \\
8 \geq t \geq 5.\bar{3}
\end{gathered}$$

e. Desde los $5.\bar{3}$ años (5 años y 4 meses) hasta los 8 años, ambos inclusive.

Ejercicios

Resuelva

127. Un estudiante tiene notas de 82 y 90 en los dos primeros exámenes parciales. ¿Qué nota necesita en el tercero para que el promedio de los tres sea por lo menos 85?

128. Una fábrica de lápices tiene costos fijos de ₡5 000 000 al mes, y costos unitarios de ₡80 por lápiz. Si cada lápiz se vende por ₡180, ¿cuántos deben producir y vender en un mes para tener utilidades de al menos ₡4 000 000?

129. Una línea aérea opera una ruta con un costo fijo de $12 000 y un costo variable de $125 por pasajero. Si el tiquete se vende a $400 por pasajero, ¿cuántos pasajeros necesitan transportar para no tener pérdidas?

130. ¿Cuántos galones de una pintura que cuesta ₡44 000 el galón deben mezclarse con ocho galones de otra que cuesta ₡30 000 el galón para obtener una mezcla que cueste menos de ₡40 000 el galón?

131. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡4800 el kilo, con pasas, que cuestan ₡11 200 el kilo. Desea obtener 25 kilos de una mezcla que no cueste más de ₡8000 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces deberá contener la mezcla?

132. Un vendedor normalmente permanece en su oficina entre cinco y quince horas de las cuarenta horas semanales de trabajo. ¿Cuánto tiempo trabaja fuera de la oficina semanalmente?

133. Un hotel con cien habitaciones se llena si la tarifa es de $36 la noche. Por cada $1 (o fracción) que aumente la tarifa, dos habitaciones quedarán sin alquilar. ¿Qué tarifa deben cobrar para alquilar más de 85 habitaciones?

134. Cuando un fontanero va a trabajar a una casa, cobra ₡25 000 por la visita más ₡10 000 por cada hora de trabajo. ¿Cuántas horas puede durar una visita para que el costo no exceda los ₡60 000?

135. Un taxista debe invertir ₡8 000 000 en comprar su taxi, más ₡320 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer para que el costo total sea menor que ₡10 000 000?

136. Un tractor cuesta \$16 000 nuevo, y se deprecia a razón de \$2500 por año. ¿En qué intervalo de tiempo tendrá un valor entre \$5000 y \$6000?

137. Una compañía fabrica un producto con un costo unitario de ₡7500 y un precio de venta de ₡10 000. Si los costos fijos son ₡300 000 000, ¿cuántas unidades deben producir y vender para tener utilidades?

138. En una compañía, los vendedores en un plan reciben cada mes ₡800 000 más un 3 % de las ventas, mientras que los vendedores en el otro plan reciben solo una comisión de 8 % sobre las ventas mensuales. ¿Para qué nivel de ventas mensuales conviene más estar en el segundo plan?

139. Un vendedor gana una comisión de 2 % sobre sus primeros ₡40 000 000 de ventas, más un 10 % por sus ventas adicionales (por ejemplo, si vende ₡48 000 000 recibe un 2 % de ₡40 000 000 más un 10 % de ₡8 000 000). ¿Cuánto debe vender para recibir una comisión mayor que ₡1 000 000?

140. Si un producto se vende a p colones por unidad, el público comprará $200 - 0.1p$ unidades. ¿Qué precio debe fijarse para obtener ingresos superiores a ₡96 000?

141. Al sumar los números enteros desde 1 hasta n, la suma será $S = \frac{1}{2}n(n+1)$. Por ejemplo, al sumar desde 1 hasta 5, la suma $1+2+3+4+5$ será igual a $\frac{1}{2}(5)(6) = 15$. ¿Cuántos enteros deben sumarse, a partir de 1, para que la suma sea al menos 1000?

142. El número de diagonales en un polígono con n lados es $D = \frac{1}{2}n(n-1) - n$. ¿Cuáles polígonos tienen menos de veinte diagonales?

143. Un automóvil parte a las 2 pm en un viaje de 100 km. Durante los primeros 50 km su velocidad promedio es de 60 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer el resto de la distancia para llegar a su destino antes de las 3:30 pm? (Recuerde: $v = d/t$.)

144. Se va a construir una caja sin tapa a partir de una hoja de lata cuadrada, de 40 cm de lado, recortándole un pequeño cuadrado de cada esquina y levantando las pestañas que quedan en cada lado. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se recortan para que la caja resultante tenga un volumen de al menos 4000 cm cúbicos?

145. El largo de un terreno rectangular es el doble de su ancho. ¿Cuáles dimensiones darán una área mayor que 300 m^2?

146. Una bola se lanza hacia arriba, y t segundos después su altura es $15t - 4.9t^2$ metros. ¿Durante qué intervalo de tiempo su altura será mayor que 8 m?

147. Un rectángulo tiene un lado de 25 cm y un perímetro que se estima en 75 cm más/menos 5 cm (es decir, $|P - 75| \leq 5$ donde P es el perímetro). ¿Cuál es el intervalo de valores posibles para el segundo lado del rectángulo?

148. Un vendedor recibe un 5 % de comisión por sus ventas. Si un mes estima que ha vendido unos ₡2 350 000 con un margen de error de ₡10 000 (es decir, $|V - 2350000| \leq 10000$ donde V son las ventas), ¿cuál es el intervalo de valores posibles para su comisión?

CAPÍTULO 5

Matrices y sistemas de ecuaciones

5.1. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un *sistema de ecuaciones lineales* con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales, cada una con las mismas dos incógnitas. Una *solución* del sistema es un par de valores, uno para cada incógnita, que satisfacen cada ecuación.

Ejemplo 1: sistema de ecuaciones, incógnitas, solución

El sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

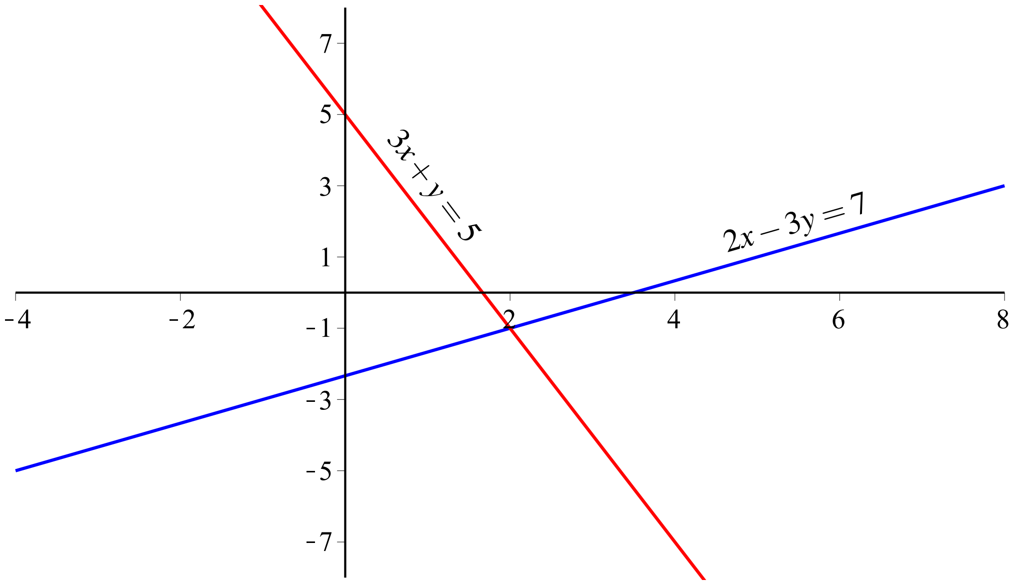
es un sistema de dos ecuaciones lineales con las incógnitas x y y.

El par $x = 5$, $y = 1$ es una solución de la primera ecuación (porque $2(5) - 3(1) = 7$), pero no es solución de la segunda (porque $3(5) + (1) \neq 5$). Entonces, los valores $x = 5$, $y = 1$ no son una solución del sistema.

De la misma manera, el par $x = -1$, $y = 8$ satisface la segunda ecuación pero no la primera, por lo que no es solución del sistema.

En cambio, los valores $x = 2$, $y = -1$ satisfacen tanto la primera como la segunda ecuación (ya que $2(2) - 3(-1) = 7$ y $3(2) + (-1) = 5$), por lo que sí forman una solución del sistema.

Sabemos que una ecuación lineal con dos incógnitas puede representarse geométricamente como una recta en el plano, y los puntos en la recta son los pares de valores que satisfacen la ecuación. Por ejemplo, las dos ecuaciones del ejemplo anterior pueden graficarse simultáneamente como vemos en este gráfico.



Los puntos en la recta azul satisfacen la primera ecuación, y los puntos en la recta roja satisfacen la segunda. Se deduce que el punto donde las dos rectas se intersecan, es decir el único punto que pertenece a ambas, es el que satisface las dos ecuaciones y por lo tanto el sistema.

En general, la solución de un sistema de dos ecuaciones es el punto de intersección entre las dos rectas correspondientes a las ecuaciones. Si las rectas no se intersecan (por ser paralelas), el sistema no tiene solución. Y si las dos ecuaciones representan la misma recta, entonces hay infinitas soluciones porque cada punto en la recta es solución de ambas ecuaciones.

Pasemos a estudiar algunos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

5.1.1. Despejar y sustituir

Un método para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación para sustituirla en la otra ecuación.

Ejemplo 2: el método de despejar y sustituir

Resolver el sistema $\begin{cases} 4a+b=3 & [1] \\ 2a-3b=12 & [2] \end{cases}$

Podemos ver que es muy fácil despejar la incógnita b en la ecuación [1]:

$$[1] \Rightarrow \quad b = 3 - 4a \quad [3]$$

Ahora esa expresión para b se sustituye en la ecuación [2]:

$$[2] \Rightarrow \quad 2a - 3(3-4a) = 12$$

lo que resulta en una ecuación lineal con una sola incógnita, a.

Al resolverla obtenemos $a = 21/14 = 1.5$. Finalmente sustituimos este valor de a en la ecuación [3], que da el valor de b:

$$[3] \Rightarrow \quad b = 3 - 4(1.5) = -3$$

La solución del sistema es entonces $a = 1.5$, $b = -3$, que podemos indicar con el par ordenado (alfabéticamente) $(1.5, -3)$.

Ejemplo 3: despejar y sustituir

Resolver el sistema $\begin{cases} 37p - 12q = -1 & [1] \\ -4p + 6q = 160 & [2] \end{cases}$

En este sistema ninguna incógnita tiene coeficiente 1 en ninguna ecuación (que fue la razón de que fuera muy fácil despejar b de la primera ecuación en el ejemplo anterior).

Pero no es complicado despejar p de la segunda ecuación, así:

$$[2] \Rightarrow \quad p = \frac{160 - 6q}{-4} = 1.5q - 40 \quad [3]$$

Ahora esta expresión se sustituye en la ecuación [1],

$$[1] \Rightarrow \quad 37(1.5q - 40) - 12q = -1$$

cuya solución es $q = 34$. Regresamos a la ecuación [3] para sustituir este valor y encontramos que

$$[3] \Rightarrow \quad p = 1.5(34) - 40 = 11$$

Con eso tenemos ya la solución: $p = 11$, $q = 34$, o bien $(11, 34)$.

Ejemplo 4: un sistema con infinitas soluciones

Resolver el sistema $\begin{cases} x-4y=-2 & [1] \\ -3x+12y=6 & [2] \end{cases}$

Al despejar x de la primera ecuación, $x=4y-2$, y sustituir en la segunda, se obtiene

$$-3(4y-2)+12y=6$$

que se reduce a $6=6$, para la cual la solución es $y \in \mathbb{R}$.

El sistema tiene entonces infinitas soluciones, que se pueden especificar como

$$x=4y-2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Simétricamente, si empezáramos por despejar y en vez de x, llegaríamos a

$$y=(x+2)/4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Cualquiera de las dos formas anteriores se conoce como la *solución general* del sistema (porque describe todas las soluciones que existen).

A partir de la solución general en cualquiera de sus dos formas se pueden obtener soluciones particulares dando un valor cualquiera a una de las incógnitas y calculando la otra.

- Por ejemplo, si en la primera forma ($x=4y-2$, $y \in \mathbb{R}$) tomamos $y=0$, encontramos la solución particular $x=-2$, $y=0$; es decir, $(-2,0)$.
- Si en la segunda forma ($y=(x+2)/4$, $x \in \mathbb{R}$) tomamos $x=2$, obtenemos la solución particular $x=2$, $y=1$, identificada con el par $(2,1)$.

Note que una solución es un par de valores, uno para cada incógnita. Por ejemplo, $x=-2$, $y=0$ es *una* solución (un punto en el plano), no dos.

La interpretación geométrica de que haya infinitas soluciones es que las dos ecuaciones en el sistema describen la misma recta. En efecto, la fórmula $y=(x+2)/4$ se obtiene al despejar y de la primera ecuación o de la segunda, equivalentemente. Entonces, cualquier par de valores que satisfaga la primera ecuación satisfará también la segunda.

5.1.2. Multiplicar para restar y cancelar

Otro método para resolver sistemas consiste en multiplicar cada ecuación por algún número de modo que los coeficientes resultantes de alguna de las incógnitas sean iguales u opuestos, para que al restar o sumar las ecuaciones esa incógnita se cancele.

Veamos este método aplicado al mismo sistema del ejemplo 3.

Ejemplo 5: el método de multiplicar para restar y cancelar

Resolver el sistema $\begin{cases} 37p - 12q = -1 & [1] \\ -4p + 6q = 160 & [2] \end{cases}$

Notemos que el coeficiente de q en la primera ecuación es (excepto por el signo) el doble del coeficiente de q en la segunda. Eso implica que al multiplicar la segunda ecuación por 2, los coeficientes de q serán opuestos:

$$[2] \times 2 \Rightarrow \quad -8p + 12q = 320 \quad [3]$$

Escribamos ahora el sistema formado por las ecuaciones [1] y [3]:

$$\begin{cases} 37p - 12q = -1 & [1] \\ -8p + 12q = 320 & [3] \end{cases}$$

Al sumar estas dos ecuaciones (sumar los lados izquierdos y sumar los lados derechos) se obtiene

$$[1] + [3] \Rightarrow \quad 29p = 319$$

Esta es una ecuación lineal con una sola incógnita, y su solución es $p = 11$.

Ahora podemos sustituir este valor de p en cualquiera de las ecuaciones [1], [2] o [3] para despejar q. Se ve ligeramente más sencillo despejar q de la ecuación [2]:

$$[2] \Rightarrow \quad -4(11) + 6q = 160$$

de donde se llega a $q = 34$ (igual resultado se obtendría sustituyendo p en cualquiera de las otras dos ecuaciones)

La solución es entonces el par $p = 11$, $q = 34$.

No siempre basta con multiplicar una de las dos ecuaciones por un número entero para conseguir que los coeficientes de una incógnita sean iguales u opuestos en las dos ecuaciones. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6: multiplicar ambas ecuaciones para cancelar

Resolver el sistema $\begin{cases} 13x+30y=65 & [1] \\ 9x+20y=45 & [2] \end{cases}$

Aquí no es posible multiplicar ninguna ecuación por un número entero para que los coeficientes de alguna incógnita coincidan[1].

Pero si se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, los coeficientes de y serán 60 en cada ecuación:

$$\begin{cases} [1]\times 2 \Rightarrow \quad 26x+60y=130 & [3] \\ [2]\times 3 \Rightarrow \quad 27x+60y=135 & [4] \end{cases}$$

Ahora restamos las dos ecuaciones para cancelar los términos con y. El mismo objetivo se consigue restando la primera menos la segunda o la segunda menos la primera. Previendo los signos que resultarán, escojamos restar la segunda menos la primera:

$$[4]-[3] \Rightarrow \quad x=5$$

Sigue sustituir este valor de x en cualquiera de las ecuaciones [1], [2], [3] o [4] para despejar y. Por ejemplo, de la ecuación [2] obtenemos

$$[2] \Rightarrow \quad 9(5)+20y=45$$

y de aquí despejamos $y=0$. Así llegamos a la solución final, $x=5$, $y=0$.

Ejemplo 7: un sistema sin solución

Resolver el sistema $\begin{cases} 4a-6b=11 & [1] \\ -6a+9b=5 & [2] \end{cases}$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 resulta

$$\begin{cases} [1]\times 3 \Rightarrow \quad 12a-18b=33 & (3) \\ [2]\times 2 \Rightarrow \quad -12a+18b=10 & (4) \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones [3] y [4] llegamos a $0=43$, que no es cierto para ningún valor de x y ningún valor de y.

[1]Eso no significa que no sea posible multiplicar una ecuación por algún *número* para lograr ese objetivo. Por ejemplo, si la primera ecuación se multiplica por $9/13$ entonces x tendrá coeficiente 9 en ambas. O si la segunda se multiplica por $13/9$, los coeficientes de x serán ambos 13. Resultados análogos para y se consiguen multiplicando la primera ecuación por $2/3$ o la segunda por $3/2$.

En conclusión, este sistema de ecuaciones no tiene solución. La interpretación geométrica es que las dos ecuaciones representan rectas paralelas y distintas.

En efecto, al despejar b de [1] se llega a $b = (4/6)a - (11/6)$, y al despejarlo de [2] se llega a $b = (6/9)a + (5/9)$: dos rectas distintas con la misma pendiente $m = 2/3$.

Ejercicios

Use los métodos vistos en esta sección para resolver, dando dos soluciones particulares cuando haya infinitas

1. $\begin{cases} t + 3z = 17 \\ 2t - z = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4m - n = -11 \\ 6m + 5n = -10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7v + 9w = -68 \\ -2v + 6w = -32 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3i + 6j = 5 \\ i - 2j = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2c - 5d = 27 \\ 9c + 3d = -6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3a + 3b = -29 \\ -3a + 5b = -27 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -4x + 8y = 52 \\ 2x - 4y = -26 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 10p - 11q = 78 \\ 15p + 13q = -60 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5i + 8j = 13 \\ 3i - 5j = -51 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 28t + 42z = 24 \\ 10t + 15z = -4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 51m - 85n = -17 \\ -39m + 65n = 13 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 10x - 3y = -39 \\ 15x + 6y = -34 \end{cases}$

5.2. Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas

Un sistema de ecuaciones puede tener más de dos ecuaciones y más de dos incógnitas. De hecho, no es necesario que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas. Sin embargo, cuando un sistema tiene más ecuaciones que incógnitas es más probable que no tenga solución, y cuando hay más incógnitas que ecuaciones lo más probable es que haya infinitas soluciones.

Los dos métodos que vimos en la sección anterior sirven también para resolver sistemas con más ecuaciones o más incógnitas, pero tal vez sea necesario usarlos más de una vez. También se puede aplicar un método tras otro en un mismo sistema, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8: combinación de métodos

Resolver el sistema $\begin{cases} 2a+4b-c=2 & [1] \\ 3a+2c=9 & [2] \\ 2b-7a=12 & [3] \end{cases}$

Podemos empezar por despejar c en la primera ecuación

$$[1] \Rightarrow \quad c=2a+4b-2 \quad [4]$$

y sustituirlo en la segunda:

$$\begin{aligned} [2] \Rightarrow \quad 3a+2(2a+4b-2) &= 9 \\ 3a+4a+8b-4 &= 9 \\ 7a+8b &= 13 \quad [5] \end{aligned}$$

Con lo anterior nos deshicimos (por ahora) de la incógnita c, y vemos que las ecuaciones [3] y [5] forman un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y b:

$$\begin{cases} -7a+2b=12 & [3] \\ 7a+8b=13 & [5] \end{cases}$$

En este momento podemos escoger cualquier método para resolver este sistema, y es claro que resulta muy sencillo sumar las dos ecuaciones para cancelar a y averiguar b:

$$[3]+[5] \Rightarrow \quad 10b=25 \quad \Rightarrow \quad b=2.5$$

Sustituyendo este valor de b en [3] o en [5] averiguamos que $a=-1$. Y armados con estos valores de a y b regresamos a la ecuación [4] para determinar el valor de c:

$$[4] \Rightarrow \quad c=2(-1)+4(2.5)-2=6$$

Finalmente, la solución es $a=-1$, $b=2.5$, $c=6$, que se puede representar con el *triple ordenado* $(-1, 2.5, 6)$.

Ejemplo 9: dos ecuaciones, tres incógnitas e infinitas soluciones

Resolver el sistema $\begin{cases} 12p-9q+5r=3 & [1] \\ \phantom{12p-{}}3q-2r=3 & [2] \end{cases}$

Este sistema tiene tres incógnitas y solo dos ecuaciones, pero eso no impide que apliquemos cualquiera de los métodos vistos. Se puede, por ejemplo, multiplicar la segunda ecuación por 3 para sumar las ecuaciones y cancelar q:

$$[1]+3\times[2] \Rightarrow \quad 12p-r=12 \quad [3]$$

Ahora de esta ecuación se puede despejar r,

$$[3] \Rightarrow \quad r=12p-12$$

y al sustituir esta fórmula para r en la ecuación [2] se despeja q:

$$[2] \Rightarrow \quad q=1+\frac{2}{3}(12p-12)=8p-7$$

En este momento tenemos a las incógnitas q y r expresadas en términos de p. Si pudiéramos encontrar el valor de p tendríamos la solución del sistema. Sin embargo eso resulta imposible, como veremos en un momento.

La ecuación [1] es la única de la que se puede despejar p, pero veamos lo que sucede al sustituir en ella las expresiones que ya tenemos para q y r.

$$\begin{aligned} [1] \Rightarrow \quad 12p-9(8p-7)+5(12p-12)&=3 \\ 12p-72p+63+60p-60&=3 \\ 0p+3&=3 \end{aligned}$$

Esta última igualdad es cierta para cualquier valor de $p \in \mathbb{R}$, y entonces concluimos que hay infinitas soluciones. La solución general es

$$q=8p-7, \quad r=12p-12, \quad p\in\mathbb{R}$$

Dando valores cualesquiera a p, y calculando q y r, podemos encontrar varias soluciones particulares. Algunas son $(0,-7,-12)$, $(1,1,0)$ y $(2,9,12)$.

Ejemplo 10: tres ecuaciones, dos incógnitas

Resolver el sistema $\begin{cases} 3y - 7z = 5 & [1] \\ -3y + z = 1 & [2] \\ 4y + 7z = 9 & [3] \end{cases}$

Este es un sistema con tres ecuaciones y solo dos incógnitas, pero no dejemos que eso nos distraiga por ahora. Ya conocemos la rutina, y podemos empezar sumando las dos primeras ecuaciones para cancelar y:

$$[1] + [2] \Rightarrow \quad -6z = 6 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

Al sustituir $z = -1$ en la primera o en la segunda ecuación encontramos que $y = -2/3$.

Pero también podemos sumar las ecuaciones [1] y [3] para cancelar z,

$$[1] + [3] \Rightarrow \quad 7y = 14 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

y sustituir $y = 2$ en la ecuación [1] o en la [3] para encontrar que $z = 1/7$.

¡Algo no está bien! Antes teníamos $z = -1$, $y = -2/3$, y ahora encontramos $y = 2$, $z = 1/7$.

Esto es típico en los sistemas con más ecuaciones que incógnitas, y significa que el sistema no tiene solución.

En efecto, el par $y = -2/3$, $z = -1$ satisface las ecuaciones [1] y [2] pero no la [3]. Y el par $y = 2$, $z = 1/7$ cumple la [1] y la [3] pero no la [2].

De hecho, no existe un par de valores que cumplan *las tres* ecuaciones, por lo que el sistema no tiene solución.

Ejercicios

Use los métodos vistos en esta sección para resolver, dando dos soluciones particulares cuando haya infinitas

13. $\begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - 6b = c - 2 \\ a - 2 = 5b \end{cases}$

14. $\begin{cases} s - 2t = 3 + 3r \\ 4r - s + t = 3 \\ 6r - 2s + 3t + 1 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2p+q-3r=5 \\ 3p+2q-2r=5 \\ 5p-3q-r=16 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3i+4j-k=1 \\ 2i+2k=6 \\ i-4j+5k=11 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+z=1+y \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 6p-3q=10+15r \\ 5q+25r=5+10p \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2a+c=5 \\ 3a-2c=-3 \\ a+c=4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y=2-x \\ y=3x-1 \\ y=x \end{cases}$

22. $\begin{cases} a+2c=3 \\ b-c+d=8 \\ a+b+c-d=5 \end{cases}$

5.3. Matriz aumentada de un sistema de ecuaciones

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. Los elementos de una matriz se organizan en *filas* (horizontales) y *columnas* (verticales). Las matrices se denotan con un par de paréntesis alrededor de sus elementos.

La *matriz de coeficientes* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas en el sistema, con una fila para cada ecuación y una columna para cada incógnita.

La *matriz aumentada* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz que contiene a la matriz de coeficientes del sistema, aumentada con una columna adicional con las constantes al lado derecho del igual en cada ecuación. Debe entenderse que las ecuaciones están escritas de modo que todas las incógnitas están a la izquierda y que las constantes sin incógnita están a la derecha.

Ejemplo 11: matriz de coeficientes y matriz aumentada

La matriz de coeficientes del sistema $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+2y=0 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y la matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para el sistema $\begin{cases} a-3b+c=-1 \\ c-2a-6=0 \\ a=2b, \end{cases}$ conviene empezar por reescribirlo con las incógnitas alineadas en columnas a la izquierda de cada igualdad,

$$\begin{cases} a-3b+c=-1 \\ -2a+0b+c=6 \\ a-2b+0c=0 \end{cases}$$

Entonces, las matrices de coeficientes y aumentada son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Escriba la matriz aumentada de...

23. ... cada sistema en los ejercicios de la sección 5.1.

24. ... cada sistema en los ejercicios de la sección 5.2.

5.4. Operaciones elementales en filas

En la sección 5.5 veremos cómo resolver un sistema de ecuaciones usando su matriz aumentada. Para eso haremos transformaciones en la matriz usando operaciones entre filas, que es lo que estudiaremos ahora. Esas operaciones entre filas son:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra fila.
- Intercambiar dos filas.

Veamos en detalle en qué consisten esas operaciones, y en la sección siguiente las usaremos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

5.4.1. Multiplicar una fila por un número distinto de cero

Considere el sistema $\begin{cases} -\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=\frac{5}{6} & [1] \\ 100x-200y=1500 & [2] \end{cases}$

Note que en la ecuación [1] hay un denominador común 12, y en la ecuación [2] un factor común 100. Si se multiplica la primera por 12 se obtiene

$$[1]\times 12 \Rightarrow \quad -4x+3y=10 \quad [3]$$

que tiene la ventaja de no contener fracciones.

Y si se divide la segunda ecuación por 100, o lo que es equivalente, se multiplica por $\frac{1}{100}$, se consigue una versión más simple:

$$[2]\times \tfrac{1}{100} \Rightarrow \quad x-2y=15 \quad [4]$$

En notación de matrices podemos escribir esas operaciones de la siguiente manera. En primer lugar, la notación $F_1\times 12$ representa la multiplicación de la fila 1 por 12, y $F_2\div 100$ es la división de la fila 2 entre 100. Entonces,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 100 & -200 & 1500 \end{pmatrix}$$

$$F_1\times 12 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 & 10 \\ 100 & -200 & 1500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ F_2\div 100 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 10 \\ 1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa el sistema formado por las ecuaciones [3] y [4] que vimos arriba.

Observe que la operación $F_1\times 12$ se escribe a la izquierda y a la altura de la fila donde se escribirá el resultado, y la flecha apunta a la fila 1 para enfatizar lo anterior. De la misma manera, la operación $F_2\div 100$ está a la izquierda y a la altura de la fila 2 que contendrá su resultado.

Note también que cuando hablamos de *multiplicar* una fila por un número estamos dejando abierta también la posibilidad de *dividir*, ya que una división no es más que la multiplicación por un recíproco, como vimos en este ejemplo: $F_2\div 100$ es lo mismo que $F_2\times\frac{1}{100}$.

5.4.2. Sumar a una fila un múltiplo de otra

Para resolver un sistema como

$$\begin{cases} 3x+2y=5 & [1] \\ 5x-4y=-6 & [2] \end{cases}$$

hemos aprovechado la oportunidad de multiplicar la primera ecuación por 2 para sumarla a la segunda y cancelar y. Esa operación la hemos denotado

$$[2]+2\times[1] \Rightarrow \quad 11x=4 \quad [3]$$

La matriz aumentada del sistema arriba es $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, y la operación recién mencionada equivale a multiplicar la fila 1 por 2 y sumar el resultado a la fila 2.

En notación de matrices escribimos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$F_2+2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Note que escribimos la operación F_2+2F_1 a la izquierda y a la altura de la fila 2 de la matriz donde se escribirá el resultado, y la flecha lo enfatiza.

En general, la indicación F_p+cF_q significa que a la fila número p se le sumará el resultado de multiplicar la fila número q por c, y que ese resultado sustituirá la anterior fila p.

Por ejemplo, F_4-5F_2 significa que a la fila 4 se le resta el producto de 5 por la fila 2, y que ese resultado será la nueva fila 4. A veces se escribe $\bar{F}_4-5F_2$, donde la barra indica en cuál fila (4 en este caso) quedará el resultado. Si convenimos que la primera fila mencionada es la que recibe el resultado, la barra es innecesaria.

5.4.3. Intercambiar dos filas

Aunque no lo hemos mencionado, es claro que la solución de un sistema de ecuaciones no depende de cómo ellas estén ordenadas.

Por ejemplo, estos dos sistemas son equivalentes:

$$\begin{cases} 325a-718b=4824 \\ 2a-b=5 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2a-b=5 \\ 325a-718b=4824 \end{cases}$$

Intercambiar las posiciones de dos ecuaciones en un sistema equivale a intercambiar dos filas en la matriz aumentada. En el primer sistema anterior, el intercambio de filas se indica así:

$$\begin{pmatrix} 325 & -718 & 4824 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 325 & -718 & 4824 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

A partir de la matriz dada calcule el resultado de las operaciones indicadas, consecutivamente en el orden dado

25. $\begin{pmatrix} -8 & 6 & -6 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, $F_1 \div 2,\ F_2 \times 3$

26. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $F_2 \times (-2),\ F_1 \leftrightarrow F_2$

27. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$. $F_1 \div (-2),\ F_2 - 3F_1$

28. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & 11 \end{pmatrix}$, $F_1 \leftrightarrow F_2,\ F_1 \times (-1)$

29. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -13 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix}$, $F_1 \leftrightarrow F_2,\ F_1 - 5F_2$

30. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ -4 & 9 & -12 & -5 \end{pmatrix}$, $F_2 + 4F_1,\ F_1 + 2F_2$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $F_3 - 9F_1,\ F_2 \div (-2),\ F_3 - 8F_2$

32. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $F_2 + F_1,\ F_3 - F_1,\ F_2 \leftrightarrow F_3,\ F_1 - 5F_2$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $F_3 + F_1,\ F_2 \leftrightarrow F_3,\ F_2 \div (-2),\ F_1 - 4F_3$

5.5. El método de Gauss-Jordan

Un método para resolver sistemas de ecuaciones usando matrices es el de *Gauss-Jordan* (GJ). Este consiste en tomar la matriz aumentada del sistema y reducir su parte de coeficientes a unos en la diagonal decreciente, y ceros en el resto de la matriz[2]. Este resultado se llama *matriz identidad*, definida en la página 158.

[2]Por ejemplo, para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el método de GJ busca convertir la matriz de coeficientes en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el objetivo es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Al terminar el método de Gauss-Jordan, la última columna contendrá la solución del sistema.

Gráficamente, el método puede describirse de la siguiente forma (donde los asteriscos representan números cualesquiera):

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix}$$

La primera etapa es convertir la columna 1 en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; la segunda etapa, convertir la columna 2 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, y así sucesivamente, columna por columna.

En el método de GJ se pueden usar las tres operaciones entre filas que vimos en la sección anterior, para conseguir los unos y los ceros.

Operaciones válidas en el método de Gauss-Jordan

- Multiplicar o dividir una fila por un escalar distinto de cero (para conseguir los unos).
- Sumar o restar un múltiplo de una fila a otra fila (para conseguir los ceros).
- Intercambiar dos filas.

Cuando hablemos del elemento en la fila i, columna j de una matriz (para algunos valores de i y j), diremos "el elemento en la posición i, j", o simplemente "el elemento i, j".

En un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, la matriz de coeficientes del sistema se reduce a la identidad en n etapas, en las que cada etapa j-ésima (para $j = 1, 2, \dots, n$) consiste en los dos siguientes pasos:

a. Convertir el elemento en la posición j, j en 1.

b. Convertir el resto de la columna j en ceros.

Ejemplo 12: el método de Gauss-Jordan

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 4z = 5 \\ z - 4x - 7y = 11 \\ 3y + z = -7. \end{cases}$

Lo primero es escribir la matriz aumentada,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 5 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Como $n = 3$ (tres ecuaciones y tres incógnitas), el proceso consistirá en tres etapas, una para cada columna.

Etapa 1: Convertir la primera columna en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Los dos pasos en esta etapa son (a) obtener el uno en la posición $1,1$ y (b) obtener los ceros en el resto de la columna.

Paso a: Convertir el 2 de la posición $1,1$ en un 1.

Para esto usamos la primera operación entre filas: multiplicar o dividir la fila por un escalar. Como tenemos un 2 y queremos convertirlo en 1, lo más natural es dividir su fila por 2.

$$F_1 \div 2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la primera columna en ceros.

Ahora usaremos la segunda operación: sumar o restar a una fila un múltiplo de otra. F_3 ya tiene un cero en la columna 1; lo que falta es convertir el -4 de F_2 en un 0. Bastará con sumar 4, pero no la constante 4 sino el producto de 4 por F_1 (se puede sumar a una fila un múltiplo de otra, no un número solo).

$$F_2 + 4F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & -7 & -7 & 21 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Lista la primera columna, terminamos con la Etapa 1.

Etapa 2: Convertir la segunda columna en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Paso a: Convertir el -7 de la posición $2,2$ en un 1, para lo cual se divide F_2 entre -7.

$$F_2 \div (-7) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la segunda columna en ceros. Ya hay un 0 en $1,2$; falta convertir en cero el 3 en $3,2$. Para convertir un 3 en 0 se le debe restar 3; más formalmente, a F_3 se le resta $3F_2$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ F_3 - 3F_2 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lista la segunda columna.

Etapa 3: Convertir la tercera columna en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Paso a: Convertir el -2 de $3,3$ en un 1, dividiendo F_3 entre -2.

$$\begin{array}{r} \\ \\ F_3 \div -2 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la tercera columna en ceros. Para cancelar el -2 de la posición $1,3$ debe sumársele 2; esto es, a F_1 debe sumársele $2F_3$. Y para cancelar el 1 de $2,3$, a F_2 debe restársele F_3.

$$\begin{array}{r} F_1 + 2F_3 \rightarrow \\ F_2 - F_3 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y con eso acabamos. La matriz de coeficientes ya es la identidad, y entonces la solución del sistema está en la última columna: $x = 1/2$, $y = -2$ y $z = -1$.

Si durante el proceso de GJ se encuentra un cero en la posición en la que necesitamos un uno, debe intercambiarse la fila en cuestión por alguna fila inferior para obtener un número distinto de cero en esa posición, si acaso es posible.

Ejemplo 13: necesidad de intercambiar filas en Gauss-Jordan

Para resolver $\begin{cases} b+1=0 \\ 3b+2c-2=0 \\ 3a+2c+9=0 \end{cases}$ tenemos un problema con la posición $1,1$ de la matriz aumentada, que es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Lo que hicimos en el ejemplo anterior fue, cada vez que necesitábamos un uno, dividir la fila en cuestión por el elemento en la posición deseada. Pero ahora no podemos dividir por cero. Por eso recurrimos a la tercera operación: intercambiar filas. Al intercambiar las filas 1 y 3 obtenemos

$$F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de este punto, el método procede como en el ejemplo anterior.

Si el número de incógnitas no es igual al número de ecuaciones, o si por alguna razón el método de GJ no puede llevarse a su término, es posible que el sistema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones.

Ejemplo 14: Gauss-Jordan con más incógnitas que ecuaciones

Al resolver el sistema $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$ empezamos por notar que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. En esos casos lo más común es que el sistema tenga infinitas soluciones. El método de GJ va así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + 2F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí terminamos con las dos primeras columnas. Pero ahora no podemos trabajar la tercera columna porque no hay dónde colocar el uno para luego conseguir los ceros. Aquí se detiene GJ, y debemos regresar de la matriz al sistema. La última matriz que obtuvimos representa el sistema $\begin{cases} x+5z=7 \\ y+3z=2 \end{cases}$ del cual fácilmente podemos despejar x en la primera ecuación y y en la segunda:

$$\begin{cases} x = 7-5z \\ y = 2-3z \end{cases}$$

No hay una tercera fila de la cual pueda despejarse z, pero esto es normal: de dos ecuaciones podemos esperar despejar a lo sumo dos incógnitas. Y la tercera,

z en este caso, queda indeterminada. No es que no exista su valor sino solamente que no se puede saber cuánto es. En realidad z podría ser cualquier número real, y cada valor de z da una solución distinta para x y y según las ecuaciones de arriba, $x = 7 - 5z$ y $y = 2 - 3z$.

Lo que tenemos entonces es un sistema con infinitas soluciones, como ya hemos encontrado antes. La solución general es

$$x = 7 - 5z, \quad y = 2 - 3z, \quad z \in \mathbb{R}$$

que también puede escribirse

$$\begin{cases} x = 7 - 5z \\ y = 2 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Y como ya sabemos, se pueden encontrar soluciones particulares asignando valores a z y calculando x y y según sus fórmulas.

Por ejemplo, si $z = 0$ deben ser $x = 7$ y $y = 2$. En efecto, $x = 7$, $y = 2$ y $z = 0$ es una solución del sistema original, como puede comprobarse fácilmente sustituyendo.

Y si fuera $z = -8$, los valores de x y y serían $x = 7 - 5(-8) = 47$ y $y = 2 - 3(-8) = 26$. La solución completa es $x = 47$, $y = 26$, $z = -8$.

Ejemplo 15: Gauss-Jordan en un sistema sin solución

Para resolver $\begin{cases} 12y - 3x = 1 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ el método GJ empieza así:

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Ahora es imposible poner el uno que se necesita en la posición $2,2$, y tampoco es posible intercambiar F_2 con alguna fila inferior. Regresamos entonces al sistema: la última matriz representa a $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 0 = 16. \end{cases}$

Note la segunda ecuación, $0 = 16$. Esta es una igualdad falsa, independientemente de los valores de x y y. No es posible encontrar valores de las incógnitas que hagan ciertas todas las ecuaciones en el sistema (siempre fallará la segunda). La conclusión es que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 16: Gauss-Jordan en un sistema con infinitas soluciones

Para resolver $\begin{cases} 12y - 3x = -15 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ procedemos así:

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -15 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema ahora es $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$ y la última ecuación no causa ningún problema: $0 = 0$ siempre, independientemente de los valores de x y y. Eso significa que esta ecuación no aporta ninguna información sobre las incógnitas, y podemos descartarla y quedarnos con el resto del sistema (una ecuación con dos incógnitas): $x - 4y = 5$. Como hemos visto, de aquí puede despejarse $x = 5 + 4y$, y y es una incógnita "libre". Hay entonces infinitas soluciones, una para cada valor de y. La solución general es

$$x = 5 + 4y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Algunas soluciones particulares son $x = 5$, $y = 0$, o bien $x = 1$, $y = -1$, etc.

Ejercicios

Resuelva con el método de Gauss-Jordan, dando dos soluciones particulares cuando haya infinitas

34. $\begin{cases} 3p+6q=5 \\ 8p+15q=6 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 5a+7b=33 \\ 7a-7b=-21 \end{cases}$

36. $\begin{cases} -10x+4y=-41 \\ 4x-2y=13 \end{cases}$

37. $\begin{cases} r+ct=3 \\ 3r+4ct=8 \end{cases}$ con c constante

38. $\begin{cases} -3a+c=0 \\ 4a-6b=c-2 \\ a-2=5b \end{cases}$

39. $\begin{cases} s-2t=3+3r \\ 4r-s+t=3 \\ 6r-2s+3t+1=0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=-1 \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2a-b+c=3 \\ 3a+2b-2c=1 \\ a-3b+c=-2 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 2p+q-3r=5 \\ 3p+2q-2r=5 \\ 5p-3q-r=16 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 3t-u+3v+w=2 \\ 2t+3u+2v+w=2 \\ -3t-u-4v+w=1 \\ -4t+14u-4v=-5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x-3y+z+5w=-1 \\ x-y-z+2w=-4 \\ -3x+2z-3w=3 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2a+b-3c+d=-5 \\ 3a-b+11c-18d=-8 \\ a+3c-4d=3 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ 4x+y+2z=-1 \\ 10x+2y+5z=-7 \end{cases}$

49. $\begin{cases} p-2q=10 \\ p+2r=4 \\ q+kr=2 \end{cases}$ con k constante

50. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-3y+6z+2w=3 \\ y-4z+v=1 \\ v-w=2 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x+y+2z+w=5 \\ 2x+3y-z-2w=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x+y-2z+w+3v=1 \\ 2x-y+2z+2w+6v=2 \\ 3x+2y-4z-3w-9v=3 \end{cases}$

5.6. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

En esta sección veremos cómo usar sistemas de ecuaciones para resolver problemas que involucran varias incógnitas. Los pasos son muy parecidos a los que usamos en las aplicaciones de ecuaciones.

Para resolver un problema de aplicación de sistemas de ecuaciones

a. Definir las incógnitas.

b. Escribir las igualdades requeridas por el problema, en palabras si es necesario.

c. Para cada igualdad, refinar cada lado hasta escribir ambos lados en términos de las incógnitas.

d. Resolver el sistema resultante del paso anterior.

e. Responder la pregunta que se planteó.

Ejemplo 17: materiales y productos

Una fábrica de ropa produce maletines y pantalones, para lo cual usa como materia prima tela, broches y cremalleras. El siguiente cuadro indica los materiales requeridos para cada producto.

	Tela (m)	Broches (unid)	Cremalleras (unid)
Maletín	1.5	8	3
Pantalón	2	2	1

Suponga que la fábrica tiene un sobrante de 150 broches y 70 cremalleras que desean gastar. ¿Cuántos maletines y cuántos pantalones pueden hacer con todos ellos, y cuántos metros de tela necesitarán?

a. Las incógnitas principales son el número de maletines y el número de pantalones; las denotaremos m y p respectivamente.

b. Una igualdad es que

$$[\text{número de broches necesarios}] = 150$$

y la otra es que

$$[\text{número de cremalleras necesarias}] = 70$$

c. Como se necesitan ocho broches para cada maletín y dos para cada pantalón, la primera igualdad se convierte en ecuación así:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c}\text{número de broches}\\ \text{para maletines}\end{array}\right] & + & \left[\begin{array}{c}\text{número de broches}\\ \text{para pantalones}\end{array}\right] & =150 \\ 8m & + & 2p & =150 \end{array}$$

Y como son tres cremalleras para cada maletín y una para cada pantalón, la segunda igualdad se convierte así:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c}\text{número de cremalleras}\\ \text{para maletines}\end{array}\right] & + & \left[\begin{array}{c}\text{número de cremalleras}\\ \text{para pantalones}\end{array}\right] & =70 \\ 3m & + & p & =70 \end{array}$$

Con eso llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 8m+2p=150 & \text{(broches)} \\ 3m+p=70 & \text{(cremalleras)} \end{cases}$$

d. Gauss-Jordan procede así:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 150 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \div 8 \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1/4 & 75/4 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - 3F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ \boxed{0} & 1/4 & 55/4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \times 4 \to \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ 0 & \boxed{1} & 55 \end{pmatrix}$$

$$F_1 - \tfrac{1}{4}F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 5 \\ 0 & 1 & 55 \end{pmatrix}$$

y la solución es entonces $m=5$ y $p=55$

e. Respuesta: Se pueden hacer 5 maletines y 55 pantalones. La cantidad de tela necesaria será $1.5m+2p=117.5$ metros.

5.6.1. Modelo de insumo/producción de Leontief

En el modelo económico de insumo/producción de Leontief se parte del supuesto de que una economía está basada en cierto número de industrias. Para producir, cada industria necesita consumir de sí misma y de las otras industrias. Además, cada industria debe proveer no solo a las otras sino también a la población, que presenta una demanda externa (adicional) al sector productivo. Se quiere determinar cuánto debe producir cada industria de modo que se satisfagan las demandas de consumo entre ellas y también se satisfaga la demanda externa.

Ejemplo 18: insumo/producción

Una economía está basada en las industrias de petróleo, textiles y transporte. Es claro que la industria del transporte necesita petróleo, que la industria textil y la de petróleo necesitan transporte y que en general cada industria necesita de las demás. El siguiente cuadro (llamado *matriz de tecnología*) muestra cuánto requiere cada industria de sí misma y de las otras dos.

		Para producir $1 de...		
		Petróleo	Textiles	Transporte
Se necesitan	Petróleo	0.10	0.40	0.60
$1s de...	Textiles	0.05	0.10	0.00
	Transporte	0.20	0.15	0.10

Por ejemplo, la primera columna indica que para producir un dólar de petróleo se requiere consumir $0.10 de petróleo, $0.05 de textiles y $0.20 de transporte.

Debe satisfacerse una demanda externa por $650 mil en petróleo, $150 mil en textiles y $400 mil en transporte. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer esta demanda, teniendo en cuenta las cantidades consumidas en la producción misma?

a. Denotemos con x la producción de la industria de petróleo, con y la producción de textiles y con z la producción de transporte, todas en miles de dólares.

b. Para el petróleo, la igualdad más básica que podemos escribir es

$$[\text{producción de petróleo}] = [\text{consumo de petróleo}]$$

Recuerde que el petróleo tendrá cuatro destinos: una parte se consumirá en la producción de petróleo, otra en la producción de textiles, otra en la producción de transporte, y el resto irá a satisfacer la demanda externa. Así, la igualdad arriba puede detallarse de esta forma:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\text{producción}\\ \text{de petróleo}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\text{petróleo}\\ \text{para petróleo}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{petróleo}\\ \text{para textiles}\end{bmatrix}\\ &\quad + \begin{bmatrix}\text{petróleo}\\ \text{para transporte}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{demanda}\\ \text{externa}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Similarmente para los textiles,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\text{producción}\\ \text{de textiles}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\text{textiles}\\ \text{para petróleo}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{textiles}\\ \text{para textiles}\end{bmatrix}\\ &\quad +\begin{bmatrix}\text{textiles}\\ \text{para transporte}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{demanda}\\ \text{externa}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

y para el transporte,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\text{producción}\\ \text{de transporte}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\text{transporte}\\ \text{para petróleo}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{transporte}\\ \text{para textiles}\end{bmatrix}\\ &\quad +\begin{bmatrix}\text{transporte}\\ \text{para transporte}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{demanda}\\ \text{externa}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

c. Como la producción de petróleo será x y la industria de petróleo consumirá 0.1 dólares por cada dólar de petróleo producido, entonces la frase "petróleo para petróleo" arriba equivale a $0.1x$ (en miles de dólares). También, la producción de textiles será y, y como la industria de textiles consumirá 0.4 dólares de petróleo por cada dólar de textiles producido, la frase "petróleo para textiles" es igual a $0.4y$. Luego, "petróleo para transporte" es igual a $0.6z$. Y recordando que la demanda externa de petróleo es 650 (siempre en miles de dólares), la primera igualdad del paso anterior se convierte en la ecuación

$$x = 0.1x + 0.4y + 0.6z + 650$$

Razonando de la misma manera vemos que la segunda igualdad arriba se convierte en

$$y = 0.05x + 0.1y + 0z + 150$$

y la tercera en

$$z = 0.2x + 0.15y + 0.1z + 400$$

Ahora tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 0.9x - 0.4y - 0.6z = 650 \\ -0.05x + 0.9y = 150 \\ -0.2x - 0.15y + 0.9z = 400 \end{cases}$$

d. No mostramos el procedimiento, pero la solución del sistema anterior es $x \approx 1353.383$, $y \approx 241.855$, $z \approx 785.505$ (todos en miles de dólares).

e. La industria de petróleo debe producir \$1 353 383, la de textiles \$241 855 y la de transportes \$785 505.

Ejercicios

Resuelva

53. Un teléfono público recibe monedas de ₡50 y ₡100. Si contiene 43 monedas que valen ₡2850 en total, ¿cuántas monedas de cada valor hay en el teléfono?

54. Un grupo de siete personas paga un total de ₡16 200 para entrar en un parque. Un tiquete de adulto cuesta ₡3000, y uno de niño cuesta ₡1800. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el grupo?

55. Un millonario invirtió $60 000 en dos fondos que pagan tasas de interés anual simple de 9 % y 10.5 %, respectivamente. Si cada año recibe $5745 en intereses, ¿cuánto invirtió en cada fondo?

56. Un administrador se dispone a realizar un estudio de mercadeo. Planea hacer una encuesta con 600 llamadas telefónicas y 400 visitas a domicilio. La compañía encuestadora A tiene personal para llevar a cabo treinta llamadas y diez visitas por hora. La compañía B puede encargarse de veinte llamadas y veinte visitas por hora. ¿Cuántas horas debe contratarse a cada compañía para producir exactamente el número de llamadas y visitas planeadas?

57. Un fabricante produce dos artículos, A y B. La utilidad es de ₡4000 por cada unidad de A y ₡5500 por cada unidad de B. Se sabe que puede vender 25 % más unidades de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender para obtener una utilidad de ₡21 000 000?

58. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡4800 el kilo, con pasas, que cuestan ₡11 200 el kilo. Desea obtener 25 kg de una mezcla con un costo de ₡6464 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces y cuántos kilos de pasas debe mezclar?

59. Una tienda se dedica a preparar mezclas de café. Preparan bolsas de medio kilo usando café de Colombia, Costa Rica y Java. El costo por kilo de estos cafés es ₡4800, ₡3600 y ₡3000, respectivamente. Cada paquete tiene un costo total de ₡1884. Si se incluyen cien gramos de café de Java en cada bolsa, ¿cuántos gramos de café de Colombia y de Costa Rica se necesitan para completar el paquete?

60. Una fábrica de muebles produce sillas y mesas. Construir una silla toma dos horas y cuesta ₡20 000, mientras que cada mesa se construye en cinco horas y cuesta ₡48 000. La fábrica dispone de 345 horas de trabajo y puede pagar ₡3 344 000 por semana. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas pueden producir semanalmente usando todo el tiempo y todo el dinero disponible?

61. Una fábrica de productos lácteos produce helado regular y helado especial en dos plantas. La planta en Alajuela produce dos barriles de helado regular y un barril de helado especial por cada hora de operación. La planta en Heredia produce tres barriles de regular y dos barriles de especial por hora de operación. Cuesta

₡120 000 por hora operar la planta en Alajuela, y ₡215 000 por hora operar la planta en Heredia.

La compañía necesita producir 46 barriles de regular y 27 barriles de especial por día. ¿Cuántas horas al día debe operar cada planta para satisfacer los requisitos de producción?

62. Una fábrica de automóviles produce los modelos A y B. El primero requiere una hora de pintura y treinta minutos de pulido. El segundo, una hora de pintura y una de pulido. Si se dispone de cien horas de pintura y ochenta horas de pulido por semana, ¿cuántos automóviles de cada modelo se pueden producir cada semana?

63. En una economía se produce maíz y leche. Las demandas inter-industriales son

		Para producir $1 de…	
		Maíz	Leche
Se necesitan	Maíz	0.19	0.13
$1’s de…	Leche	0.04	0.38

¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer una demanda externa de $6850 de maíz y $9230 de leche?

64. Una economía está basada en las industrias A y B. Los requerimientos inter-industriales de producción son

		Para producir una unidad de…	
		A	B
Se necesitan estas	A	0.27	0.08
unidades de…	B	0.15	0.09

¿Cuántas unidades de cada industria se requieren para satisfacer una demanda final de 330 unidades de A y 265 unidades de B?

65. Un grupo de animales en un experimento se somete a una dieta estricta. Cada uno debe recibir 20 g de proteína y 6 g de grasa. El laboratorio puede conseguir dos tipos de alimento con las siguientes composiciones: El tipo A tiene 10 % proteína y 6 % grasa, y el tipo B tiene 20 % proteína y 2 % grasa. ¿Cuántos gramos de cada tipo de alimento deben usarse para obtener la dieta correcta de un animal?

66. Una persona debe consumir diariamente 24 unidades de vitamina B y 18 de vitamina C. Las pastillas marca X cuestan ₡180 y contienen 8 unidades de vitamina B y 6 de C. Las pastillas Y cuestan ₡120 y contienen 4 unidades de B y 3 de C. ¿Cuántas pastillas de cada marca pueden comprarse con ₡600 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

67. La suma de tres números es 42. La diferencia entre los dos primeros es 6, y el tercero es igual al promedio de los otros dos. Encuentre los tres números.

68. Una compañía distribuye tres productos: A, B y C. Los costos fijos son de $24 000 por año, y los costos variables son $4, $6 y $9 por cada unidad de A, B y C respectivamente. Las utilidades unitarias son $2, $4 y $7 respectivamente. Para el próximo año, la demanda para los productos A y B será de 12 000 unidades en total. ¿Cuántas unidades de cada producto deben distribuirse para obtener una utilidad total de \$45 000 con un costo total de \$95 000 en el año?

69. Un proveedor de productos para el campo tiene tres tipos de fertilizantes, A, B y C, que tienen contenidos de nitrógeno de 30 %, 20 % y 15 %, respectivamente. Se planea mezclarlos para obtener 300 kg de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25 %. La mezcla debe contener 50 kg más del tipo C que del tipo B. ¿Cuántos kilos de cada tipo deben usarse?

70. Parte de la lista de ingredientes requeridos para tres recetas de postre se da en el siguiente cuadro:

	Azúcar (tazas)	Huevos (unidades)	Leche (litros)	Número de porciones
Pastel de manzana	3	2	1	6
Queque de banano	2	5	2	8
Rosquete borracho	2	4	2	10

Hay quince tazas de azúcar, dos docenas de huevos y once litros de leche disponibles. Suponiendo que no hay problema para conseguir los demás ingredientes (manzanas, bananos, ron, etc.), ¿cuántas porciones de cada tipo de postre pueden hacerse para usar todo el azúcar, todos los huevos y toda la leche?

71. Una economía está basada en las industrias de petróleo, transporte y agricultura. Los requerimientos inter-industriales de producción son

		Para producir una unidad de...		
		Petróleo	Transporte	Agricultura
Se necesitan estas unidades de ...	Petróleo	0.15	0.45	0.25
	Transporte	0.10	0.05	0.15
	Agricultura	0.00	0.00	0.05

¿Cuántas unidades de cada industria se requieren para satisfacer una demanda final de 1200 unidades de petróleo, 850 de transporte y 480 de agricultura?

72. En una economía se produce acero, carbón y transporte. Las demandas inter-industriales son

		Para producir \$1 de...		
		Acero	Carbón	Transporte
Se necesitan \$1's de...	Acero	0.40	0.20	0.18
	Carbón	0.25	0.15	0.12
	Transporte	0.30	0.20	0.25

¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer una demanda externa de \$24 000 de acero, \$33 500 de carbón y \$57 200 de transporte?

73. Se puede invertir dinero en tres bancos a distintas tasas de interés anual simple. Un inversionista tiene \$1000 repartidos en partes iguales entre los bancos A y B, y en total recibe en intereses \$35 por año. Un segundo inversionista ha invertido en los bancos B y C; el monto que invirtió en C es el doble de lo que invirtió en B, y entre ambas inversiones recibe en intereses un 3.1 % anual del total invertido. Un tercer inversionista tiene $2000 invertidos, con la mitad en A y el resto en partes iguales entre B y C; él gana $62.50 en intereses al año. El promedio entre las tasas de interés de los tres bancos es 3.2 %. ¿Cuál es la tasa de interés de cada banco?

74. Una población de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, 10 % de la población de la isla Lirio vuela a la isla Margarita; 20 % de la población de Margarita vuela a la isla Narciso, y 5 % de la población de Narciso vuela a Lirio. A pesar de esas migraciones, la población de cada isla es estable de un año a otro. ¿Cuántas aves viven en cada isla?

75. Una persona debe consumir diariamente 10 unidades de vitamina A, 9 de vitamina D y 19 de vitamina E. Las pastillas marca X cuestan ₡150 y contienen 2 unidades de vitamina A, 3 de D y 5 de E. Las pastillas Y cuestan ₡120 y contienen 1 de A, 3 de D y 4 de E. Las pastillas Z cuestan ₡60 y contienen 1, 0 y 1 unidad de A, D y E respectivamente. ¿Cuántas pastillas pueden comprarse con ₡690 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

76. En un triángulo, el ángulo mayor mide el doble de la suma de los otros dos. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

77. Encuentre tres enteros mayores que cinco tales que la suma de los tres sea 117, el promedio de los tres sea 39 y el primero sea ocho veces la suma de los otros dos.

78. Pueden usarse tres tuberías para llenar una piscina. La tubería A tarda ocho horas en llenar la piscina. Las tuberías A y C, trabajando simultáneamente, la llenan en seis horas. Si se usan B y C juntas, el tiempo de llenado es diez horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina si se usan las tres tuberías?

5.7. Tipos de matrices

Las matrices pueden usarse para otros fines además de resolver sistemas de ecuaciones. Como habíamos dicho, una matriz es un arreglo rectangular de números, organizados en filas (horizontales) y columnas (verticales).

Al darle nombre a una matriz se acostumbra usar una letra mayúscula. También se acostumbra denotar con la letra m al número de filas de una matriz, y con la letra n al número de columnas. La *dimensión* o tamaño de una matriz con m filas y n columnas es la expresión $m \times n$.

Los elementos de una matriz se denotan con el nombre de la matriz pero en minúscula y con dos subíndices: el primero indica el número de fila y el segundo el número de columna, numerando las filas de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Ejemplo 19: dimensión, elementos de una matriz

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

La dimensión de A es 2×3. Algunos de sus elementos son $a_{11} = 2$ (fila 1, columna 1), $a_{13} = 0$ (fila 1, columna 3) y $a_{22} = -3$ (fila 2, columna 2). El elemento a_{32} no existe.

Ejemplo 20: matriz definida por una fórmula

Sea B la matriz de tamaño 10×10 definida por $b_{ij} = 5i - j$. Esta es una forma concisa de describir la matriz B sin necesidad de enumerar sus cien elementos. De la fórmula calculamos, por ejemplo, que $b_{62} = 5(6) - (2) = 28$ y que $b_{38} = 5(3) - (8) = 7$.

Algunos de los elementos de B son los siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & -5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 49 & 48 & 47 & 46 & \cdots & 40 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 21: matriz de ventas por región

La información en el cuadro

Región	Ventas en \$1000's 2012	2013	2014	2015
Central	9	12	13	13
Pacífica	8	9	9	10
Atlántica	4	5	5	7

puede resumirse, si los encabezados se sobreentienden, con la matriz de ventas

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz V tiene tamaño 3×4. Note que ese tamaño no es igual a 12 (por ejemplo, una matriz de tamaño 4×3 y una 2×6 serían muy distintas de una 3×4). A veces se escribe el tamaño de una matriz como un subíndice de su nombre, como $V_{3 \times 4}$.

5.7.1. Otras definiciones

- Una matriz *fila* es una que solo tiene una fila: $m = 1$.
- Una matriz *columna* es una que tiene una sola columna: $n = 1$.
- Una matriz *cuadrada* es una que tiene igual número de filas y de columnas: $m = n$.
- La *transpuesta* de una matriz $A_{m\times n}$, denotada A^{T}, es la matriz $n\times m$ que resulta de convertir las filas de A en columnas, y sus columnas en filas.
- Una matriz cuadrada es *simétrica* si es igual a su transpuesta.
- La *diagonal* de una matriz cuadrada A es la sucesión $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
- Una matriz cuadrada A es *triangular superior* si todos sus elementos bajo la diagonal son cero, o *triangular inferior* si todos sus elementos sobre la diagonal son cero.
- Una matriz cuadrada es *diagonal* si todos sus elementos fuera de la diagonal son cero. En otras palabras, la matriz es diagonal si es triangular superior y también triangular inferior.
- La *matriz identidad* de orden n (o tamaño $n\times n$), denotada I_n, es la matriz $n\times n$ con unos en su diagonal y ceros en las demás posiciones.
- La matriz *nula* (o matriz *cero*) de tamaño $m\times n$ es la matriz de ese tamaño cuyos elementos son todos cero.

Ejemplo 22: tipos de matrices

- La matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz fila, de tamaño 1×4.
- La matriz $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una matriz columna, de tamaño 3×1.
- La matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 26 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada, con $m = n = 3$.

  Su transpuesta es $C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & 26 & -2 \end{pmatrix}$.

  La matriz C no es simétrica porque no es igual a su transpuesta: $C \neq C^{\mathsf{T}}$.

  La diagonal de C es la sucesión $5, 4, -2$. Esta es también la diagonal de C^{T}.

- La matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sí es simétrica, dado que su transpuesta es

$$D^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = D$$

- La matriz $E = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es triangular superior.
- La matriz $F = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior.
- La matriz $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.
- La matriz identidad de orden 4 es $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- La matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2×3.

Ejercicios

Para cada matriz dé su tamaño y determine si es una matriz fila, columna, cuadrada, simétrica, triangular superior, triangular inferior, diagonal o nula

79. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

80. $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 7 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

81. $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

82. $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

83. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

84. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

85. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

86. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resuelva

87. Escriba los números 6, -2, 4, 0…

a. … en una matriz fila.

b. … en una matriz columna.

88. Para cuatro niños se registran sus edades en años: 10.4, 5, 6.8 y 9.9; sus estaturas en centímetros: 147, 110, 120 y 140; las estaturas de sus padres, en centímetros: 176, 172, 167 y 170; y las estaturas de sus madres, en centímetros: 170, 159, 166 y 161.

a. Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada niño en el orden presentado.

b. ¿Cuál es el tamaño de la matriz?

c. Escriba la transpuesta.

d. ¿Cuáles son los elementos de la diagonal?

89. En una encuesta hecha entre estudiantes del Tec se encontró que había 57 mujeres y 72 hombres de la provincia de Cartago, 61 mujeres y 92 hombres de San José, y 48 mujeres y 79 hombres de otras provincias.

a. Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada sexo y una columna para cada provincia, en el orden presentado.

b. Represente la misma información usando columnas para los sexos y filas para las provincias, en el orden presentado.

c. ¿Cuáles son los tamaños de las matrices en las partes (a) y (b)?

90. Un banco tiene 2820 cuentas corrientes y 1470 cuentas de ahorro en su oficina central. En su sucursal del Pacífico tienen 1240 cuentas corrientes y 980 cuentas de ahorro, y en su sucursal del Atlántico tienen 830 cuentas corrientes y 560 cuentas de ahorro.

a. Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada oficina y una columna para cada tipo de cuenta.

b. Represente la misma información en una matriz, usando filas para los tipos de cuenta y columnas para las oficinas.

c. ¿Cuáles son los valores en las posiciones $1,2$ y $3,1$ de la matriz en la parte (a)?

d. ¿Cuál es la posición, en la matriz de la parte (b), del número de cuentas de ahorro en el Atlántico?

91. Un modelo de automóviles tiene un peso de 1564 kg, una potencia de 175 HP y un rendimiento de 7.9 km/l. Las características de un segundo modelo son 834 kg, 65 HP y 14.4 km/l. Un tercer modelo tiene 1000 kg, 66 HP y 13.7 km/l, y un cuarto modelo tiene 2430 kg, 230 HP y 6.2 km/l.

a. Represente esta información en una matriz, usando una columna para cada modelo.

b. ¿Cuál es el tamaño de la matriz?

c. ¿Cuáles son los valores en las posiciones $2,4$ y $3,1$ de la matriz?

d. ¿Cuál es la posición en la matriz de la potencia del tercer modelo?

e. Escriba la transpuesta de la matriz.

92. Escriba la matriz $M_{3\times 5}$ dada por la fórmula $m_{ij} = 3j - i^2$.

93. Escriba la matriz Q de tamaño 3×3 dada por $q_{ij} = i^2 - j^2$. ¿Es simétrica?

5.8. Operaciones con matrices

Si A y B son dos matrices de igual tamaño (igual número de filas e igual número de columnas), y c es un número, entonces:

- $A+B$ es la matriz que resulta de sumar cada $a_{ij} + b_{ij}$.
- cA es la matriz que resulta de multiplicar cada a_{ij} por c.

Ejemplo 23: suma de matrices

Recuerde la matriz de ventas del ejemplo 21,

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Suponga que esas son las ventas del producto principal de cierta compañía, que también distribuye otro producto secundario cuyas ventas están dadas en el siguiente cuadro.

	Ventas en \$1000's			
Región	2012	2013	2014	2015
Central	6	7	8	9
Pacífica	5	7	6	7
Atlántica	2	3	3	4

Estos nuevos datos pueden representarse con la matriz

$$W = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces las matrices V, con las ventas del primer producto, y W, con las ventas del segundo, para las mismas regiones y los mismos períodos. Suponiendo que estos dos son los únicos productos que la compañía distribuye, las ventas totales pueden calcularse sumando cada elemento de V con el elemento correspondiente (en la misma posición) de W. Eso es justamente la suma de las matrices V y W:

$$V+W=\begin{pmatrix}9&12&13&13\\8&9&9&10\\4&5&5&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&7&8&9\\5&7&6&7\\2&3&3&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{P}\\ \mathrm{A}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{'12}&\text{'13}&\text{'14}&\text{'15}\end{array}\\ \begin{pmatrix}15&19&21&22\\13&16&15&17\\6&8&8&11\end{pmatrix}\end{array}$$

Por ejemplo, el 15 en la posición $2,3$ indica que la región Pacífica tuvo en el 2014 ventas totales por \$15 000 (\$9000 del primer producto y \$6000 del segundo).

Ejemplo 24: producto de número por matriz

Con los datos del ejemplo anterior, si quisiéramos convertir las ventas del segundo producto a dólares (recuerde que el cuadro arriba da las ventas en miles de dólares), debemos multiplicar cada elemento de la matriz por 1000, o equivalentemente, multiplicar la matriz por 1000:

$$1000W=1000\begin{pmatrix}6&7&8&9\\5&7&6&7\\2&3&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6000&7000&8000&9000\\5000&7000&6000&7000\\2000&3000&3000&4000\end{pmatrix}$$

Producto de matrices

El producto de dos matrices se define a partir del producto de una fila por una columna. En general, si $F_{1\times n}$ es una matriz fila y $C_{n\times 1}$ una matriz columna, ambas con el mismo número de elementos, su producto es

$$\begin{pmatrix}f_{11}&f_{12}&\cdots&f_{1n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\\vdots\\c_{n1}\end{pmatrix}=f_{11}c_{11}+f_{12}c_{21}+\cdots+f_{1n}c_{n1}$$

Ejemplo 25: producto de fila por columna

Si $P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $Q = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$, entonces su producto es

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= (-4)(2) + (1)(3) + (6)(-5) \\ &= -8 + 3 - 30 = -35 \end{aligned}$$

En general, el producto de una fila por una columna es un número.

El producto de una matriz $A_{m\times n}$ y una matriz $B_{n\times p}$ es la matriz de tamaño $m \times p$ cuyo elemento i, j es el producto de la fila i de A con la columna j de B. Si el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, el producto está indefinido.

Ejemplo 26: producto de dos matrices

Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Los tamaños son 2×2 y 2×3, de modo que su producto está definido y tiene tamaño 2×3. Los cálculos son así:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & F_1 \cdot C_2 & F_1 \cdot C_3 \\ F_2 \cdot C_1 & F_2 \cdot C_2 & F_2 \cdot C_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c:c:c} \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hdashline \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 11 \\ 10 & 1 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcule, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

94. $2A+B$

95. $A-3B$

96. $A^{\mathsf{T}}-3C$

97. $5B-2C^{\mathsf{T}}$

98. $2C^{\mathsf{T}}-A+5B$

99. $B^{\mathsf{T}}+6C-2A^{\mathsf{T}}$

100. $\left[(A-B)^{\mathsf{T}}-C\right]^{\mathsf{T}}$

101. M tal que $A+2B+M=0$

Calcule la matriz indicada

102. Con respecto al ejercicio 90 (página 160), un segundo banco tiene cuentas según el siguiente cuadro:

	Oficina		
Tipo de cuenta	Central	Pacífica	Atlántica
Corriente	240	120	90
De ahorros	190	90	60

Suponga que los dos bancos se unen. Sume dos matrices para encontrar el total de cuentas de cada tipo en cada oficina.

103. Una familia resume sus gastos semestrales durante los años 2014 y 2015 de la siguiente manera, en miles de colones:

	2014		2015	
Categoría	Primer semestre	Segundo semestre	Primer semestre	Segundo semestre
Comida	507	525	555	595
Vivienda	480	510	540	570
Otros	477	462	545	520

Denote con G_1 y G_2 las matrices 3×2 de gastos para 2014 y 2015 respectivamente.

a. Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos promedio entre ambos años (por ejemplo, el gasto promedio en comida durante los dos primeros semestres fue $(507+555)/2 = 531$ mil colones).

b. Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los incrementos en gastos de 2014 a 2015 (por ejemplo, el incremento en comida en los primeros semestres fue $555-507 = 48$ mil colones).

c. Suponiendo que los tipos de cambio promedio fueron ₡480/\$ durante 2014 y ₡500/\$ durante 2015, efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos totales en dólares, redondeados al dólar más cercano (por ejemplo, el gasto total en comida para los primeros semestres fue $(507000/480+555000/500 \approx 2166$ dólares).

Calcule, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

104. $A \cdot C$

105. $B \cdot D$

106. $(3A - 2B) \cdot C$

107. $A^{\mathsf{T}} \cdot B$

108. $A \cdot B^{\mathsf{T}}$

109. $B^{\mathsf{T}} \cdot A$

110. $\left(D \cdot D^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$

111. $D^{\mathsf{T}} \cdot D$

112. $D^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$

113. $C^{\mathsf{T}} \cdot (B - 5A)^{\mathsf{T}}$

Resuelva

114. El siguiente cuadro muestra parte de la lista de ingredientes necesarios para tres tipos de postres que vende una pastelería:

	Azúcar (tazas)	Huevos (unid)	Leche (litros)
Postre 1	1	2	1
Postre 2	2	5	2
Postre 3	2	3	3

El siguiente representa los costos unitarios de cada ingrediente:

Azúcar	₡300
Huevos	₡210
Leche	₡1050

a. Escriba una matriz A que represente los ingredientes, con una fila por postre, y una matriz B que represente los costos, con una fila por ingrediente.

b. Multiplique $A \cdot B$ o $B \cdot A$, el que esté definido. ¿Qué representa este producto?

c. ¿Cuánto es el costo de los ingredientes del postre 2?

115. Suponga que una fábrica de ropa produce maletines y pantalones, para lo cual usa como materia prima tela, broches y cremalleras. El siguiente cuadro indica los materiales requeridos para cada producto:

	Tela (m)	Broches (unid)	Cremalleras (unid)
Maletín	1.5	8	3
Pantalón	2	2	1

La fábrica recibe pedidos de tres clientes, según este cuadro :

	Maletines	Pantalones
Cliente 1	20	10
Cliente 2	50	30
Cliente 3	40	40

a. Escriba una matriz M para representar los materiales, con una fila para cada producto, y una matriz P para representar los pedidos, con una fila para cada cliente.

b. Multiplique las matrices M y P en el orden apropiado. ¿Qué representa este producto?

c. ¿Cuántas cremalleras se necesitarán para el primer cliente? ¿Cuántos metros de tela para el segundo? ¿Cuántos broches para el tercero?

116. Con respecto al ejercicio 114, el siguiente cuadro representa las cantidades de postres para dos encargos recibidos por la pastelería (P_1 se refiere al postre 1, etc):

	P_1	P_2	P_3
Encargo 1	4	6	3
Encargo 2	8	2	0

a. Represente esta información en una matriz C.

b. Multiplique dos de las matrices A, B, C, en el orden apropiado, para calcular las cantidades de ingredientes necesarias para cada encargo.

c. Calcule $C \cdot A \cdot B$. ¿Qué representa este producto?

d. ¿Cuánta leche requiere el primer encargo?

e. ¿Cuál es el costo de los materiales para el segundo encargo?

117. En el ejercicio 115, suponga que cada metro de tela cuesta \$4, cada broche \$1 y cada cremallera \$2.

a. Represente los costos en una matriz columna C.

b. Multiplique las matrices C y M en el orden apropiado. ¿Qué representa este producto?

c. Calcule el producto $P \cdot M \cdot C$. ¿Qué representa este producto?

d. ¿Cuál es el costo de los materiales para un maletín?

e. ¿Cuál es el costo de los materiales para el pedido del segundo cliente?

118. Calcule $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$.

119. Se dice que una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Demuestre que las siguientes matrices son idempotentes.

a. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

120. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, demuestre que $A^3 = 5I_3$.

121. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. ¿Para cuáles valores de $a \geq 0$ se tiene $A^2 = I_2$?

122. Sea M una matriz tal que $M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Determine el tamaño de M.

b. Encuentre la matriz M.

123. Encuentre las raíces cuadradas de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (es decir, las matrices B tales que $B^2 = M$).

5.9. (Opcional) Solución de sistemas con calculadora

Si su calculadora resuelve sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, ella le puede ayudar a resolver sistemas más grandes, siempre que exista una solución única. La idea es adaptar el método de Gauss-Jordan para reducir el sistema a uno más pequeño que la calculadora sí pueda resolver.

Ejemplo 27: sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

Para el sistema

$$\begin{cases} 3a + d = 1 \\ 3b - c = -9 \\ 2a - b + c = 5 \\ a + 2b + d = -3 \end{cases}$$

la matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos intercambiar F_1 y F_4 para obtener el uno necesario en la posición $1,1$, y después hacer $F_3 - 2F_1$ y $F_4 - 3F_1$ para obtener los ceros requeridos en la primera columna. Con eso llegamos a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Dejemos GJ en este punto y notemos que las filas 2, 3 y 4 dan el subsistema

$$\begin{cases} 3b - c = -9 \\ -5b + c - 2d = 11 \\ -6b - 2d = 10 \end{cases}$$

que, gracias a los ceros en la primera columna, contiene solamente tres incógnitas. En una calculadora encontramos la solución de este sistema[3], que es $b = -2$, $c = 3$ y $d = 1$.

Por otra parte, la primera fila de la matriz dice que $a + 2b + d = -3$, de donde despejamos $a = -3 - 2b - d = -3 - 2(-2) - (1) = 0$. Con eso el sistema está completamente resuelto.

Otra opción, a partir de la matriz aumentada, era restar $F_1 - F_4$, lo cual, a pesar de ser una gran desviación del método GJ, funciona porque resulta en la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Las filas 1, 2 y 3 de esta matriz representan el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = 4 \\ 3b - c = -9 \\ 2a - b + c = 5 \end{cases}$$

cuya solución en la calculadora es, por supuesto, $a = 0$, $b = -2$ y $c = 3$. El valor de d se obtiene de la cuarta fila, y es $d = 1$.

Para sistemas más grandes deben trabajarse las columnas necesarias para que el sistema reducido pueda resolverse por calculadora. Por ejemplo, para cinco ecuaciones con cinco incógnitas deben reducirse dos columnas para que el nuevo sistema tenga tres ecuaciones y tres incógnitas y así se pueda resolver en la calculadora.

[3]Otra opción era despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones. También así se consigue un nuevo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, para cedérselo a la calculadora.

Ejercicios

Resuelva con ayuda de una calculadora

124. $$\begin{cases} -a-3b+5c-3d=-14 \\ a+3b+5c-4d=6 \\ 4a-b+3c-5d=-31 \\ 5a+2b-4c+3d=-1 \end{cases}$$

125. $$\begin{cases} 2p-2q-4r+s+3t=23 \\ -2p+2q-r+5t=7 \\ -2p+5q+2r+s+2t=3 \\ -4p+2q-5r-s+2t=10 \\ -2p+5q+4r+s+5t=-2 \end{cases}$$

126. $$\begin{cases} -r-4s+u+3v=-16 \\ -3r+4s-t-u+v=-3 \\ -2r+3s-u-5v=22 \\ -5r+s+2t-3u-5v=16 \\ 4r-2s+5t-3u+v=-5 \end{cases}$$

127. $$\begin{cases} -3w-3x-y-5z=-7 \\ -2w-2x-4y+z=12 \\ w+3x-4y=30 \\ 4w-x+2y+4z=-9 \end{cases}$$

5.10. (Opcional) Matrices inversas

Si A y B son matrices de tamaño $n\times n$ tales que $A\cdot B=B\cdot A=I_n$ (la identidad de orden n, definida en la página 158) entonces A y B son *inversas* una de la otra, y se escribe $B=A^{-1}$ o $A=B^{-1}$. Si una matriz tiene inversa, se dice que es *invertible*.

Ejemplo 28: comprobar que dos matrices son inversas

Las matrices $\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}$ son inversas porque

$$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

y también

$$\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

Escribimos entonces

$$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz de tamaño 2×2

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

si $ad-bc\neq 0$. Pero si $ad-bc=0$, entonces la matriz $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ no tiene inversa.

Para calcular la inversa de una matriz A de tamaño $n \times n$, con $n > 2$, se aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz $(A \vdots I_n)$, la matriz de tamaño $n \times (2n)$ que resulta de colocar las n columnas de A seguidas por las n columnas de I_n (la matriz identidad de orden n). Al final del proceso la mitad derecha de la matriz será igual a A^{-1}. En símbolos, el método de Gauss-Jordan transforma $(A \vdots I_n)$ en $(I_n \vdots A^{-1})$.

Ejemplo 29: encontrar la inversa de una matriz

Calcular la inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriz inicial (M aumentada con I_3) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos GJ.

$$F_2 - 2F_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 - 6F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \div (-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$F_1 + 3F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17 & 9 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Concluimos que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 30: una matriz sin inversa

Calcular la inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \div 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \div 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 + 6F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya no podemos convertir la posición $3,3$ en 1, por lo que GJ no pudo llegar a buen término. Cuando esto sucede, la conclusión es que la matriz no tiene inversa.

Cualquier sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en la forma $A \cdot X = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la columna de incógnitas y B es la columna de lados derechos. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$$

puede escribirse en forma equivalente como

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Eso se debe a que el producto a la izquierda, $A \cdot B$, es igual a $\left(\begin{smallmatrix} 3x+7y \\ 2x+5y \end{smallmatrix}\right)$, y para que sea igual al lado derecho, $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, deben cumplirse las dos ecuaciones en el sistema original.

Si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y si la matriz de coeficientes A es cuadrada e invertible, entonces es posible multiplicar los dos lados de la igualdad $A \cdot X = B$ por A^{-1} para obtener

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

(donde I es la matriz identidad, resultado de multiplicar A^{-1} por A).

En resumen, si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y la matriz de coeficientes A es invertible, entonces el sistema tiene una solución única, dada por $X = A^{-1} \cdot B$.

Ejemplo 31: inversa de una matriz de coeficientes

Acabamos de mencionar el sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Como ya vimos en el ejemplo 28, la inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces, la solución del sistema es

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Específicamente, $x = 58$ y $y = -24$.

La utilidad de este nuevo método se aprecia cuando hay que resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Así, el trabajo de calcular su inversa se hace una sola vez, y ahora para cada sistema basta con usar la fórmula $X = A^{-1} \cdot B$ para encontrar la solución. Vea el ejercicio 159.

Ejercicios

Compruebe que las dos matrices son inversas entre sí

128. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

129. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 1 & -2/c \end{pmatrix}$ con $c \neq 0$

130. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

131. $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

132. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcule la inversa, si existe

133. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

134. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

135. $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

136. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

137. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

138. $\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

139. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$

140. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

141. $\begin{pmatrix} 1/3 & 5/2 \\ 1/5 & 3/2 \end{pmatrix}$

142. $\begin{pmatrix} -1 & -2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$

143. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

144. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

145. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

146. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

147. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

148. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

149. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & c & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}$

150. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

151. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resuelva usando las inversas de los ejercicios 143 y siguientes

152. $\begin{cases} p+2r=5 \\ 2p-q+3r=0 \\ 4p+q+8r=6 \end{cases}$

153. $\begin{cases} a+2b+3c=-3 \\ a+3b+5c=1 \\ a+2b+4c=4 \end{cases}$

154. $\begin{cases} x+2y+2z=13 \\ 2x-y+z=-2 \\ x+3y+2z=5 \end{cases}$

155. $\begin{cases} 8x-y-3z=5 \\ -5x+y+2z=3 \\ 10x-y-4z=0 \end{cases}$

156. $\begin{cases} v-w=4 \\ 4u-3v+4w=2 \\ 3u-3v+4w=1 \end{cases}$

157. $\begin{cases} a+b+2c+d=4 \\ -2b=5 \\ a+2b+c-2d=0 \\ 3b+2c+d=-2 \end{cases}$

Resuelva

158. Para $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ x+2y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=-6 \\ x+2y=3 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x+5y=0 \\ x+2y=24, \end{cases}$ calcule la inversa de la matriz de coeficientes y úsela para resolver los sistemas.

159. La fábrica de ropa del ejercicio 115 (página 165) tiene un proveedor que suple los broches y las cremalleras en cantidades limitadas. Esta semana pueden suplir 200 broches y 85 cremalleras; la siguiente semana, 220 b y 90 c; luego 240 b y 100 c; y la cuarta semana 250 b y 105 c. Suponiendo que la tela no tiene problemas de disponibilidad, se quiere determinar cuántos maletines y cuántos pantalones pueden producirse cada una de esas semanas.

a. Escriba la matriz de coeficientes para el sistema de ecuaciones de cada semana.

b. Encuentre la inversa de la matriz en (a).

c. Use la inversa en (b) para resolver los cuatro sistemas de ecuaciones.

160. Resuelva los cuatro sistemas del ejercicio anterior en una sola matriz: la matriz de coeficientes aumentada con una columna para cada semana.

5.11. (Opcional) Determinantes

El *determinante* de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de tamaño 2×2 puede denotarse $\det(A)$, $|A|$ o $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, y su fórmula es

$$\det(A) = ad - bc$$

Ejemplo 32: determinante de una matriz 2×2

El determinante de $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(4) - (7)(6) = -54$$

Las matrices cuadradas de tamaños mayores que 2×2 también tienen determinante. Debe quedar claro, sin embargo, que solo las matrices cuadradas tienen determinante.

Para $n > 2$, el determinante de una matriz $A_{n \times n}$ es

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

para cualquier i fijo, o bien

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$

para cualquier j fijo, donde M_{ij}, llamado el *menor* de a_{ij}, es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fija i y la columna j de A.

Ejemplo 33: determinante de una matriz 3×3

Para calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

una opción es desarrollar a lo largo de la fila 1 (usando $i = 1$ en la primera línea de la definición):

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\ &= +a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \\ &= +(-2) M_{11} - (1) M_{12} + (3) M_{13} \end{aligned}$$

Aquí, el menor M_{11} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 1 de A,

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6+0 = -6$$

Similarmente,

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10+16 = 6$$

y

$$M_{13} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-12 = -12$$

Entonces, $\det(A) = (-2)(-6)-(1)(6)+(3)(-12) = -30.$

También era posible desarrollar el determinante a lo largo de otra fila o columna cualquiera. Por ejemplo, por la columna 2 (usando $j=2$ en la segunda línea de la definición),

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}M_{22} + (-1)^{3+2}a_{32}M_{32} \\
&= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} \\
&= -(1)M_{12} + (3)M_{22} - (0)M_{32}
\end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10+16 = 6,$$

$$M_{22} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4-12 = -8$$

y

$$M_{32} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8-15 = -7$$

Por último, $\det(A) = -(1)(6)+(3)(-8)+(0)(-7) = -30.$

El determinante de A es -30, sin importar cómo se calcule.

En el ejemplo, anterior, note que no era necesario calcular M_{32} porque iba a ser multiplicado por $a_{32} = 0$. En general, conviene desarrollar los determinantes por las filas o columnas que contengan más ceros.

Ejemplo 34: determinante de una matriz 4×4

Al desarrollar el determinante de

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo más eficiente es usar la columna 2:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -(0)M_{12} + (-2)M_{22} - (0)M_{32} + (0)M_{42} \\ &= -2M_{22} \end{aligned}$$

donde M_{22} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 2 y la columna 2 de B:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Escojamos ahora la columna 2.

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -4(3) = -12$$

Finalmente, $|B| = -2M_{22} = -2(-12) = 24$.

Recuerde que una matriz cuadrada es *triangular superior* si todos sus elementos bajo la diagonal son cero, o *triangular inferior* si todos sus elementos sobre la diagonal son cero. Resulta que si T es una matriz triangular (superior o inferior) entonces su determinante es el producto de su diagonal:

$$\det(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}$$

Para simplificar el cálculo de un determinante pueden hacerse operaciones entre las filas o columnas de la matriz para conseguir más ceros o para llevar la matriz a forma triangular. En concreto, si A es una matriz cuadrada entonces:

- Al intercambiar dos filas o dos columnas de A, el determinante cambia de signo.
- Al multiplicar una fila o columna de A por un escalar c, el determinante se multiplica por c.
- Al sumar a una fila o columna de A un múltiplo de otra, el determinante se mantiene igual.

Ejemplo 35: simplificar el cálculo de un determinante

Sea

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular su determinante deberíamos primero buscar qué operaciones entre filas o columnas consiguen más ceros en la matriz o la llevan a alguna forma triangular. Notando que las filas 1 y 4 se parecen, decidimos restar $F_1 - F_4$. El determinante se mantiene:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_4} \; = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ahora vemos que la primera fila y la cuarta columna tienen tres ceros, pero antes de desarrollar notemos que la primera columna también tiene dos ceros y la segunda tiene uno. Con solo intercambiar las columnas 1 y 3 la matriz será triangular inferior:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}}$$

El signo cambia por el intercambio de columnas. Como esta nueva matriz es triangular, su determinante se calcula simplemente multiplicando la diagonal:

$$\det(D) = -(7)(-8)(9)(3) = 1512$$

5.11.1. La regla de Cramer

La *regla de Cramer* permite encontrar el valor de una o varias incógnitas en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, si la solución es única, de la siguiente manera: Si $A_{n\times n}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones con incógnitas $x_1,\ldots,x_n$, con $\det(A)\neq 0$, y si A_j es el resultado de sustituir la columna j de A por el lado derecho del sistema, entonces

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad \text{para cada } j = 1,2,\ldots,n.$$

Ejemplo 36: encontrar una incógnita usando la regla de Cramer

Encontrar el valor de y en el sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ 5x + 4y - z = -6 \\ 5x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

En primer lugar identifiquemos las incógnitas x, y y z con x_1, x_2 y x_3, según la notación de Cramer. La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

y las matrices mencionadas en el teorema son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 5 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para determinar el valor de $y = x_2$, calculamos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -33$$

y

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 132$$

Por la regla de Cramer encontramos que $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{132}{-33} = -4.$

Ejercicios

Calcule, para $A = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -5 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

161. $\det(A)$, $|B|$ y $|C|$

162. $|A^{\mathsf{T}}|$, $|B^{\mathsf{T}}|$ y $|C^{\mathsf{T}}|$

163. $A \cdot B$, $|A \cdot B|$ y $|A| \cdot |B|$

164. C^{-1}, $|C^{-1}|$ y $|C|^{-1}$

Calcule

165. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

166. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

167. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

168. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

169. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

170. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

171. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -9 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

172. $\begin{vmatrix} 8 & -9 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

173. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -8 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 5 \end{vmatrix}$

174. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -8 \\ -8 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Resuelva usando la regla de Cramer

175. $\begin{cases} 3p+6q=5 \\ 8p+15q=6 \end{cases}$

176. $\begin{cases} -2a+5b=-47 \\ 5a-6b=72 \end{cases}$

177. $\begin{cases} -3a+c=0 \\ 4a-6b=c-2 \\ a-2=5b \end{cases}$

178. $\begin{cases} s-2t=3+3r \\ 4r-s+t=3 \\ 6r-2s+3t+1=0 \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=-1 \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

180. $\begin{cases} 2a-b+c=3 \\ 3a+2b-2c=1 \\ a-3b+c=-2 \end{cases}$

181. $\begin{cases} 2p+q-3r=5 \\ 3p+2q-2r=5 \\ 5p-3q-r=16 \end{cases}$

Resuelva

182. Encuentre w en $\begin{cases} 3t-u+3v+w=2 \\ 2t+3u+2v+w=2 \\ -3t-u-4v+w=1 \\ -4t+14u-4v=-5 \end{cases}$

183. En el ejercicio 69 (página 155), si ahora se necesitan iguales cantidades de los tipos B y C, ¿cuántos kilos de A deben usarse?

184. En el ejercicio 70 (página 155), si ahora hay once tazas de azúcar, quince huevos y siete litros de leche disponibles, ¿cuántas porciones de pastel de manzana pueden hacerse?

185. El tanque de un buque petrolero puede ser llenado en dos días usando tres bombas. La bomba grande y la pequeña juntas tardarían tres días, mientras que la pequeña y la mediana juntas tardarían cuatro días. ¿Cuánto tiempo tardaría la bomba pequeña, trabajando sola, en llenar el tanque?

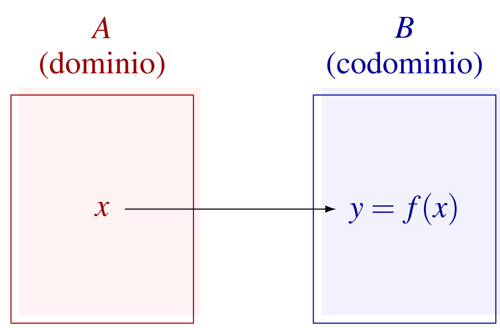
CAPÍTULO 6
Funciones

6.1. Concepto y definiciones

Dados dos conjuntos A y B, una función f de A en B es una regla bajo la cual a cada elemento en el conjunto A se le asigna un (único elemento del conjunto B. Se acostumbra escribir $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A en B.

El conjunto A es el *dominio* de la función, y el conjunto B es el *codominio*.

Sea x un elemento en el dominio A, es decir, $x \in A$, y sea y el elemento en el codominio B asignado a x. Entonces, y se llama la *imagen* de x y se denota $f(x)$. Recíprocamente, x es una *preimagen* de y.



Ejemplo 1: función, imágenes, preimágenes

Sean A el conjunto de personas en cierto grupo:

$$A = \{\text{Alberto, Beatriz, Catalina, Diego, Elena, Felipe, Gladys, Horacio}\}$$

y B el conjunto de los meses del año:

$$B = \{\text{enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, setiembre, octubre, noviembre, diciembre}\}$$

Sea m la función que a cada persona en A le asigna el mes de nacimiento en B. Es decir, para cada persona p en A

$$m(p) = \text{mes de nacimiento de } p.$$

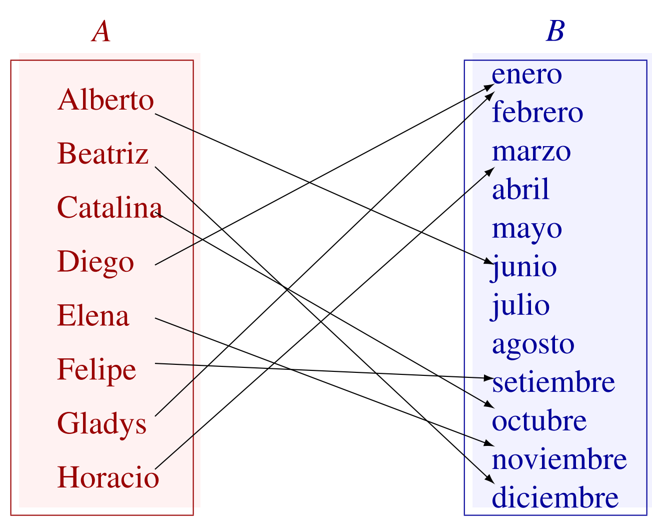
Supongamos que

$$\begin{aligned}
m(\text{Alberto}) &= \text{junio} \\
m(\text{Beatriz}) &= \text{diciembre} \\
m(\text{Catalina}) &= \text{octubre} \\
m(\text{Diego}) &= \text{enero} \\
m(\text{Elena}) &= \text{noviembre} \\
m(\text{Felipe}) &= \text{setiembre} \\
m(\text{Gladys}) &= \text{enero} \\
m(\text{Horacio}) &= \text{marzo}
\end{aligned}$$

Entonces, la imagen de Alberto es junio, la imagen de Beatriz es diciembre, etc. Note que cada elemento en A tiene *exactamente* una imagen (nadie tiene más de una ni menos de una), porque cada persona tiene solamente un mes de nacimiento, ni más de uno ni menos de uno.

Recíprocamente, una preimagen de octubre es Catalina, una preimagen de enero es Diego, etc. Pero otra preimagen de enero es Gladys. Y por otro lado, agosto no tiene ninguna preimagen.

La función m se puede visualizar en este diagrama:



Dos características que se mencionaron sobre la función m en el ejemplo anterior son típicas de cualquier función:

- Cada elemento del dominio debe tener exactamente una imagen.
- Algunos elementos del codominio pueden tener más de una preimagen y algunos pueden no tener preimágenes.

El conjunto de elementos en el codominio que tienen por lo menos una preimagen se llama *ámbito* de la función.

En el ejemplo, el ámbito de la función m es el conjunto de meses en los que nació alguien del dominio:

$$\text{ámbito de } m = \{\text{enero, marzo, junio, setiembre, octubre, noviembre, diciembre}\}$$

Más típico que el ejemplo anterior es el caso en el que el dominio y el codominio de una función son conjuntos de números reales. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: una función real de variable real

Sea $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ la función definida por la regla

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{para cada } x \in [-5,5]$$

Entonces, por ejemplo:

- La imagen de -3 es $f(-3)$, el resultado de sustituir $r = -3$ en la fórmula para $f(r)$: $f(\,-3\,) = (\,-3\,)^2 - 1 = 8$.
- La imagen de $\sqrt{2}$ es el resultado de sustituir $r = \sqrt{2}$ en $f(r)$: $f(\,\sqrt{2}\,) = (\,\sqrt{2}\,)^2 - 1 = 1$.
- Una preimagen de 0 es 1, porque $f(\,1\,) = (\,1\,)^2 - 1 = 0$.
- Otra preimagen de 0 es -1, porque también $f(\,-1\,) = (\,-1\,)^2 - 1 = 0$.
- El número $y = 99$ está en el codominio de f, pero no tiene preimagen.

  Esto se debe a que una preimagen sería un número $x \in [-5,5]$ tal que $f(x) = 99$; es decir, que $x^2 - 1 = 99$. Pero las únicas soluciones de esta ecuación son $x = 10$ y $x = -10$, que no están en el dominio.

  Por eso es que $y = 99$ está en el codominio pero no en el ámbito de f.

Ejercicios

Resuelva

1. Sea F el conjunto formado por estas fechas anuales:

$$F = \{ \text{Año Nuevo}, \text{Navidad}, \text{Independencia de Costa Rica}, \\ \text{Día del Niño}, \text{Anexión de Nicoya}, \text{San Valentín}, \text{Día de la Raza} \}$$

y sea M el conjunto de los meses del año.
Defina $h\colon F \to M$ como la función que a cada fecha le asigna su mes.

a. ¿Cuál es la imagen de "Año Nuevo"?
b. ¿Cuál es la imagen de "Día del Niño"?
c. ¿Cuál es la imagen de "Anexión de Nicoya"?
d. ¿Cuáles son las preimágenes de febrero?
e. ¿Cuáles son las preimágenes de junio?
f. ¿Cuáles son la preimágenes de setiembre?
g. ¿Cuál es el ámbito de h?

2. Considere la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x + 6$.

a. ¿Cuál es el dominio de g?
b. ¿Cuál es el codominio de g?
c. ¿Cuál es la imagen de $x = 2$?
d. ¿Cuál es la imagen de $x = -5$?
e. ¿Cuál es la imagen de $x = 0$?
f. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = 21$?
g. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = -4$?
h. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = 5$?

3. Considere la función $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(t) = 4t - 2t^2$.

a. ¿Cuál es el dominio de p?
b. ¿Cuál es el codominio de p?
c. ¿Cuál es la imagen de $t = 3$?
d. ¿Cuál es la imagen de $t = 0$?
e. ¿Cuál es la imagen de $t = -2$?
f. ¿Cuál es la imagen de $t = \sqrt{3}$?
g. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = 2$?
h. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = 0$?
i. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = 5$?
j. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = -16$?
k. ¿Cuáles son las preimágenes de $y = -2$?

6.2. Funciones reales de una variable real

Una *función real de variable real*, digamos f, es una regla que a cada número real x le asigna algún número real y dado por una fórmula $y = f(x)$. La variable x podría tener restricciones y no referirse a cualquier número real sino solo a algunos.

Ejemplo 3: función real de variable real

Sea g la función definida por la regla $g(r) = \dfrac{3r-4}{r+2}$.

Algunos valores de esta función son los siguientes:

- $g(-1)$ es el resultado de sustituir $r = -1$ en la fórmula de $g(r)$:

$$g(-1) = \frac{3(-1)-4}{(-1)+2} = \frac{-7}{1} = -7$$

- $g(2/3) = \dfrac{3(2/3)-4}{(2/3)+2} = \dfrac{-2}{8/3} = \dfrac{-3}{4}$
- $g(\sqrt{5}-2) = \dfrac{3(\sqrt{5}-2)-4}{(\sqrt{5}-2)+2} = \dfrac{3\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{15-10\sqrt{5}}{5} = 3-2\sqrt{5}$
- $g(-2) = \dfrac{3(-2)-4}{(-2)+2} = \dfrac{-10}{0}$, que no existe. Entonces, $g(-2)$ está indefinido o, en otras palabras, -2 no está en el dominio de g.
- La expresión $g(a-1)$ no puede evaluarse numéricamente si no se conoce el valor de a, pero sí puede sustituirse $r = a-1$ en la fórmula.

$$g(a-1) = \frac{3(a-1)-4}{(a-1)+2} = \frac{3a-7}{a+1}$$

Una función se puede *definir en trozos*. Eso significa que la definición incluye no solo una fórmula sino varias, y que en unos casos se aplica una fórmula y en otros otra, dependiendo de algún criterio sobre la variable. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: función definida en trozos

Sea p la función dada por

$$p(t) = \begin{cases} 2t+5 & \text{si } t < -1 \\ 3-t^2 & \text{si } -1 < t \leq 5 \\ 1/t & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

El valor de $p(t)$ se calcula en alguna de las tres líneas de la definición, dependiendo de si $t < -1$, $-1 < t \leq 5$ o $t > 5$.

Por ejemplo,

- $p(-2)$ tiene $t = -2$, que cumple $t < -1$. Usamos entonces la primera línea y calculamos $p(-2) = 2(-2) + 5 = 1$.
- $p(0)$ tiene $t = 0$, que se ajusta al caso $-1 < t \leq 5$; de acuerdo con la segunda línea encontramos $p(0) = 3 - (0)^2 = 3$.
- $p(8)$ tiene $t = 8$, con $t > 5$, así que usamos la tercera línea: $p(8) = 1/8$.
- $p(-1)$ tiene $t = -1$, que no se ajusta a ninguno de los tres casos. Entonces, $p(-1)$ está indefinido.

Ejercicios

Encuentre los valores indicados

4. $f(4)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{6})$ y $f(1-\sqrt{2})$, para $f(r) = 3r^2 - 5r$

5. $p(0)$, $p(-3)$ y $p(a-2)$, para $p(t) = \frac{7}{4} \cdot 2^{-t}$

6. $c(\sqrt{5})$, $c(4-\sqrt{3})$, $c(2v+1)$ y $c(t+2)$, para $c(v) = v^3 - 5v + 1$

7. $c(f(2))$, $p(f(1))$, $f(p(-2))$, $c(f(x))$ y $f(p(y))$, para las funciones f, p y c de los tres ejercicios anteriores.

8. $g(-4)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(3)$, $g(5)$ y $g(9)$, para

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq -1 \\ (x+1)^{-1/2} & \text{si } -1 < x < 5 \\ 3x^2 - 8 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

9. $h(-5)$, $h(-3)$, $h(0)$, $h(2)$, $h(3)$ y $h(8)$, para

$$h(w) = \begin{cases} \sqrt{w^2 - 9} & \text{si } w \leq -3 \text{ o } w \geq 3 \\ \dfrac{w+1}{w-2} & \text{si } -3 < w < 3 \end{cases}$$

6.3. Dominio máximo de una función

El *dominio* (o dominio máximo) de una función f es el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definido.

Para encontrar el dominio de una función es importante tener en cuenta los dos tipos de restricción siguientes.

- Cuando hay una fracción, el denominador *no puede* ser igual a 0.
- Cuando hay una raíz par, el subradical *debe ser* mayor o igual que 0.

Las raíces pares son las de índice par: cuadradas, cuartas, sextas, etc. Están definidas solo si el subradical es mayor o igual que cero. En cambio, las raíces impares (cúbicas, quintas) no tienen restricción de dominio.

Ejemplo 5: dominio de una función con denominador

Sea f la función definida por la regla $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$.

El dominio de f está formado por todos los números reales para los cuales $f(x)$ está definido. La única restricción la da el denominador $x+2$ (porque un denominador nunca puede ser cero), que causa que $f(x)$ no esté definido para $x=-2$.

El dominio es entonces $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Ejemplo 6: dominio de una función definida en trozos

Sea p la función dada por la fórmula

$$p(t) = \begin{cases} 2t+5 & \text{si } t < -1 \\ 3-t^2 & \text{si } -1 < t \leq 5 \\ 1/t & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

El dominio de p está formado por todos los números t para los cuales $p(t)$ está definido, lo cual es todos los números reales excepto -1, ya que $t=-1$ no está incluido en ninguno de los tres casos. Note que la fracción $1/t$ en el tercer caso no excluye a $t=0$ del dominio, porque esa fracción se aplica solo si $t>5$; $p(0)$ no es $1/0$, sino 3 por el segundo caso.

En suma, el dominio de p es $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Ejemplo 7: dominio de una función con raíz par

Encontrar el dominio de la función h, dada por $h(w) = \sqrt[6]{25 - w^2}$.

Como las raíces sextas reales existen solo para números mayores o iguales a cero, entonces el dominio de h está formado por los valores de w para los cuales

$$25 - w^2 \geq 0$$

La solución de esta inecuación[1] es el intervalo $[-5, 5]$: ese es el dominio de h.

Ejemplo 8: dominio de una función con denominador y raíz par

Encontrar el dominio de $q(v) = \sqrt{v - 5} - \dfrac{2v - 4}{v^2 - 7v}$.

Esta función tiene dos restricciones de dominio.

- Por razón de la raíz cuadrada, el subradical $v - 5$ debe ser mayor o igual que cero.

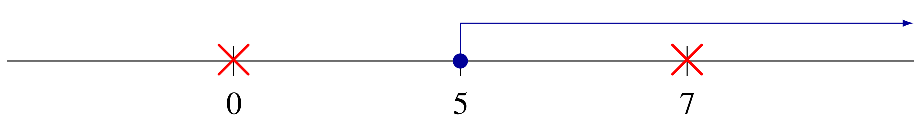
$$\begin{aligned} v - 5 &\geq 0 \\ v &\geq 5 \end{aligned}$$

- Debido a la fracción, el denominador $v^2 - 7v$ debe ser distinto de cero.

$$\begin{aligned} v^2 - 7v &\neq 0 \\ v(7 - v) &\neq 0 \end{aligned}$$

  lo que requiere que $v \neq 0$ y $v \neq 7$.

Podemos graficar las dos restricciones así, indicando en azul las "obligaciones" ($v \geq 5$) y en rojo las "prohibiciones" ($v \neq 0$ y $v \neq 7$).



El dominio entonces está formado por todos los valores de v en $[5, \infty[$, excepto 0 y 7. Pero como 0 no está en $[5, \infty[$, no es necesario mencionarlo, y así podemos escribir el dominio como $[5, \infty[- \{7\}$.

Una forma equivalente de escribir el dominio es $[5, 7[\cup]7, \infty[$.

[1] No mostramos aquí el procedimiento, pero en la sección 4.5, página 111, vimos cómo resolver inecuaciones polinomiales.

Ejercicios

Encuentre el dominio

10. $h(u) = 3u^2 - 5u + 1$

11. $f(t) = \dfrac{2t^2 - 1}{4t - 3t^2 + 4}$

12. $p(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2}$

13. $g(w) = \dfrac{w^3 - w^2}{3w + 1 - 3w^2 - w^3}$

14. $f(z) = \dfrac{2 - z}{1 - z} \div \dfrac{1 + z}{2 + z}$

15. $r(x) = \sqrt[5]{x^2 - 5x}$

16. $p(v) = 2v - \sqrt{5v^2 + 15 - v^3 - 3v}$

17. $g(w) = \sqrt[3]{2w + 5} - \sqrt{20w - 4w^2 - 25}$

18. $r(u) = 3\sqrt{2 - 8u} - 2\sqrt{3 + u}$

19. $q(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t - 1}{4 - t^2}}$

20. $r(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}} - \dfrac{1}{z^2 - 9}$

21. $f(x) = \dfrac{5}{x\sqrt{x + 4}}$

22. $h(t) = \dfrac{\sqrt{10 - 4t}}{(t - 1)\sqrt{t - 2}}$

23. $q(t) = \dfrac{\sqrt[4]{t - 1}}{\sqrt[4]{4 - t^2}}$

24. $g(r) = \begin{cases} \sqrt{r - 1} & \text{si } r > 3 \\ \dfrac{r + 1}{r - 2} & \text{si } r < 3 \end{cases}$

25. $c(v) = \begin{cases} \sqrt[3]{v + 1} & \text{si } v < 5 \\ \dfrac{13}{v^2 - 8v} & \text{si } v \geq 5 \end{cases}$

6.4. Operaciones con funciones

En esta sección vamos a ver cinco operaciones entre funciones. Las primeras cuatro corresponden directamente con operaciones ya conocidas entre números: suma, resta, producto y división.

La quinta operación, la composición de funciones, no tiene equivalente entre números.

6.4.1. Suma, resta, multiplicación y división de funciones

Dadas dos funciones f y g, se pueden definir las siguientes operaciones entre ellas:

- La suma $f + g$ es la función que a cada x le asigna $f(x) + g(x)$. Es decir,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La resta $f - g$ es la función que a cada x le asigna $f(x) - g(x)$. Esto es,

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- El producto fg es la función que a cada x le asigna $f(x)\cdot g(x)$, así:

$$(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

- El cociente f/g es la función que a cada x le asigna $f(x)/g(x)$, mientras que $g(x)\neq 0$. Es decir,

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad \text{o bien} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo 9: operaciones entre funciones

Sean $f(x)=\sqrt{x+2}$ y $g(x)=1/x$. Entonces,

- $(f+g)(x)=\sqrt{x+2}+1/x$
- $(f-g)(x)=\sqrt{x+2}-1/x$
- $(fg)(x)=\sqrt{x+2}\cdot(1/x)=\sqrt{x+2}/x$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{1/x}=x\sqrt{x+2}$

Ejercicios

Para cada par de funciones dadas, encuentre su suma, resta, producto y cociente, y simplifique

26. $p(t)=3t^2-5t,\ q(t)=5t-2t^2+1$

27. $f(u)=\sqrt{u},\ g(u)=u\sqrt{u}$

28. $m(x)=9x+3/x,\ n(x)=3/x$

29. $X(r)=6/(r+1),\ Y(r)=(r+1)^2$

6.4.2. Composición de funciones

La *composición* de dos funciones f y g, denotada $f\circ g$, consiste en evaluar una de ellas en el resultado de la otra. Específicamente, $\big(f\circ g\big)(x)=f\big(g(x)\big)$. La composición no es conmutativa: $\big(g\circ f\big)(x)=g\big(f(x)\big)$, que en general no es igual a $\big(f\circ g\big)(x)$.

Usualmente vamos a escribir $f\circ g(x)$ para denotar $\big(f\circ g\big)(x)$.

Ejemplo 10: composición de funciones

Sean $f(w) = \dfrac{4-w}{1+2w}$, $g(x) = 6-x^2$ y $h(u) = \sqrt{6-u}$. Entonces,

- $f \circ g(x) = f(\ g(x)\ ) = f(\ 6-x^2\ ) = \dfrac{4-(\ 6-x^2\ )}{1+2(\ 6-x^2\ )} = \dfrac{x^2-2}{13-2x^2}$
- $g \circ f(w) = g(\ f(w)\ ) = g\left(\ \frac{4-w}{1+2w}\ \right) = 6-\left(\ \frac{4-w}{1+2w}\ \right)^2$
- $g \circ h(t) = g(\ h(t)\ ) = g(\ \sqrt{6-t}\ ) = 6-\left(\ \sqrt{6-t}\ \right)^2 = 6-(6-t) = t$
- $h \circ g(r) = h(\ g(r)\ ) = h(\ 6-r^2\ ) = \sqrt{6-(\ 6-r^2\ )} = \sqrt{r^2} = |r|$

Ejercicios

Encuentre las fórmulas que se piden

30. $g \circ f(x)$ y $f \circ g(v)$, dadas $g(v) = 1-3v$ y $f(x) = 2x^2-x+1$

31. $h \circ p(t)$ y $p \circ h(z)$, dadas $h(z) = \dfrac{2z}{2z+5}$ y $p(t) = 5t-16$

32. $r \circ q(u)$ y $q \circ r(x)$, dadas $r(x) = \sqrt{x-3}$ y $q(u) = 4u^2+3$

33. $c \circ g(r)$ y $g \circ c(r)$, dadas $c(r) = r^{3/2}+1$ y $g(r) = 3r-2r^2$

34. $p \circ h(z)$ y $h \circ p(v)$, dadas $p(t) = \dfrac{3+t}{1-t}$ y $h(z) = \dfrac{2}{1-z}$

35. $f \circ q(x)$ y $q \circ f(w)$, dadas $f(u) = \dfrac{5u}{2-2u}$ y $q(v) = \dfrac{2v}{2v+5}$

36. $p \circ h(t)$ y $h \circ p(v)$, dadas $p(w) = \dfrac{w-2}{w+3}$ y $h(y) = \dfrac{3y+2}{1-y}$

37. $h \circ c(w)$ y $c \circ h(u)$, dadas $h(v) = 2v^2-4v+2$ y $c(x) = 1-\sqrt{x/2}$

38. $q \circ f(v)$ y $f \circ q(t)$, dadas $q(z) = \sqrt[3]{5z-1}$ y $f(t) = \dfrac{1+t^3}{5}$

6.4.3. Funciones inversas

Dos funciones f y g son *inversas* si $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ para todo x. En ese caso se escribe $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$.

Según esa definición, si f tiene una inversa f^{-1}, entonces la ecuación $y = f(x)$ implica que $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. De aquí que las inversas estén caracterizadas por la relación

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Dada una función f, para encontrar su inversa, f^{-1}, se puede plantear la ecuación $y = f(x)$ y despejar x en términos de y. Por el párrafo anterior, este x será $x = f^{-1}(y)$.

Si f y g son inversas, entonces el domino de g es igual al ámbito de f, y viceversa.

Ejemplo 11: comprobar que dos funciones son inversas

Sean $g(z) = 4 - 8z^3$ y $h(v) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}$. Estas dos funciones son inversas, porque

- $h(g(z)) = h(4-8z^3) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4-(4-8z^3)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8z^3} = \frac{1}{2}(2z) = z$, y también
- $g(h(v)) = g(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}) = 4 - 8\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}\right)^3 = 4 - 8\cdot\frac{1}{8}(4-v) = 4-(4-v) = v$.

Ejemplo 12: encontrar la inversa de una función

Para encontrar la inversa de $c(u) = \dfrac{3u-1}{u+5}$, planteamos la ecuación $y = c(u)$ (cualquier letra puede servir en vez de y, excepto, por supuesto, u y c) y despejamos la incógnita u.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3u-1}{u+5} \\ (u+5)y &= 3u-1 \\ uy+5y &= 3u-1 \\ uy-3u &= -1-5y \\ u(y-3) &= -1-5y \\ u &= \frac{-1-5y}{y-3} = \frac{1+5y}{3-y} \end{aligned}$$

Entonces, la inversa de c está dada por $c^{-1}(y) = \dfrac{1+5y}{3-y}$.

El dominio de c es $\mathbb{R} - \{-5\}$ (por el denominador $u+5$), y su ámbito es el dominio de c^{-1}: $\mathbb{R} - \{3\}$ (por el denominador $3-y$).

Recíprocamente, el ámbito de c^{-1} es el dominio de c: $\mathbb{R} - \{-5\}$.

Algunas funciones no tienen una inversa en todo su dominio, lo cual se detecta cuando es imposible despejar x en la ecuación $y = f(x)$.

Ejemplo 13: una función sin inversa

La función f dada por $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ no tiene inversa en $\mathbb{R}$, porque al intentar despejar x en la ecuación $y = f(x)$ nos encontramos con este problema: $y = 3x^2 - 6x + 1$ lleva a $3x^2 - 6x + 1 - y = 0$, una ecuación cuadrática con coeficientes $a = 3$, $b = -6$ y $c = 1 - y$. Por la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(3)(1-y)}}{6} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{24 + 12y}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{6 + 3y}}{3} = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6 + 3y} \end{aligned}$$

No podemos acabar de despejar x porque no sabemos si la solución tendrá $+\sqrt{6+3y}$ o $-\sqrt{6+3y}$. Hay entonces hay dos soluciones posibles, pero en una función inversa la solución debe ser única.

Concluimos que f no tiene inversa (pero vea el siguiente ejemplo).

Cuando una función no tiene inversa en todo su dominio, es posible que sí la tenga en algún dominio restringido (algún subconjunto del dominio).

Ejemplo 14: inversa de una función con dominio restringido

Veamos que la función f, definida como en el ejemplo anterior pero con el dominio restringido a $x \leq 1$, sí tiene una inversa.

Tenemos

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \quad \text{para } x \leq 1$$

y ya vimos que la ecuación $y = f(x)$ nos lleva a

$$x = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6 + 3y}$$

El signo $\pm$ significa que hay dos soluciones: $1 + \frac{1}{3}\sqrt{6+3y}$ y $1 - \frac{1}{3}\sqrt{6+3y}$. La primera es es mayor o igual que 1 por ser [1 más una cantidad positiva], y la segunda es menor o igual que 1: [1 menos una cantidad positiva].

Como sabemos que $x \leq 1$ por la restricción de dominio, concluimos que la solución correcta es la segunda:

$$x = 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6 + 3y}$$

Así es que $f^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{6+3y}$. En efecto, por un lado

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= f(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}) \\ &= 3(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y})^2 - 6(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}) + 1 \\ &= 3[1 - \tfrac{2}{3}\sqrt{6+3y} + \tfrac{1}{9}(6+3y)] - 6 + 2\sqrt{6+3y} + 1 \\ &= 3 - 2\sqrt{6+3y} + \tfrac{1}{3}(6+3y) - 5 + 2\sqrt{6+3y} \\ &= -2 + 2 + y = y \end{aligned}$$

Y por el otro lado,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x^2 - 6x + 1) &= 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6 + 3(3x^2 - 6x + 1)} \\ &= 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6 + 9x^2 - 18x + 3} = 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{9(x-1)^2} \\ &= 1 - \tfrac{1}{3} \cdot 3|x-1| \end{aligned}$$

donde $x \leq 1$ porque así se definió f, así que $x - 1 \leq 0$ y de ahí que $|x-1| = 1 - x$.

Entonces,

$$f^{-1}(f(x)) = 1 - \tfrac{1}{3} \cdot 3(1-x) = 1 - (1-x) = x$$

En resumen, $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f^{-1}(f(x)) = x$, como debía ser. $\square$

Ejercicios

Determine los valores que se piden sin encontrar la fórmula de la función inversa

39. Para $g(r) = r^3 + 5r$, calcule $g(-1)$, $g(2)$ y $g(3)$, y use esos valores para determinar $g^{-1}(42)$, $g^{-1}(-6)$ y $g^{-1}(18)$

40. Para $f(t) = \dfrac{t-1}{t+2}$, calcule $f(-4)$, $f(1)$ y $f(8)$, y úselos para determinar $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(0.7)$ y $f^{-1}(2.5)$

41. Para $p(v) = 2^v$, calcule $p(0)$, $p(2)$ y $p(5)$, y con ellos determine $p^{-1}(1)$, $p^{-1}(32)$ y $p^{-1}(4)$

Determine si son inversas o no

42. $q(u) = \frac{1}{4}u + 2$ y $f(x) = 4x - 8$

43. $f(r) = -\frac{3}{5}r + 3$ y $p(v) = -\frac{5}{3}v + 5$

44. $c(t) = t^7 - 11$ y $h(x) = \sqrt[7]{x - 11}$

45. $p(v) = \dfrac{v}{v+3}$ y $c(z) = \dfrac{3z}{z-1}$

46. $h(z) = \dfrac{2z}{z+1}$ y $g(r) = \dfrac{r+1}{r-2}$

47. $q(u) = \sqrt{u-1}$ y $g(w) = w^2 + 1$

48. $q(u) = \sqrt{u-1}$ y $g(w) = w^2 + 1$ para $w \geq 0$

Encuentre la inversa

49. $w = 3x + 5$

50. $y = 6 - 2p$

51. $t = \dfrac{4y-1}{7}$

52. $v = \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}$

53. $z = w^3 - 6$

54. $q = \sqrt[3]{4 - 8u}$

55. $u = \sqrt[5]{2x^3 + 1} - 2$

56. $p = \sqrt[11]{\frac{1}{4}t^5 - 2} + 6$

57. $x = \dfrac{1}{r-3}$

58. $v = \dfrac{2p+1}{p}$

59. $r = \dfrac{3q}{1-2q}$

60. $t = \dfrac{y^3}{1+y^3}$

61. $z = v^2 + 3$ para $v \geq 0$

62. $r = y^2 + 4y$ para $y \geq -2$

63. $w = 16 - 10z + z^2$ para $z \leq 5$

Encuentre el dominio, la inversa y el ámbito

64. $q(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

65. $g(y) = \dfrac{y+5}{2y-4}$ para $y \neq 2$

66. $h(t) = \dfrac{2}{5t+8}$ para $t \neq -8/5$

67. $p(r) = \dfrac{r-2}{r+3}$ para $r \neq -3$

68. $h(w) = \dfrac{3w+2}{1-w}$ para $w \neq 1$

69. $f(u) = \sqrt[3]{-2u - 2}$

70. $q(v) = 1 - \sqrt[5]{v+6}$

71. $p(z) = \sqrt{1-z}$ para $z \leq 1$

72. $g(x) = x^2 - 2$ para $x \geq 0$

73. $f(t) = -t^2 + 8t - 7$ para $t \leq 4$

74. $r(t) = 6 - 2\sqrt{t}$

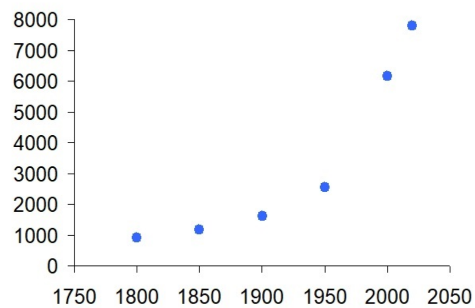
75. $p(u) = u^2 + 4u + 4$ para $u \geq -2$

6.5. Funciones crecientes y funciones decrecientes

Cuando una función real $y = f(x)$ depende de una variable real x, puede suceder que entre mayor sea x, mayor sea también y. En ese caso se dice que la función es *creciente*.

Un ejemplo de eso se da con la población mundial como función del número de año.

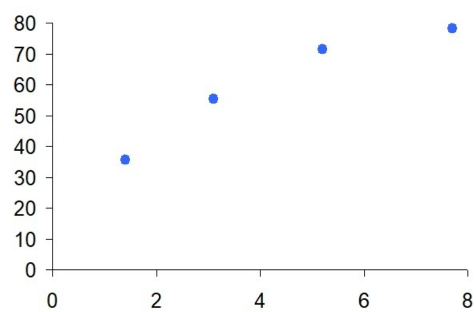
Año	Población (millones)
1800	906
1850	1171
1900	1608
1950	2536
2000	6143
2020	7795



Si vemos la población mundial P como función del tiempo t, $P = f(t)$, entonces a mayor sea el tiempo, mayor será la población. Eso significa que la población es una función creciente del tiempo.

Otro ejemplo se da en el siguiente cuadro, con datos (ficticios) sobre montos invertidos en publicidad por una empresa de venta de servicios, y ventas mensuales.

Inversión en publicidad (\$1000s / mes)	Ventas (\$1000s / mes)
1.4	35.7
3.1	55.3
5.2	71.4
7.7	78.3

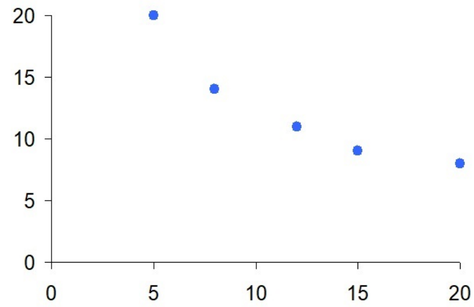


Tomando las ventas como función del monto invertido en publicidad, resulta que también esta función es creciente: entre mayor sea la inversión en publicidad, mayores serán las ventas.

En la situación contraria, cuando $y = f(x)$ pero entre mayor sea x menor será y, se dice que la función f es *decreciente*.

En este cuadro vemos datos (ficticios) sobre el tiempo requerido para completar una tarea en términos del número de personas asignadas a ella.

Número de personas	Horas requeridas
5	20
8	14
12	11
15	9
20	8



Si el tiempo requerido es función del número de personas entonces la función es decreciente: a mayor número de personas, menor será el tiempo requerido.

Cuando una función no crece ni decrece, se dice que es *constante*.

6.6. Gráficos

El *gráfico* de una función f es el conjunto de pares (x,y) que satisfacen la ecuación $y = f(x)$. Se acostumbra representar estos pares ordenados en un plano cartesiano.

El gráfico de $y = f(x)$ interseca al eje Y (vertical) cuando $x = 0$. Interseca al eje X (horizontal) cuando $y = 0$.

La *distancia* entre dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

El *punto medio* entre dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) se calcula con la fórmula

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo 15: graficar una función definida en trozos

Graficar $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{9 - x^2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Notemos en primer lugar el dominio: aunque cualquier $x \in \mathbb{R}$ está incluido en alguno de los dos casos ($x \leq 2$ o $x > 2$), el denominador en la segunda fórmula, $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$ excluye en principio a $x = -3$ y a $x = 3$. Pero $x = -3$ está en el primer caso, el de $x \leq 2$, así que $f(-3)$ se calcula con la primera fórmula.

Es solamente $f(3)$ que está indefinido, porque $x = 3$ sí está en el segundo caso. Específicamente,

$$f(-3) = (-3) - (-3)^2 = -12 \quad \text{pero} \quad f(3) = \frac{3}{9 - 3^2} : \text{indefinido.}$$

Entonces, el dominio es $\mathbb{R} - \{3\}$.

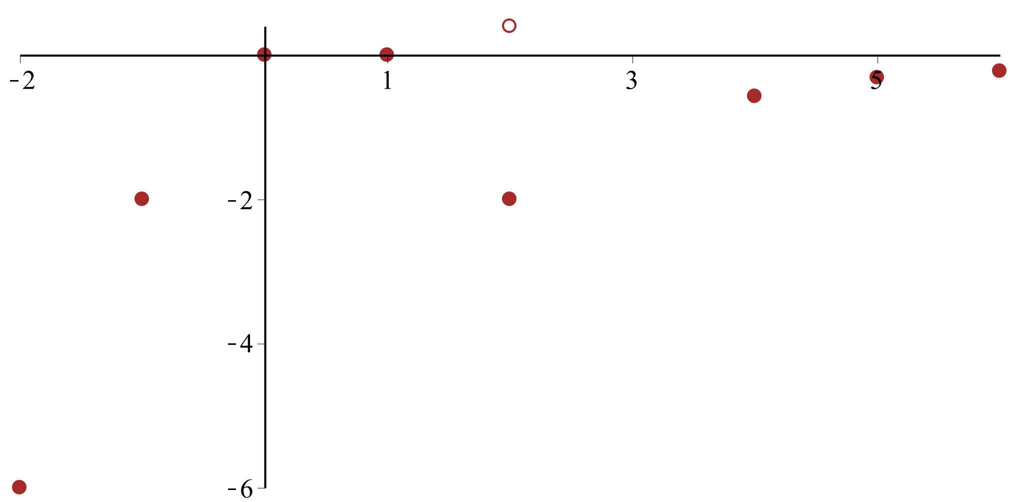
Aunque el gráfico está compuesto por infinitos puntos, podemos darnos una buena idea graficando algunos de ellos y conectándolos. Como la fórmula de $f(x)$ está dividida alrededor de $x = 2$, tomaremos algunos puntos a la izquierda y algunos a la derecha de 2. Cada punto estará compuesto por un valor de x, que escogeremos entero, y el valor de y que calcularemos como $f(x)$. La siguiente tabla incluye algunos puntos a la izquierda de 2 (el primer caso en la definición de $f(x)$).

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-2	0	0	-2

La parte del gráfico a la derecha de 2 debe estar estrictamente a la derecha de 2 (con $x > 2$, no $x \geq 2$). Aún así, calculemos lo que sería $f(2)$ si viniera de la fórmula en la segunda línea, e incluyámoslo en la tabla entre paréntesis para indicar que ese es solamente un punto guía pero no está en el gráfico.

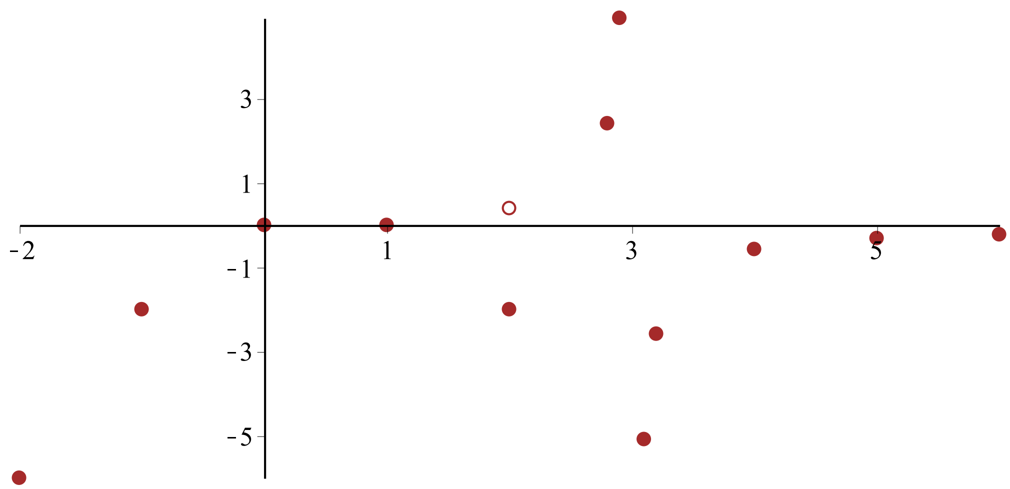
x	(2)	3	4	5	6
y	(0.4)	$\nexists$	-0.5714	-0.3125	$-0.\overline{2}$

Al indicar esos puntos en el plano, incluyendo $(2, 0.4)$ como un círculo sin rellenar, obtenemos

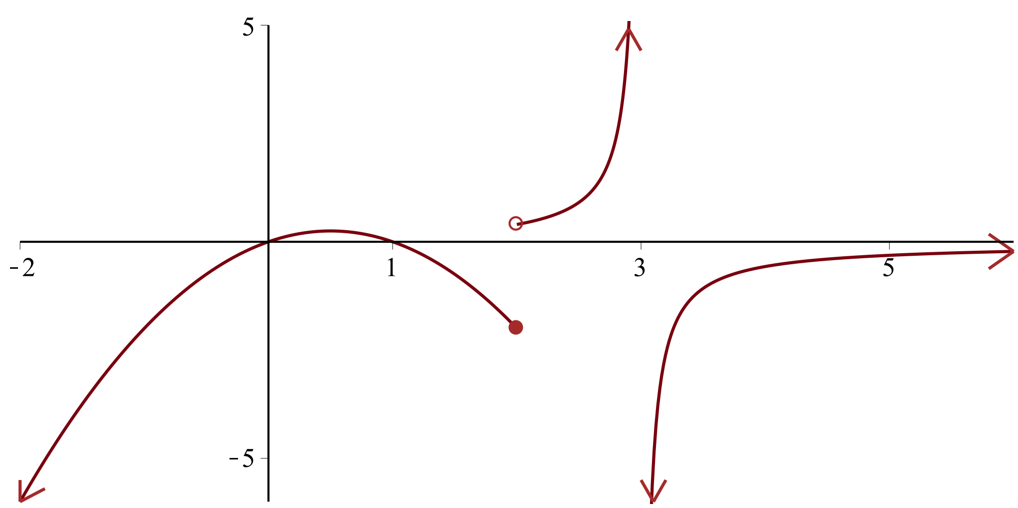


Es fácil imaginar cómo conectar los primeros cinco puntos. Para conectar los siguientes cuatro, empezando por el punto sin rellenar en $(2, 0.4)$, necesitamos más información, sobre todo sabiendo que no deben conectarse los puntos $(2, f(2)$ y $(4, f(4))$ porque el gráfico tiene un vacío en $x = 3$. Podemos evaluar f en valores cercanos a 3 para ver qué sucede a su alrededor.

x	2.8	2.9	3	3.1	3.2
y	2.4138	4.9153	$\nexists$	-5.0820	-2.5806



Ahora vemos cómo deben conectarse los ocho puntos a la derecha de 2 (incluyendo el círculo sin rellenar):



En el gráfico vemos que la función f no es siempre creciente ni siempre decreciente[2]. De hecho, f es:

- Creciente para $x \in]-\infty, 0.5]$.
- Decreciente para $x \in [0.5, 2]$.
- Otra vez creciente para $x \in]2, 3[$.
- Otra vez creciente para $x \in]3, \infty[$.

Cuando una función es creciente en algunos intervalos y decreciente en otros, esa información debe presentarse para intervalos separados. En el ejemplo anterior sería erróneo decir que f es creciente en $]2,3[\cup]3,\infty[$. La razón de que eso sea falso es que, por ejemplo, 2.5 es menor que 3.5 pero $f(2.5) \approx 0.91$ es mayor que $f(3.5) \approx -1.08$, lo que no es compatible con una función creciente. Lo correcto es decir que f es creciente en $]2,3[$ y también es creciente en $]3,\infty[$. Por separado.

Ejemplo 16: intersecciones de un gráfico con los ejes

Si $p(x) = 3x^2 - 5x - 2$ entonces los puntos de intersección del gráfico de p con los ejes son:

- Con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = p(0) = -2$: el punto es $(0, -2)$.
- Con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = p(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Como $p(x) = (3x+1)(x-2)$, las soluciones son $x = -1/3$ y $x = 2$, y los puntos resultan ser $(-1/3, 0)$ y $(2, 0)$.

Ejemplo 17: distancia y punto medio entre dos puntos

Entre los dos puntos $(-1, -3)$ y $(4, -5)$, la distancia es

$$d = \sqrt{[(-1)-(4)]^2 + [(-3)-(-5)]^2} = \sqrt{[-5]^2 + [2]^2} = \sqrt{29}$$

y el punto medio es

$$PM = \left(\frac{(-1)+(4)}{2}, \frac{(-3)+(-5)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -4 \right)$$

[2]En la sección 6.9 veremos cómo determinar los intervalos donde una función cuadrática es creciente o decreciente. El problema de determinar esos intervalos para funciones más generales queda para un curso de cálculo.

Ejercicios

Trace el gráfico

76. $y = 2x - 5$ para $x \in [-5, 5]$

77. $y = 2t - t^2$ para $t \in [-2, 4]$

78. $y = w^2 - \frac{1}{4}w^3$ para $w \in [-2, 4]$

79. $y = \dfrac{3u - 5}{u^2 + 2}$ para $u \in [-5, 5]$

80. $y = 6 - 3\sqrt{4 - r}$ para $r \in [-10, 4]$

81. $y = 2\left|3 - \frac{1}{2}v\right| - 1$ para $v \in [0, 10]$

82. $y = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \leq 1 \\ 3 - z & \text{si } z > 1 \end{cases}$ para $z \in [-2, 5]$

Encuentre los puntos de intersección con cada eje

83. $y = 12 - 3x$

84. $y = \frac{3}{7}t - \frac{1}{5}$

85. $y = \dfrac{4z + 6}{9}$

86. $y = 2w^2 - 3w - 5$

87. $y = 0.4r^2 - 1.6r + 2.3$

88. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 + x - 1$

89. $y = (v + 3)^2(v^2 + 9)$

90. $y = 3/u$

91. $y = \dfrac{3v + 8}{1 - v} + \dfrac{10v + 8}{v}$

92. $y = \dfrac{1}{t^2 + 1} - \dfrac{t}{t + 2}$

Calcule la distancia y el punto medio entre...

93. Los puntos $(2, -1)$ y $(0, 1)$

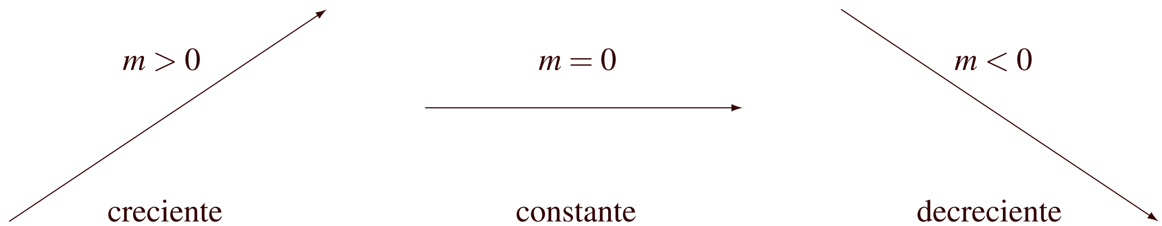
94. El punto $(-3, 8)$ y el origen

95. Los puntos de intersección del gráfico de $y = 5 - 4x$ con los dos ejes

6.7. Funciones lineales

Las *funciones lineales* tienen la forma $f(x) = mx + b$ con m y b constantes.

El gráfico de una función lineal es una recta. La *pendiente* de una recta es una medida de la inclinación de la recta: una pendiente positiva corresponde a una recta creciente (de izquierda a derecha); una pendiente negativa corresponde a una recta decreciente, y una pendiente cero a una recta horizontal.



Una recta en el plano cartesiano está caracterizada por un punto y una pendiente, y la forma más sencilla de encontrar la ecuación de una recta se da cuando se conocen la pendiente y un punto.

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

La recta que pasa por el punto (x_1, y_1), con pendiente m, tiene ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{(forma punto-pendiente)}$$

Una forma alterna de describir una recta es a partir de su pendiente y el punto de intersección con el eje Y.

Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta

La recta con pendiente m que interseca el eje Y en el punto $(0, b)$ tiene ecuación

$$y = mx + b \quad \text{(forma pendiente-intersección)}$$

Todavía otra forma de describir una recta es con una ecuación como

$$ax + by = c \quad \text{con } a\text{, } b \text{ y } c \text{ constantes (forma general)}$$

Pendiente de una recta dados dos puntos

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{si } x_1 \neq x_2.$$

Si $y_1 = y_2$ (ninguno de los puntos está más arriba o más abajo que el otro), la recta es horizontal y su pendiente es cero. La ecuación de una recta horizontal es $y = b$, con b constante. En particular, el eje X tiene ecuación $y = 0$.

Si $x_1 = x_2$ (ninguno de los puntos está más a la derecha o a la izquierda que el otro), la recta es vertical y su pendiente está indefinida. La ecuación de una recta vertical es $x = c$, con c constante. El eje Y tiene ecuación $x = 0$.

Si dos rectas tienen pendientes respectivas m_1 y m_2, entonces ellas son *paralelas* si $m_1 = m_2$, y son *perpendiculares* (también llamadas *ortogonales* o *normales*) si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En resumen:

- Las rectas horizontales tienen ecuación $y = b$ (con b constante).
- Las rectas verticales tienen ecuación $x = c$ (con c constante).
- Dos rectas con pendientes respectivas m_1 y m_2 son...
  - paralelas si $m_1 = m_2$.
  - perpendiculares (normales, ortogonales) si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Tenga en cuenta que la mayoría de pares de rectas no son paralelas ni perpendiculares.

Ejemplo 18: pendiente y ecuación de una recta dados dos puntos

La recta que pasa por los puntos $(-3,5)$ y $(0,-1)$ tiene pendiente

$$m = \frac{(5)-(-1)}{(-3)-(0)} = \frac{6}{-3} = -2$$

que, por ser negativa, indica que la recta es decreciente.

Como la recta pasa por el punto $(x_1,y_1) = (-3,5)$, su ecuación punto-pendiente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -2(x+3)$$

Si se quisiera encontrar la ecuación pendiente-intersección, se puede despejar y en la ecuación anterior: $y = -2(x+3)+5 = -2x-1$.

También pudimos haber tomado $(x_1,y_1) = (0,-1)$, que también está en la recta. Así, la ecuación punto-pendiente resulta ser $y + 1 = -2(x-0)$. La forma pendiente-intersección, con y despejado, es $y = -2x-1$ como antes.

Del ejemplo anterior podemos inferir que cada recta no vertical tiene muchas ecuaciones punto-pendiente (una para cada punto en la recta) pero solamente una ecuación pendiente-intersección. Recuerde que una recta vertical no tiene pendiente y que su ecuación tiene la forma $x = c$.

Ejemplo 19: ecuación de una recta paralela a otra

Encontrar la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $(4, -3)$ y que es paralela a la recta L_2 de ecuación $4x + 5y = 15$.

Siempre que necesitemos la ecuación de una recta debemos empezar por buscar un punto y una pendiente. En este caso tenemos:

- Punto: $(4, -3)$, dado en el planteo.
- Pendiente: como L_1 y L_2 son paralelas, tienen la misma pendiente. Empezamos por encontrar la pendiente de L_2 despejando y en su ecuación:

  $$4x + 5y = 15 \quad \Rightarrow \quad y = -\tfrac{4}{5}x + 3$$

  donde vemos que la pendiente es $m_2 = -\frac{4}{5}$. Entonces, la pendiente de L_1 es la misma, $m_1 = -\frac{4}{5}$.

Sabiendo ya que L_1 pasa por $(4, -3)$ y tiene pendiente $m_1 = -\frac{4}{5}$, podemos inmediatamente escribir su ecuación: $y + 3 = -\frac{4}{5}(x - 4)$.

Ejemplo 20: ecuación de una recta perpendicular a otra

Dada la recta L_1 con ecuación $9x - 3y = 2$, encontrar la ecuación de la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y que pasa por el punto de intersección de L_1 con el eje X.

Todo eso suena como mucho, pero organicémonos y tranquilamente busquemos un punto y una pendiente para L_2.

- Punto: L_2 pasa por el punto de intersección de L_1 y el eje X.

  Este punto se encuentra sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de L_1: $9x - 3(0) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$, así que el punto es $(\frac{2}{9}, 0)$.
- Pendiente: L_1 y L_2 son perpendiculares, así que el producto de sus pendientes es $m_1 \cdot m_2 = -1$.

  Como en el ejemplo anterior, despejamos y en la ecuación de L_1 para encontrar m_1:

  $$9x - 3y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 2/3$$

así que $m_1 = 3$. Entonces,

$$(3) \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\tfrac{1}{3}$$

Teniendo el punto $(\frac{2}{9}, 0)$ y la pendiente $m_2 = -\frac{1}{3}$, obtenemos la ecuación de L_2: $y - 0 = -\frac{1}{3}(x - \frac{2}{9})$.

Ejercicios

Para la recta descrita, encuentre ecuaciones en las formas punto-pendiente y pendiente-intersección, y diga si es creciente, decreciente, horizontal o vertical

96. … que pasa por $(-1,3)$ y tiene pendiente $m = -2$

97. … que pasa por $(12,0)$ y tiene pendiente $m = 4/3$

98. … horizontal que pasa por $(2,-3)$

99. … horizontal que pasa por $(-6,1/2)$

100. … vertical que pasa por $(-4/5,2/5)$

101. … vertical que pasa por $(1,-5/3)$

102. … que pasa por $(-6,-4)$ y $(-2,4)$

103. … que pasa por $(2,0)$ y $(-7,-1)$

104. … que pasa por $(1,6)$ y $(-4,6)$

105. … que pasa por $(5,4)$ y $(5,-1)$

106. … que pasa por $(-1,8)$ y es paralela a $y = 8x - 5$

107. … que pasa por $(-6,9)$ y es paralela a $y + 3 = 2(x - 6)$

108. … que pasa por $(2,-8)$ y es paralela a $x + 2y + 3 = 0$

109. … que pasa por $(-7,9)$ y es paralela a $y = 2$

110. … que pasa por $(6,7)$ y es paralela a $x = 4$

111. … que pasa por $(-5,-2)$ y es paralela al eje X

112. … que pasa por $(-4,5)$ y es paralela al eje Y

113. … que pasa por $(4,-5)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2,6)$ y $(-3,-7)$

114. … que pasa por $(10,4)$ y es perpendicular a $2x + 5y = 1$

115. … que pasa por $(3,0)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-7,0)$ y $(5,-9)$

116. ... que pasa por $(5,0)$ y es perpendicular a $x = 8$

117. ... que pasa por $(4,-9)$ y es perpendicular a $y = -1$

118. ... que pasa por $(-4,6)$ y es perpendicular al eje X

119. ... que pasa por $(2,7)$ y es perpendicular al eje Y

6.8. Sistemas de inecuaciones lineales

En la sección anterior estudiamos ecuaciones lineales. Vimos que el gráfico de una ecuación lineal, es decir, el conjunto de pares (x,y) en el plano $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación (en cualquiera de las tres formas que estudiamos), es una línea recta.

Ahora vamos a estudiar *inecuaciones* lineales con dos variables. Por ejemplo, tal como $y = 3x-2$ es una ecuación lineal, de la misma manera $y \geq 3x-2$ es una inecuación lineal.

Así como las inecuaciones con una incógnita suelen tener infinitas soluciones que se representan gráficamente como una región (intervalo) en la recta real, así las inecuaciones lineales tienen como solución una región en el plano cartesiano.

Ejemplo 21: una inecuación lineal con dos variables

Digamos que el precio de un limón es ₡200, y el de una pera es ₡500. ¿Cuántos limones y cuántas peras se pueden comprar sin gastar más de ₡10 000?

Hay una gran cantidad de respuestas posibles. Por ejemplo, es posible comprar 10 limones y 5 peras (por un total de ₡4500, y sobran ₡5500). También es posible comprar 50 limones y ninguna pera, o 20 peras y ningún limón.

Denotando con x el número de limones y con y el número de peras, el párrafo anterior dice que los puntos $(10,5)$, $(50,0)$ y $(0,20)$ son algunas de las soluciones.

El costo total de x limones a ₡200 y y peras a ₡500 es $200x+500y$. Por eso, un punto (x,y) es solución, en el sentido de que es posible comprar x limones y y peras sin gastar más de ₡10 000, si satisface la desigualdad

$$200x + 500y \leq 10000$$

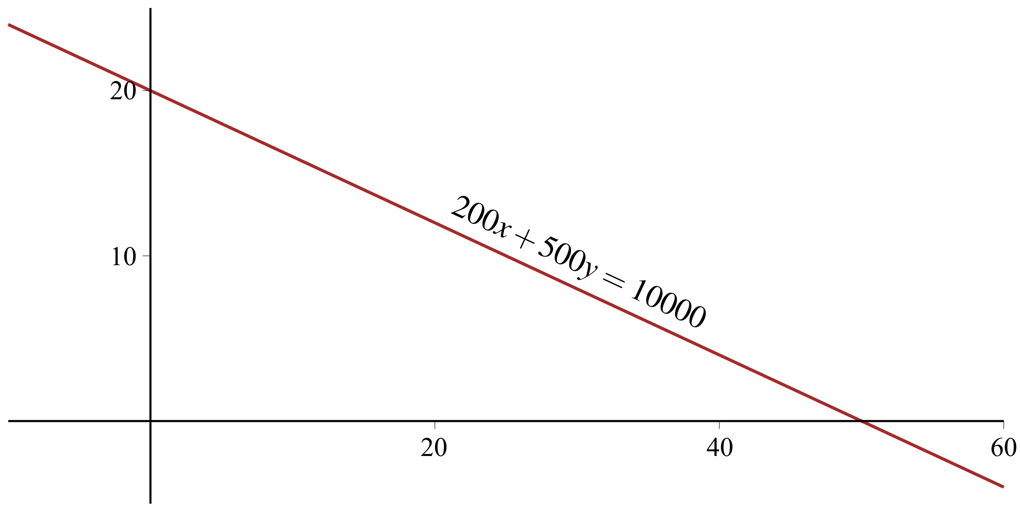
Y esta es una inecuación lineal con las incóngnitas x y y.

El conjunto de soluciones de esa inecuación se puede graficar en el plano de esta manera.

a. Empezamos por graficar la *ecuación* $200x+500y = 10000$. Como su gráfico es una recta, basta con encontrar dos puntos y trazar la recta que los conecta. Y dos puntos muy fáciles de encontrar son las intersecciones con los ejes:

- Con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 200x + 500(0) = 10000 \Rightarrow x = 50$, así que el punto de intersección es $(50,0)$ (correspondiente a 50 limones y 0 peras, posibilidad que ya habíamos observado).
- Con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow 200(0) + 500y = 10000 \Rightarrow y = 20$, de modo que la recta interseca en el punto $(0,20)$ (0 limones y 20 peras).

Con esos dos puntos podemos graficar la recta de solución de la ecuación.



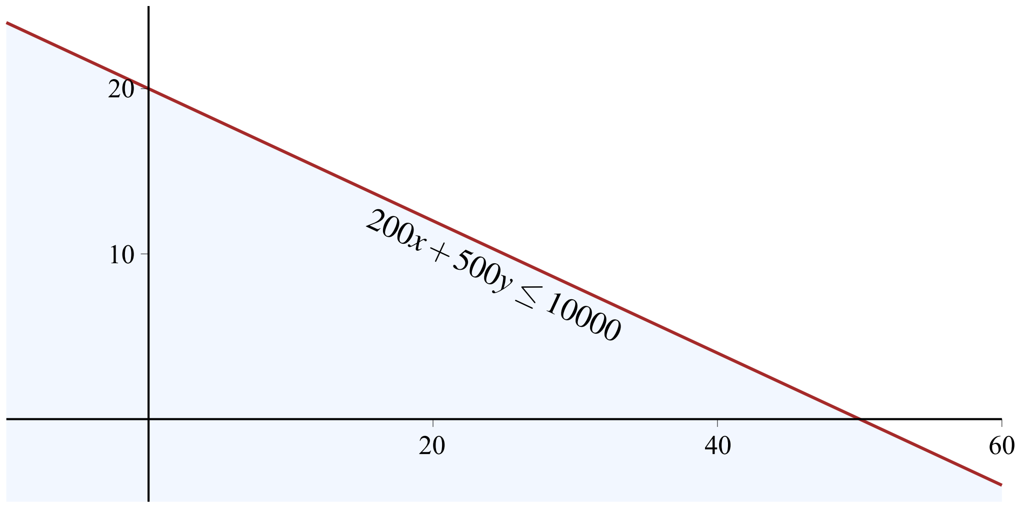
b. La solución de la *inecuación* será uno de los dos semiplanos determinados por la recta. Para saber cuál es (el que está abajo y a la izquierda de la recta, o el que está arriba y a la derecha) hay dos métodos.

- Se puede despejar y de la inecuación:

$$200x + 500y \leq 10000 \quad \Rightarrow \quad y \leq 20 - 0.4x$$

  Como la recta es el gráfico de la igualdad $y = 20 - 0.4x$, entonces la desigualdad $y \leq 20 - 0.4x$ dice que y está en la recta o debajo de ella (por ser menor o igual, porque en la dirección de y "menor" significa hacia abajo). Con esto averiguamos que la solución de la inecuación es el semiplano por debajo de la recta.
- También se puede usar un punto que no esté en la recta y ver si satisface la desigualdad. Si el punto satisface la desigualdad, la solución será el lado de la recta que contiene a ese punto, y si no la satisface, la solución será el lado opuesto.
  En nuestro caso, tomemos como punto de prueba el origen, $(0,0)$. ¿Satisface la desigualdad? $20(0) + 50(0) \leq 10000$ sí es cierto, de modo que la desigualdad es cierta en $(0,0)$ y entonces la solución está del lado de la recta que contiene a $(0,0)$.

Matemáticamente, la solución de la inecuación es todo el semiplano debajo y a la izquierda de la recta como se ve en el siguiente gráfico.



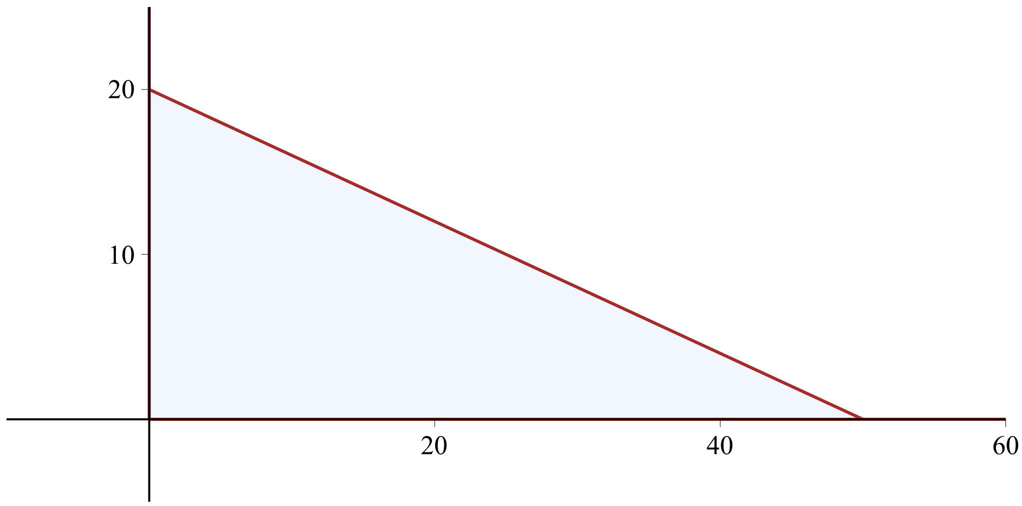
Pero en el contexto de este ejemplo hay dos restricciones que no hemos mencionado: x y y no pueden ser negativos porque son cantidades de frutas. Entonces, a la inecuación original debemos añadir dos más, con lo que llegamos a este sistema de tres inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 200x+500y \leq 10000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La interpretación geométrica de estas nuevas inecuaciones es como sigue.

- La condición $x \geq 0$ se cumple a la derecha del eje vertical, porque la dirección de x es horizontal y en esa dirección "mayor" significa a la derecha.
- La condición $y \geq 0$ es cierta arriba del eje horizontal, porque la dirección de y es vertical y en esa dirección "mayor" significa hacia arriba.

Entonces, estas dos inecuaciones juntas describen el primer cuadrante: los puntos arriba del eje X y a la derecha del eje Y. Finalmente, el gráfico de este sistema completo es



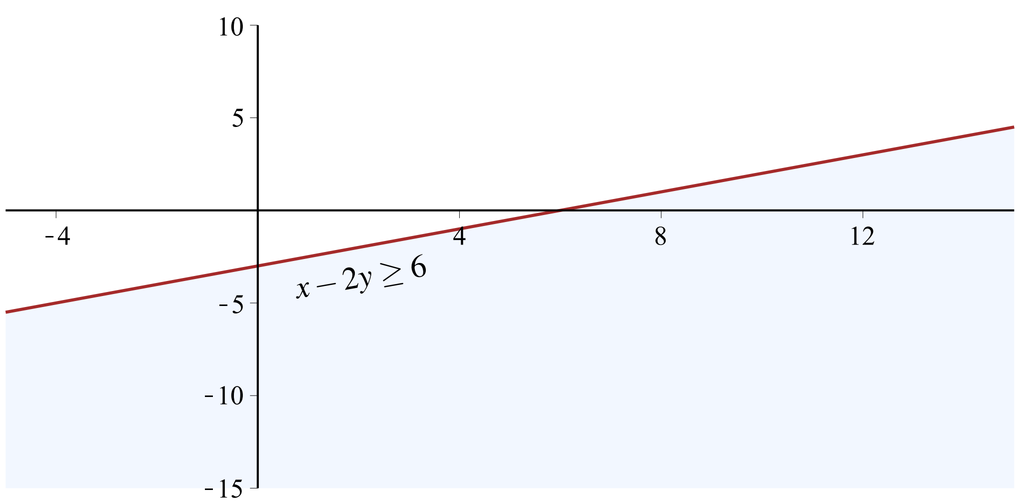
Para graficar la solución de un sistema de varias inecuaciones lineales se puede graficar la solución de cada inecuación y luego encontrar la intersección de esas soluciones (la región que pertenece a todas las soluciones).

Ejemplo 22: dos inecuaciones lineales con dos incógnitas

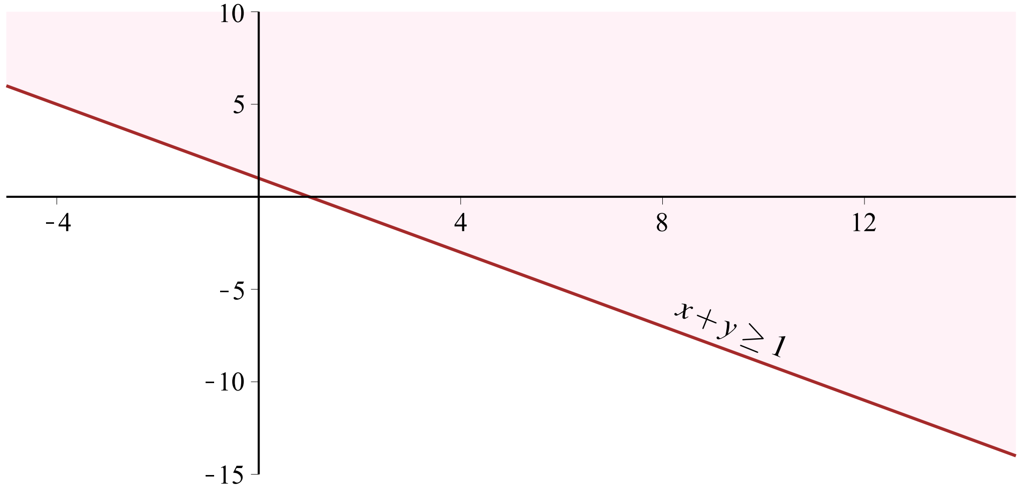
Graficar la solución del sistema $\begin{cases} x-2y \geq 6 \\ x+y \geq 1. \end{cases}$

Grafiquemos primero la solución de $x-2y \geq 6$ como vimos en el ejemplo anterior: primero graficar la ecuación (una recta) y luego usar un punto de prueba para determinar el semiplano de solución.

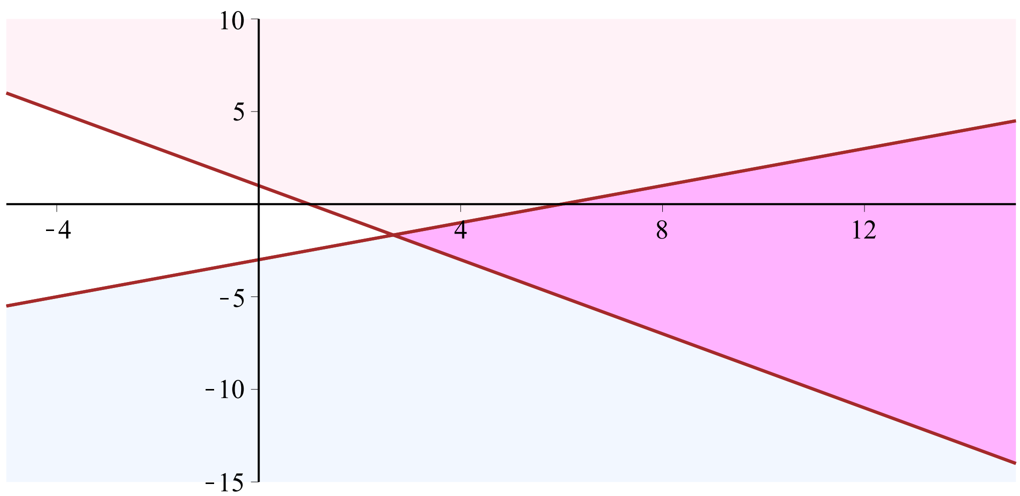
En este caso el punto $(0,0)$ no satisface la inecuación: $(0)-2(0) \ngeq 6$, así que la solución es el semiplano opuesto a $(0,0)$.



Por separado, grafiquemos ahora la solución de $x+y \geq 1$.



La intersección de las dos soluciones anteriores es entonces la solución del sistema dado.

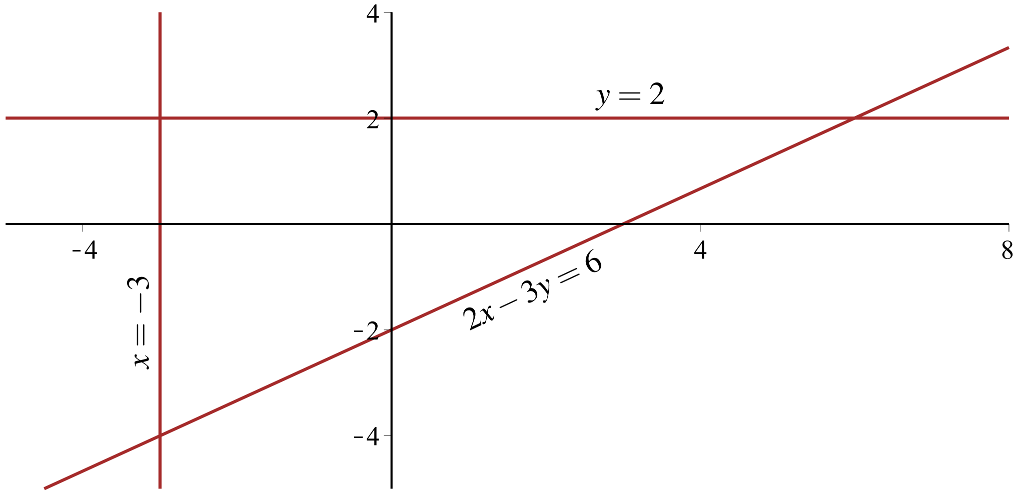


Ejemplo 23: tres inecuaciones, dos de ellas estrictas

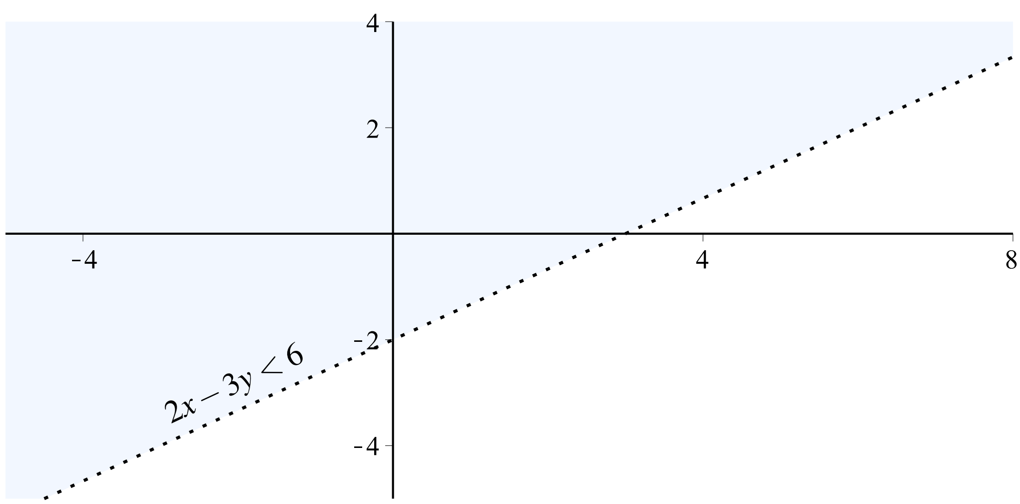
Graficar la solución del sistema $\begin{cases} 2x-3y<6 \\ x \geq -3 \\ y<2. \end{cases}$

Note que dos de las inecuaciones son estrictas: $2x-3y<6$ y $y<2$. El único cambio que eso implicará en la solución es que las rectas de frontera correspondientes no serán parte de la solución, lo que se indicará con líneas de puntos en vez de líneas continuas.

De momento procedemos como en los ejemplos anteriores. Veamos en el siguiente gráfico las rectas con ecuaciones $2x-3y=6$, $x=-3$ y $y=2$ (recuerde que una recta con ecuación $x=c$ es vertical y que una con ecuación $y=b$ es horizontal).



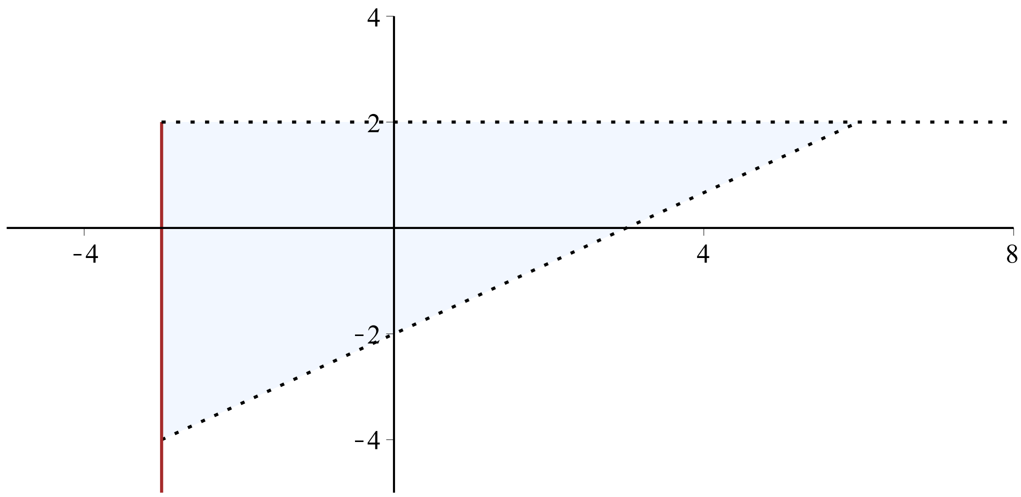
La solución de $2x-3y<6$ es el área estrictamente arriba de la recta, sin incluirla. Note que la recta se representa con una línea punteada para indicar que la desigualdad es estricta.



Así interpretamos las otras dos inecuaciones:

- $x \geq -3$ describe el semiplano a la derecha de $x=-3$, incluyendo la recta porque la desigualdad no es estricta.
- $y<2$ describe el semiplano por debajo de $y=2$, sin incluir la recta porque la desigualdad es estricta.

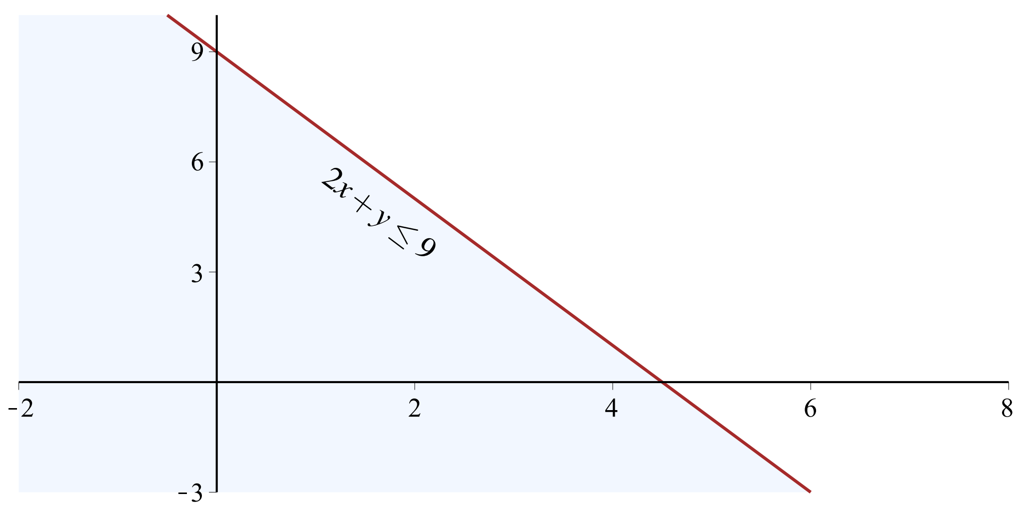
Esta es entonces la solución definitiva del sistema:

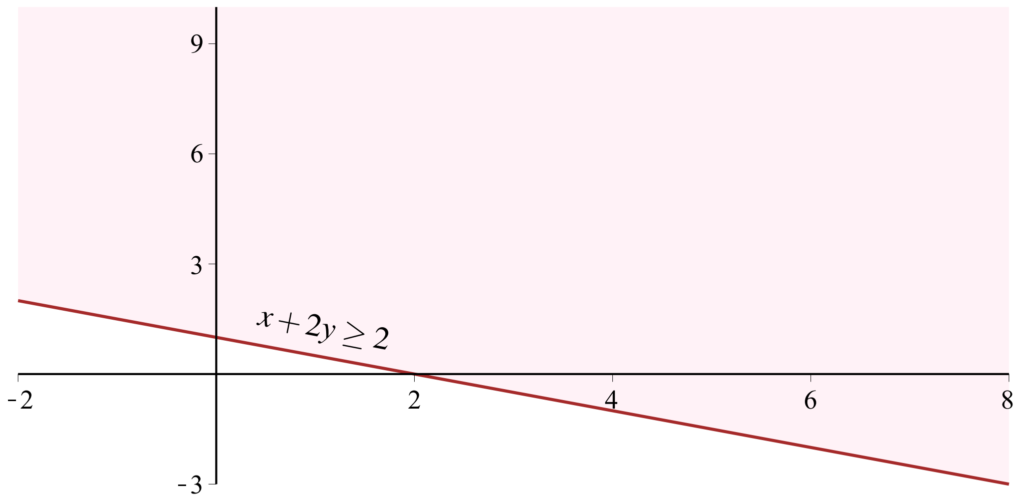


Ejemplo 24: cuatro inecuaciones lineales con dos incógnitas

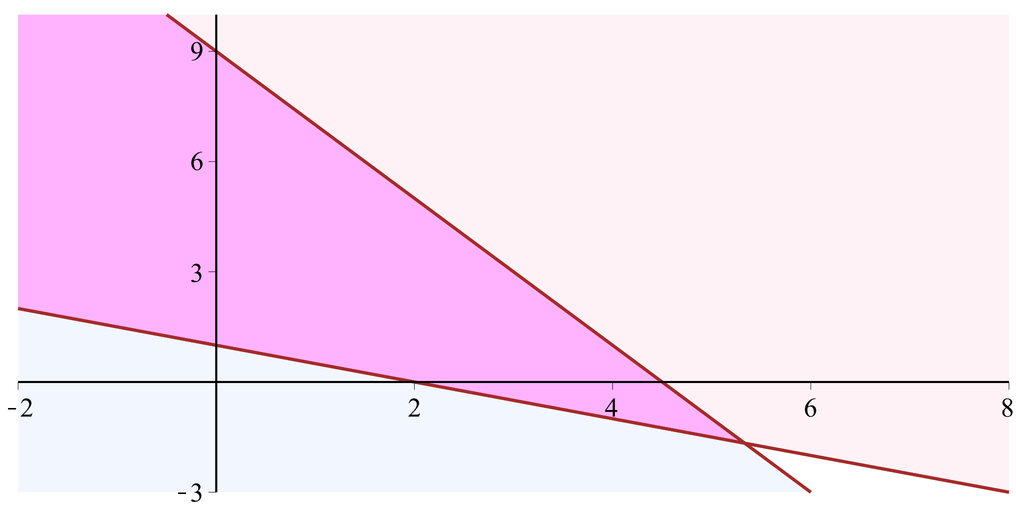
Graficar la solución del sistema $\begin{cases} 2x+y \leq 9 \\ x+2y \geq 2 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0. \end{cases}$

Grafiquemos, como en el ejemplo anterior, independientemente las soluciones de $2x+y \leq 9$ y de $x+2y \geq 2$:

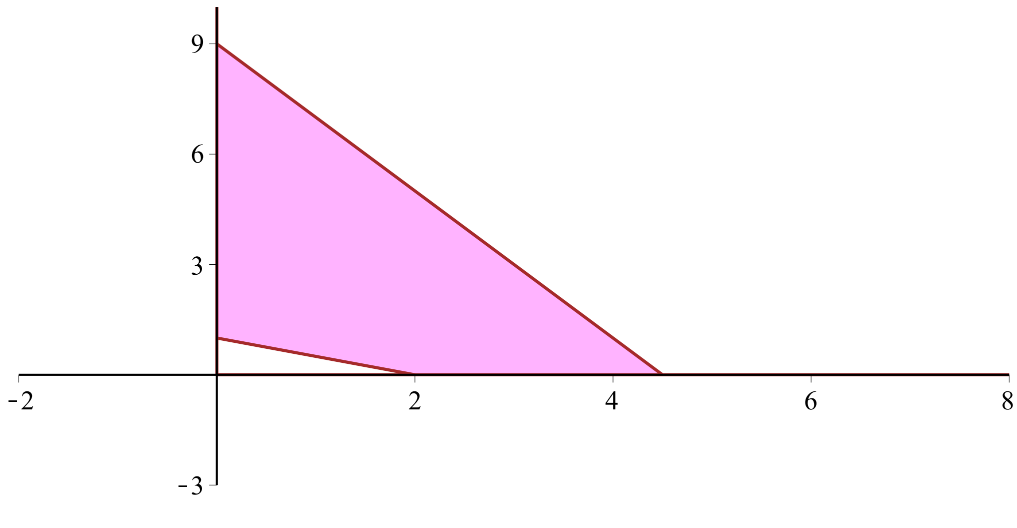




El gráfico de intersección de estas dos soluciones es entonces



Combinando lo anterior con el hecho de que las dos últimas inecuaciones, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, limitan las soluciones al primer cuadrante, obtenemos por último la solución definitiva del sistema.



Ejercicios

Grafique la solución de la inecuación o del sistema de inecuaciones

120. $y \leq 4$

121. $y > 2$

122. $x \geq -1$

123. $5x < 8$

124. $x - y \geq 2$

125. $3x + y > 4$

126. $5x < 2y - 4$

127. $2x - y \geq 0,\ x < 1$

128. $4x + 2y \geq 4,\ y \geq -1$

129. $2y \geq x - 2,\ x \geq 2y$

130. $y \geq 1 + x,\ y \geq 1 - x,\ y \leq 2$

131. $x + y < 3,\ x \geq 0, y \geq 0$

132. $x + 2y \leq 4,\ x - 2y \leq 0,\ x \geq 0$

133. $x \leq y + 2,\ x + y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

Plantee un sistema de inecuaciones apropiado y grafique la solución

134. Un grupo de adultos y niños está planeando una visita a un museo. Las entradas cuestan \$1 para los niños y \$2 para los adultos, y el presupuesto es de \$25 en total. Van a viajar todos en una buseta con capacidad para 18 pasajeros. ¿Cuántos adultos y cuántos niños pueden hacer la visita sin exceder el presupuesto ni la capacidad de la buseta?

135. Una fábrica de muebles produce sillas y mesas. Construir una silla toma tres horas y cuesta ₡10 000, mientras que cada mesa se construye en cinco horas y cuesta ₡50 000. La fábrica dispone de 350 horas de trabajo y puede pagar ₡2 500 000 por semana. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas pueden producir semanalmente sin exceder los presupuestos de horas ni de dinero?

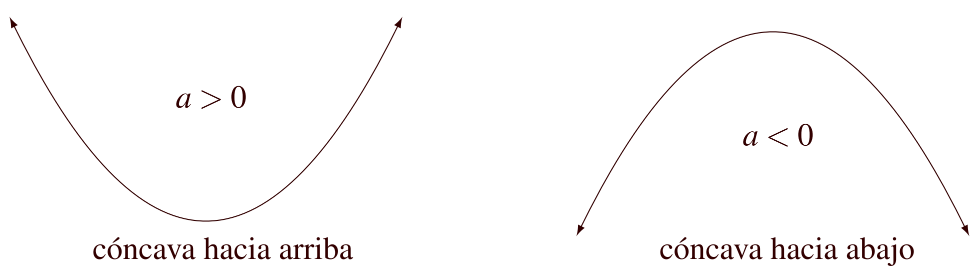
136. Doña Julieta dispone de \$20 000 para invertir, y debe distribuir su inversión entre dos cuentas. La cuenta A paga un interés de 8 % anual y la cuenta B paga 6 % anual. Doña Julieta quiere obtener al menos \$1000 anuales en intereses, y no quiere invertir más en la cuenta A que en la cuenta B. ¿Cuánto puede invertir en cada cuenta?

6.9. Funciones cuadráticas

Las *funciones cuadráticas* tienen fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

El gráfico de una ecuación cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c constantes y $a \neq 0$, es una *parábola*. Algunos puntos importantes sobre las parábolas:

- Una parábola es cóncava hacia arriba si $a > 0$, o cóncava hacia abajo si $a < 0$ (si fuera $a = 0$, la ecuación sería $y = bx + c$, lineal, y el gráfico sería una recta).



- El punto más bajo en una parábola cóncava hacia arriba, o el más alto en una cóncava hacia abajo, se llama *vértice*. Las coordenadas (x_v, y_v) del vértice están dadas por las fórmulas[3]

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{y} \quad y_v = ax_v^2 + bx_v + c$$

- Una parábola cóncava hacia arriba es decreciente a la izquierda del vértice: para $x \in \left]-\infty, x_v\right]$, y es creciente a la derecha del vértice: para $x \in \left[x_v, \infty\right[$.

  Para una parábola cóncava hacia abajo, intercambie las palabras “creciente” y “decreciente” en el párrafo anterior.

[3] Alternativamente, la coordenada y del vértice también puede calcularse como $y_v = -\Delta/(4a)$, donde $\Delta = b^2 - 4ac$, o bien como $y_v = c - b^2/(4a)$.

- La intersección con el eje Y se da cuando $x = 0$, lo que resulta en $y = c$.

  La intersección con el eje X se da cuando $y = 0$, lo que resulta en

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  pero solamente si $b^2 - 4ac \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, el gráfico no interseca el eje X.

  En resumen, los puntos de intersección con los ejes son[4]

$$(0,c), \quad (x_1,0) \quad \text{y} \quad (x_2,0)$$

  donde x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, si son reales.

Ejemplo 25: vértice e intersecciones de una parábola

Sea $y = 3 - x^2 - 2x$. Esta es una ecuación cuadrática con $a = -1$, $b = -2$ y $c = 3$. De aquí obtenemos la siguiente información sobre su gráfico:

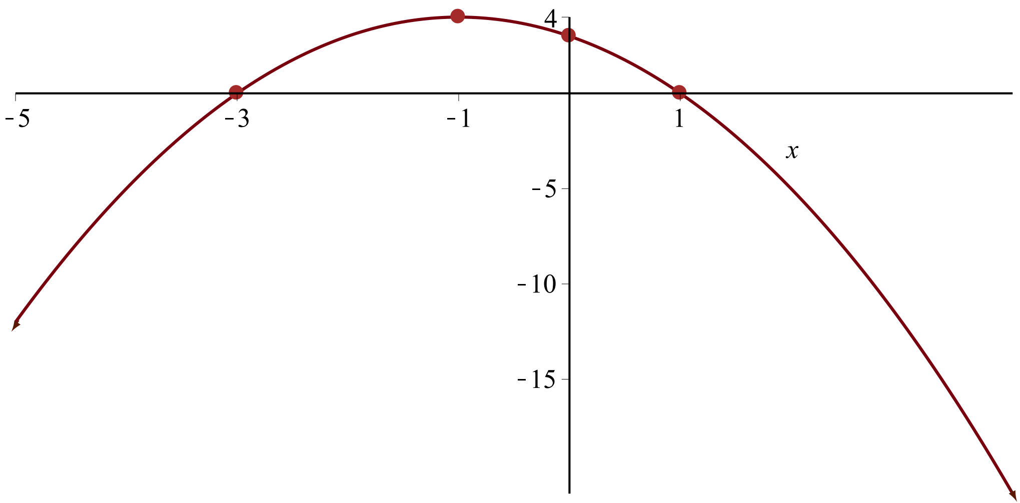
- $a = -1$ es negativo, así que la parábola es cóncava hacia abajo.
- Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$, de donde calculamos

$$y_v = 3 - (-1)^2 - 2(-1) = 4$$

  para concluir que el vértice es $(-1,4)$.
- La parábola crece en el intervalo $]-\infty,-1]$ y decrece en $[-1,\infty[$.
- Intersección con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 3$, así que el punto es $(0,3)$.
- Intersecciones con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 3 - x^2 - 2x = 0$, que lleva a $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$. Entonces, los puntos son $(-3,0)$ y $(1,0)$.

De lo anterior resulta el siguiente gráfico:

[4] El punto $(0,c)$ siempre existe, pero los otros dos necesitan que $b^2 - 4ac \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no interseca el eje X; si $b^2 - 4ac = 0$, lo interseca en un solo punto.



El ámbito, como vemos en el gráfico, es el intervalo $]-\infty, 4]$ (la parte del eje Y "cubierta" por el gráfico).

Ejercicios

Grafique indicando vértice, intersecciones con los ejes, intervalo donde crece, intervalo donde decrece, y ámbito

137. $y = 9 + 8u - u^2$

138. $y = 12r^2 - 36r + 6$

139. $y = 36x + 15 - 3x^2$

140. $y = v^2 - 4v$

141. $y = 6z + z^2$

142. $y = t^2 - 12t + 40$

143. $y = 4.41w^2 - 2.94w + 0.49$

144. $y = 6u - 9 - u^2$

145. $y = 0.5z^2 + 3$

146. $y = 5t - (t+2)(t+3)$

6.10. Intersecciones entre gráficos

Los gráficos de dos funciones f y g se intersecan en los puntos donde $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 26: intersecciones entre gráficos de dos funciones

Sean $p(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $q(x) = 2x + 4$.

Para encontrar los puntos de intersección entre los gráficos de p y q resolvemos la ecuación $p(x) = q(x)$:

$$3x^2 - 5x - 2 = 2x + 4$$

con soluciones $x = -2/3$ y $x = 3$.

No es que estos dos valores formen un par ordenado. Estas son los valores de x, las primeras coordenadas, de dos puntos de intersección. ¿Y las segundas coordenadas, los valores de y?

A eso vamos. Los valores de y están dados por $y = p(x)$ o, equivalentemente, $y = q(x)$.

- Para $x = -2/3$: $y = p(-2/3) = q(-2/3) = 8/3$.
- Y para $x = 3$: $y = p(3) = q(3) = 10$.

Los dos puntos son entonces $(-2/3, 8/3)$ y $(3, 10)$.

En el ejemplo anterior no era necesario sustituir cada valor de x en ambas funciones, pero lo hicimos como comprobación. Como en esos puntos se cumple $p(x) = q(x)$, basta con evaluar una sola función en cada punto, pues se sabe que la otra dará el mismo resultado.

Ejercicios

Encuentre los puntos de intersección entre los gráficos de...

147. $y_1 = 2x^2 + 3x - 1$ y $y_2 = -4x - 4$

148. $y_1 = 2x^2 - 2x + 4$ y $y_2 = x^2 + x + 2$

149. $y_1 = 5z^2 - 10z + 20$ y $y_2 = -z^2 + 9z + 5$

150. $y_1 = 2u^2 + u$ y $y_2 = 4 - u$

151. $y_1 = 2v^3 - 5v + 1$ y $y_2 = v^2 - 2$

152. $y_1 = w^2 - w + 3$ y $y_2 = 1 - w$

153. $y_1 = \sqrt[3]{z}$ y $y_2 = z^3$

154. $y_1 = \dfrac{5}{r} - 1$ y $y_2 = \dfrac{6}{2r+1}$

155. $y_1 = \dfrac{1-t^2}{1+t}$ y $y_2 = \dfrac{3+t}{2+t}$

156. $y_1 = \sqrt[3]{x}$ y $y_2 = x\sqrt{2}$

157. $y_1 = 2u - 1$ y $y_2 = 3u - \sqrt{u+3}$

158. $y_1 = 10 - \sqrt{7+3r}$ y $y_2 = 3\sqrt{r+1}$

159. $y_1 = |3t+2| - 4$ y $y_2 = 4t - 7$

160. $y_1 = \begin{cases} 1-2u & \text{si } u < 1 \\ u^2 - 3 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$
y $y_2 = u - 1$

Calcule la distancia y el punto medio entre...

161. El origen y el punto de intersección entre los gráficos de $y = 3 - 2t$ y $y = t + 2$

162. Los dos puntos de intersección entre los gráficos de $y = x - 1$ y $y = 2\sqrt{x-1}$

Encuentre ecuaciones en las formas punto-pendiente y pendiente-intersección para la recta...

163. ... que pasa por el punto de intersección de $y = 2x + 1$ con $y - x = 4$ y es paralela a $2x + 3y = 6$

164. ... que pasa por el punto de intersección de $7x - 7y + 10 = 0$ con $9x + y = 10$ y es perpendicular a $8x - 4y = 0$

165. ... que pasa por el punto de intersección de $6x - 3y = 21$ con $4x - 9y = 7$ y es perpendicular a la recta por $(-10, -2)$ y $(6, -6)$

6.11. Aplicaciones de funciones

6.11.1. Planteo de funciones

Ejemplo 27: valor de una máquina como función del tiempo

Una máquina comprada nueva por diez millones de colones se deprecia a razón de ₡750 000 por año. Expresar el valor de la máquina como función de su edad en años. ¿En cuánto tiempo llegará a valer cero?

Denotemos con $V(n)$ el valor de la máquina, en colones, como función de su edad n en años.

El valor inicial es, a los 0 años de edad, $V(0) = 10\,000\,000$.

Cada año el valor disminuye en 750 000 colones, de modo que después de n años el valor habrá perdido $750\,000n$ colones.

Uniendo lo anterior se llega a que el valor en colones a los n años será

$$V(n) = 10\,000\,000 - 750\,000n$$

Para averiguar cuándo llegará a valer cero, planteamos la ecuación $V(n) = 0$, es decir
$$10\,000\,000 - 750\,000\,n = 0$$
que es una ecuación lineal con solución $n = 10\,000\,000/750\,000 = 13.\bar{3}$.

Entonces, el valor de la máquina llegará a ser cero a los $13.\bar{3}$ años (13 años, 4 meses) de comprada.

Ejercicios

Resuelva

166. Una fábrica de juguetes tiene costos fijos de ₡80 000 al día. El costo de producir una caja de juguetes es ₡1600.

a. Calcule el costo total de producir q cajas al día.

b. ¿Cuánto cuesta producir 20 000 cajas en un mes? (Tome 1 mes = 30 días.)

c. Si cada caja de juguetes se vende a ₡3000, exprese el ingreso diario I como función de q.

d. Exprese la ganancia diaria G, en colones, como función de q.

e. ¿La ganancia es creciente o decreciente como función del número de unidades?

f. ¿Cuál es el dominio de las funciones I y G?

167. A un editor le cuesta ₡180 000 preparar un libro para su publicación (ilustración, clisés, corrección, etc.). La impresión cuesta ₡4000 por ejemplar. Suponga que el libro se vende a ₡7000.

a. Exprese la utilidad, en colones, como función del número de ejemplares.

b. ¿La utilidad es creciente o decreciente como función del número de ejemplares?

c. ¿Cuántas copias deben venderse para recaudar la inversión?

168. El costo de producción de muñecas para la compañía Cupido es de $C = 0.1x^2 - 0.2x + 600$ (en colones) para una producción diaria de x muñecas. El número de muñecas producidas en una jornada diaria de t horas es $x = 50t - 50$.

a. Exprese el costo de producción C como una función de t.

b. Calcule el costo de producción de una jornada de ocho horas.

c. ¿En cuáles intervalos es creciente/decreciente el costo como función del número de horas?

169. La ecuación $D = \dfrac{90000 + 6000t}{p + 50}$ da la demanda diaria D de cierta marca de tostadores, donde p es el precio unitario y t el número de meses desde su introducción. Se estima que el precio en t meses será $p = 7500 + 350t$.

a. Exprese la demanda diaria como función de t.

b. ¿Cuántos tostadores al día se venderán un año después de la introducción?

170. Una compañía estima que el costo C de producir x tenedores es $C = 3\sqrt{x} + 5x + 1500$. El número de tenedores producidos depende, a su vez, del número n de empleados, según la ecuación $x = 370n - 225$.

a. Exprese el costo como función del número de empleados.

b. Si la compañía contrata a 25 trabajadores, ¿cuántos tenedores producen, y a qué costo?

171. Se quiere cercar un terreno rectangular con una área de $400\,\mathrm{m}^2$. El alambre cuesta ₡75 el metro. Exprese el costo total de cercar el terreno, en colones, como función de la longitud de un lado.

172. Se cuenta con $250\,\mathrm{m}$ de alambre para cercar un terreno rectangular. Exprese el área del terreno como función de la medida de uno de sus lados.

173. Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con volumen de $25\,\mathrm{m}^3$. El fondo será hecho de un metal que cuesta ₡3200 el m^2, y los lados serán de madera, que cuesta ₡600 el m^2. Exprese el costo de los materiales, en colones, como una función de la longitud de uno de los lados del fondo.

6.11.2. Aplicaciones de las funciones lineales

Ejemplo 28: asistencia a un teatro como función del precio

El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₡650 asistirán 200 personas. Expresar el número de asistentes como función del precio de entrada. ¿Cuántas personas asistirían si se cobrara ₡680?

Ya que se pide la asistencia como función del precio, denotemos con q el número de asistentes, y con p el precio de entrada, en colones. Sabemos que q es función lineal de p, $q = mp + b$, y que su gráfico pasa por los puntos $(600, 300)$ y $(650, 200)$. Tenemos entonces el típico problema de encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos.

Como siempre que buscamos la ecuación de una recta, necesitamos un punto y una pendiente.

- Punto: tomemos $(600,300)$ (aunque también podríamos usar $(650,200)$ y llegar al mismo resultado).
- Pendiente: $m = \dfrac{300-200}{600-650} = -2$.

De aquí obtenemos la ecuación $q-300 = -2(p-600)$ o, para expresar q despejado en términos de p,

$$q = -2p+1500$$

Si se cobrara ₡680, tendríamos el precio $p = 680$ y la asistencia $q = 1500 - 2(680) = 140$ personas.

La pendiente de una recta $y = mx+b$ es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x; es decir, si x aumenta en una unidad, y aumentará en m unidades.

En el ejemplo anterior, la interpretación de $m = -2$ es que por cada unidad que aumente p, el precio, habrá una disminución de dos unidades en q, la asistencia. En otras palabras, por cada colón que aumente el precio asistirán dos personas menos.

Ejercicios

Resuelva

174. Una función $N(p)$ que expresa el número de artículos que pueden venderse a un precio unitario p se llama función de demanda. Una compañía puede vender 500 pelucas a ₡19 000 cada una, y 300 a ₡24 000 cada una.

a. Suponiendo que es lineal, encuentre la función de demanda.

b. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

175. Una fotocopiadora se compró nueva por $2500, y a los cuatro años se vendió por la mitad de ese precio. Suponga que el valor decrece linealmente con el tiempo.

a. Escriba una ecuación que dé el valor V, en dólares, como función del tiempo t, en años desde que se compró.

b. Cómo se interpreta la pendiente?

176. Experiencias pasadas indican que la producción de huevos en una granja crece linealmente con el tiempo. En 1990 fue de 70 000 cajas, y en el 2000 fue de 82 000 cajas.

a. Escriba una fórmula que dé el número N de cajas producidas t años después de 1990, y úsela para predecir la producción del año actual.

b. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

177. El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₡700 asistirán 240 personas.

a. Exprese el precio de entrada, en colones, como función del número de asistentes. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

b. ¿Qué precio debe cobrarse para que asistan 450 personas?

c. ¿Cuántas personas asistirán si el precio es ₡900?

178. Un tractor nuevo cuesta \$16 000, y cada año se devalúa en un 8 % de su valor original. Encuentre una fórmula para el valor V del tractor, en dólares después de t años.

179. La demanda de un artículo varía linealmente con el precio. Se sabe que si el precio es $p = 40$, la demanda será $q = 3700$, y que si el precio se aumenta a $p = 50$, la demanda disminuirá a $q = 2900$.

a. Exprese la demanda como función del precio.

b. ¿Qué precio deben fijar para obtener un ingreso de 140 000?

180. Una pieza de equipo comprada hoy en ₡480 000 se devalúa linealmente hacia un valor de desecho de ₡30 000 después de 20 años.

a. Escriba una fórmula para su valor V, en colones, después de n años.

b. Calcule el valor de la pieza dentro de 15 años.

c. ¿Cuál es el dominio de la función V?

181. Un transportista cobra un monto base fijo, más un monto por kilómetro. Si cobra ₡34 000 por un viaje de 8 km, y ₡44 500 por uno de 11.5 km, ¿cuál es el monto base y cuánto el monto por kilómetro?

182. Hubo 9473 estudiantes que se presentaron al examen de admisión para entrar al ITCR en el 2003, y 10341 para entrar en el 2006. Suponga que el número de estudiantes aumenta linealmente con el tiempo.

a. Escriba el número de estudiantes como función del año.

b. ¿Cuántos estudiantes más se presentan cada año?

183. La medida de temperatura en grados centígrados está relacionada linealmente con la medida en grados Farenheit. Sabiendo que la temperatura de congelación del agua es 0° C o 32° F, y que la de ebullición es 100° C o 212° F, exprese la medida en grados centígrados como función de la medida en grados Farenheit.

184. La estatura de una niña aumentó linealmente con su edad desde los cuatro hasta los trece años. Ella midió 112.8 cm al cumplir seis años, y 136.7 cm al cumplir diez.

a. Exprese la estatura y, en cm, como función de la edad x, en años.

b. ¿Cuánto medía al cumplir cuatro, ocho y trece años?

c. Aproximadamente a qué edad alcanzó 1.5 m de estatura?

d. ¿Cuántos centímetros por año aumentó su estatura?

185. En un experimento para probar la eficacia de un medicamento en el tiempo de recuperación de los pacientes sometidos a una operación se encontró que un paciente a quien se le aplicó una dosis de 0.9 gramos tardó 27 horas en recuperarse, y otro con una dosis de 1.6 gramos tardó 13 horas. Suponga que el tiempo de recuperación depende linealmente de la dosis.

a. Encuentre la ecuación que expresa el tiempo de recuperación, en horas, en términos de la dosis en gramos. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

b. ¿Cuál es el tiempo de recuperación si no se aplica el medicamento?

c. ¿Cuál debe ser la dosis para que el tiempo esperado de recuperación sea menor que 18 horas?

186. Un vendedor gana un sueldo fijo más un porcentaje de comisión por sus ventas mensuales. En un mes en que sus ventas fueron de ₡4 800 000, recibió un pago total de ₡1 236 000. Al mes siguiente sus ventas fueron de ₡6 400 000, y recibió un pago de ₡1 348 000.

a. Encuentre una ecuación que dé su pago total P, en millones de colones, como función de las ventas v, también en millones de colones.

b. ¿Cuál es su sueldo fijo y cuál es el porcentaje de comisión?

187. A mediados del 2002 el tipo de cambio del colón con respecto al dólar era de ₡357.99 por dólar, y a mediados del 2005 era ₡476.49. Suponga que el crecimiento fue lineal en ese período.

a. Encuentre una ecuación que dé el tipo de cambio, en colones por dólar, como función del número de año.

b. ¿En cuántos colones por dólar aumentó el tipo de cambio cada año?

c. ¿Aproximadamente cuál fue el tipo de cambio a mediados del año 2004?

d. Si se hubiera mantenido esa tendencia, ¿en qué año se habría alcanzado una tasa de ₡600 por dólar?

6.11.3. Aplicaciones de las funciones cuadráticas

El hecho de que una función cuadrática alcance su máximo o su mínimo en el vértice puede usarse para resolver problemas como encontrar una utilidad máxima o un costo mínimo, si es que la utilidad o el costo pueden escribirse como una función cuadrática.

Ejemplo 29: maximizar ingreso

El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₡650 asistirán 200 personas. ¿Qué precio debe cobrar para maximizar el ingreso?

En el ejemplo 28 (página 223) encontramos que la asistencia q podía expresarse en función del precio p (en colones) según la ecuación $q = 1500 - 2p$. Ahora podemos escribir el ingreso I como función del precio:

$$I = pq = p(1500 - 2p) = 1500p - 2p^2$$

Esta es una función cuadrática con $a = -2$, $b = 1500$ y $c = 0$. Entonces, el gráfico es cóncavo hacia abajo y alcanza un máximo en su vértice,

$$p_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2(-2)} = 375$$

Concluimos que si se cobra ₡375 se obtendrá un ingreso máximo.

En el ejemplo anterior, note que no encontramos las dos coordenadas del vértice. Bastó con la primera, $p_v = 375$, para responder la pregunta: el ingreso máximo se alcanza cuando el precio es ₡375.

La segunda coordenada del vértice sería necesaria para contestar la pregunta "¿cuánto es el ingreso máximo?". Si necesitáramos ese dato, simplemente calcularíamos $I(375) = 281\,250$ y tendríamos la respuesta: el ingreso máximo (que se alcanza al cobrar ₡375 por persona) es ₡281 250.

En situaciones en las que un precio aumenta y la cantidad vendida disminuye, o viceversa, comúnmente es posible plantear el ingreso en términos de una tercera variable que controla tanto al precio como a la cantidad vendida, de manera que el ingreso sea una función cuadrática de esa tercera variable.

Ejemplo 30: ingreso como función de número de incrementos

La edición dominical de un periódico vende 150 000 ejemplares a ₡2000 cada uno. Se ha determinado que por cada incremento de ₡40 en el precio, las ventas se reducirán en 2500 ejemplares. ¿Cuál precio maximizará el ingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

Aunque la incógnita principal es el precio, podemos reconocer que tanto el precio como la cantidad vendida están controlados por una tercera variable: el número de incrementos de ₡40 sobre el precio actual de ₡2000. Denotemos con n esta variable. Entonces:

- El precio es actualmente ₡2000 pero aumentará en ₡40 por cada incremento. Como el número de incrementos es n, el precio en colones será $p = 2000 + 40n$.
- El número de ejemplares ahora es 150 000 pero disminuirá en 2500 por cada incremento. Entonces, el número de ejemplares resultará ser $q = 150000 - 2500n$.

Según eso, el ingreso en colones será

$$\begin{aligned} I = pq &= (2000 + 40n)(150000 - 2500n) \\ &= 300\,000\,000 + 1\,000\,000n - 100\,000n^2 \end{aligned}$$

que es una función cuadrática de n.

Como $a = -100\,000 < 0$, esta función alcanza un máximo en el vértice, cuya primera coordenada es

$$n_v = \frac{-1\,000\,000}{2(-100\,000)} = 5$$

Eso implica que el ingreso máximo se alcanza con 5 incrementos de ₡40.

Con eso averiguamos que el precio que maximizará el ingreso es $p = 2000 + 40(5) = 2200$ colones, y con eso está contestada la primera pregunta.

La segunda pregunta es por el ingreso máximo. Eso es la segunda coordenada del vértice, y se calcula sustituyendo $n = 5$ en la fórmula de I:

$$I(5) = 300\,000\,000 + 1\,000\,000(5) - 100\,000(5)^2 = 302\,500\,000 \text{ colones,}$$

o bien calculando primero $q = 150000 - 2500n = 137\,500$ y recordando que

$$I = pq = (2200)(137500) = 302\,500\,000 \text{ colones.}$$

Ejercicios

Resuelva

188. Encuentre dos números cuya suma sea 200 y cuyo producto sea máximo.

189. Encuentre dos números cuya diferencia sea 50 y su producto sea mínimo

190. El costo C en dólares de producir q unidades de cierto producto es $C = 0.003q^2 - 1.5q + 2400$. Encuentre el nivel de producción q que minimiza el costo.

191. El dueño de una fábrica de refrescos sabe que su ganancia en miles de colones semanales, como función del número x de cajas de refrescos vendidas, está dada por la ecuación $U = -0.01x^2 + 9x - 1296$.

a. ¿Cuántas cajas se deben vender semanalmente para obtener una ganancia máxima?

b. ¿Cuál es la ganancia máxima?

192. El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h es $C = 0.015v^2 - 2.5v + 120$. Encuentre la velocidad más económica.

193. Para cierta compañía, las utilidades mensuales obtenidas al invertir x dólares al mes en publicidad están dadas por $U = -0.12x^2 + 510x - 25000$. ¿Cuánto deberían invertir en publicidad para maximizar sus utilidades?

194. En el ejercicio 174, ¿qué precio se debe fijar para obtener el máximo ingreso posible?

195. En el ejercicio 177, ¿qué precio se debe fijar para obtener el máximo ingreso posible?

196. En el ejercicio 179, ¿qué precio se debe fijar para obtener el máximo ingreso posible?

197. La ecuación de demanda para cierto producto es $3q + 100p - 1800 = 0$, donde p es el precio unitario y q el número de unidades vendidas. Determine el nivel de producción que maximiza los ingresos del fabricante para este producto.

198. Una fábrica de computadoras ha estado vendiendo mil unidades de cierto modelo por semana a $600 cada una. Un estudio de mercado indica que podrían vender veinte unidades más por semana por cada $10 de descuento en el precio.

a. ¿Qué precio deben fijar para maximizar sus ingresos?

b. ¿Cuál es el ingreso máximo?

199. Una compañía de televisión por cable da servicio actualmente a cinco mil usuarios y cobra ₡24 000 mensuales a cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada rebaja de ₡300 en la tarifa mensual se suscribirán 85 nuevos clientes (por ejemplo, si rebajan ₡600 se suscribirán 170 nuevos clientes).

a. Determine la cuota mensual y el número de usuarios que resultan en un ingreso mensual máximo.

b. ¿Cuál es el ingreso mensual máximo?

200. Una revista vende diez mil ejemplares a ₡1500 cada uno. Puede vender cien más por cada ₡10 que disminuya el precio.

a. Determine a qué precio se maximizará el ingreso.

b. ¿Cuál es el ingreso máximo?

201. Un edificio tiene 21 apartamentos, que se alquilan a ₡750 000 mensuales. Por cada incremento de ₡50 000 en el precio mensual quedará un apartamento sin alquilar. ¿Qué precio debe cobrarse para maximizar el ingreso total en alquileres?

202. Un hotel con 100 habitaciones se llena si la tarifa es de $36 la noche. Por cada dólar que aumente la tarifa, dos habitaciones quedarán sin alquilar. ¿Qué tarifa deben cobrar para obtener el máximo ingreso?

203. Un agricultor estima que si cosecha papas ahora, obtendrá 180 kg con valor de ₡450 el kilo. Si espera, la cosecha se incrementará en 30 kg por semana, pero el precio disminuirá en ₡30 por semana. ¿Cuándo debe cosechar para obtener el máximo ingreso?

204. Un agricultor calcula que si siembra 120 árboles por hectárea, cada árbol adulto dará 600 naranjas al año. Por cada árbol más que plante por hectárea, la producción de cada árbol disminuye en tres naranjas al año.

a. ¿Cuántos árboles debe plantar por hectárea para obtener el mayor número posible de naranjas al año, por hectárea?

b. ¿Cuál es el mayor número posible de naranjas?

205. Un distribuidor tiene 500 cajas de mangos para vender. Puede venderlas hoy a ₡1000 la caja. Cada día que pasa el precio aumenta en ₡50, pero también se pierden ocho cajas por descomposición. Sea n el número de días que espera para vender (a partir de hoy).

a. Exprese el precio de venta (en colones), el número de cajas que puede vender y el ingreso (también en colones) como funciones de n.

b. ¿Cuál es el dominio del ingreso como función de n?

c. ¿Cuántos días debe esperar para obtener el ingreso máximo? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

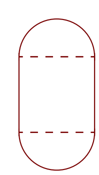
206. Un objeto es arrojado al aire de manera que su altura h (en metros) sobre el terreno, t segundos después de lanzado, es $h(t) = 14t - 5t^2$.

a. Calcule la altura máxima alcanzada.

b. Calcule el tiempo que el objeto dura en el aire.

c. Encuentre el dominio de la función $h(t)$.

207. El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (vea la figura a la derecha). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.

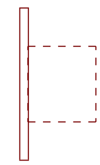


208. Un pedazo de alambre de 60 cm se dobla formando un rectángulo.

a. ¿Qué dimensiones del rectángulo (base y altura) dan el área máxima?

b. ¿Cuál es el área máxima?

209. Se dispone de 120 m de cerca para rodear un terreno rectangular. Se usará un muro existente en uno de los lados del terreno, y se cercarán los otros tres lados (vea la figura a la derecha). Calcule las dimensiones que encierran una área máxima.



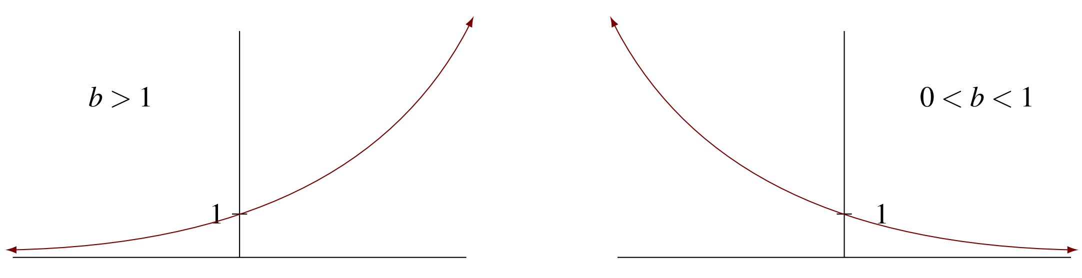
CAPÍTULO 7

Funciones exponenciales y logarítmicas

7.1. Funciones exponenciales

La *función exponencial* con base b es la definida por la fórmula $f(x) = b^x$, donde $b > 0$, $b \neq 1$. Todas las funciones exponenciales tienen por dominio a $\mathbb{R}$ y por ámbito a $]0, \infty[$.

El gráfico de cualquier función exponencial es una curva cóncava hacia arriba, creciente o decreciente dependiendo de si $b > 1$ o $b < 1$. La intersección con el eje X es siempre el punto $(0, 1)$ (porque $f(0) = b^0 = 1$ para cualquier $b > 0$).



Relacionadas con las funciones exponenciales están las funciones con fórmula $g(x) = ab^x + c$, con a, b y c constantes, $b > 0$ y $b \neq 1$; su dominio es $\mathbb{R}$ pero su ámbito depende de los valores de a y c.

La función exponencial *natural* es la que tiene base e: $f(x) = \mathrm{e}^x$, donde la constante e vale aproximadamente 2.718281828459. Aunque el número e no parece tener nada "natural" en su expansión decimal, la función exponencial natural resulta tener muchas aplicaciones en finanzas, estadística y las ingenierías.

Ejemplo 1: función con un componente exponencial

La función $h(t) = 4 - 2^t$ no es exponencial, pero contiene un componente exponencial, el término 2^t, que es la función exponencial en base 2.

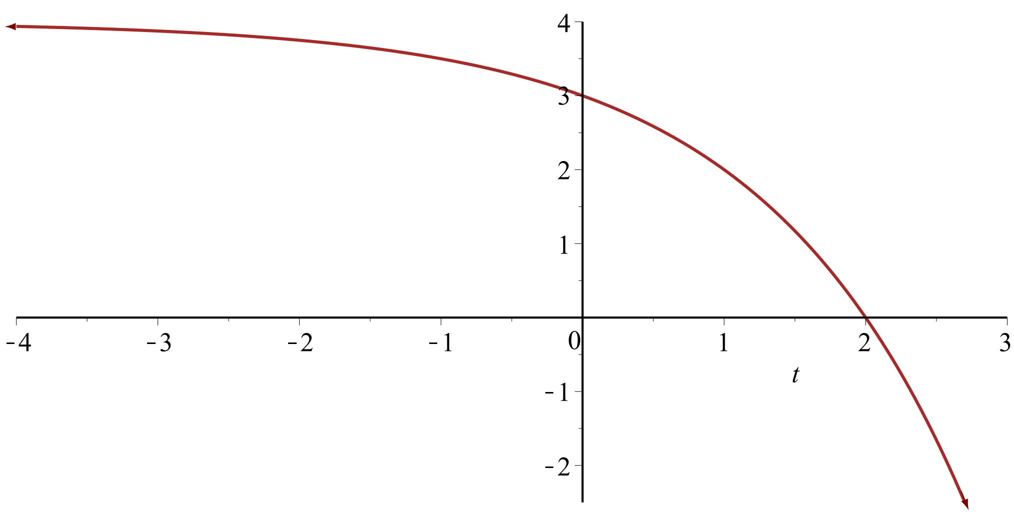
La función h tiene por dominio $\mathbb{R}$. Su gráfico interseca los ejes en los siguientes puntos:

- Eje Y: $t = 0 \Rightarrow y = h(0) = 4 - 2^0 = 3$, así que el punto es $(0,3)$.
- Eje T: $y = 0 \Rightarrow 0 = h(t) = 4 - 2^t \Rightarrow 2^t = 4 \Rightarrow 2^t = 2^2$, de donde deducimos que $t = 2$. El punto entonces es $(2,0)$.

Podemos graficar basándonos en lo anterior y en la siguiente tabla de valores.

t	-2	-1	0	1	2
$h(t)$	$15/4$	$7/2$	3	2	0

El gráfico es entonces



Se puede notar en el gráfico que el ámbito de h es $]-\infty, 4[$.

Los múltiplos de las funciones exponenciales, esto es las funciones con fórmula $a \cdot b^x$ donde a y b son constantes, $b > 0$, son frecuentes en las aplicaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial. Algunas situaciones en las que se hacen presentes son el interés compuesto, la devaluación exponencial, el crecimiento de una población, la desintegración de una sustancia.

En la sección 7.6 (página 249) definiremos formalmente lo que son las funciones de crecimiento exponencial, y veremos aplicaciones de ellas. Una habilidad que se necesitará frecuentemente es la de encontrar una función así dados dos puntos. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: encontrar una función dados dos puntos

Encontrar una función de la forma $p(x) = ab^x$ cuyo gráfico pase por los puntos $(-1, 48)$ y $(2, 6)$.

El problema está en encontrar los valores de las constantes a y b. Como son dos incógnitas, necesitamos dos ecuaciones, y justo conseguiremos una ecuación en cada punto.

Para el punto $(-1, 48)$ se requiere que $p(-1) = ab^{-1} = 48$, y para $(2, 6)$ se necesita $p(2) = ab^2 = 6$. Tenemos entonces este sistema de ecuaciones con incógnitas a y b:

$$\begin{cases} ab^{-1} = 48 \\ ab^2 = 6 \end{cases}$$

Este no es un sistema lineal, pero podemos adaptar una idea de los métodos para sistemas lineales: la de restar dos ecuaciones para cancelar una incógnita (como en la sección 5.1).

Aquí lo que hacemos es *dividir* las dos ecuaciones. Más específicamente la primera ecuación entre la segunda, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{ab^{-1}}{ab^2} &= \frac{48}{6} \\ b^{-3} &= 8 \\ [\ldots]^{-1/3} & \quad [\ldots]^{-1/3} \end{aligned}$$

$$b = 1/2$$

Ahora que tenemos $b = 1/2$ podemos sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones del sistema, digamos en la primera, para despejar a.

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= 48 \\ a(1/2)^{-1} &= 48 \\ a \cdot 2 &= 48 \\ a &= 24 \end{aligned}$$

Teniendo ya $a = 24$ y $b = 1/2$, concluimos que $p(x) = 24(1/2)^x$. En efecto, así se cumple que $p(-1) = 24(1/2)^{-1} = 24 \cdot 2 = 48$, y $p(2) = 24(1/2)^2 = 24(1/4) = 6$, como queríamos.

El sistema en el ejemplo anterior también pudo resolverse despejando y sustituyendo: de la primera ecuación se despeja $a = 48b$, y al sustituirlo en la segunda se llega a $48b^3 = 6$. De aquí sale $b = 1/2$, y entonces $a = 48(1/2) = 24$.

Ejercicios

Encuentre una función de la forma ab^x con las propiedades dadas

1. $f(0) = 3,\ f(1) = 15$

2. $q(1) = 4,\ q(2) = 40$

3. $h(-1) = 8,\ h(1) = 2$

4. $g(-2) = -2,\ g(4) = -250$

5. $r(-1) = 8/3,\ r(3) = 27/2$

6. $p(1/3) = -4,\ p(0) = -1$

Grafique, indicando el ámbito y las intersecciones con los ejes

7. $g(t) = 3 \cdot 2^t$

8. $h(x) = -5\left(\frac{2}{3}\right)^x$

9. $r(u) = 4 + 2^u$

10. $y(r) = 3 + \mathrm{e}^{r+2}$

11. $q(w) = 1 - 4 \cdot 8^{3-2w}$

12. $z(x) = 18 - 2 \cdot 3^{1-x}$

13. $p(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t+3} - 20$

14. $w(x) = \frac{1}{3} - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$

7.2. Propiedades de la función exponencial

Recuerde las principales propiedades de los exponentes, mencionadas ya en la página 16 (por ejemplo, que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, entre otras). A estas añadimos una nueva:

$$b^x = b^y \Rightarrow x = y \quad \text{si } b > 0,\ b \neq 1.$$

Ejemplo 3: una ecuación exponencial

Resolver la ecuación $8^{p+5} = 4 \cdot 2^{1-p}$.

Empezamos por escribir todas las bases en términos de 2 para luego usar las propiedades de las potencias y simplificar. Específicamente, sustituimos $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$.

$$\begin{aligned}(2^3)^{p+5} &= 2^2 \cdot 2^{1-p} \\ 2^{3(p+5)} &= 2^{2+1-p} \\ 2^{3p+15} &= 2^{3-p}\end{aligned}$$

En este punto, teniendo dos potencias iguales y con igual base, podemos cancelar las bases e igualar los exponentes:

$$\begin{aligned}\cancel{2}^{3p+15} &= \cancel{2}^{3-p} \\ 3p + 15 &= 3 - p\end{aligned}$$

Esta ecuación lineal tiene por solución $p=-3$, y esta es entonces la solución de la ecuación original.

Comprobemos: el lado izquierdo de la ecuación es $8^{-3+5}=8^2=64$, y el lado derecho es $4\cdot 2^{1+3}=4\cdot 2^4=4\cdot 16=64$.

Ejercicios

Resuelva

15. $e^{-y}=1$

16. $3^{2u+1}=9$

17. $3^t=-9$

18. $5^{1-4r}=5^4$

19. $8^w=\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2-w}$

20. $27^t=1/9$

21. $32^{3v-2}=1/4$

22. $7^{x-x^2}=\dfrac{1}{49^x}$

23. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^z=\dfrac{8}{27}$

24. $\dfrac{100^q}{10}=1000\cdot 10^q$

25. $8\cdot 5^y=3\cdot 5^y+25$

26. $3\cdot 2^{2x}=8-4^x$

7.3. Funciones logarítmicas

Para un número $b>0$, $b\neq 1$, la *función logarítmica* con base b, $f(x)=\log_b x$, es la inversa de la función exponencial con base b, $g(y)=b^y$. Esto significa que

$$y=\log_b x \quad\Leftrightarrow\quad b^y=x$$

La expresión $\log_b x$ se lee logaritmo en base b de x.

Por ejemplo,

$$\log_2 8=3 \quad \text{porque} \quad 2^3=8$$

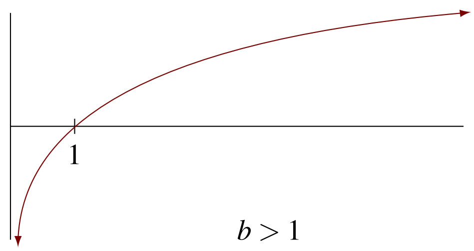
y

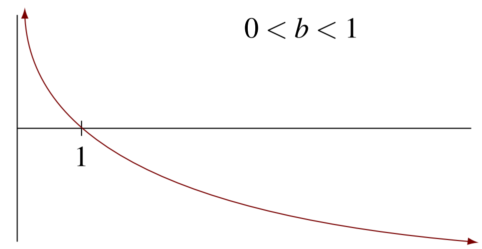
$$\log_{4/9}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2}=\frac{3}{2}$$

Por lo que sabemos de funciones inversas, y dado que el dominio y el ámbito de cualquier función exponencial son $\mathbb{R}$ y $]0,\infty[$ respectivamente, tenemos también que

- El dominio de cualquier función logarítmica es $]0,\infty[$, así que $\log_b x$ existe solo si $x>0$.
- El ámbito de cualquier función logarítmica es $\mathbb{R}$.

El gráfico de cualquier función logarítmica es una curva en la mitad derecha del plano, creciente y cóncava hacia abajo si $b > 1$, o decreciente y cóncava hacia arriba si $0 < b < 1$.





El *logaritmo natural* de x, denotado $\ln x$, es el logaritmo con base $b = \mathrm{e}$, donde e es la base de la función exponencial natural ($\mathrm{e} \approx 2.718281828$):

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x$$

El *logaritmo común* de x, denotado $\log x$, es el logaritmo con base $b = 10$:

$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$

Dicho de otra forma, para cualquier $x > 0$, $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ y $\log x = \log_{10} x$.

Ejemplo 4: convertir de forma logarítmica a forma exponencial

Resolver estas tres ecuaciones.

- $\log_5(3x+7) = 2$

  Pasamos de notación logarítmica a notación exponencial así:

  $$\log_5(3x+7) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x+7 = 5^2$$

  Esta última es una ecuación lineal, con solución $x = 6$.

- $\log_b(8/729) = -3$

  Al pasar a notación exponencial llegamos a $b^{-3} = 8/729$. Elevando ambos lados a la $-1/3$ obtenemos

  $$b = \left(\frac{8}{729}\right)^{-1/3} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{9}{2}$$

- $\ln(1-y) = 2$

  En notación exponencial, $1 - y = \mathrm{e}^2$, y de aquí que $y = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6.389$.

Ejemplo 5: graficar una función logarítmica

Graficar $g(v) = \ln(2v+4)$.

Empecemos por encontrar el dominio de g: como el dominio de la función ln es $]0,\infty[$, entonces es necesario que $2v+4>0$ para que $g(v)$ esté definido. La inecuación $2v+4>0$ tiene solución $v>-2$, así que el dominio de g es $]-2,\infty[$.

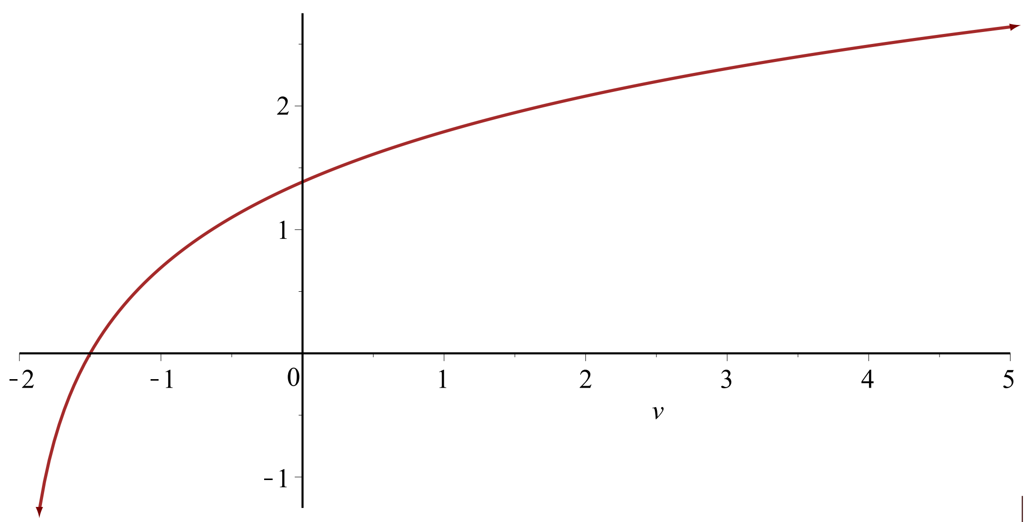
Veamos las intersecciones con los ejes.

- Con el eje Y: $v=0 \Rightarrow y = g(0) = \ln 4 \approx 1.386$; el punto es $(0, 1.386)$.
- Con el eje V: $y=0 \Rightarrow 0 = g(v) = \ln(2v+4)$, que en forma exponencial significa $\mathrm{e}^0 = 2v+4$. Como $\mathrm{e}^0 = 1$, la solución es $v = -3/2$, y el punto de intersección es $(-3/2, 0)$.

Ahora usamos esta tabla de valores para graficar:

v	-1.9	-1.5	-1	0	2	5
y	-1.609	0	0.6931	1.3863	2.0794	2.6391

Conectando los puntos obtenemos



Ejercicios

Convierta de forma exponencial a logarítmica o viceversa

27. $2^3 = 8$

28. $25^{3/2} = 125$

29. $5^{-2} = 1/25$

30. $16^{1/4} = 2$

31. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{9}{4}$

32. $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3} = \dfrac{2}{3}$

33. $\log_5(1/5) = -1$

34. $\log_3 1 = 0$

35. $\log_{1/2} 8 = -3$

36. $\log_{10} 10\,000 = 4$

37. $\log 0.01 = -2$

38. $\log_6 6 = 1$

39. $\ln \mathrm{e}^{-2} = -2$

Resuelva

40. $\log_3 u = -2$

41. $\log_8 16 = w$

42. $\log_r 32 = 5$

43. $\ln v = -2$

44. $\ln(-x) = 1$

45. $\log_{25}(1/5) = t$

46. $\log_y(1/4) = -2/3$

47. $\log_{4/9} z = -0.5$

48. $\log_{1/3} c = -2$

49. $\log_x \sqrt{1000} = 3$

Grafique, indicando el dominio y las intersecciones con los ejes

50. $p(x) = \log_{1.1} x$

51. $q(x) = \log_{0.9} x$

52. $h(s) = \log_2(s+4)$

53. $f(t) = 3\ln(t+2)$

54. $r(z) = 1 + \log_3(5-z)$

55. $q(u) = 1 + \log_{1/2}(3u-1)$

56. $g(t) = \ln(1-t^2)$

57. $p(v) = \log_2(3v^2+7v-6) - 2$

7.4. Propiedades de la función logarítmica

Las principales propiedades de los logaritmos son las cuatro siguientes, para a, b, x y y mayores que cero, y además $a, b \neq 1$:

- $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b(x^p) = p \log_b x$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Otras propiedades, que pueden deducirse de las anteriores y de la definición de logaritmo, son (para $b > 0$, $b \neq 1$):

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b x} = x$ para cualquier $x > 0$
- $b^x = e^{x \ln b}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier $b > 0$

Ejemplo 6: descomponer un logaritmo en varios

La expresión $\log_2 \frac{\sqrt{3c^2+5c+2}}{40(3-c)^3}$ puede descomponerse así:

$$\begin{aligned}
&\log_2 \frac{\sqrt{3c^2+5c+2}}{40(3-c)^3} \\
&\quad = \log_2 \sqrt{3c^2+5c+2} - \log_2[8 \cdot 5(3-c)^3] \\
&\quad = \log_2(3c^2+5c+2)^{1/2} - [\log_2 8 + \log_2 5 + \log_2(3-c)^3] \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\log_2(3c^2+5c+2) - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\log_2[(3c+2)(c+1)] - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\log_2(3c+2) + \tfrac{1}{2}\log_2(c+1) - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c)
\end{aligned}$$

Ejemplo 7: combinar varios logaritmos en uno

La expresión $\log(a^2-b^2)-2\log(a+b)+1$ puede escribirse como un solo logaritmo así:

$$\begin{aligned}
&\log(a^2-b^2)-2\log(a+b)+1\\
&\qquad=\log(a^2-b^2)-\log(a+b)^2+\log 10^1\\
&\qquad=\log 10+\log(a^2-b^2)-\log(a+b)^2\\
&\qquad=\log[10(a^2-b^2)]-\log(a+b)^2\\
&\qquad=\log\left[\frac{10(a^2-b^2)}{(a+b)^2}\right]=\log\left[\frac{10(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}\right]\\
&\qquad=\log\frac{10(a-b)}{a+b}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8: cambio de base

El valor de $\log_3 35$ puede expresarse en términos de logaritmos naturales así:

$$\log_3 35=\frac{\ln 35}{\ln 3}\approx\frac{3.555348}{1.0986123}\approx 3.2362173$$

En efecto, $3^{3.2362173}\approx 35$ (la diferencia se debe a que el número 3.2362173 no es el logaritmo exacto sino solo una aproximación).

También pudo usarse logaritmo común en vez de logaritmo natural,

$$\log_3 35=\frac{\log 35}{\log 3}\approx\frac{1.544068}{0.4771213}$$

con exactamente el mismo resultado.

Ejemplo 9: cambiar la base de una exponencial

Escribir la expresión $y=5\cdot 2^{6x}\cdot 3^{1-x}$ como una potencia con base e, y luego como múltiplo de una función exponencial, $y=ab^x$.

Por la propiedad $b^x=\mathrm{e}^{x\ln b}$, los factores son

$$5=5^1=\mathrm{e}^{1\ln 5},\quad 2^{6x}=\mathrm{e}^{6x\ln 2}\quad \text{y}\quad 3^{1-x}=\mathrm{e}^{(1-x)\ln 3}.$$

Entonces,
$$y = \mathrm{e}^{\ln 5}\,\mathrm{e}^{6x\ln 2}\,\mathrm{e}^{(1-x)\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln 5 + 6x\ln 2 + (1-x)\ln 3}$$
y como el exponente es igual a
$$\begin{aligned}\ln 5 + 6x\ln 2 + \ln 3 - x\ln 3 &= \ln 5 + \ln 3 + x(6\ln 2 - \ln 3)\\ &= \ln(5\cdot 3) + x\ln(2^6/3)\\ &= \ln 15 + x\ln(64/3)\end{aligned}$$
resulta que podemos simplificar a
$$y = \mathrm{e}^{\ln 15 + x\ln(64/3)}$$
como potencia con base e. Este era el primer objetivo.

Ahora también podemos escribir
$$y = \mathrm{e}^{\ln 15 + x\ln(64/3)} = \mathrm{e}^{\ln 15}\,\mathrm{e}^{x\ln(64/3)} = 15\cdot(64/3)^x$$
que era el segundo objetivo.

Note que también pudimos haber llegado a este último resultado más directamente así:
$$\begin{aligned}y &= 5\cdot 2^{6x}\cdot 3^{1-x} = 5\cdot(2^6)^x\cdot 3^1\cdot 3^{-x} = 5\cdot 64^x\cdot 3\cdot(1/3)^x\\ &= 15(64/3)^x\end{aligned}$$

Ejercicios

Descomponga en una expresión con los logaritmos más simples que sea posible

58. $\log_6 x(x-1)^2$

59. $\log_3 9(a+b)^2\sqrt{a-b}$

60. $\ln w^3(3y+5)$

61. $\ln[y(3w+5)]^3$

62. $\log_3\left(\dfrac{n^2h}{5^{2h}}\right)^{3/4}$

63. $\log\dfrac{r^4(s+1)^2}{\sqrt[3]{r-2}\cdot 100^r}$

64. $\log_2\left[\dfrac{p^4(2q+5r)^{-1}}{(q+2)^3(1-p)}\sqrt[4]{\dfrac{2^r}{(2-p)q^4}}\,\right]$

Escriba como un solo logaritmo y simplifique

65. $\log_2 3+\log_2 5$

66. $\ln 6+2\ln 5$

67. $\log 15-\log 6$

68. $\frac{1}{2}\log 25-\log 4+3\log 2$

69. $\ln(x^2-y^2)-2\ln(ax+ay)+\ln a$

70. $\log_3(x/y)^2-5\log_3\sqrt{x}-\log_3 y^{-1}$

71. $3\log_7 6ax^2-\dfrac{1}{2}\log_7 49a^4-2\log_7 3x$

72. $2\ln 2r-\ln 2+\ln 3-\ln 3r^2$

73. $\ln(ac-3xy-ay+3cx)-2\ln(y-c)+\ln(3x+a)^2$

74. $\log_6(2/3)^p+\log_6 12+p\log_6 4-\log_6 2+2\log_6 9^p$

7.5. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una *ecuación exponencial* es una que tiene potencias con alguna incógnita en su exponente. Y una *ecuación logarítmica* es una con alguna incógnita dentro de un logaritmo.

7.5.1. Ecuaciones exponenciales

Al resolver una ecuación exponencial debemos primero llevarla a la forma $b^x=y$, con la expresión exponencial despejada, para entonces pasarla a forma logarítmica, $x=\log_b y$:

$$b^x=y \quad\Rightarrow\quad x=\log_b y$$

Para resolver una ecuación exponencial

a. Despejar la parte exponencial

b. Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.

c. Resolver la ecuación resultante.

Ejemplo 10: resolver ecuación exponencial

Resolver $3 \cdot 2^{p^2+1} = 5 \cdot 2^{1-p}$.

Recojamos todas las potencias de 2 en el lado izquierdo, y el resto de los términos en el lado derecho.

$$\begin{aligned} \frac{2^{p^2+1}}{2^{1-p}} &= \frac{5}{3} \\ 2^{(p^2+1)-(1-p)} &= \frac{5}{3} \\ 2^{p^2+p} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Ya tenemos despejada la parte exponencial, y ahora pasamos a convertir la igualdad a la forma logarítmica, según $2^x = y \Rightarrow x = \log_2 y$.

$$p^2 + p = \log_2(5/3)$$

Por último resolvemos la ecuación cuadrática resultante,

$$p^2 + p - \log_2(5/3) = 0$$

cuyas soluciones son $p_1 \approx -1.4934614$ y $p_2 \approx 0.49346142$.

Ejemplo 11: resolver ecuación exponencial con bases distintas

Resolver $7 \cdot 3^{1-2t} = 5^t$.

Hay muchas formas de atacar esta ecuación. Veamos algunas.

- Convertir en la forma $b^x = y$ y pasar a forma logarítmica como en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2t} &= 5^t \\ 21(3^{-2})^t &= 5^t \\ \frac{21}{9^t} &= 5^t \\ 21 &= 45^t \\ t &= \log_{45} 21 \approx 0.799788 \end{aligned}$$

- Convertir cada lado en una potencia con base e como en el ejemplo 9, para luego igualar exponentes como en el ejemplo 3:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\ln 7}\,\mathrm{e}^{(1-2t)\ln 3} &= \mathrm{e}^{t\ln 5}\\
\cancel{\mathrm{e}}^{\ln 7+(1-2t)\ln 3} &= \cancel{\mathrm{e}}^{t\ln 5}\\
\ln 7+(1-2t)\ln 3 &= t\ln 5\\
-2t\ln 3 - t\ln 5 &= -\ln 7-\ln 3\\
-t(2\ln 3+\ln 5) &= -\ln 21\\
t &= \frac{\ln 21}{\ln 45} \approx 0.799788
\end{aligned}$$

- Empezar tomando logaritmo natural en ambos lados:

$$\begin{aligned}
\ln(7\cdot 3^{1-2t}) &= \ln(5^t)\\
\ln 7+\ln(3^{1-2t}) &= t\ln 5\\
\ln 7+(1-2t)\ln 3 &= t\ln 5
\end{aligned}$$

  de donde concluimos de manera idéntica al método anterior.

7.5.2. Ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica la llevamos primero a la forma $\log_b x = y$ y luego la transformamos en forma exponencial, $x = b^y$:

$$\log_b x = y \quad \Rightarrow \quad x = b^y$$

Pero en las ecuaciones logarítmicas, como en las fraccionarias y otras, pueden aparecer soluciones falsas. Por eso es necesario comprobar las soluciones antes de dar por concluido el proceso[1].

Para resolver una ecuación logarítmica

a. Despejar el logaritmo.

b. Convertir de forma logarítmica a forma exponencial.

c. Resolver la ecuación resultante.

d. Comprobar las soluciones *en la ecuación original* y descartar las falsas.

---

[1]Esto de comprobar las soluciones de una ecuación siempre es buena idea para tener confianza de que no hubo errores en el procedimiento, pero matemáticamente hablando es estrictamente necesario solo para las ecuaciones fraccionarias, radicales y las logarítmicas, entre los tipos que vemos en este libro.

Ejemplo 12: resolver ecuación logarítmica

Resolver $2\log_3(w-1) = 2 + \log_3(19-w)$.

Empezamos por agrupar todos los logaritmos en uno solo.

$$\begin{aligned}\log_3(w-1)^2 - \log_3(19-w) &= 2\\ \log_3 \frac{(w-1)^2}{19-w} &= 2\end{aligned}$$

Pasamos entonces de forma logarítmica a forma exponencial, según la regla $\log_3 x = y \Rightarrow x = 3^y$, y continuamos con

$$\begin{aligned}\frac{(w-1)^2}{19-w} &= 3^2\\ (w-1)^2 &= 9(19-w)\\ w^2-2w+1 &= 171-9w\\ w^2+7w-170 &= 0\end{aligned}$$

de donde llegamos a que $w = -17$ o $w = 10$.

Pero no hemos acabado: hay que comprobar cada una de las posibles soluciones.

Para $w = -17$:

$$\begin{aligned}2\log_3(-17-1) &\stackrel{?}{=} 2+\log_3(19-(-17))\\ 2\log_3(-18) &\stackrel{?}{=} 2+\log_3(36)\end{aligned}$$

Para $w = 10$:

$$\begin{aligned}2\log_3(10-1) &\stackrel{?}{=} 2+\log_3(19-10)\\ 2\log_3 9 &\stackrel{?}{=} 2+\log_3 9\\ 2\cdot 2 &= 2+2\end{aligned}$$

Para $w = -17$ vemos que la expresión a la izquierda está indefinida, ya que $\log_3(-18)$ no es un número real. Para $w = 10$, ambos lados de la ecuación tienen el mismo valor. Concluimos entonces que la única solución es $w = 10$.

Ejercicios

Resuelva

75. $3^p = 21$

76. $2^{-q} = 8$

77. $2^{w^2+1} = 32$

78. $e^{5r-2} = 30$

79. $5^{3x} = 3$

80. $6^{t+3} = 2 \cdot 6^{2t+5}$

81. $27^v = \dfrac{9^{4v-1}}{3^v}$

82. $(2^x)^{2-3x} = \frac{1}{2}4^{x-1}$

83. $1.9^u = 2.4^{2u}$

84. $3^y = 4^{y+1}$

85. $5^{2s+1} = 6^{s-2}$

86. $5^{|u|-1} = 25$

87. $10^{c^2+2c} = 2 \cdot 100^c$

88. $\sqrt{2^y} = 3 \cdot 2^{1-y}$

89. $3 \cdot 4^{2r} = 5 \cdot 4^r + 2$

90. $18 \cdot 2^s - 32 = 4^s$

91. $\log_5 w = 2$

92. $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

93. $\log(5y-1) - \log(y-3) = 2$

94. $\log_5(z+1) = 1 - \log_5(z-3)$

95. $\log(p-3) + \log(p+2) = \log(5p-14)$

96. $\log_2(q+1) = 1 - \log_2 q$

97. $\log_5(3r-1) + \log_5(2r+1) = 2$

98. $\log_{6s-17}(s^2-9) = 1$

99. $\log_{v+2}(2v^2+7v) = 2$

100. $\ln\sqrt{t+1} + \ln\sqrt{5t} = 1$

101. $\ln(2-u) + \ln(1-u) = \ln 6$

102. $\log v + \log(v-15) = 2$

103. $\log_2(1-w) + \log_2(3-w) = 3$

104. $\log_2(1-x) + \log_2(2-x) = 1$

105. $\log_2(y^2-12) - \log_2(3-y^2) = 3$

106. $\log_5(4^z+61) = 3$

107. $\log t = 1 - \log(t-3)$

108. $\log(4-v^2) - \log(1+v) = 1 + \log(2-v)$

109. $\log(\log w) = 2$

110. $\log_3 2x + \log_3(x+1) = \log_3(1-x) + 1$

111. $\ln(5-y) = 2\ln 3 - \ln(5+y)$

112. $\ln(z+3) = \ln 3 - \ln(z+1)$

113. $\sqrt{\ln z} = \ln\sqrt{z}$

114. $\sqrt{\log_3 x} = \log_3(9/x)$

115. $(\ln q)^2 + \ln q = 2$

116. $(e^p - 2)(3 - \log p)(2^p - 5^p) = 0$

7.6. Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas

Si una cantidad crece exponencialmente con una tasa de incremento r por unidad de tiempo (por año, por mes, etc), entonces su valor dentro de t unidades de tiempo será

$$V(t) = V_0(1+r)^t$$

donde V_0 es el valor inicial (cuando $t = 0$).

Ya en la página 234 habíamos mencionado las funciones de crecimiento o decrecimiento exponencial, que son los múltiplos de las funciones exponenciales: $y = a \cdot b^x$.

Ahora vemos que esas son las mismas funciones que acabamos de decir que denotan una cantidad que crece exponencialmente, ya que las ecuaciones

$$y = a \cdot b^x \quad \text{y} \quad V(t) = V_0(1+r)^t$$

son equivalentes si identificamos $y = V(t)$, $a = V_0$, $b = 1+r$ y $x = t$.

Definición (función de crecimiento exponencial)

Una función de crecimiento o decrecimiento exponencial es una con ecuación

$$y = a \cdot b^x \quad \text{o bien} \quad V(t) = V_0(1+r)^t$$

- Su *valor inicial* es $a = V_0$.
- Su *factor de crecimiento* es $b = 1+r$.
- Su *tasa de crecimiento es* $r = b-1$.

Veamos algunas situaciones en las que se aplica el crecimiento exponencial.

Ejemplo 13: crecimiento de una población de bacterias

Un cultivo de bacterias crece a una tasa de 4 % al día. Si inicialmente había 15 000 bacterias, ¿qué cantidad habrá dentro de una semana?

El valor inicial es $V_0 = 15\,000$, la tasa de crecimiento es $r = 0.04$ y la unidad de tiempo es un día. Entonces, la función de crecimiento de esta población es

$$V(t) = V_0 \cdot (1+r)^t = 15\,000 \cdot 1.04^t$$

donde t es el número de días transcurridos.

Para responder la pregunta simplemente evaluamos $V(7)$ (porque $t = 7$ es el número de días en una semana).

$$V(7) = 15\,000 \cdot 1.04^7 \approx 19\,739$$

Note en el ejemplo anterior que el número de bacterias como función del tiempo puede escribirse también como $V(t) = a \cdot b^t$, donde $a = V_0 = 15000$ es la población inicial, y $b = 1 + r = 1.04$ es el factor de crecimiento (así llamado porque cada día la población se multiplica por 1.04)[2].

Ejemplo 14: crecimiento de una población

La población de cierto país ha crecido, desde el año 2000, según la fórmula $P(t) = 21.4 \cdot 1.0182^t$ en millones, donde t es el número de años desde el 2000. ¿Cuánto era la población inicial y cuánto ha sido la tasa de crecimiento?

La función tiene fórmula $P(t) = a \cdot b^t$, con $a = 21.4$ y $b = 1.0182$. Entonces:

- la población inicial (en el 2000) fue $P(0) = a = 21.4$ millones.
- El factor de crecimiento es $b = 1.0182$ anual, lo que corresponde a una tasa de crecimiento $r = b - 1 = 0.0182$, o 1.82 % anual.

Una fórmula de matemática financiera dice que si un monto de dinero P se invierte a una tasa de interés anual compuesto r durante n años, el valor de la inversión (monto invertido más intereses) será

$$V(n) = P(1+r)^n$$

Ejemplo 15: interés compuesto

Se invierte \$5000 al 2.5 % anual compuesto anualmente durante 3 años. ¿Cuánto será el valor de la inversión al cabo de ese tiempo?

Tenemos un valor inicial $V_0 = P = 5000$ y una tasa de crecimiento anual $r = 2.5\,\% = 0.025$. Entonces, el valor de la inversión a los n años será

$$V(n) = 5000(1+0.025)^n = 5000 \cdot 1.025^n$$

Al cabo de tres años será $n = 3$, y el valor de la inversión será

$$V(3) = 5000\,(1+0.025)^3 = 5384.45$$

en dólares.

[2] Cada día la población aumenta en $r = 4\,\%$; es decir, se multiplica por $b = 1.04$.

Ejemplo 16: interés compuesto

Suponga que se invierte ₡3 000 000 a cierta tasa de interés compuesto.

a. Si dos años después la inversión vale ₡3 350 000, ¿cuánto es la tasa de interés?

   Hagamos esto en millones de colones. Sabemos que $V_0 = P = 3$ (el valor inicial), que $n = 2$ (el número de años) y también que el valor a los dos años es $V(2) = 3.35$. Entonces,

$$V(2) = P(1+r)^2 = 3(1+r)^2 = 3.35$$

   Esta es una ecuación cuadrática, y puede resolverse dividiendo entre 3, sacando raíz cuadrada y restando 1, para llegar a $r = 0.0567245$, es decir un 5.67245 % de interés anual.

b. ¿En cuánto tiempo llegará la inversión a valer ₡4 000 000?

   Ahora planteamos la ecuación $V(n) = 4$, con incógnita n:

$$V(n) = 3(1+r)^n = 3(1.0567245)^n = 4$$

   Esta ecuación es exponencial, y se resuelve como vimos en la sección anterior:

$$\begin{aligned} 3(1.0567245)^n &= 4 \\ 1.0567245^n &= 4/3 \\ n &= \log_{1.0567245}(4/3) = 5.2141 \end{aligned}$$

   Así, la inversión llegará a valer cuatro millones de colones en 5.2141 años (aproximadamente 5 años, 2 meses y 17 días).

Una función $y = a \cdot b^x$ denota un *crecimiento* exponencial cuando $b > 1$ y un *decrecimiento* exponencial cuando $b < 1$, como vimos en la sección 7.1 (página 233): la función b^x es creciente si $b > 1$ o decreciente si $b < 1$. Como la tasa de crecimiento es $r = b - 1$, resulta que $r > 0$ cuando $b > 1$, y $r < 0$ cuando $b < 1$. En resumen:

Factor		**Tasa**		**Resultado**
$b > 1$	$\Leftrightarrow$	$r > 0$	$\Leftrightarrow$	Crecimiento, plusvalía
$b < 1$	$\Leftrightarrow$	$r < 0$	$\Leftrightarrow$	Decrecimiento, depreciación

Ejemplo 17: depreciación exponencial

Una máquina industrial se compró hace cinco años, y su valor decrece exponencialmente con el tiempo. Hace dos años su valor se estimaba en \$3400, y hoy se estima en \$2800. ¿Cómo se expresa su valor como función de su edad? ¿Cuál fue el precio de compra? ¿Cuál es la tasa de depreciación anual?

Denotemos con $V(t)$ el valor de la máquina en dólares t años después de comprada. Según los datos, $V(t) = ab^t$, con $V(3) = 3400$ (hace dos años) y $V(5) = 2800$ (hoy). Tenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} V(3) = ab^3 = 3400 \\ V(5) = ab^5 = 2800 \end{cases}$$

que, al resolver como en el ejemplo 2, nos lleva a $a \approx 4549.46$ y $b \approx 0.907485$ (vemos de inmediato que $b < 1$, como es de esperar en el caso de decrecimiento).

Entonces, el valor de la máquina como función de su edad es

$$V(t) = 4549.46 \cdot 0.907485^t$$

donde t es la edad, en años.

El valor inicial es $V_0 = a \approx 4549.46$, en dólares, de modo que el precio de compra fue \$4549.46.

La tasa de "crecimiento" es $r = b - 1 \approx -0.092515$, que por ser negativa indica más bien una depreciación de 9.2515 % por año.

Ejercicios

Resuelva

117. Un litro de leche costaba ₡200 hace un tiempo, y su precio ha aumentado en 12 % al año.

a. ¿Cuánto costaba cinco años más tarde?

b. ¿Cuánto había costado dos años antes de costar ₡200?

118. En 1976 se reportó que la población mundial era de 4000 millones de habitantes, y se estimó que aumentaba a 1.8 % por año. (a) Escriba una fórmula para la población $P(t)$, en millones de habitantes, t años después de 1976. (b) ¿Cuál sería la población en el año 2000?

119. Una computadora, adquirida por \$1800, se devalúa un 25 % anualmente. Exprese su valor V en dólares como función del tiempo t en años desde que fue comprada. ¿Cuál es su valor a los cinco años?

120. Un terreno aumenta su valor de acuerdo con la fórmula $V(t) = 15 \cdot 1.23^t$ en millones de colones, donde t es el número de años desde que fue comprado.

a. ¿Cuál fue el precio de compra?

b. ¿Cuál es la tasa anual de plusvalía (el incremento en el valor)?

121. El valor de un automóvil t años después de comprado es $V(t) = 12.4 \cdot 0.87^t$, en millones de colones.

a. ¿Cuál es el valor inicial?

b. ¿Cuál es el valor a los seis años?

c. ¿Cuál es la tasa de depreciación anual?

122. El valor de un terreno aumenta exponencialmente con el tiempo. Hace cinco años se compró en ₡20 millones, y hoy está valorado en ₡36 millones.

a. Encuentre una fórmula que dé su valor, en millones de colones, en función del número de años desde que se compró.

b. ¿Cuál ha sido la tasa de incremento anual?

123. Una máquina se compró nueva hace ocho años, y ha venido depreciándose exponencialmente. Al año de comprada valía \$43 800, y hace dos años se valoró en \$37 250. Encuentre una fórmula que dé su valor, en miles de dólares, como función de su edad en años.

a. ¿Cuánto costó nueva?

b. ¿Cuál ha sido la tasa de depreciación anual?

c. ¿Cuánto vale ahora?

124. Durante los años 1986 a 1999, el tipo de cambio del colón con respecto al dólar se incrementó en forma aproximadamente exponencial. En junio de 1988 era ₡74.75 por dólar y en junio de 1995 era ₡178.40 por dólar.

a. Encuentre una fórmula para $TC(t)$, el tipo de cambio en colones por dólar, t años después de junio de 1986.

b. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual durante ese período?

125. Durante el siglo 20, la población de Costa Rica creció en forma aproximadamente exponencial. Era 511 009 habitantes en 1931 y 2 559 845 en 1986.

a. Encuentre una fórmula para $P(t)$, la población t años después del año 1900.

b. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento anual en la población durante ese siglo?

126. La población de un país se duplica aproximadamente cada treinta años, y era cinco millones en el año 2000.

a. Encuentre una fórmula para $P(t)$, la población en millones, t años después del 2000.

b. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual?

127. La combustión de la madera puede darse a temperaturas bajas, pero es extremadamente lenta. El tiempo que tarda la combustión de un gramo de madera es una función exponencial de la temperatura. Suponga que un gramo de cierto tipo de madera se consume en un segundo a 600°, y en 17 minutos a 500°.

a. Encuentre el tiempo de combustión de esta madera, en segundos, como función de la temperatura.

b. ¿Cuánto tiempo tardará en quemarse un gramo de esta madera a 100°?

128. Un cultivo de bacterias crece a una tasa de 4 % al día. Si inicialmente había 15 000 bacterias, ¿en cuánto tiempo habrá 50 000 bacterias?

129. La población de cierto país ha crecido, desde inicios del año 2000, según la fórmula $P(t) = 21.4 \cdot 1.0182^t$ en millones, donde t es el número de años desde el 2000. ¿En qué año llegará la población a los veinticinco millones?

130. Durante el siglo 20, la población de Costa Rica creció en forma aproximadamente exponencial con fórmula $P(n) = 206065 \cdot 1.02973^n$, donde n es el número de años desde el inicio del 1900. ¿En qué años se alcanzaron el primero, el segundo y el tercer millón de habitantes?

131. Si la población mundial es $P(n) = 4000 \cdot 1.018^n$ millones, donde n es el número de años desde el inicio de 1976, ¿en qué año llegó la población a los cinco mil millones?

132. Una computadora, adquirida por $1800, se devalúa según la fórmula

$$V(n) = 1800 \cdot 0.75^n$$

donde n es el número de años desde que se compró y $V(n)$ es su valor en dólares. ¿En cuánto tiempo alcanzará un valor de $1000?

133. Un terreno aumenta su valor de acuerdo con la fórmula $V(n) = 15 \cdot 1.23^n$ en millones de colones, donde n es el número de años desde que se compró.

a. ¿En cuántos años alcanzará un valor de veinte millones de colones?

b. ¿Cuántos años atrás valía 13 millones de colones?

134. Una máquina industrial se compró hace cinco años, y su valor decrece exponencialmente con el tiempo según la fórmula

$$V(t) = 4549.46 \cdot 0.907485^t$$

donde t es el número de años de uso. ¿Dentro de cuántos años se habrá reducido su valor a la mitad del valor original?

135. El valor de un automóvil t años después de comprado es $V(t) = 12.4 \cdot 0.87^t$. ¿Cuánto tardará su valor en reducirse a la mitad del valor original?

136. Durante los años 1986 a 1999, el tipo de cambio del colón con respecto al dólar se incrementó en forma aproximadamente exponencial según la fórmula $C(t) = 58.30 \cdot 1.1323^t$ en colones por dólar, donde t es el número de años desde el 15 de junio de 1986. ¿Aproximadamente en qué fechas se alcanzaron los ₡100 por dólar y los ₡250 por dólar?

137. Si se invierten ₡2 000 000 a 7 % de interés anual compuesto, ¿cuánto tardará la inversión en alcanzar un valor de ₡3 000 000?

138. Hace tres años se invirtió un monto en dólares. Un año después la inversión valía \$5665, y hoy vale \$6010.

a. ¿Cuánto fue el monto invertido?

b. ¿Cuánto es la tasa de interés anual compuesto?

139. La presión atmosférica P en milímetros de mercurio, a una altura h en metros sobre el nivel del mar, es $P = 760\mathrm{e}^{-0.000123h}$. ¿Cuál es la altura si la presión es de 600 mm?

140. Después de pasar por un material con x centímetros de espesor, la intensidad de un rayo de luz será $I(x) = I_0 4^{-cx}$, donde I_0 es la intensidad inicial y c es una constante llamada factor de absorción ($c \approx 0$ para materiales transparentes). Suponga que el agua del mar absorbe 20 % de la intensidad de la luz a una profundidad de 16 cm.

a. ¿Cuál es el factor de absorción del agua del mar?

b. ¿A qué profundidad habrá absorbido el agua de mar un 50 % de la luz?

141. Con respecto al ejercicio 127 (página 254), ¿a qué temperatura debe estar la madera para que un gramo se consuma en un minuto?

7.7. (Opcional) Inversas de funciones exponenciales o logarítmicas

Recuerde del capítulo 6 que para encontrar la inversa de una función f debe plantearse la ecuación $y = f(x)$ y despejarse x en términos de y. El resultado será $x = f^{-1}(y)$.

Ejemplo 18: dominio, inversa y ámbito

Encontrar el dominio, la inversa y el ámbito de

$$h(r) = 2 - 5\log(2-3r)$$

Para el dominio necesitamos que $2-3r > 0$, lo cual se cumple en $]-\infty,\ 2/3[$; ese es el dominio de h.

Para la inversa, planteamos la ecuación $y = h(r)$ y despejamos r.

$$\begin{aligned} y &= 2 - 5\log(2-3r) \\ 5\log(2-3r) &= 2 - y \\ \log(2-3r) &= (2-y)/5 \\ 2-3r &= 10^{(2-y)/5} \\ -3r &= 10^{(2-y)/5} - 2 \\ r &= \tfrac{1}{3}\left[2 - 10^{(2-y)/5}\right] \end{aligned}$$

La inversa entonces está dada por $h^{-1}(y) = \frac{1}{3}\left[2 - 10^{(2-y)/5}\right]$.

Finalmente, el ámbito de h es igual al dominio de su inversa. Como h^{-1} no tiene ninguna restricción, su dominio, y por lo tanto el ámbito de h, es $\mathbb{R}$.

Ejercicios

Encuentre el dominio, la inversa y el ámbito

142. $g(x) = 4 + 2^{1-2x}$

143. $p(w) = 4^{w-3} + 2$

144. $p(z) = 6 - 3 \cdot 5^{z+1}$

145. $g(y) = 5 - \frac{1}{4} \cdot 3^{2-y}$

146. $f(t) = \frac{1}{2} 10^{t^3-3} - 1$

147. $h(x) = 3 + \log_2 x$

148. $g(t) = 4 - \log_2(1-t)$

149. $q(v) = 5 - (\log v)^{-1}$

150. $h(y) = \ln(1 - e^y)$

151. $r(u) = 8 - \log_2(1 - \sqrt{u})$

7.8. (Opcional) Inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las inecuaciones exponenciales y las logarítmicas son las inecuaciones que involucran incógnitas dentro de algún exponente o logaritmo, respectivamente. Como son inecuaciones no lineales, el método general para resolverlas será el siguiente[3]

Para resolver una inecuación exponencial o logarítmica

a. Agrupar todos los términos en un lado de la desigualdad ("desigualar" a cero).

b. Encontrar los ceros (incluyendo del denominador, si lo hay) del lado que no es cero.

c. Hacer un mapa de signos.

d. Leer la solución a partir del mapa.

En las inecuaciones logarítmicas hay un paso adicional (análogo a la verificación de las soluciones en una ecuación logarítmica): la solución en el mapa de signos debe intersecarse con el dominio de la inecuación, que es el conjunto de valores de la incógnita para los cuales la inecuación está definida. O bien el mapa de signos puede limitarse desde el principio al dominio de la inecuación.

¿El mapa de signos? Sí, recuerde que en la sección 4.5 usamos mapas de signos para resolver inecuaciones polinomiales. Tal vez quiera ir a repasarla, o tal vez baste con este resumen: se trataba marcar los ceros en la recta real, escoger puntos de prueba y determinar el signo de la expresión en esos puntos de prueba.

Ejemplo 19: inecuación exponencial

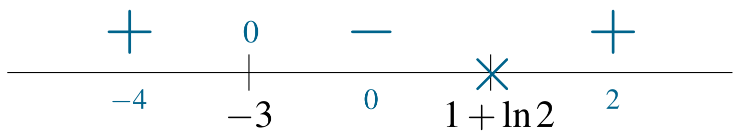
Resolver la inecuación $\dfrac{0.5^t - 8}{2 - e^{t-1}} \leq 0$.

El paso (a) ya está listo, así que pasamos a buscar los ceros del lado izquierdo.

- Ceros del numerador:
  $0.5^t - 8 = 0 \;\Rightarrow\; 0.5^t = 8 \;\Rightarrow\; t = \log_{0.5} 8 = -3$
- Ceros del denominador:
  $2 - e^{t-1} = 0 \;\Rightarrow\; 2 = e^{t-1} \;\Rightarrow\; \ln 2 = t - 1 \;\Rightarrow\; t = 1 + \ln 2 \approx 1.693$

[3] Compare con el método que describimos en la página 111 para inecuaciones polinomiales.

El siguiente paso es hacer el mapa de signos. Como los ceros son -3 y 1.693, podemos tomar como puntos de prueba -4, 0 y 2. El mapa de signos completo luce así:



El conjunto de soluciones es entonces $[-3,\, 1+\ln 2[$.

Ejemplo 20: inecuación logarítmica

Resolver la inecuación $\log_2(2+v)^8 - 15 < \log_2^2(2+v)$.

Note que la expresión a la derecha, $\log_2^2(2+v)$, significa[4] $\left(\log_2(2+v)\right)^2$.

Empecemos por notar el dominio: como $2+v$ está dentro de los logaritmos, debe ser mayor que cero. El dominio entonces es $]-2,\infty[$.

Demos ahora los cuatro pasos mencionados arriba.

a. Desigualar a cero.

$$0 < \log_2^2(2+v) - \log_2(2+v)^8 + 15$$

b. Encontrar los ceros del lado derecho. Si escribimos ese lado como

$$\left(\log_2(2+v)\right)^2 - 8\log_2(2+v) + 15$$

vemos que la sustitución $x = \log_2(2+v)$ nos lleva a $x^2 - 8x + 15$, cuyos ceros son $x = 3$ y $x = 5$.

Devolviendo la sustitución $x = \log_2(2+v)$ tenemos los siguientes valores de v:

- $3 = \log_2(2+v) \;\Rightarrow\; 2+v = 2^3 \;\Rightarrow\; v = 6$
- $5 = \log_2(2+v) \;\Rightarrow\; 2+v = 2^5 \;\Rightarrow\; v = 30$

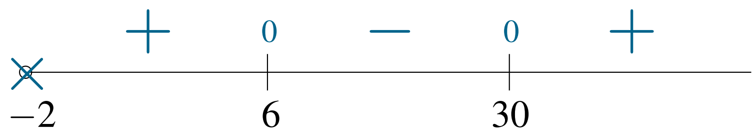
Entonces, los ceros del lado derecho de la inecuación son 6 y 30.

[4] Hay una diferencia importantísima entre las expresiones $\log_b^p x$ y $\log_b x^p$. En la primera, el logaritmo está elevado a la p; en la segunda es solamente x lo que está elevado a la p. Usando paréntesis para hacer inequívoco el significado, podemos escribir $\log_b^p x = (\log_b x)^p$ y $\log_b x^p = \log_b(x^p)$.

c. Mapa de signos.

El siguiente detalle es nuevo: como la inecuación está definida solamente en el dominio $]-2,\infty[$, restringimos el mapa de signos a ese intervalo.

El resto es rutinario. Escogemos un punto de prueba en cada intervalo, encontramos el signo del lado derecho en cada punto de prueba, e indicamos el resultado 0 en cada cero.



La solución es entonces $]-2,6[\,\cup\,]30,\infty[$.

Ejercicios

Resuelva

152. $(2/3)^{5-y} > 1$

153. $\dfrac{e^{w^2-5w}-1}{e^w+1} \geq 0$

154. $2^{q-1}+12q \leq 3q\cdot 2^{q-1}+4$

155. $100^v+5 < 6\cdot 10^v$

156. $9(0.5)^x > 8+(0.5)^{2x}$

157. $3 \geq \log_2(1-4t)$

158. $(z+2)(2-\log(5-19z)) > 0$

159. $(\ln t)^2 \geq 4$

160. $\log_{4/5}(5-p) \geq 2\log_{4/5}4-\log_{4/5}(5+p)$

161. $\log_{0.1}(9x+7)+2+\log_{0.1}(3x-2) \leq 0$

Apéndice A
Sugerencias

Capítulo 1
Los números reales

70. Multiplique por $\sqrt[4]{5}\sqrt{10}$.

71. Multiplique por $\sqrt[5]{2^2}$.

76. Multiplique por $4+2\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{10}^2$.

77. Note que $-2\sqrt[3]{-4}=+2\sqrt[3]{4}$. Multiplique por $\sqrt[3]{18}^2-2\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{4}^2$.

83. Considere la fracción $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{1}$.

Capítulo 2
Expresiones algebraicas

34. **e.** La variable z está ausente, lo que equivale a que esté presente con exponente 0. Por ejemplo, el término x^3y^2 es equivalente a $x^3y^2z^0$.

35. **d.** La variable x está ausente, lo que equivale a que esté presente con exponente 0. Por ejemplo, el término $8a^3$ es equivalente a $8a^3x^0$.

131. Primero use agrupación.

133. Primero agrupe los dos primeros y los dos últimos.

134. Primero factorice los cuatro primeros términos.

135. Use diferencia de cuadrados siempre que pueda, antes que diferencia de cubos. Si no, $a^4+a^2b^2+b^4$ puede factorizarse completando cuadrados (sumando y restando a^2b^2), como en la nota al pie de la página 49.

150. Es mejor usar factor común y luego agrupación.

242. Tome denominador común primero.

Capítulo 3
Ecuaciones

37. Puede tomar $y = x^2$.

38. Puede tomar $x = c^3$.

44. Puede tomar $x = r^2 + 1$.

61. Puede tomar $x = z^2 + 1$.

67. $6\,000\,000 = 5\,000\,000\,(1 + 0.13n)$

68. $5500 = 5000(1 + r \cdot 3)$

69. Como la tasa es mensual, dos años son 24 períodos: $5\,000\,000 = P(1 + 0.0075 \cdot 24)$.

Una alternativa es convertir la tasa mensual a anual ($12 \times 0.75\,\%$) y usar dos períodos: $2\,000\,000 = P(1 + 0.09 \cdot 2)$.

70. No es necesario saber cuánto es el monto de la inversión. Denótelo P, y plantee el objetivo como $A = 2P$.
$2P = P(1 + 0.075n)$

71. Dados el precio de contado y la prima pagada, el valor inicial de la deuda es $P = 2\,400\,000$ colones. Como la tasa es anual, dieciocho meses equivalen a 1.5 períodos.
$2\,850\,000 = 2\,400\,000(1 + r \cdot 1.5)$

72. Dados el precio de contado y la prima pagada, el valor inicial de la deuda es $P = 400\,000$ colones.
$A = 400\,000(1 + 0.012 \cdot 6)$

73. $3q - (75000 + 2.2q) = 50000$

74. $200q - (350000 + 150q) = 82500$

75. $400q - (8000 + 120q) = 15000$

76. $70q - (100\,000 + 20q) = 0$

77. $100p - (120\,000 + 900 \cdot 100) = 300\,000$

78. $5000p-(9000+1.2\cdot 5000)=15000$

79. $p(200-0.1p)=80000$

80. Quedan $(n-3)$ personas, y la cuota de cada una es
$540\,000/(n-3)=540\,000/n+750$.

81. Ayer habría comprado $(n+4)$ acciones y habría pagado $(n+4)(720/n-15)=720$.

82. Vendieron $(n-3)$ hectáreas por un total de $(n-3)(600/n+10)=600$.

83. Si x es el número de niños adicionales a los primeros 20, entonces son $(20+x)$ niños, y cada uno paga ₡$(3000-100x)$.

84. Si n es el número de incrementos de ₡40 000, entonces se alquilarán $(18-n)$ apartamentos a ₡$(600\,000+40\,000n)$ cada uno.

85. $4800(x)+11200(25-x)=6464(25)$

86. $600(x)+900(60000-x)=46\,963\,200$

87. Si x es el número de gramos de 20 %, entonces son $(40-x)$ gramos de 12 %, y el total de plata será 15 % de 40:
$0.20(x)+0.12(40-x)=0.15(40)$.

88. Sea x el número de litros por vaciar y remplazar. Después de vaciar quedan $(2.5-x)$ litros con 20 % anticongelante, y a eso su agregan x litros de anticongelante puro. El total de anticongelante será 50 % de 2.5 litros:
$0.20(2.5-x)+1.00(x)=0.50(2.5)$.

89. Si x es el número de mililitros de 2.5 %, entonces son $(235-x)$ mililitros de 4 %, y el total de alcohol será 3 % de 235:
$0.025(x)+0.04(235-x)=0.03(235)$.

90. Sea t el número de horas que tardan en encontrarse. Daniela recorre $50t$ km y Francisco $55t$ km; 30 km en total:
$50t+55t=30$.

91. Sea v la velocidad propia del avión en km/h. La velocidad con viento en contra es $(v-20)$, y con viento a favor $(v+20)$:
$400/(v-20)=450/(v+20)$.

92. Sea d la distancia en km. El tiempo de ida es $d/55$ y el de regreso $d/50$:
$d/55+d/50=3$

93. Sea d la distancia entre ellas, en km. En 90 minutos (1.5 horas), la primera recorre 29×1.5 km, y la segunda 38×1.5 km. Pitágoras:
$d^2=(29\times 1.5)^2+(38\times 1.5)^2$.

94. Cae al suelo cuando su altura es 0.

95. $1/6+1/10+1/12=1/t$

96. $1/50+1/t=1/30$

97. $1/10-1/t=1/12$

98. Una opción: la manguera del ejercicio anterior, con el derrame, llena 1/12 de tanque en una hora, y a eso se añade 1/15 que llena la otra manguera.

Otra opción: las dos mangueras juntas llenan 1/10+1/15 de tanque en una hora, y de eso se resta $1/t$ de tanque que se derrama, donde t es la respuesta del ejercicio anterior.

99. $45/120+60/n=1$

100. Denótelos x y $x+2$.

101. Denótelos x y $x+2$.

102. $e+5=3(e-7)$

104. Si x es el monto sin IV, entonces $x+0.13x=46556$, y el IV es $0.13x$.

105. Si hay x de ₡100, entonces hay $(12-x)$ de ₡500.

106. Si hay x de platea, entonces hay $3x$ de gradería.

107. Si la base es b entonces la altura es $h=360/b$, y el perímetro $2b+2h=76$.

108. La base es $b=h+3$, y el área es $A=bh/2$.

109. $(35+a)(25+a)=2(35)(25)$

147. Recuerde que $\sqrt{a^2}=|a|$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$.

Capítulo 4
Inecuaciones

73. Primero reste a.

100. Resuelva las dos inecuaciones por aparte y luego interseque las soluciones de ambas.

101. Resuelva las dos inecuaciones por aparte y luego interseque las soluciones de ambas.

121. Resuelva $2\leq|u+4|$ y $|u+4|<6$ por separado. Para que u satisfaga ambas inecuaciones, debe estar en la intersección de las dos soluciones.

122. Resuelva $5 < |1-3p|$ y $|1-3p| \leq 11$ por separado. Para que p satisfaga ambas inecuaciones, debe estar en la intersección de las dos soluciones.

127. $(82+90+x)/3 \geq 85$

128. $180q-(5\,000\,000+80q) \geq 4\,000\,000$

129. $400q \geq 12000+125q$

130. $44\,000x+30\,000 \cdot 8 < 40\,000(x+8)$

131. $4800(x)+11\,200(25-x) \leq 8000(25)$

132. $5 \leq 40-x \leq 15$

133. Si x es el número de aumentos, el número de habitaciones alquiladas será $100-2x$. La inecuación es $100-2x > 85$

134. $25\,000+10\,000t \leq 60\,000$

135. $8\,000\,000+320x < 10\,000\,000$

136. $5000 \leq 16000-2500t \leq 6000$

137. $300000000+7500q < 10000q$

138. $0.08v > 800\,000+0.03v$

139. $0.02(40\,000\,000)+0.10(v-40\,000\,000) > 1\,000\,000$

140. $p(200-0.1p) > 96000$

141. $n(n+1)/2 \geq 1000$

142. $(n-1)n/2 < 20$

143. El tiempo de viaje debe ser menor que 1.5 horas. Los primeros 50 km tardan 50/60, y el resto tarda $50/v$ donde v es la incógnita. La inecuación es $50/60+50/v < 1.5$

144. Al cortar los cuadrados de tamaño x (en cm), los lados medirán $(40-x)$ cm. Al levantar las pestañas, la altura de la caja será x cm. El volumen será $V = (40-x)(40-x)x$ y deberá cumplir $V \geq 9000$.

145. $(2a)(a) > 300$

146. $15t-4.9t^2 > 8$

147. El perímetro es $P = 2x+2y$ donde $x = 25$, el primer lado, y y es la incógnita, el segundo lado. La inecuación es $|[2(25)+2y]-75| \leq 5$.

148. La comisión es $C = 0.05V$, así que las ventas son $V = C/0.05$, y la inecuación es $|C/0.05-2350000| \leq 10000$.

Capítulo 5
Matrices y sistemas de ecuaciones

53. $x+y=43$, $50x+100y=2850$.

54. $a+n=7$, $3000a+1800n=16\,200$.

55. $x+y=60000$, $0.09x+0.105y=5745$.

56. $30a+20b=600$, $10a+20b=400$.

57. $4000a+5500b=21\,000\,000$, $a=1.25b$

58. $n+p=25$, $4800n+11\,200p=(6464)(25)$.

59. $x+y+100=500$, $4.8x+3.6y+3(100)=1884$.

60. $2s+5m=345$, $20s+48m=3344$.

61. $2b+3h=46$, $b+2h=27$.

62. $a+b=100$, $0.5a+b=80$.

63. $x=0.19x+0.13y+6850$, $y=0.04x+0.38y+9230$.

64. $a=0.27a+0.08b+330$, $b=0.15a+0.09b+265$.

65. $0.10a+0.20b=20$, $0.06a+0.02b=6$.

66. $8x+4y=24$, $6x+3y=18$, $180x+120y=600$.

67. $x+y+z=42$, $x-y=6$, $z=(x+y)/2$.

68. $a+b=12000$, $24000+4a+6b+9c=95000$, $2a+4b+7c=45000$.

69. $a+b+c=300$, $0.30a+0.20b+0.15c=0.25(300)$, $c=b+50$.

70. $3p+2q+2r=15$, $2p+5q+4r=24$, $p+2q+2r=11$, donde cada unidad de p da seis porciones, etc.

71. $p=0.15p+0.45t+0.25a+1200$, $t=0.10p+0.05t+0.15a+850$, $a=0.05a+480$.

72. $a=0.40a+0.20c+0.18t+24000$, $c=0.25a+0.15c+0.12t+33500$, $t=0.30a+0.20c+0.25t+57200$.

73. Sean a, b y c las tasas de los bancos A, B y C, y sea P el monto que el segundo inversionista invirtió en B. Entonces, $500a+500b=35$, $bP+2cP=0.031(3P)$, $1000a+500b+500c=62.50$, $(a+b+c)/3=0.032$.

74. Sean x, y, z las poblaciones en Lirio, Margarita y Narciso. La población en Lirio el año entrante será la actual menos un 10 % (que vuela a Margarita), más un 5 % de la población de Narciso (que viene a Lirio): $x - 0.10x + 0.05z$, y es igual a x porque la población es estable. Hay otra ecuación similar para Narciso y otra para Margarita. No olvide la población total de 35 000 aves.

75. $2x + y + z = 10$, $3x + 3y = 9$, $5x + 4y + z = 19$, $150x + 120y + 60z = 690$.

76. $x = 2(y + z)$, donde x es la medida en grados del mayor. Recuerde también que la suma de los tres ángulos en cualquier triángulo es 180°. El sistema tiene infinitas soluciones, pero x es el mismo en todas.

77. $x + y + z = 117$, $(x + y + z)/3 = 39$, $x = 8(y + z)$, con $x, y, z > 5$. Hay infinitas soluciones, pero solamente dos con enteros mayores que 5.

78. Sea a la fracción de piscina que llena A en una hora, y similarmente b, y c. Entonces, $a = 1/8$, $a + c = 1/6$ y $b + c = 1/10$. El tiempo total será $1/(a + b + c)$.

115. **b.** Tanto $M \cdot P$ como $P \cdot M$ están definidos, pero solo uno es significativo. En $M \cdot P$ la posición 1,1 sería la suma de 30 metros de tela, 400 broches y 120 cremalleras, que no tiene sentido. En $P \cdot M$, en cambio, la posición 1,1 es la suma de 30 y 20, ambos en metros de tela y ambos para el primer cliente.

120. $A^3 = A \cdot A \cdot A$

123. Escriba $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, calcule B^2 y despeje las incógnitas a, b, c y d.

159. **c.** Las soluciones vienen de $A^{-1} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 200 \\ 85 \end{smallmatrix}\right)$ para la primera semana, etc.

160. La matriz aumentada es $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 & 200 & 220 & 240 & 250 \\ 3 & 1 & 85 & 90 & 100 & 105 \end{smallmatrix}\right)$.

172. Haga $F_4 + 3F_2$.

173. Haga $F_2 + F_4$ y $F_1 - F_2$.

174. Haga $C_1 + 2C_3$ y $C_2 \leftrightarrow C_4$.

185. Sean x, y y z las fracciones de tanque que llenan en un día las bombas pequeña, mediana y grande, respectivamente, trabajando una a la vez. Entonces, $x + y + z = 1/2$, $x + z = 1/3$ y $x + y = 1/4$. Averigüe solamente x.

Capítulo 6
Funciones

134. Denote con x el número de niños y con y el número de adultos. No olvide que ninguno puede ser negativo.

135. Denote con x el número de sillas y con y el número de mesas. No olvide que ninguno puede ser negativo.

136. Denote con x el monto invertido en la cuenta A y con y el monto en B. La cuenta A pagará $0.08x$ y la cuenta B $0.06y$. El monto en A debe ser menor o igual al monto en B. Y no olvide que ninguno puede ser negativo.

160. Pruebe igualar y_2 a cada uno de los trozos de y_1; para cada solución tentativa, confirme si se encuentra en el trozo apropiado.

166. **b.** Deben producir en promedio $20000/30$ al día, durante 30 días. El costo será $C(20000/30) \times 30$.

174. **a.** La recta pasa por $(19000, 500)$ y $(24000, 300)$.

175. **a.** La recta pasa por $(0, 2500)$ y $(4, 1250)$.

176. **a.** La recta pasa por $(0, 70)$ y $(10, 82)$, en miles de cajas.

177. Sean x el número de asistentes, y y el precio. La recta pasa por los puntos $(300, 600)$ y $(240, 700)$.

178. Un 8 % del valor original es \$1280; esa es la disminución en V por cada unidad de aumento en t.

179. **a.** La recta pasa por $(40, 3700)$ y $(50, 2900)$.
b. El ingreso es $I = pq$.

180. **a.** La recta pasa por $(0, 480)$ y $(20, 30)$, en miles de colones.
c. n empieza en cero, y termina cuando $V = 0$.

181. La recta pasa por $(8, 34000)$ y $(11.5, 44500)$. El monto base es lo que cobraría por un viaje de 0 km, y el monto por kilómetro es el incremento en el cobro total debido a cada kilómetro adicional.

182. **a.** La recta pasa por $(2003, 9473)$ y $(2006, 10341)$.
b. La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

183. La recta pasa por $(32, 0)$ y $(212, 100)$.

184. **a.** La recta pasa por $(6, 112.8)$ y $(10, 136.7)$.
d. La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

185. **a.** La recta pasa por $(0.9, 27)$ y $(1.6, 13)$.
c. Resuelva $y < 18$.

186. **a.** La recta pasa por $(4.8, 1.236)$ y $(6.4, 1.348)$.
b. El sueldo fijo es lo que recibiría si no vende nada; su comisión es el incremento en el pago debido a cada unidad de incremento en ventas.

187. **a.** La recta pasa por $(2002, 357.99)$ y $(2005, 476.49)$.
b. La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

194. El ingreso es $I = pq = 1260p - 0.04p^2$.

195. El ingreso es $I = pq = 1100q - \frac{5}{3}q^2$.

196. El ingreso es $I = pq = 6900p - 80p^2$.

197. Despeje p en la función de demanda. El ingreso es $I = 18q - 0.03q^2$.

198. Si n es el número de descuentos de \$10, entonces venderán $1000 + 20n$ unidades a $\$(600 - 10n)$ cada una.

199. Si n es el número de disminuciones en la tarifa, entonces habrá $5000 + 85n$ usuarios pagando ₡$(24000 - 300n)$ cada uno.

200. Si n es el número de disminuciones de ₡10, entonces venderán $10000 + 100n$ ejemplares a ₡$(1500 - 10n)$ cada uno.

201. Si n es el número de incrementos de ₡50 000, entonces se alquilarán $21 - n$ apartamentos a ₡$(750000 + 50000n)$ cada uno.

202. Si n es el número de dólares adicionales en la tarifa, entonces se alquilarán $100 - 2n$ habitaciones a $\$(36 + n)$ cada una.

203. Si espera n semanas, obtendrá $(180 + 30n)$ kg con valor de $450 - 30n$ colones por kilo.

204. Si n es el número de árboles adicionales por hectárea, habrá $120 + n$ árboles por hectárea produciendo $600 - 3n$ naranjas cada uno.

205. **b.** n, p y q no pueden ser negativos.

206. **b.** El objeto caerá la segunda vez que $h = 0$.

207. El área es $A = 2r(400 - \pi r)$, donde $r =$ radio de los semicírculos.

208. Si b y h son la base y la altura, entonces $2b + 2h = 60$ y el área es $A = bh$. Despeje b (o h) en la primera ecuación y sustitúyalo en la segunda para escribir A como una función cuadrática de h (o b).

209. Maximizar $A = x(120 - 2x)$, donde $x =$ long del lado perpendicular.

Capítulo 7
Funciones exponenciales y logarítmicas

25. $8 \cdot 5^y - 3 \cdot 5^y = 5 \cdot 5^y = 5^{y+1}$

26. $3 \cdot 4^x + 4^x = 4 \cdot 4^x = 4^{x+1}$

89. Tome $x = 4^r$.

90. Tome $x = 2^s$.

98. Hay dos soluciones potenciales, pero la base debe ser mayor que cero.

99. Hay dos soluciones potenciales, pero la base debe ser mayor que cero.

113. Tome $x = \ln z$ y note que $\ln\sqrt{z} = x/2$.

114. Tome $u = \log_3 x$ y note que $\log_3(9/x) = 2 - u$.

122. **a.** $V(0) = 20$ y $V(5) = 36$.

123. **a.** $V(1) = 43.8$ y $V(6) = 37.25$.

124. **a.** $TC(2) = 74.75$ y $TC(9) = 178.40$, en colones por dólar.

125. **a.** $P(31) = 511009$ y $P(86) = 2559845$.

126. **a.** $P(0) = 5$ y $P(30) = 10$ (el doble), en millones de habitantes.

127. **a.** $f(600) = 1$ y $f(500) = 1020$, en segundos.

129. La solución es 8.621, en años desde el inicio del 2000.

130. Las soluciones son 53.916, 77.576 y 91.142, en años desde el inicio del 1900.

131. La solución es 12.508, en años desde el inicio de 1976.

134. La solución es 7.14 años, pero la máquina se compró hace cinco años.

136. ₡100 a los 4.343 años y ₡250 a los 11.717 años, ambos desde el 15 de junio de 1986.

138. Si $A(t)$ es el valor de la inversión a los t años, entonces $A(1) = 5665$ y $A(3) = 6010$. Use esos dos puntos para encontrar una fórmula $A(t) = ab^t$.

140. **a.** Resuelva $I(16) = 0.80 I_0$ (a los 16 cm). **a.** Resuelva $I(x) = 0.50 I_0$.

141. Resuelva $1.1261624 \times 10^{18} \times 0.93306951^T = 60$.

151. $r^{-1}(u)$ está definida solo si $1-2^{8-u} \geq 0$ (por la raíz cuadrada).

154. Factorice por agrupación.

155. $100^v = (10^v)^2$

160. Escriba toda la inecuación en la forma $\log_{4/5}(\ldots) \geq 0$.

161. Puede escribir $2 = \log_{0.1}(\ldots)$ de modo que la inecuación se convierta en la forma $\log_{0.1}(\ldots) \leq 0$.

APÉNDICE B
Soluciones

Capítulo 1
Los números reales

1. b, c

2. a, b, c

3. c

4. (ninguna)

5. a, b, c

6. b, c

7. b

8. b

9. c

10. d

11. 5

12. 1

13. $-5/2$

14. $-7/3$

15. 13

16. -7

17. $49/15$

18. $40/7$

19. $27/20$

20. $14/3$

21. $13/24$

22. $-116/105$

23. $-3/10$

24. $7/16$

25. 8

26. 1

27. 1

28. 4

29. 0

30. No existe

31. $8/15$

32. $7/12$

33. $25/66$

34. $-1/3$

35. $33/25$

36. $5/14$

37. 3

38. $1/(19 \cdot 70^{10})$

39. -25

40. $-17/100$

41. $121/16$

42. -124

43. $47/80$

44. $414/175$

45. $-1/96$

46. $10\sqrt{2}$

47. $6\sqrt{15}$

48. $3\sqrt[3]{147}$

49. $6\sqrt[5]{6/25} = 2^{6/5} \cdot 3^{6/5} \cdot 5^{-2/5}$

50. $3\sqrt{6/5} = 2^{1/2} \cdot 3^{3/2} \cdot 5^{-1/2}$

51. 1

52. $48 \cdot 6^{1/2}$

53. $4 \cdot 6^{2/3}$

54. $-125 \cdot 5^{1/3}$

55. $1440 \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{1/4}$

56. $-360 \cdot 45^{1/5}$

57. $3^4 \cdot 5^{8/3} \cdot 2^{-4} \cdot 7^{-4/3}$

58. $13\sqrt{2}$

59. $8\sqrt{5}$

60. $36\sqrt[12]{6} = 6^{25/12}$

61. 5 y -5

62. -5 y -5

63. $2^{1/2} \cdot 3^{-5/4} \cdot 5^{-3/4}$

64. $10/\sqrt[5]{27} = 10 \cdot 3^{-3/5}$

65. $-72/25$

66. $2\sqrt{3}$

67. $-15\sqrt{2}$

68. $2\sqrt{6}/7$

69. $4\sqrt[3]{3}$

70. $-8\sqrt{14}\sqrt[4]{5}$

71. -2

72. $12 + 3\sqrt{3}$

73. $13 - 6\sqrt{5}$

74. $6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

75. $\frac{10}{3}\sqrt{15} + 5\sqrt{3}$

76. $8 + 4\sqrt[3]{10} + 2\sqrt[3]{100}$

77. $6\sqrt[3]{12} - 8\sqrt[3]{9} + 16\sqrt[3]{2}$

78. $1/(2\sqrt{5})$

79. $-13/(6\sqrt{6} + 24\sqrt{2})$

80. $1/(8\sqrt{5} - 12\sqrt{2})$

81. $-1/5$

82. $3/(5\sqrt{5} + 5\sqrt{2})$

83. $5/(1 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})$

84. $10/3^{1/2}$

85. $-3(1 + 3^{1/2})/2^{3/2}$

86. $-5(2 + 3 \cdot 2^{1/2})/14$

87. $-5(1 + 2^{1/2}) \cdot 2^{1/6}/3^{1/2}$

88. $15 - 15 \cdot 3^{1/3} - 5 \cdot 3^{2/3}$

Capítulo 2
Expresiones algebraicas

1. $3/8$

2. 0

3. $60\sqrt{5}$

4. $2/11$

5. $9/128$

6. $-1/8$

7. -5

8. -7

9. 2

10. $1/8$

11. $2y - x$

12. $(25t + 1)/2$

13. $2p^2 - 2q^2$

14. $a^2 - b^2 - 5a - b$

15. $b^{x+2}x - b^{x+3}x$

16. $-4a^x - 3a^{2x-1}$

17. $-x^{4-a} + x^{2a+1} - x^{a+3} + x^a$

18. $12x^5 - 28\sqrt{3}x^4 + 49x^3$

19. $9c^2d - \frac{16}{9}x^{-4/5}$

20. Sí

21. No, porque el exponente de x es negativo

22. Sí

23. Sí

24. No, porque hay una suma de términos no semejantes

25. No, porque hay una suma de términos no semejantes

26. No, porque el exponente de x es negativo ($bc/x = bcx^{-1}$)

27. No, porque el exponente de t no es entero ($\sqrt{t} = t^{1/2}$))

28. $-6abxy$

29. $3c^2st^5$

30. $10x^7y^4z$

31. $\frac{9}{2}a^4b^4x^2y^{11}$

32. $10pq^5r^4t$

33. $\frac{2}{5}u^{14}v^6w^{12}$

34. **a.** binomio. **b.** 1. **c.** 3. **d.** 4. **e.** 0.

35. **a.** ninguno. **b.** 3. **c.** 3. **d.** 0.

36. $6pq^2 + 6pr + 2q^3$

37. $8q^3 - 46pq^2 + 12pr$

38. $-47pq^2 + 13pr + 11q^3$

39. $3q^3 - 25pq^2$

40. $38pq^2 - 11pr - pq$

41. $30p^2q^2r + 6pq^5 - 20p^2r^2 - 4pq^3r$

42. $12pq^5 - 42p^2q^4 - 8pq^3r + 28p^2q^2r$

43. $10p^2q^3r - 35p^3q^2r + 2pq^6 - 7p^2q^5$

44. $3x + 7x^2 - 20x^3$

45. $2a^2 + ab - ac - 3b^2 + bc$

46. $64p^3-27q^3$

47. $3rs^2-75rt^2$

48. $4v^2+4vw+w^2$

49. $9a^2b^4+30a^2b^2c+25a^2c^2$

50. $\frac{9}{4}p^4-6p^2q^3+4q^6$

51. $64i^3-96i^2j-144ij^2+216j^3$

52. $8m^3+60m^2n+150mn^2+125n^3$

53. $\frac{64}{27}x^6+\frac{16}{3}x^5y+4x^4y^2+x^3y^3$

54. $250p-25\sqrt[3]{4}\,p^{5/3}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}\,p^{7/3}-\frac{1}{27}p^3$

55. $64x^6y^{-3}-24x^{10/3}y^{-1}+3x^{2/3}y-\frac{1}{8}x^{-2}y^3$

56. $x+7y$

57. x^3-x+x^2y-y

58. $6+13x^2b^2+6x^4b^4$

59. $4-4x+y$

60. $-2a^3-15ab$

61. $6y^3-6x^2y$

62. $-3x^2+15x-18$

63. $a^2-16b^2+8bc-c^2$

64. $\frac{8}{5}ab-\frac{1}{14}bc-\frac{7}{15}ac$

65. $-30x^5y^6w^2$

66. $-\frac{7}{2}m^2+\frac{9}{2}m-\frac{3}{2}$

67. $8a^3x^2-b^3x^2$

68. $2a+10b-c$

69. $6yz+8y^2$

70. x^6-a^6

71. $3x^2-16x+21$

72. $8a^3$

73. $9xy-17x^2y-15xy^2$

74. no

75. sí

76. no

77. no

78. no

79. sí

80. no

81. sí

82. no

83. sí

84. sí

85. no

86. no

87. sí

88. no

89. no

90. sí

91. sí

92. no

93. sí

94. no

95. sí

96. $3y^2+y/2-15/2$

97. $4z^2-z-8/3$

98. $\frac{13}{4}c^3 - \frac{3}{2}c + 2$

99. $3q - 2 + \dfrac{3q/2}{q^2 - 1/2}$

100. $t^3 - 3t + \dfrac{8t}{t^2 + 3}$

101. $2p^2 + 4p - 21/2$

102. $9b^2 + 12b + 16$

103. $4c^2 - 9c + 12 - \dfrac{14}{c+1}$

104. $-w^3 - w^2 + \dfrac{1}{1-w}$

105. $a^3 + 3a^2 + 10a + 27 + \dfrac{-29 + 68a}{a^2 - 3a + 1}$

106. $v^2 + v$

107. $2c^2 - 6$

108. $-u - 4 + \dfrac{1}{1-u}$

109. $r^2 + 2r + 1$

110. $2x^3 - 5x^2 + 12x - 27 + \dfrac{49}{x+2}$

111. $4t^2 - 2t + 6$

112. $16q^3 + 38q^2 + 92q + 234 + \dfrac{580}{q - 5/2}$

113. $3z^2 + 7z + 17/2 + \dfrac{57/2}{2z-3}$

114. $2v^2 + 9v + 1 - \dfrac{36}{2v+1}$

115. $-x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32 + \dfrac{67}{2-x}$

116. $-8b^3 - 55b^2 - 384b - 2691 - \dfrac{18841}{b-7}$

117. $w^2 - 5w + 25$

118. $5ay(3xy - 6ab + 4a^2bx^2)$

119. $7p^2q(3 + 2pq^4 + 2p^2q)$

120. $3(2a+b)(x - 5y + 2z)$

121. $34a(x-4y)(ab + 5a^2 + b^2)$

122. $(6a - 5b)(2x + w)$

123. $(9a^2b - 4cx)(3xy + p)$

124. $3r(a^2 - 16a + 25)(2rs - t)$

125. $(3x^2 - 4xy + 8y^2)(2ab - 3a + 5b)$

126. $25a^2(3b-1)^2$

127. $6(2a + r^2s)^3$

128. $3(2t^3 + 7)^2$

129. $-(3r^2 - 5)^2(3r^2 + 5)^2$

130. $3a^2(2ax - 3b)^3$

131. $(2a - b^3)(2a + b^3)(x + 2y)$

132. $2y^2(3x^2y - 5z)(9x^4y^2 + 15x^2yz + 25z^2)$

133. $(3a + bv)(v^2 - 2w)(v^4 + 2v^2w + 4w^2)$

134. $(x + y^2 - c)(x^2 + 2xy^2 + y^4 + cx + cy^2 + c^2)$

135. $(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

136. $(t+8)(t-5)$

137. $(b+6)(b-8)$

138. $2y(y+6)(y-2)$

139. $2(u+5)(u-3/2)=(u+5)(2u-3)$

140. $-7(x-1)(x+2/7)=(1-x)(7x+2)$

141. $3(c+1/2)(c-3/2)=\frac{3}{4}(2c+1)(2c-3)$

142. $-7(v+18)(v+2/3)$

143. $2(w+0.4)(w-15)$

144. $4(x-1.2)(x-4.8)$

145. $5(m+\frac{3-2\sqrt{6}}{5})(m+\frac{3+2\sqrt{6}}{5})$

146. $k^2(k+1)^2(k-2)$

147. $(2v+1)^2(2v+3)$

148. $(y+1)^2(y-2)^2$

149. $9(r-2)^3(r-3)^2$

150. $z(3z-5)(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$

151. $y(5+y)$

152. $(m+b)^2$

153. $(a-b)(a+1)$

154. $(u+6)(u-6)$

155. $(3x-y)^2$

156. $(1+z)(1-z+z^2)$

157. $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

158. $a(a-b)(a-5b)$

159. $(x-3)(2y+z)$

160. $-6(r+7/9)(r-61/9)$

161. $(1-2r)^2$

162. $(x-y^2)(4x-y^2)$

163. $(q+5)(q-6)$

164. $(5w+7)(3w-2)$

165. $-6(w+3)^2(w-2)$

166. $(2m-3y^2)(4m^2+6my^2+9y^4)$

167. $-4(y+19/3)(y+2/3)$

168. $(2v-1)^3$

169. $(1-b\sqrt{3})(1+b\sqrt{3})$

170. $(5x^2+1)(25x^4-5x^2+1)$

171. $(a+b+m)(a+b-m)$

172. $5(z+5)(z+1.2)^2$

173. $(c-1)(c^4+1)$

174. $5(r+11.5)(r-3.5)$

175. $(6t+5)(t-4)$

176. $(5x^2-9y)(5x^2+9y)$

177. $(4a-3b)^2$

178. $(x+y+a-b)(x+y-a+b)$

179. $-2(p-5)(p+4)(p-3)(p+1)$

180. $7m^2(mn-1)^3$

181. $-15pr^2(p-3.2)(p+1.5)$

182. $(a-1)^3(a+1)$

183. $(a+6b)^2$

184. $-4(x-0.5)^3$

185. $(7+2p)(49-14p+4p^2)$

186. $-(t+5)(t-4)$

187. $6(u+70)(u-5/7)$

188. $(n+7)(n-6)$

189. $(v-4)(v^2+4v+16)$

190. $r^3(1+8r)(1-8r)$

191. $(z+4)(z-2)(z^2+2z+10)$

192. $(m+n-3)^2$

193. $9u(u-\frac{5-\sqrt{5}}{2})(u-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$

194. $7(u-2)(u+2)(u^2+2)$

195. $-t(2t-1)^2(t^2+1)$

196. $6x^2y^3(x+2)(3x-5)$

197. $5q^2(3q^2-3q+4)$

198. $(a-x)(a+x+1)$

199. $(3m-2a)^2$

200. $9(x-1.4)(x-5)$

201. $(x+2y)^3$

202. $(4c+3)(2c-7)$

203. $(1+9ab)^2$

204. $(3+4x)(5-2x)$

205. $(3y+c)(w-5)(w+3/2)$

206. $b^4(b^2+1)(b-1)^2(b+1)^2$

207. $(1-2x^2)(a^2-b^3)$

208. $(1+m)(2a-3b-c)$

209. $(w-1/3)^2$

210. $5.4(t+5/3)^3$

211. $(3a-x)(x+4+3a)$

212. $(3x+y+1)(3x-y)$

213. $-3(w-7/8)(w-41/8)$

214. $(a+2b+m+3n)(a+2b-m-3n)$

215. $(7x-5)(7x-6)$

216. $(5y-3)^3$

217. $(1+3a^3)^2$

218. $(1+3x-4y)(1-3x+4y)$

219. $(1-p)^3(1+p)$

220. $(q-2)(q^4+2q^3+4q^2+8q+16)$

221. $(2-x+b)(2+x-b)$

222. $(x-y)(x^2+xy+y^2+1)$

223. $-(y+15)(y-1.4)$

224. $2x(a-b)^2$

225. $-4(w-1.4)(w-1.6)$

226. $(m+4)(m+3)(m-4)$

227. $2(b+3/2)^2(b-1)^2$

228. $(x+1)(x-1)(x+y)$

229. $(u-3)(u+1)(u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})$

230. $(x-y)(3x-3y+1)(3x-3y-1)$

231. $(2p+5)(p-3)(p^2+3p+9)$

232. $(z-2)^2(z+1)(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$

233. $(t-3)(x-1)(a+2)$

234. $(c-1)(c+1)(c^2+c+1)(c^2-c+1)$

235. $2(v-1)(v+3)(v^2+v+1)$

236. $(b-4)(2b^4+3)$

237. $5(t-2)(t-3)(t+2)$

238. $-(y-1/5)(y-50)$

239. $(r+1)(r-2)(r+3)^2$

240. $(4w+5)(w-4)(2w-3)(w+2)$

241. $(x+5)(x-3)(x-\sqrt[3]{3})(x^2+x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$

242. $\frac{1}{3}(a+2)(2a-1)(3a-5)$

243. $(t+1)(t-2)(t-3)(t+3)(t-4)^2$

244. $3(i-2)^2(i-4)(3i-2)(2i+3)$

245. $(t-2)^2(t-3)(t+4)(t-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(t-\frac{5-\sqrt{13}}{2})$

246. $-9(z+1.4)(z-5)$

247. $2/3$

248. $-27z^2$

249. $(v+2)/(2v+3)$

250. $(x^2+2x-1)/(2x+3)$

251. $(x-1)/(b+1)$

252. z

253. $5p/2$

254. $12(q+3)/(2q-1)$

255. $(pq^2+p^2q)/(p^2+q^2)$

256. $v(v-2)\,/\,[3(v-3)(v-4)]$

257. $2(t+x)/(t-x)$

258. $2(u+1)/(u^2-2)$

259. $(a^2+b^2)/[a^2b^2(a+b)]$

260. $(p^3+1)^2/p^6$ o bien $(p+1)^2(p^2-p+1)^2/p^6$

261. $r^2/(rw-1)^2$

262. $(3t-2)/(2t+3)$

263. $(2y-3)\,/\,[(y^2-1)(y-2)]$

264. $r(c^2+y^2)\,/\,[cy(w-r)]$

265. $(t^2-8t-5)/[(t+2)(t-1)]$

266. $2x^3/(x^2-1)$

267. $-3/[(u-1)(u+2)(u+3)]$

268. $(2b^2-b+1)\,/\,[(3b-2)(b+6)(2b-1)]$

269. $(x^2+13x+10)\,/\,[(x-1)(x+3)(2x+1)]$

270. 19.95 unidades

271. \$87 692 308

272. 2 485 938 habitantes

273. 14 136

274. 78

275. 7.9 m

276. \$13 685.69

277. $-(2t+1)\sqrt{2t-1}$

278. $(u^2-1)\sqrt{3u+1}$

279. $(u^{5/2}\sqrt{u+1}+(u+1)\sqrt{u})/(u^2+u)$

280. $8a-4\sqrt{6a}$

281. $(3c-5b)\sqrt[3]{18b^2c}\,/\,(2c)$

282. $\frac{1}{5}(2-r-r^2)(\sqrt{5r+4p}-2\sqrt{p})$

283. $(x^2+5)(3v+2\sqrt{x-1})$

284. $9\cdot 2^{5/4}y^{5/2}(2w-z)(3\sqrt{ty}+\sqrt{wz})\,/\,(9ty-wz)$

285. $(10-2q)\left[4-2(3q-5)^{1/3}+(3q-5)^{2/3}\right]$

286. $(3z-1)(z+2-\sqrt{z+5})$

Capítulo 3
Ecuaciones

1. $0=0$

2. $4-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$

3. $-1=-1$

4. $-1=-1$

5. $0.4641=0.4641$

6. $4=4$

7. $a=-3$

8. $a=0.5$

9. $y=-5/2$

10. $v=-37/18$

11. $z=-4$

12. $r=5/38$

13. $c=39/2$

14. $t=-26/9$

15. $b=-3$

16. $z=-6$

17. $t=27/20$

18. $q=-1/2$

19. $w\in\{-2,-1\}$

20. $x=1/2$

21. $y\in\{0,1\}$

22. $w=5/4$

23. $z\in\{-1/2,-5/3\}$

24. $b\in\{17/12,5/2\}$

25. $u\in\{5,2/3\}$

26. $b\in\{4,-1/3\}$

27. $z\in\{5/4,3/2\}$

28. $t\in\{-6,-4\}$

29. $t=2\pm2\sqrt{2}$

30. No hay solución real

31. $r=(-1\pm\sqrt{13})/2$

32. $p=(-4\pm\sqrt{7})/3$

33. No hay solución real

34. $w=1\pm2\sqrt{5}/5$

35. $p=1\pm3\sqrt{10}/10$

36. $u=-1\pm\sqrt{11}$

37. $x\in\left\{\pm1,\pm\sqrt{5}\right\}$

38. $c\in\{-2,1/3\}$

39. $q\in\left\{0,\pm\sqrt{2}/4\right\}$

40. $a\in\{2,-2,1/3\}$

41. $v\in\{0,-1,4\}$

42. $u\in\{0,(-1\pm\sqrt{3})/2\}$

43. $c\in\left\{-1/10,\pm\sqrt{5}\right\}$

44. $r\in\{0,\pm1\}$

45. $t\in\left\{0,1/3,1\pm\sqrt{2}/2\right\}$

46. $c\in\{0,-3,\pm1/2\}$

47. $u\in\{1,-5\}$

48. $y \in \{0, 1/2\}$

49. $w \in \{-3, -3/4\}$

50. $a = 2$

51. $t = -5$

52. $u = -3/4$

53. $r = 1$

54. $y = 3$

55. No hay solución real

56. $r \in \{1, -4\}$

57. $v = 3 \pm 2\sqrt{3}$

58. $t \in \{1, 2/3\}$

59. $c \in \{6, -2\}$

60. $z \in \{4, -1/2\}$

61. $z = \pm\sqrt{3}$

62. No hay solución real

63. No hay solución real

64. $p = -31/3$

65. $t = -8/11$

66. $w = -1/9$

67. Hace 1.5385 años (1 año, 6 meses, 14 días)

68. $3.\bar{3}\,\%$

69. ₡4 237 288.14

70. $13.\bar{3}$ años (13 años, 4 meses)

71. 12.5 %

72. ₡428 800

73. 156 250 unidades

74. 8650 unidades

75. Aproximadamente 82 pasajeros

76. 2000 naranjas

77. ₡5100

78. $6

79. ₡552.79 o ₡1447.21

80. 48 personas

81. 12 acciones

82. 15 ha

83. 25 niños

84. ₡1 000 000

85. 18.5 kg de nueces y 6.5 kg de pasas

86. 23 456 litros de regular y 36 544 litros de súper

87. 15 g de la primera y 25 g de la segunda

88. 0.9375 litros

89. $156.\bar{6}$ ml de la primera y $78.\bar{3}$ ml de la segunda

90. $2/7$ de hora: unos 17 minutos, 8.6 segundos

91. 340 km/h

92. 78.571 km

93. 71.703 km

94. 0.9811 s subiendo y 2.0801 s bajando; 3.0612 s

95. $20/7$ de hora: unas 2 horas, 51 minutos, 26 segundos

96. 75 minutos

97. 60 horas

98. $20/3$ de hora: 6 horas, 40 minutos

99. 96 tiros

100. 72 y 74

101. 65 y 67, o bien -67 y -65

102. 13 años

103. 10 podadoras

104. ₡5356

105. Siete de ₡100 y cinco de ₡500

106. 130 de platea y 390 de gradería

107. 18 m y 20 m

108. 17 cm y 14 cm

109. 12.131 m

110. $c = \pm\sqrt{6}/6$

111. $t = -10/9$

112. $p = 16$

113. $y = 12$

114. $w = 2$

115. $z = 11$

116. $z = 3$

117. $x = 2$

118. $x = -3/4$

119. $q = 1$

120. $q = 16$

121. $b = 0$

122. $b \in \{0, -1\}$

123. $r \in \{-3, 1/2\}$

124. $t = 3$

125. No hay solución

126. $y \in \{0, 3\}$

127. $b = 5$

128. $v = 4$

129. $y \in \{0, 8\}$

130. $x = 169/49$

131. $t = 2$

132. $v \in \{2, -1\}$

133. $p = 0$

134. $u = 3$

135. $x \in \{9, -3\}$

136. $v \in \{-5/3, 11/3\}$

137. $q \in \{9, -2\}$

138. No hay solución

139. $v = 7/2$

140. $z = 7/4$

141. $c \in \{3/2, -7/6\}$

142. $y = 8$

143. $x = -6$

144. $q = \pm 3$

145. $r \in \{2/5, -8/3\}$

146. $p = 2$

147. $u \in \{1, 3/4\}$

148. $b \in \{-2, -1/4\}$

149. $t \in \{2, 2/3\}$

150. $q \in \left\{1, 4, (-5 \pm \sqrt{41})/2\right\}$

Capítulo 4
Inecuaciones

1. verdadera

2. verdadera

3. falsa

4. falsa

5. falsa

6. verdadera

7. verdadera

8. verdadera

9. falsa

10. verdadera

11. falsa

12. verdadera

13. verdadera

14. falsa

15. falsa

16. verdadera

17. falsa

18. falsa

19. verdadera

20. verdadera

21. falsa

22. verdadera

23. falsa

24. verdadera

25. falsa

26. falsa

27. verdadera

28. $[2,3[$

29. $]-2,5]$

30. $[-4,4[$

31. $\emptyset$

32. $]-2,\infty[$

33. $[-5,3[$

34. $\emptyset$

35. $]-\infty,3]$

36. $]-\infty,0[\cup[3,6]$

37. $]-2,0[$

38. $[5,\infty[$

39. $[3,8]$

40. $[1,4]$

41. $[3,5]\cup[6,8]$

42. $[-2,4]$

43. Sí, sí, no, no, no, sí

44. Sí, no, no, sí, sí, no

45. Sí, sí, sí, no, no

46. No, sí, no, no, no, no

47. Sí, no, no, sí, no, sí

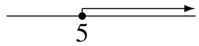
48. No, sí, sí, no, sí, no

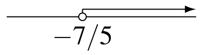
49. Sí, sí, no, no, no, sí, no

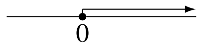
50. No, sí, sí, sí, sí, no

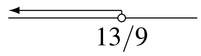
51. No, sí, sí, no, sí, sí, sí

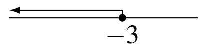
52. Sí, sí, sí, sí, sí, sí, sí

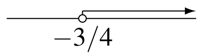
53. $c \geq 5$, $[5, \infty[$, 

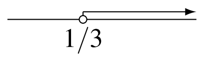
54. $q > -7/5$, $]-7/5, \infty[$, 

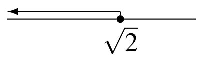
55. $x \geq 0$, $[0, \infty[$, 

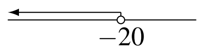
56. $b < 13/9$, $]-\infty, 13/9[$, 

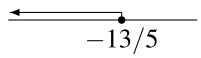
57. $z \leq -3$, $]-\infty, -3]$, 

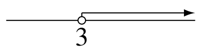
58. $a > -3/4$, $]-3/4, \infty[$, 

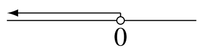
59. $t > 1/3$, $]1/3, \infty[$, 

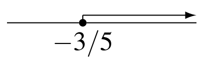
60. $p \leq \sqrt{2}$, $]-\infty, \sqrt{2}]$, 

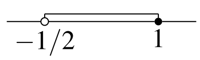
61. $v < -20$, $]-\infty, -20[$, 

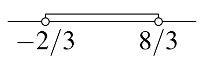
62. $z \leq -13/5$, $]-\infty, -13/5]$, 

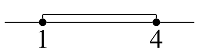
63. $w > 3$, $]3, \infty[$, 

64. $v < 0$, $]-\infty, 0[$, 

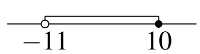
65. $x \geq -3/5$, $[-3/5, \infty[$, 

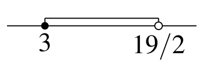
66. $-1/2 < q \leq 1$, $]-1/2, 1]$, 

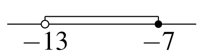
67. $-2/3 < c < 8/3$, $]-2/3, 8/3[$, 

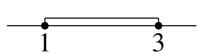
68. $1 \leq t \leq 4$, $[1, 4]$, 

69. No hay solución

70. $-11 < x \leq 10$, $]-11, 10]$, 

71. $3 \leq p < 19/2$, $[3, 19/2[$, 

72. $-13 < t \leq -7$, $]-13, -7]$, 

73. $1 \leq a \leq 3$, $[1, 3]$, 

74. $a < 0$ o $a > 1$

75. $r > 1$

76. $1 < x < 3$

77. $-\sqrt{10}/2 < y < \sqrt{10}/2$

78. $-1 < c < 1/4$

79. $q = 3/2$

80. $v \leq -1/3$

81. $t \leq -3/2$ o $0 \leq t \leq 6$

82. $-2 < w < 2$ o $w > 2$

83. $p = -1/2$ o $p \geq 3$

84. No hay solución

85. $a < 3/2$

86. $-1 < z < 3$ o $z \geq 5$

87. $0 < t \leq 3/7$ o $t > 1/2$

88. $r < 0$ o $2/3 \leq r \leq 1$ o $r > 2$

89. $-1 < q \leq 0$ o $1 \leq q < 2$

90. $b < -4$ o $b > -2$

91. $t < 5$ o $t > 9$

92. $p < -2$ o $0 < p \leq 3/2$

93. $-2 < x \leq 0$ o $x > 1$

94. $-2 \leq v < 0$ o $v \geq 2$

95. $-1 < t \leq 1$ o $t \geq 2$

96. $u < 1$ o $1 < u < 2$

97. $a < -3$ o $a > 1$

98. $r \neq 2$

99. $0 < q < 1/2$

100. $-2/3 \leq y \leq -1/2$ o $y \geq 5$

101. $x \geq 2$

102. $0 \leq p \leq 3/2$

103. $-9 \leq v \leq 11$

104. $1 < z < 7$

105. $t < 18/5$ o $t > 32/5$

106. $-1/2 \leq r \leq 1$

107. $1/60 < z < 19/60$

108. No hay solución

109. $u \in \mathbb{R}$

110. $y < -151/25$ o $y > -149/25$

111. No hay solución

112. $c \leq -37/3$ o $c \geq 11$

113. $a \in \mathbb{R}$

114. $-5/3 < q < -4/3$

115. $x \leq -5$ o $x \geq 20/3$

116. $v = -1/3$

117. $0 \leq z \leq 8$

118. $c \leq -2$ o $c \geq 3$

119. $y < -1$ o $y > 3$

120. $1 < x < 7/3$

121. $-10 < u \leq -6$ o $-2 \leq u < 2$

122. $-10/3 \leq p < -4/3$ o $2 < p \leq 4$

123. $-2\sqrt{5} < w < -2\sqrt{3}$
o $2\sqrt{3} < w < 2\sqrt{5}$

124. $1/4 \leq y \leq 1/2$

125. $t \leq -2$ o $t \geq 2$ o $t = \pm 1$

126. $-3/11 \leq b < 0$ o $0 < b \leq 3$

127. 83 o más

128. Al menos 90 000 lápices

129. Al menos 44 pasajeros

130. Menos de 20 galones

131. Al menos 12.5 kg

132. Entre 25 y 35 horas, inclusive

133. Menos de $43.50 la noche

134. Hasta 3.5 horas

135. Menos de 6250 km

136. Entre los 4 y los 4.4 años

137. Más de 120 000 unidades

138. Vender más de ₡16 000 000 mensuales

139. Más de ₡42 000 000

140. Estrictamente entre ₡800 y ₡1200

141. 45 enteros o más

142. Los que tienen menos de ocho lados

143. A más de 75 km/h

144. Desde 3.82 cm hasta 10 cm, inclusive

145. Ancho mayor que 12.247 m y largo mayor que 24.495 m

146. Estrictamente entre los 0.6879 s y los 2.3733 s

147. Entre 10 cm y 15 cm, inclusive

148. Entre ₡117 000 y ₡118 000, inclusive

Capítulo 5
Matrices y sistemas de ecuaciones

1. $t = 5, \ z = 4$

2. $m = -5/2, \ n = 1$

3. $v = -2, \ w = -6$

4. No hay solución

5. $c = 1, \ d = -5$

6. $a = -8/3, \ b = -7$

7. $x = 2y - 13, \ y \in \mathbb{R}$; o bien $y = (x+13)/2, \ x \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(-13,0), \ (0,13/2), \ (1,7)$.

8. $p = 6/5, \ q = -6$

9. $i = -7, \ j = 6$

10. No hay solución

11. $m = (5n-1)/3, \ n \in \mathbb{R}$; o bien $n = (3m+1)/5, \ m \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(-1/3,0), \ (0,1/5), \ (3,2)$.

12. $x = -16/5, \ y = 7/3$

13. $a = 22, b = 4, c = 66$

14. $r = 1, s = -4, t = -5$

15. $p = 37/17, q = -25/17, r = -12/17$

16. No hay solución

17. $i = 3-k, j = k-2, k \in \mathbb{R}$; o bien $i = 1-j, k = 2+j$; o bien $j = 1-i, k = 3-i$, $i \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(3,-2,0), \ (1,0,2), \ (0,1,3)$.

18. $x = (1-z)/2, y = 0, z \in \mathbb{R}$; o bien $y = 0, z = 1-2x, x \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(1/2,0,0), \ (0,0,1), \ (1,0,-1)$.

19. No hay solución

20. $a = 1, c = 3$

21. No hay solución

22. $a = 3 - 2c$, $b = 5 + c$, $d = 3$, $c \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(3,5,0,3)$, $(1,6,1,3)$, $(5,4,-1,3)$.

23. **1.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -11 \\ 6 & 5 & -10 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 7 & 9 & -68 \\ -2 & 6 & -32 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 27 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -29 \\ -3 & 5 & -27 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 52 \\ 2 & -4 & -26 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 10 & -11 & 78 \\ 15 & 13 & -60 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 13 \\ 3 & -5 & -51 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} 28 & 42 & 24 \\ 10 & 15 & -4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 51 & -85 & -17 \\ -39 & 65 & 13 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -39 \\ 15 & 6 & -34 \end{pmatrix}$.

24. **13.** $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **19.** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -15 & 10 \\ -10 & 5 & 25 & 5 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 0 & 12 & -21 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 8 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 25 & 0 & 72 \\ -3 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 53 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

34. $p = -13$, $q = 22/3$

35. $a = 1$, $b = 4$

36. $x = 15/2$, $y = 17/2$

37. $r = 4$, $t = -1/c$ si $c \neq 0$, o no hay solución si $c = 0$

38. $a = 22$, $b = 4$, $c = 66$

39. $r = 1$, $s = -4$, $t = -5$

40. $x = 3$, $y = 0$, $z = -5$

41. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

42. $p = 37/17$, $q = -25/17$, $r = -12/17$

43. $t = 69$, $u = 5/2$, $v = -59$, $w = -51/2$

44. No hay solución

45. $x = -w+1$, $y = w+2$, $z = 3$, $w \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(1,2,3,0)$, $(0,3,3,1)$, $(2,1,3,-1)$ para (x,y,z,w,v).

46. $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$

47. $a = 19d/7 - 9$, $b = -36d/7 + 25$, $c = 3d/7 + 4$, $d \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(-9,25,4,0)$, $(10,-11,7,7)$, $(-28,61,1,-7)$.

48. No hay solución

49. $p = (4k-14)/(k-1)$, $q = (3k+2)/(1-k)$, $r = 5/(k-1)$ si $k \neq 1$, o no hay solución si $k = 1$

50. $x = -4w/3$, $y = 5w/9 - 1$, $z = 7w/18$, $v = w+2$, $w \in \mathbb{R}$; o bien
$v = 18z/7 + 2$, $w = 18z/7$, $x = -24z/7$, $y = 10z/7 - 1$, $z \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(0,-1,0,2,0)$, $(-24,9,7,20,18)$ para (x,y,z,v,w)

51. No hay solución

52. $x = 1$, $y = 2z$, $w = -3v$, $v \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.
Algunas soluciones particulares: $(1,0,0,0,0)$, $(1,2,1,0,0)$ para (x,y,z,w,v).

53. 29 monedas de ₡50 y 14 de ₡100

54. Tres adultos y cuatro niños

55. \$37 000 en el primero y \$23 000 en el segundo

56. Diez horas A y quince horas B

57. 2500 unidades de A y 2000 de B

58. 18.5 kg de nueces y 6.5 kg de pasas

59. 120 g de Colombia y 280 g de Costa Rica

60. 40 sillas y 53 mesas

61. Once horas en Alajuela y ocho en Heredia

62. 40 automóviles modelo A y 60 modelo B

63. \$10 959.56 de maíz y \$15 594.16 de leche

64. 492.87 unidades de A y 372.45 de B

65. 80 g de A y 60 g de B

66. Dos pastillas de cada marca

67. 17, 11 y 14

68. 5000 unidades de A, 7000 de B y 1000 de C

69. 190 kg de A, 30 kg de B y 80 kg de C

70. 12 porciones de P, 16 porciones de Q y 25 porciones de R

71. 2198.83 unidades de petróleo, 1205.97 de transporte y 505.26 de agricultura

72. \$115 751.96 de acero, \$94 310.61 de carbón y \$147 716.95 de transporte

73. 2.9 %, 4.1 % y 2.6 % respectivamente

74. 10 000 aves en Lirio, 5 000 en Margarita y 20 000 en Narciso

75. 3 pastillas de X y 4 de Z

76. 120°

77. 104, 6 y 7, o bien 104, 7 y 6

78. $40/9$ de hora (aprox. 4 hrs, 26 min, 40 seg)

79. 2×3

80. 3×2

81. 3×1, columna

82. 1×3, fila

83. 3×3, cuadrada, simétrica

84. 3×3, cuadrada, triangular superior

85. 3×3, cuadrada, simétrica, triangular superior, triangular inferior, diagonal

86. 2×2, cuadrada, simétrica, triangular superior, triangular inferior, diagonal, nula

87. **a.** $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **b.** $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

88. **a.** $\begin{pmatrix} 10.4 & 147 & 176 & 170 \\ 5 & 110 & 172 & 159 \\ 6.8 & 120 & 167 & 166 \\ 9.9 & 140 & 170 & 161 \end{pmatrix}$. **b.** 4×4. **c.** $\begin{pmatrix} 10.4 & 5 & 6.8 & 9.9 \\ 147 & 110 & 120 & 140 \\ 176 & 172 & 167 & 170 \\ 170 & 159 & 166 & 161 \end{pmatrix}$. **d.** 10.4, 110, 167, 161.

89. **a.** $\begin{pmatrix} 57 & 61 & 48 \\ 72 & 92 & 79 \end{pmatrix}$. **b.** $\begin{pmatrix} 57 & 72 \\ 61 & 92 \\ 48 & 79 \end{pmatrix}$. **c.** 2×3 y 3×2 respectivamente.

90. **a.** $\begin{pmatrix} 2820 & 1470 \\ 1240 & 980 \\ 830 & 560 \end{pmatrix}$. **b.** $\begin{pmatrix} 2820 & 1240 & 830 \\ 1470 & 980 & 560 \end{pmatrix}$. **c.** 1470 y 830. **d.** $2,3$.

91. **a.** $\begin{pmatrix} 1564 & 834 & 1000 & 2430 \\ 175 & 65 & 66 & 230 \\ 7.9 & 14.4 & 13.7 & 6.2 \end{pmatrix}$. **b.** 3×4. **c.** 230 y 7.9. **d.** $2,3$. **e.** $\begin{pmatrix} 1564 & 175 & 7.9 \\ 834 & 65 & 14.4 \\ 1000 & 66 & 13.7 \\ 2430 & 230 & 6.2 \end{pmatrix}$.

92. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ -6 & -3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

93. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; no es simétrica

94. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

95. $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 11 \\ 3 & -11 & -9 \end{pmatrix}$

96. $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -16 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

97. $\begin{pmatrix} 11 & 0 & -13 \\ 1 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

98. $\begin{pmatrix} 18 & 21 & -19 \\ -11 & 17 & 15 \end{pmatrix}$

99. $\begin{pmatrix} 13 & -19 \\ 34 & -4 \\ -13 & 3 \end{pmatrix}$

100. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & 6 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

101. $\begin{pmatrix} -7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

102. $\begin{pmatrix} 2820 & 1240 & 830 \\ 1470 & 980 & 560 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 240 & 120 & 90 \\ 190 & 90 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3060 & 1360 & 920 \\ 1660 & 1070 & 620 \end{pmatrix}$ (también pueden sumarse las transpuestas)

103. **a.** $\frac{1}{2}(G_1+G_2) = \begin{pmatrix} 531 & 560 \\ 510 & 540 \\ 511 & 491 \end{pmatrix}$

b. $G_2 - G_1 = \begin{pmatrix} 48 & 70 \\ 60 & 60 \\ 68 & 58 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1000}{480}G_1 + \frac{1000}{500}G_2 \approx \begin{pmatrix} 2166 & 2284 \\ 2080 & 2203 \\ 2084 & 2003 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

105. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

106. $\begin{pmatrix} -53 & 16 & 22 & 19 \\ 25 & -9 & -12 & -10 \end{pmatrix}$

107. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

109. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

110. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

111. (2)

112. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

113. $\begin{pmatrix} 44 & -30 \\ -1 & 8 \\ -25 & -1 \\ -27 & -2 \end{pmatrix}$

114. **a.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 300 \\ 210 \\ 1050 \end{pmatrix}$
b. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1770 \\ 3750 \\ 4380 \end{pmatrix}$ representa los costos en colones de los ingredientes para cada postre
c. ₡3750

115. **a.** $M = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$
b. $P \cdot M = \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \\ 135 & 460 & 180 \\ 140 & 400 & 160 \end{pmatrix}$ representa las cantidades de materiales requeridas para cada cliente
c. 70 cremalleras; 135 metros; 400 broches

116. **a.** $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
b. $C \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 47 & 25 \\ 12 & 26 & 12 \end{pmatrix}$
c. $C \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 28\,480 \\ 14\,420 \end{pmatrix}$ representa los costos en colones de los ingredientes para cada encargo
d. 25 litros
e. ₡14 420

117. **a.** $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
b. $M \cdot C = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$ representa los costos en dólares de los materiales para cada producto
c. $P \cdot M \cdot C = \begin{pmatrix} 520 \\ 1360 \\ 1280 \end{pmatrix}$ representa los costos en dólares de los materiales para cada cliente
d. \$20
e. \$1360

118. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

121. $a = 0$

122. **a.** 2×2. **b.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

123. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

124. $a = -3, b = 5, c = 2, d = 4$

125. $p = 4, q = 3, r = -4, s = 2, t = 1$

126. $r = 0, s = 2, t = 3, u = 4, v = -4$

127. $w = 1, x = 3, y = -5, z = 0$

133. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

134. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

135. $\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/7 & 9/35 \end{pmatrix}$

136. $\begin{pmatrix} -1/2 & 7/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

137. $\begin{pmatrix} -1/5 & 8/15 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

138. No existe

139. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

140. $\begin{pmatrix} 1/8 & -5/8 \\ -1/8 & -3/8 \end{pmatrix}$

141. No existe

142. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/a & -1/a \end{pmatrix}$ si $a \neq 0$,
o no existe si $a = 0$

143. $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

144. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

145. $\begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 & 4/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7/3 & -1/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

146. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

147. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

148. No existe

149. $\frac{1}{c+4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -c \\ 2 & 1 & 4 \\ -c & 2 & -2c \end{pmatrix}$ si $c \neq -4$,
o no existe si $c = -4$

150. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/2 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

151. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

152. $p = -43, q = -14, r = 24$

153. $a = -4, b = -10, c = 7$

154. $x = -49/3, y = -8, z = 68/3$

155. $x = 13, y = 6, z = 31$

156. $u = 1, v = 14, w = 10$

157. $a = 1, b = -5/2, c = 3, d = -1/2$

158. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $x = 19, y = -10$; $x = -27, y = 15$; $x = -120, y = 72$

159. **a.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix}$
c. 15 maletines y 40 pantalones esta semana; 20 m y 30 p la segunda semana; 20 m y 40 p la tercera semana; 20 m y 45 p la cuarta semana

160. 15 maletines y 40 pantalones esta semana; 20 m y 30 p la segunda semana; 20 m y

40 p la tercera semana; 20 m y 45 p la cuarta semana.

161. -20, 4 y 24

162. -20, 4 y 24

163. $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -16 \\ -10 & 20 \end{smallmatrix}\right)$, -80 y -80

164. $\begin{pmatrix} 5/24 & 1/24 \\ -3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$, $1/24$ y $1/24$

165. 74

166. 63

167. 156

168. -72

169. -6

170. -286

171. -405

172. -1600

173. -900

174. 140

175. $p=-13$, $q=22/3$

176. $a=6$, $b=-7$

177. $a=22$, $b=4$, $c=66$

178. $r=1$, $s=-4$, $t=-5$

179. $x=3$, $y=0$, $z=-5$

180. $a=1$, $b=2$, $c=3$

181. $p=37/17$, $q=-25/17$, $r=-12/17$

182. $w=-51/2$

183. 180 kg

184. 12 porciones

185. 12 días

Capítulo 6
Funciones

1. **a.** enero. **b.** setiembre. **c.** julio. **d.** San Valentín. **e.** (ninguna).
f. Día del Niño, Independencia de Costa Rica.
g. $\{$enero, febrero, julio, setiembre, octubre, diciembre$\}$.

2. **a.** $\mathbb{R}$. **b.** $\mathbb{R}$. **c.** 16. **d.** -19. **e.** 6. **f.** 3. **g.** -2. **h.** $-1/5$.

3. **a.** $\mathbb{R}$. **b.** $\mathbb{R}$. **c.** -6. **d.** 0. **e.** -16. **f.** $4\sqrt{3}-6$.
g. 1. **h.** 0, 2. **i.** (no tiene). **j.** -2, 4. **k.** $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$.

4. 28, 8, $18-5\sqrt{6}$, $4-\sqrt{2}$

5. $7/4$, 14, $7\cdot 2^{-a}$

6. 1, $81-46\sqrt{3}$, $8v^3+12v^2-4v-3$, t^3+6t^2+7t-1

7. -1, 7, 112, $27x^6-135x^5+225x^4-125x^3-15x^2+25x+1$, $147\cdot 4^{-y}/16-35\cdot 2^{-y}/4$

8. $-1/4$, -1, 1, $1/2$, 67, 235

9. 4, 0, $-1/2$, no existe, 0, $\sqrt{55}$

10. $\mathbb{R}$

11. $\mathbb{R}-\{-2/3,2\}$

12. $\mathbb{R}-\{0\}$

13. $\mathbb{R}-\left\{1,-2\pm\sqrt{3}\right\}$

14. $\mathbb{R}-\{\pm 1,-2\}$

15. $\mathbb{R}$

16. $]-\infty,5]$

17. $\{5/2\}$

18. $[-3,1/4]$

19. $]-\infty,-2[\cup[1,2[$

20. $]0,3[\cup]3,\infty[$

21. $]-4,0[\cup]0,\infty[$

22. $]2,5/2]$

23. $[1,2[$

24. $\mathbb{R}-\{2,3\}$

25. $\mathbb{R}-\{8\}$

26. $(p+q)(t)=t^2+1$
$(p-q)(t)=5t^2-10t-1$
$(pq)(t)=-6t^4+25t^3-22t^2-5t$
$(p/q)(t)=(3t^2-5t)/(5t-2t^2+1)$

27. $(f+g)(u)=(1+u)\sqrt{u}$
$(f-g)(u)=(1-u)\sqrt{u}$
$(fg)(u)=u^2$
$(f/g)(u)=1/u$

28. $(m+n)(x) = 9x + 6/x$
$(m-n)(x) = 9x$
$(mn)(x) = 27 + 9/x^2$
$(m/n)(x) = 3x^2 + 1$

29. $(X+Y)(r) = (r^3 + 3r^2 + 3r + 7)/(r+1)$
$(X-Y)(r) = (-r^3 - 3r^2 - 3r + 5)/(r+1)$
$(XY)(r) = 6r + 6$
$(X/Y)(r) = 6/(r+1)^3$

30. $g \circ f(x) = -6x^2 + 3x - 2$
$f \circ g(v) = 18v^2 - 9v + 2$

31. $h \circ p(t) = (10t - 32)/(10t - 27)$
$p \circ h(z) = -(22z + 80)/(2z + 5)$

32. $r \circ q(u) = 2|u|$
$q \circ r(x) = 4x - 9$

33. $c \circ g(r) = (3r - 2r^2)^{3/2} + 1$
$g \circ c(r) = 1 - r^{3/2} - 2r^3$

34. $p \circ h(z) = (3z - 5)/(z + 1)$
$h \circ p(v) = (v - 1)/(v + 1)$

35. $f \circ q(x) = x$
$q \circ f(w) = w$

36. $p \circ h(t) = t$
$h \circ p(v) = v$

37. $h \circ c(w) = w$
$c \circ h(u) = 1 - |u - 1|$

38. $q \circ f(v) = v$, $f \circ q(t) = t$

39. -6, 18 y 42; 3, -1 y 2

40. 2.5, 0 y 0.7; 1, 8 y -4

41. 1, 4 y 32; 0, 5 y 2

42. Sí

43. Sí

44. No

45. No

46. No

47. No

48. Sí

49. $x = (w - 5)/3$

50. $p = 3 - y/2$

51. $y = (7t + 1)/4$

52. $u = 3v - 3/2$

53. $w = \sqrt[3]{z + 6}$

54. $u = (4 - q^3)/8$

55. $x = \sqrt[3]{[(u+2)^5 - 1]/2}$

56. $t = \sqrt[5]{4(p-6)^{11} + 8}$

57. $r = 3 + 1/x$

58. $p = 1/(v - 2)$

59. $q = r/(2r + 3)$

60. $y = \sqrt[3]{t/(1-t)}$

61. $v = \sqrt{z - 3}$

62. $y = \sqrt{r + 4} - 2$

63. $z = 5 - \sqrt{w + 9}$

64. $\mathbb{R}$, $q^{-1}(x) = (3 - 3x)/2$, $\mathbb{R}$

65. $\mathbb{R}-\{2\}$, $g^{-1}(y)=(4y+5)/(2y-1)$, $\mathbb{R}-\{1/2\}$

66. $\mathbb{R}-\{-8/5\}$, $h^{-1}(t)=(2-8t)/(5t)$, $\mathbb{R}-\{0\}$

67. $\mathbb{R}-\{-3\}$, $p^{-1}(r)=(2+3r)/(1-r)$, $\mathbb{R}-\{1\}$

68. $\mathbb{R}-\{1\}$, $h^{-1}(w)=(w-2)/(w+3)$, $\mathbb{R}-\{-3\}$

69. $\mathbb{R}$, $f^{-1}(u)=-1-u^3/2$, $\mathbb{R}$

70. $\mathbb{R}$, $q^{-1}(v)=(1-v)^5-6$, $\mathbb{R}$

71. $]-\infty,1]$, $p^{-1}(z)=1-z^2$, $[0,\infty[$

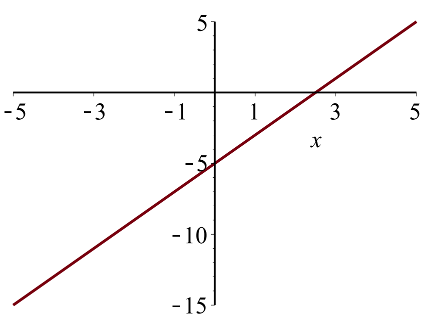
72. $[0,\infty[$, $g^{-1}(x)=\sqrt{x+2}$, $[-2,\infty[$

73. $]-\infty,4]$, $f^{-1}(t)=4-\sqrt{9-t}$, $]-\infty,9]$

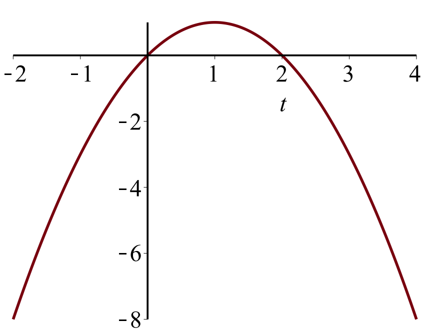
74. $[0,\infty[$, $r^{-1}(t)=(3-\frac{1}{2}t)^2$, $]-\infty,6]$

75. $[-2,\infty[$, $p^{-1}(u)=\sqrt{u}-2$, $[0,\infty[$

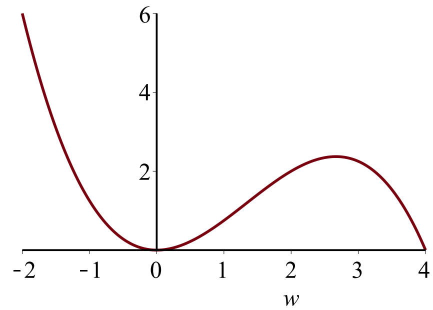
76.



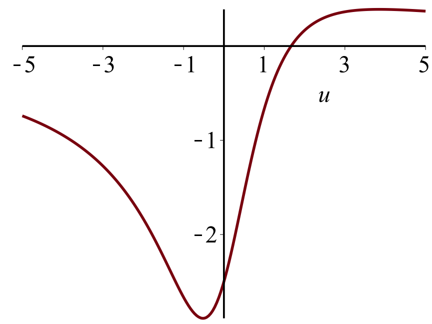
77.



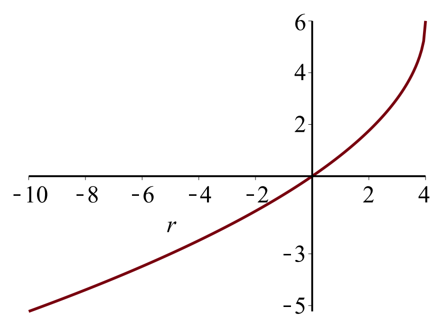
78.



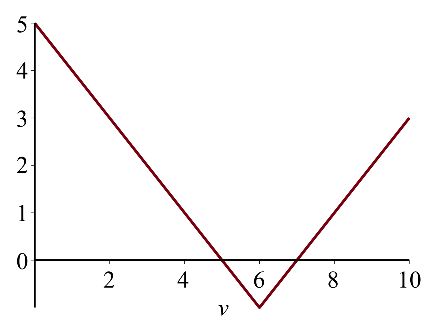
79.

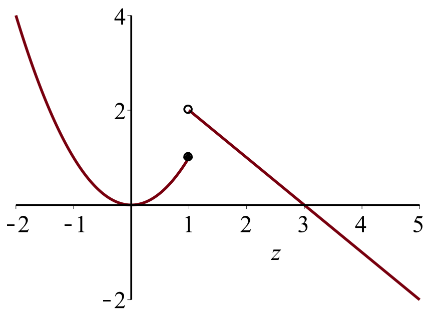


80.



81.



82. 

83. $(0,12),\ (4,0)$

84. $(0,-1/5),\ (7/15,0)$

85. $(0,2/3),\ (-3/2,0)$

86. $(0,-5),\ (-1,0),\ (5/2,0)$

87. $(0,2.3)$

88. $(0,-1),\ (-2,0),\ (1/2,0)$

89. $(0,81),\ (-3,0)$

90. No hay

91. $(-4/7,0),\ (2,0)$

92. $(0,1),\ (\sqrt[3]{2},0)$

93. $2\sqrt{2}$, $(1,0)$

94. $\sqrt{73}$, $(-3/2,4)$

95. $5\sqrt{17}/4$, $(5/8,5/2)$

96. $y-3=-2(x+1)$, $y=-2x+1$, decreciente

97. $y=\frac{4}{3}(x-12)$, $y=\frac{4}{3}x-16$, creciente

98. $y+3=0(x-2)$, $y=-3$, horizontal

99. $y-1/2=0(x+6)$, $y=1/2$, horizontal

100. $x=-4/5$, vertical

101. $x=1$, vertical

102. $y+4=2(x+6)$, $y=2x+8$, creciente

103. $y-0=\frac{1}{9}(x-2)$, $y=\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}$, creciente

104. $y-6=0(x-1)$, $y=6$, horizontal

105. $x=5$, vertical

106. $y-8=8(x+1)$, $y=8x+16$, creciente

107. $y-9=2(x+6)$, $y=2x+21$, creciente

108. $y+8=-\frac{1}{2}(x-2)$, $y=-\frac{1}{2}x-7$, decreciente

109. $y-9=0(x+7)$, $y=9$, horizontal

110. $x=6$, vertical

111. $y+2=0(x+5)$, $y=-2$, horizontal

112. $x=-4$, vertical

113. $y+5=2.6(x-4)$, $y=2.6x-15.4$, creciente

114. $y-4=\frac{5}{2}(x-10)$, $y=\frac{5}{2}x-21$, creciente

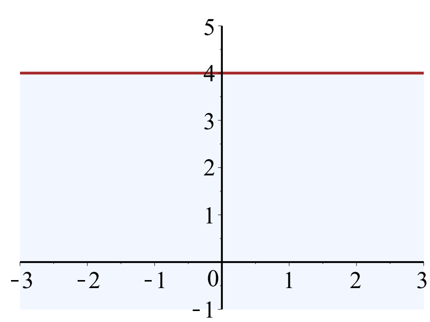
115. $y-0=\frac{4}{3}(x-3)$, $y=\frac{4}{3}x-4$, creciente

116. $y-0=0(x-5)$, $y=0$, horizontal

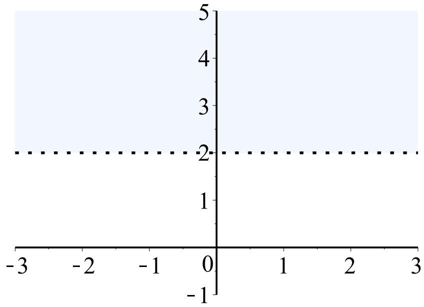
117. $x=4$, vertical

118. $x=-4$, vertical

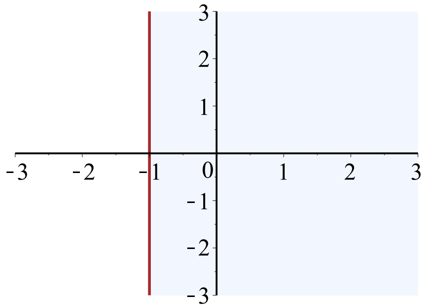
119. $y-7=0(x-2)$, $y=7$, horizontal

120. 

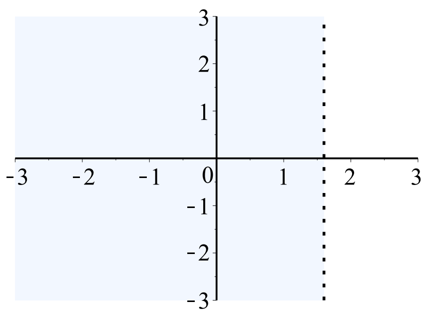
121.



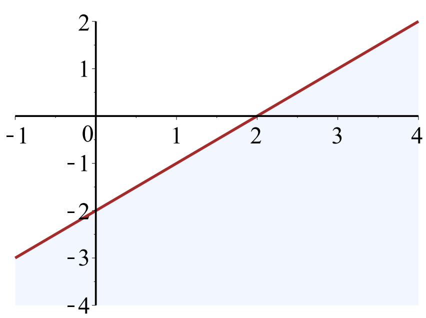
122.



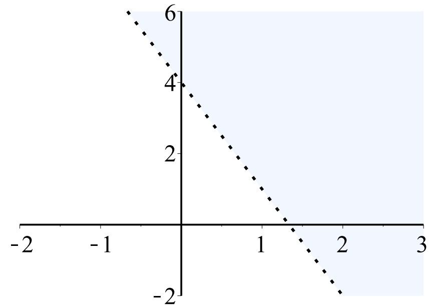
123.



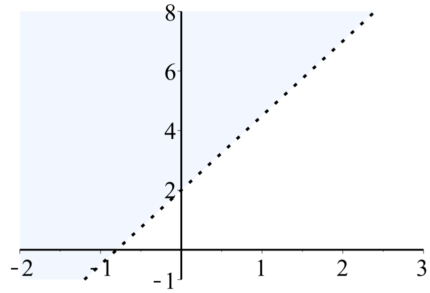
124.



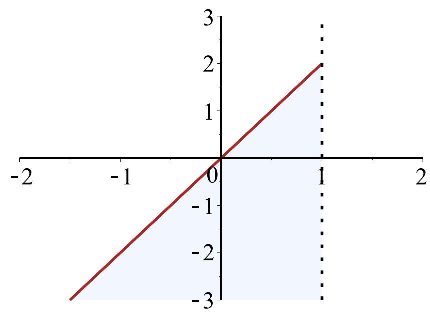
125.



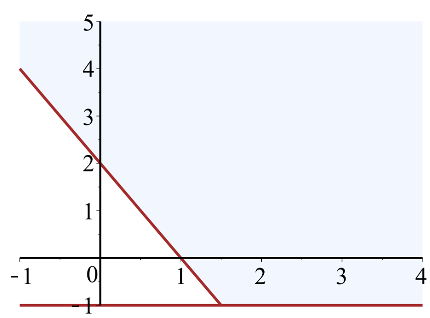
126.



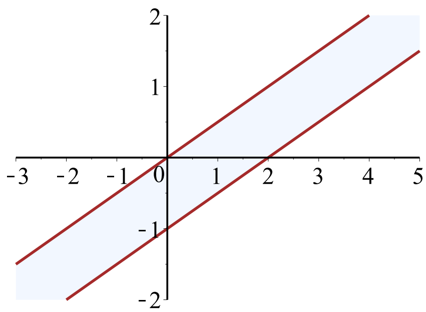
127.



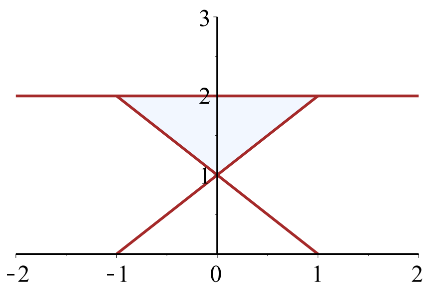
128.



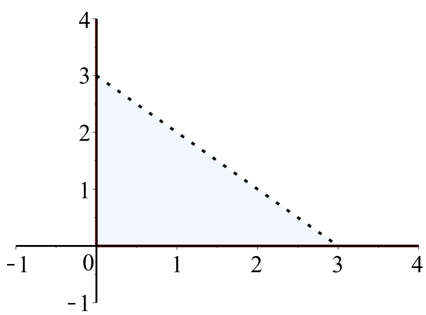
129.



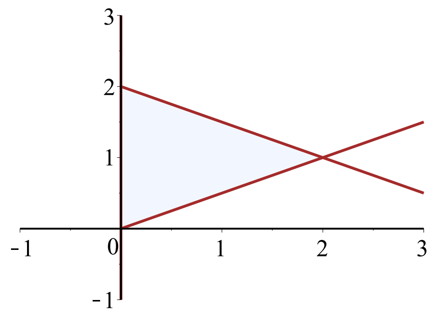
130.



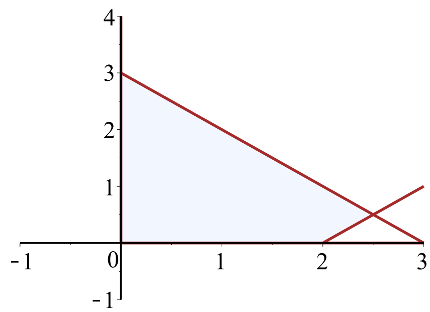
131.



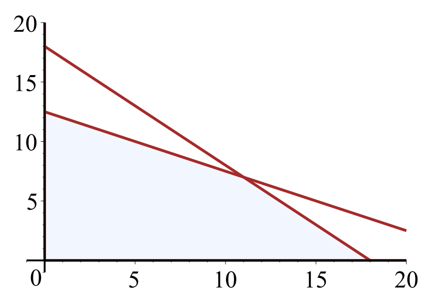
132.



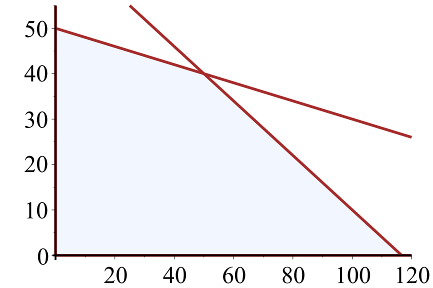
133.



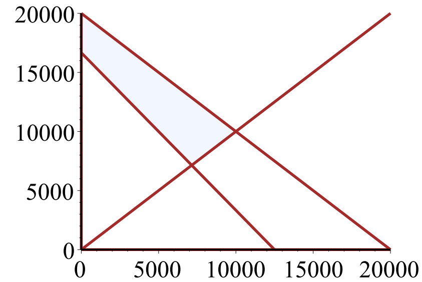
134. $x+2y \le 25,$
$x+y \le 18,$
$x \ge 0,$
$y \ge 0.$



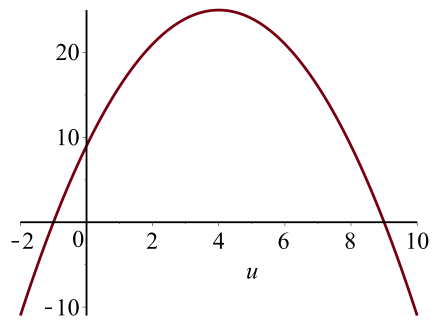
135. $3x + 5y \leq 350$,
$10x + 50y \leq 2500$,
$x \geq 0$,
$y \geq 0$.



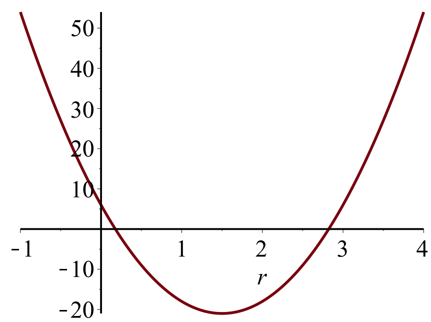
136. $0.08x + 0.06y \geq 1000$,
$x + y \leq 20000$,
$x \leq y$,
$x \geq 0$,
$y \geq 0$.



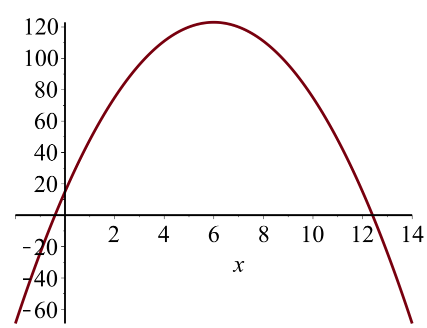
137. $(4, 25)$, $(0, 9)$, $(-1, 0)$, $(9, 0)$,
crece en $]-\infty, 4]$,
decrece en $[4, \infty[$,
ámbito $]-\infty, 25]$



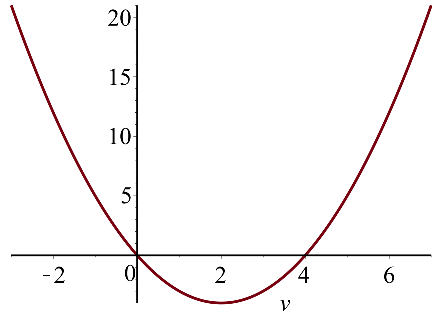
138. $(3/2, -21)$, $(0, 6)$, $(3/2 + \sqrt{7}/2, 0)$,
$(3/2 - \sqrt{7}/2, 0)$,
decrece en $]-\infty, 3/2]$,
crece en $[3/2, \infty[$,
ámbito $[-21, \infty[$



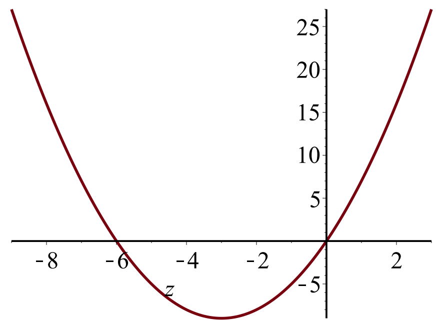
139. $(6, 123)$, $(0, 15)$, $(6 + \sqrt{41}, 0)$,
$(6 - \sqrt{41}, 0)$,
crece en $]-\infty, 6]$,
decrece en $[6, \infty[$,
ámbito $]-\infty, 123]$



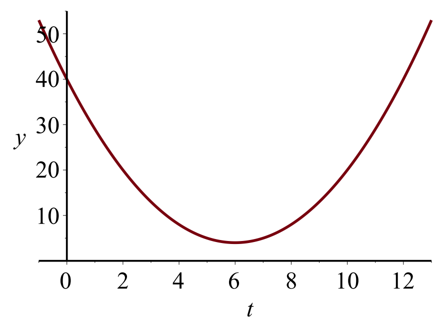
140. $(2,-4)$, $(0,0)$, $(4,0)$,
decrece en $]-\infty,2]$,
crece en $[2,\infty[$,
ámbito $[-4,\infty[$



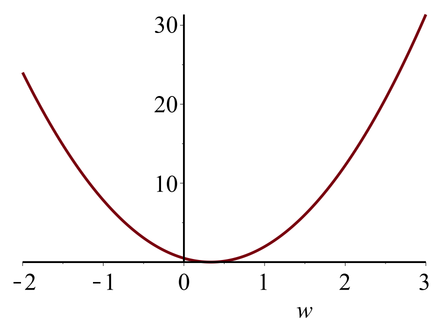
141. $(-3,-9)$, $(0,0)$, $(-6,0)$,
decrece en $]-\infty,-3]$,
crece en $[-3,\infty[$,
ámbito $[-9,\infty[$



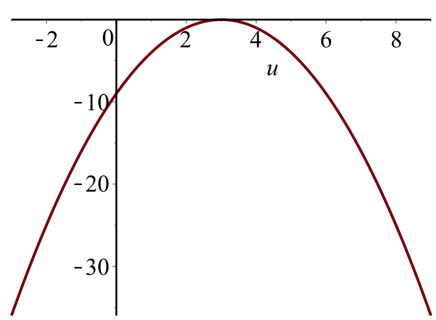
142. $(6,4)$, $(0,40)$,
decrece en $]-\infty,6]$,
crece en $[6,\infty[$,
ámbito $[4,\infty[$



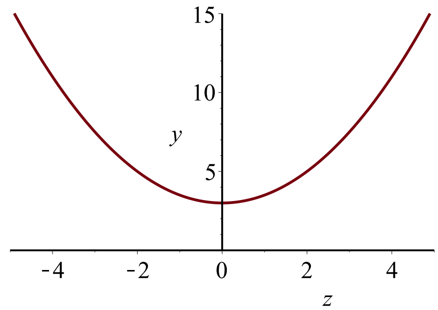
143. $(1/3,0)$, $(0,0.49)$,
decrece en $]-\infty,1/3]$,
crece en $[1/3,\infty[$,
ámbito $[0,\infty[$



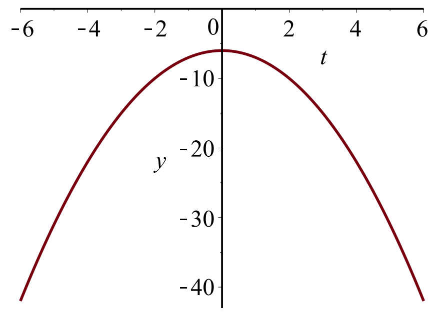
144. $(3,0)$, $(0,-9)$,
crece en $]-\infty,3]$,
decrece en $[3,\infty[$,
ámbito $]-\infty,0]$



145. $(0,3)$,
decrece en $]-\infty,0]$,
crece en $[0,\infty[$,
ámbito $[3,\infty[$



146. $(0,-6)$,
crece en $]-\infty,0]$,
decrece en $[0,\infty[$,
ámbito $]-\infty,-6]$



147. $(-3,8)$ y $(-1/2,-2)$

148. $(1,4)$, $(2,8)$

149. $(3/2,65/4)$, $(5/3,155/9)$

150. $(-2,6)$, $(1,3)$

151. $(-(\sqrt{5}+1)/2,(\sqrt{5}-1)/2)$, $((\sqrt{5}-1)/2,-(\sqrt{5}+1)/2)$, $(3/2,1/4)$

152. No hay

153. $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$

154. $(-1,-6)$, $(5/2,1)$

155. No hay

156. $(-2^{-3/4},-2^{-1/4})$, $(0,0)$, $(2^{-3/4},2^{-1/4})$

157. $(1,1)$

158. $(3,6)$

159. $(5,13)$

160. $(2/3,-1/3)$, $(2,1)$

161. $5\sqrt{2}/3$, $(1/6,7/6)$

162. $4\sqrt{2}$, $(3,2)$

163. $y-7=-\frac{2}{3}(x-3)$, $y=-\frac{2}{3}x+9$

164. $y-\frac{16}{7}=-\frac{1}{2}(x-\frac{6}{7})$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{7}$

165. $y-1=4(x-4)$, $y=4x-15$

166. **a.** $C(q)=80000+1600q$. **b.** ₡34 400 000. **c.** $I(q)=3000q$.
d. $G(q)=1400q-80000$. **e.** Creciente. **f.** $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$.

167. **a.** $U(q)=7000q-(180000+4000q)=3000q-180000$.
b. Creciente. **c.** Deben vender 60 ejemplares.

168. **a.** $C(t)=250t^2-510t+860$. **b.** ₡12 780.
c. Decreciente en $[0,1.02]$, creciente en $[1.02,\infty[$.

169. **a.** $D(t)=(90000+6000t)/(7550+350t)$. **b.** $D(12)\approx 14$.

170. **a.** $C(n)=3\sqrt{370n-225}+1850n+375$.
b. 9025 tenedores, a un costo de ₡46 910.

171. $C=150x+60\,000x^{-1}$

172. $A(x)=125x-x^2$

173. $C=3200x^2+600(4)(x)(25/x^2)=3200x^2+60\,000x^{-1}$

174. **a.** $N(p)=1260-0.04p$.
b. Por cada colón de incremento en el precio se venderán 0.04 pelucas menos.

175. **a.** $V=2500-312.5t$. **b.** El valor decrece $312.50 cada año.

176. **a.** $N=1.2t+70$, en miles de cajas; para predecir la producción del año actual, sustituya $t=$ año actual $-$ 1990 en la ecuación (por ejemplo, para el año 2007, $N=1.2(17)-2318=90.4$: 90 400 cajas).
b. La producción aumenta en 1200 cajas cada año.

177. **a.** $y=1100-\frac{5}{3}x$. Para aumentar la asistencia en una persona deberá rebajar el precio en ₡1.67.
b. ₡350. **c.** 120 personas.

178. $V=16\,000-1280t$

179. **a.** $q=6900-80p$. **b.** $p\approx 32.65$ o $p\approx 53.60$.

180. **a.** $V(n) = 480 - 22.5n$, en miles de colones
b. ₡142 500
c. $[0, 21.\bar{3}]$

181. ₡10 000 y ₡3000

182. **a.** $y = 289.\bar{3}x - 570061.\bar{6}$
b. Cada año hay $289.\bar{3}$ estudiantes más

183. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

184. **a.** $y = 5.975x + 76.95$ en cm
b. 100.85 cm, 124.75 cm y 154.625 cm
c. A los 12.226 años (12 años, 2 meses, 21 días)
d. 5.975 cm

185. **a.** $y = 45 - 20x$. El tiempo se reduce en 20 horas por cada gramo adicional.
b. 45 hrs. **c.** Mayor que 1.35 g.

186. **a.** $P = 0.07v + 0.9$. **b.** ₡900 000 y 7 %.

187. **a.** $y = 39.5x - 78721.01$. **b.** ₡39.50. **c.** ₡436.99/\$. **d.** 2008.

188. 100 y 100

189. 25 y -25

190. $q = 250$

191. **a.** 450 cajas. **b.** ₡729 000.

192. $83.\bar{3}$ km/h

193. $2125 mensuales

194. ₡15 750

195. ₡550

196. $p = 43.125$

197. $q = 300$

198. **a.** $550. **b.** $605 000.

199. **a.** ₡20 823.53 y 5900 usuarios. **b.** ₡122 858 824.

200. **a.** ₡1250. **b.** ₡15 625 000.

201. ₡900 000

202. \$43

203. Dentro de 4.5 semanas

204. **a.** 160 árboles. **b.** 76 800 naranjas.

205. **a.** $p = 1000 + 50n$, $q = 500 - 8n$, $I = pq = 500000 + 17000n - 400n^2$. **b.** $[0, 62.5]$. **c.** 21.25 días, ₡680 625.

206. **a.** 9.8 m. **b.** 2.8 s. **c.** [0, 2.8].

207. 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos

208. **a.** $b = 15$ cm y $h = 15$ cm. **b.** $A = 225\,\text{cm}^2$.

209. 30 m el lado perpendicular a la pared, 60 m el paralelo

Capítulo 7
Funciones exponenciales y logarítmicas

1. $f(x) = 3 \cdot 5^x$

2. $q(x) = (2/5) \cdot 10^x$

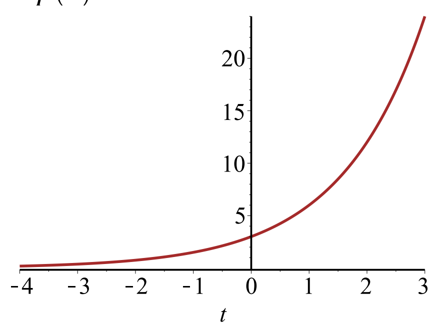
3. $h(x) = 4(1/2)^x$

4. $g(x) = -10 \cdot \sqrt{5}^x$

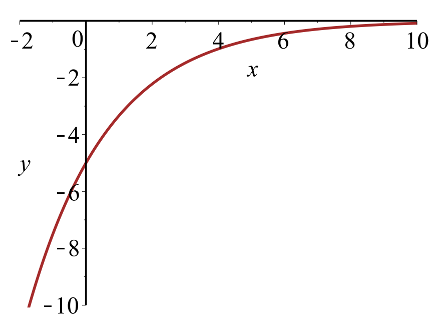
5. $r(x) = 4(3/2)^x$

6. $p(x) = -64^x$

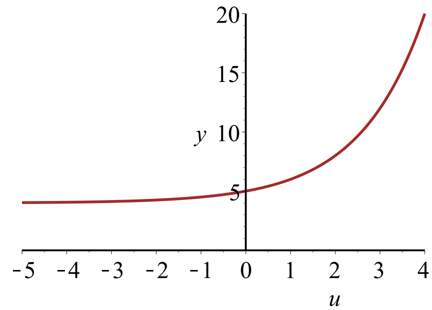
7. $]0, \infty[$; $(0, 3)$



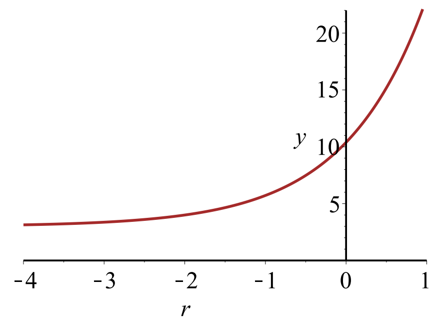
8. $]-\infty, 0[$; $(0, -5)$



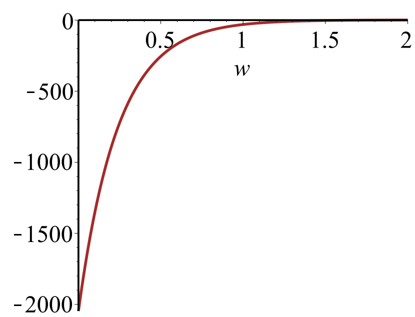
9. $]4,\infty[$; $(0,5)$



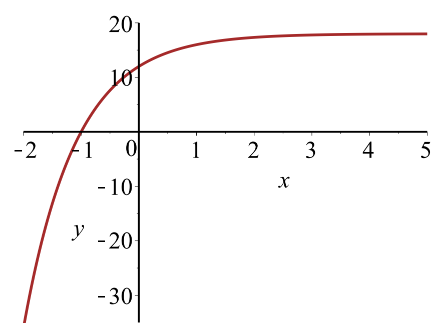
10. $]3,\infty[$; $(0,10.3891)$



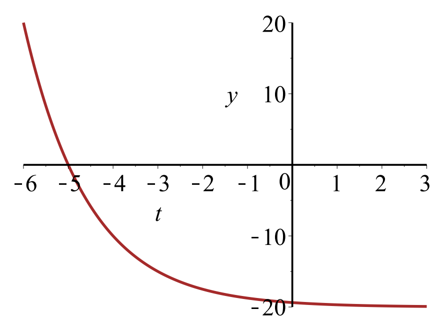
11. $]-\infty,1[$; $(0,-2047)$, $(11/6,0)$



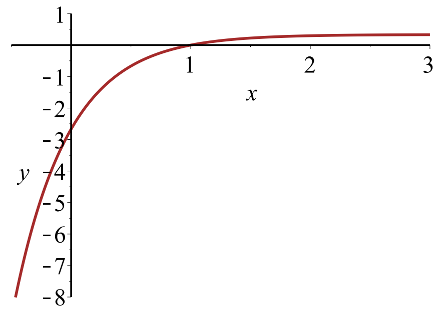
12. $]-\infty,18[$; $(0,12)$, $(-1,0)$



13. $]-20,\infty[$; $(0,-19.375)$, $(-5,0)$



14. $]-\infty, 1/3[$; $(0, -8/3)$, $(1, 0)$



15. $y = 0$

16. $u = 1/2$

17. No hay solución real

18. $r = -3/4$

19. $w = 5$

20. $t = -2/3$

21. $v = 8/15$

22. $x \in \{0, 3\}$

23. $z = -3$

24. $q = 4$

25. $y = 1$

26. $x = 1/2$

27. $\log_2 8 = 3$

28. $\log_{25} 125 = 3/2$

29. $\log_5(1/25) = -2$

30. $\log_{16} 2 = 1/4$

31. $\log_{2/3}(9/4) = -2$

32. $\log_{27/8}(2/3) = -1/3$

33. $5^{-1} = 1/5$

34. $3^0 = 1$

35. $(1/2)^{-3} = 8$

36. $10^4 = 10000$

37. $10^{-2} = 0.01$

38. $6^1 = 6$

39. $e^{-2} = e^{-2}$

40. $u = 1/9$

41. $w = 4/3$

42. $r = 2$

43. $v = e^{-2}$

44. $x = -e$

45. $t = -1/2$

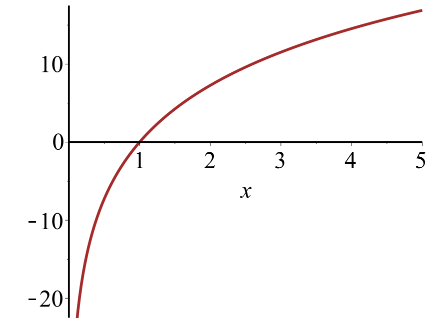
46. $y = 8$

47. $z = 3/2$

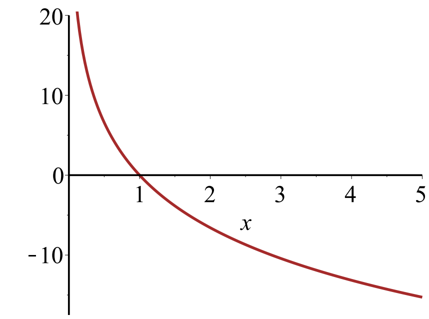
48. $c = 9$

49. $x = \sqrt{10}$

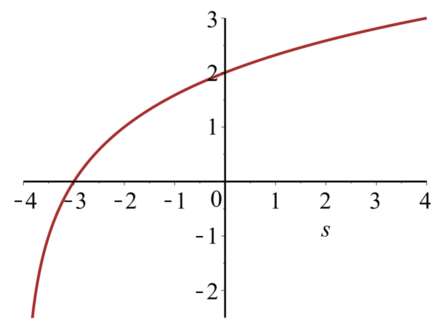
50. $]0,\infty[$; $(1,0)$



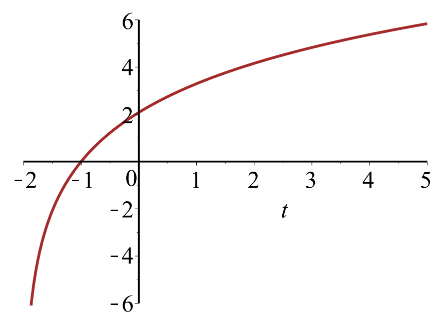
51. $]0,\infty[$; $(1,0)$



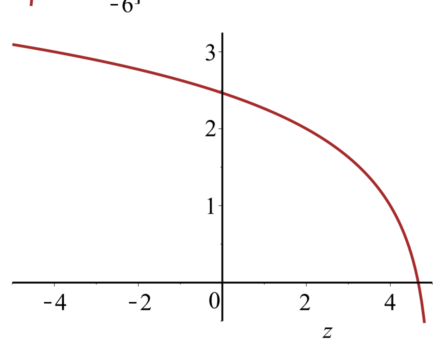
52. $]-4,\infty[$; $(0,2)$, $(-3,0)$



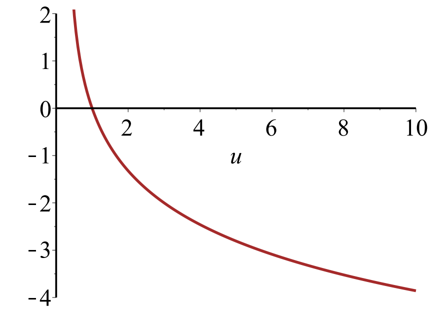
53. $]-2,\infty[$; $(0,2.07944)$, $(-1,0)$



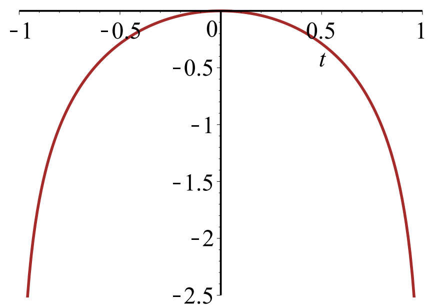
54. $]-\infty,5[$; $(0,2.46497)$, $(14/3,0)$



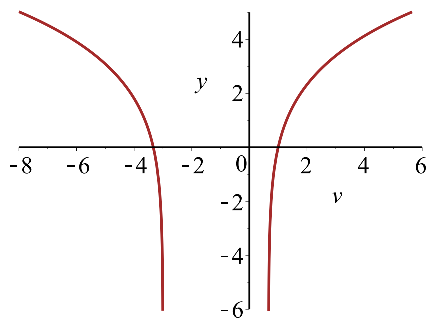
55. $]1/3, \infty[$; $(1,0)$



56. $]-1,1[$; $(0,0)$



57. $]-\infty,-3[\cup]2/3,\infty[$; $(-10/3,0)$, $(1,0)$



58. $\log_6 x + 2\log_6(x-1)$

59. $2 + 2\log_3(a+b) + \frac{1}{2}\log_3(a-b)$

60. $3\ln w + \ln(3y+5)$

61. $3\ln y + 3\ln(3w+5)$

62. $\frac{3}{2}\log_3 n + \frac{3}{4}\log_3 h - \frac{3}{2}h\log_3 5$

63. $4\log r + 2\log(s+1) - \frac{1}{3}\log(r-2) - 2r$

64. $4\log_2 p - \log_2(2q+5r) - 3\log_2(q+2) - \log_2(1-p) + \frac{1}{4}r - \frac{1}{4}\log_2(2-p) - \log_2 q$

65. $\log_2 15$

66. $\ln 150$

67. $\log(5/2)$

68. $\log 10 = 1$

69. $\ln \dfrac{x-y}{a(x+y)}$

70. $\log_3 x^{-1/2} y^{-1}$

71. $\log_7 (24ax^4/7)$

72. $\ln 2$

73. $\ln \dfrac{(3x+a)^3}{c-y}$

74. $\log_6 6^{3p+1} = 3p+1$

75. $p = \log_3 21 \approx 2.7712437$

76. $q = -3$

77. $w = \pm 2$

78. $r = (2+\ln 30)/5 \approx 1.0802395$

79. $x = \frac{1}{3}\log_5 3 \approx 0.22753540$

80. $t = -\log_6 72 \approx -2.3868528$

81. $v = 1/2$

82. $x = \pm 1$

83. $u = 0$

84. $y = \ln 4/(\ln 3 - \ln 4) \approx -4.8188417$

85. $s = (\ln 5 + 2\ln 6)/(\ln 6 - 2\ln 5) \approx -3.6387761$

86. $u = \pm 3$

87. $c = \pm\sqrt{\log 2} \approx \pm 0.54866201$

88. $y = \frac{1}{3}\log_2 36 \approx 1.7233083$

89. $r = 1/2$

90. $s \in \{1, 4\}$

91. $w = 25$

92. $x = \sqrt[3]{10009} \approx 21.550808$

93. $y = 299/95$

94. $z = 4$

95. $p = 4$

96. $q = 1$

97. $r = 2$

98. $s = 4$

99. $v = 1$

100. $t \approx 0.81446233$

101. $u = -1$

102. $v = 20$

103. $w = -1$

104. $x = 0$

105. No hay solución real

106. $z = 3$

107. $t = 5$

108. $v = -8/9$

109. $w = 10^{100}$

110. $x = 1/2$

111. $y = \pm 4$

112. $z = 0$

113. $z \in \left\{ 1, \mathrm{e}^4 \right\}$

114. $x = 3$

115. $q \in \left\{ \mathrm{e}, \mathrm{e}^{-2} \right\}$

116. $p \in \{ \ln 2, 1000 \}$

117. **a.** ₡352.47. **b.** ₡159.44.

118. **a.** $4000 \cdot 1.018^t$. **b.** 6137.714 millones de habitantes.

119. **a.** $V(t) = 1800 \cdot 0.75^t$. **b.** \$427.15

120. **a.** ₡15 millones. **b.** 23 %.

121. **a.** ₡12.4 millones. **b.** ₡5.377 millones. **c.** 13 %.

122. **a.** $V(t) = 20 \cdot 1.12475^t$. **b.** 12.475 %.

123. **a.** $V(t) = 45.2422 \cdot 0.96812^t$. **b.** \$45 242. **c.** 3.188 %. **c.** \$34 913.

124. **a.** $TC(t) = 58.301 \cdot 1.13232^t$ en ₡/\$. **b.** 13.232 %.

125. **a.** $P(t) = 206065 \cdot 1.02973^t$ habitantes. **b.** 2.973 %.

126. **a.** $P(t) = 5 \cdot 2^{t/30}$ en millones de habitantes. **b.** 2.337 %.

127. **a.** $f(T) = 1.1261624 \times 10^{18} \times 0.93306951^T$.
b. 1.1040808×10^{15} segundos, o aproximadamente 35 millones de años.

128. En 30.697 días

129. En el 2008

130. En 1953, 1977 y 1991

131. En 1988

132. En 2.043 años (2 años, 16 días)

133. **a.** En 1.390 años (1 año, 4 meses, 20 días). **b.** 0.691 años (8 meses, 9 días) atrás.

134. Dentro de 2.14 años (2 años, 1 mes, 20 días)

135. 4.977 años (4 años, 11 meses, 22 días)

136. ₡100 el 18 de octubre de 1990 y ₡500 el 3 de marzo de 1998

137. 5.9928 años (5 años, 11 meses, 27 días)

138. **a.** \$5500. **b.** 3 % anual.

139. 1921.86 m

140. **a.** $c = 0.010060$. **b.** 49.7 cm.

141. 540.9°

142. $\mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - \log_2(x-4))$, $]4, \infty[$

143. $\mathbb{R}$, $p^{-1}(w) = 3 + \log_4(w-2)$, $]2, \infty[$

144. $\mathbb{R}$, $p^{-1}(z) = \log_5(2 - z/3) - 1$, $]-\infty, 6[$

145. $\mathbb{R}$, $g^{-1}(y) = 2 - \log_3(20 - 4y)$, $]-\infty, 5[$

146. $\mathbb{R}$, $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{3 + \log(2t+2)}$, $]-1, \infty[$

147. $]0, \infty[$, $h^{-1}(x) = 2^{x-3}$, $\mathbb{R}$

148. $]-\infty, 1[$, $g^{-1}(t) = 1 - 2^{4-t}$, $\mathbb{R}$

149. $]0, \infty[- \{1\}$, $q^{-1}(v) = 10^{1/(5-v)}$, $\mathbb{R} - \{5\}$

150. $]-\infty, 0[$, $h^{-1}(y) = \ln(1 - \mathrm{e}^y)$, $]-\infty, 0[$

151. $[0, 1[$, $r^{-1}(u) = \left(1 - 2^{8-u}\right)^2$, $[8, \infty[$

152. $]5, \infty[$

153. $]-\infty, 0] \cup [5, \infty[$

154. $]-\infty, 1/3] \cup [3, \infty[$

155. $]0, \log 5[$

156. $]-3, 0[$

157. $[-7/4, 1/4[$

158. $]-\infty, -5[\cup]-2, 5/19[$

159. $]0, \mathrm{e}^{-2}] \cup [\mathrm{e}^2, \infty[$

160. $]-5, -3] \cup [3, 5[$

161. $[2, \infty[$