Informe Final del Proyecto: La Representación Lineal de Gromov

Dr. José Rosales Ortega
ITCR
ESCUELA DE MATEMÁTICA

27 de febrero de 2012

Índice general

0.1. Resumen

El objetivo en este trabajo es considerar técnicas provenientes de diversas áreas de la matemática, tales como el análisis, el álgebra y la geometría, para dar una prueba de una versión semisimple de la llamada representación integral de Gromov.

La llamada representación de Gromov prueba la existencia de una representación del grupo fundamental de una variedad M en un grupo de matrices. Lo grandioso de tal representación es que la clausura de Zariski de la imagen de tal representación es localmente isomorfa al grupo original.

0.2. Introducción

En este apartado desarrollaremos algunos de los conceptos básicos que serán usados en la parte principal del proyecto. La mayoría de resultados, sobre acciones de tipo tame, se pueden encontrar en el muy interesante libro [3].

Los resultados básicos que se necesitan tienen que ver con acciones de grupos sobre variedades. De hecho toda mi labor en los últimos años ha girado en torno a las acciones de grupos sobre variedades pseudo-Riemannianas.

En este estudio nos hemos visto en la necesidad de amalgamar una gran cantidad de teorías matemáticas las cuales por sí mismas son importantes, y algunas de ellas algo complicadas. En este sentido nuestro proyecto integra áreas como el análisis, el álgebra y la geometría, para citar los más relevantes.

Nos interesa, del análisis, que nuestras medidas sean ergódicas, y es por eso que la primera sección se basa en generalidades sobre acciones ergódicas y acciones de tipo tame. Este último tipo de acción ha sido popularizada por Zimmer.

Otro tipo de acciones que usaremos son las llamadas acciones algebraicas. Este tipo de acciones pertenecen al área de la geometría algebraica. Por eso en la segunda sección damos los elementos básicos sobre conjuntos algebraicos y la llamda topología Zariski.

En las dos secciones anteriores todo lo expuesto es conocido, es decir aparece en algún libro o en algún artículo. Sin embargo, en la sección tercera hablamos del famoso teorema de Densidad de Borel, y por primera vez enunciamos y probamos un nuevo teorema. Este nuevo teorema viene siendo la versión semisimple del teorema de Densidad de Borel. Al mismo tiempo usamos esta nueva versión para calcular la envoltura algebraica, un concepto el cual fue inventado por Zimmer, y calculamos tal envoltura algebraica en un caso muy particular y del cual haremos uso posteriormente.

En la última sección, antes de probar el resultado principal del proyecto, enunciamos, sin prueba, el teorema del centralizador de Gromov. Se hace la advertencia que tal teorema implica varios puntos pero que sólo hemos puesto el que nos interesa para nuestra labor.

0.2.1. Acciones Ergódicas

Definición 1 *Una medida sobre un conjunto X será una medida no negativa, es decir, una función μ que es contablemente aditiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y con valores en $[0, \infty]$. Cuando $\mu(X) = 1$ diremos que la medida es de probabilidad.*

Definición 2 *Una función $T : X \to Y$, donde X es un espacio de medida con σ-álgebra $\mathcal{A}$, y Y es otro espacio de medida con σ-álgebra $\mathcal{B}$se llamará medible si $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ siempre que $B \in \mathcal{B}$.*

Definición 3 *Si $T : X \to Y$ es una función medible y μ es una medida sobre $(X, \mathcal{A})$, definimos $T_*\mu$ como la medida en $(Y, \mathcal{B})$ tal que*

$$T_*\mu(B) \;=\; \mu(T^{-1}B),$$

para cada $B \in \mathcal{B}$.

Definición 4 *Una función medible $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice que preserva medida si $T_*\mu = \mu$. También diremos que μ es una medida invariante para T. Si $T_*\mu$ y μ poseen los mismos conjuntos de medida cero diremos que μ es una medida cuasi invariante para T.*

Definición 5 *Se dice que T es una transformación de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que preserva medida si T es biyectiva, si T y T^{-1} son medibles, y ambas preservan medida.*

Definición 6 *Un mapeo medible $T : X \to Y$, entre G-espacios, se llama un G-map si $T(g \cdot x) = g \cdot T(x)$, para todo $g \in G$ y todo $x \in X$. Si la acción de G sobre $T(X)$ es trivial diremos que T es G-invariante.*

Definición 7 *Un G-espacio X medible, con una medida cuasi invariante μ, se dice ser ergódico si cada conjunto medible G-invariante es ya sea nulo o conulo.*

El primer teorema relevante que obtenemos es el siguiente.

Teorema 1 *Sea M variedad suave, y que la que G es un grupo que actúa de forma suave sobre M. Si M posee una medida μ la cual es cuasi invariante y positiva sobre abiertos, entonces si la acción es propiamente ergódica se sigue que $G \cdot x$ es densa para casi todo x.*

La prueba es sencilla. Sea $W \subset M$ un abierto,y consideremos al siguiente conjunto $A = \cup_{g \in G} Wg$. No es difícil probar que A es abierto, ya que cada Wg lo es, y además que A es G-invariante. Por ergodicidad, ya que A es medible y G-invariante, se sigue que A debe ser conulo, es decir, $\mu(M \setminus A) = 0$

Como M es segundo numerable, sea $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de M. Consideremos al conjunto

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{g \in G} W_n g.$$

Observe que B es conulo , ya que

$$\begin{aligned}
\mu\left(B^C\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M \setminus \bigcup_{g\in G} W_n g)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(M \setminus \bigcup_{g\in G} W_n g\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $x \in B$, entonces $x \in \bigcup_{g\in G} W_n g$ para todo n, y de esto sigue que $xg^{-1} \in W_n$, para alguún $g \in G$. Por lo tanto, se tiene que la órbita xG cumple que $xG \cap W_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que para cada $x \in B$, la órbita xG es densa.

Definición 8 *Un espacio Borel se llama contablemente separado si existe una sucesión de conjuntos Borel, $\{A_i\}$ que separan puntos. Si la sucesión anterior genera la estructura Borel, diremos que el espacio es contablemente generado.*

Definición 9 *Sea X un espacio Borel, contablemente generado, sobre el cual actúa G. La acción se llama tame si la estructura Borel cociente X/G es contablemente separado.*

Al unir los conceptos de ergodicidad propia y el de tame obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Suponga que la acción de G sobre X es tame. Entonces cada medida cuasi invariante ergódica μ sobre X está soportado sobre una órbita.*

Se puede suponer que $\mu(X) = 1$. Sea $\mathcal{J} = \{A_i\}$ la sucesión de conjuntos Borel que separan puntos en X/G. Se puede suponer que $\mathcal{J}$ es cerrada bajo complementos. De no serlo se adjuntan los complementos faltantes y la nueva familia sigue satisfaciendo lo mismo de antes.

Consideremos $\pi : X \to X/G$ el mapeo natural. Sea $\nu = \pi_*\mu$ la medida en X/G. Para cada $A \in \mathcal{J}$ tenemos que $\nu(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$, y la ergodicidad nos dice que esto último es 0 ó 1.

Consideremos el siguiente conjunto

$$B = \bigcap\{A \in \mathcal{J} : \nu(A) = 1\}.$$

Se afirma que $\nu(B) = 1$ y de esto que B consta de un único punto Si B consta de dos puntos, digamos $x, y \in B$, entonces existen A en $\mathcal{J}$ que separa los puntos x, y. Luego A o su complemento debe tener medida igual a 1. Esto contradice la definición del conjunto B.

Por lo tanto, la medida ν está soportada en un conjunto de un punto en X/G, lo cual se traduce a que μ está soportada en una órbita de la G-acción.

Teorema 3 *Suponga que X es un G-espacio ergódico y que Y es un espacio contablemente separado. Si $f : X \to Y$ es una función Borel G-invariante, entonces f es esencialmente constante, es decir que f es constante sobre un conjunto conulo.*

La prueba es casi la misma del teorema anterior. Definimos la medida ν sobre Y en base a la medida μ y la función f, es decir, $\nu = f_*\mu$. Se puede probar que ν está soportada en un conjunto de un punto. Luego $\mu(xG) = 1$ para algún $x \in X$. Ahora bien, sobre tal órbita se tiene que $f(xG) = f(x)$, lo cual indica que f es constante sobre tal conjunto el cual es conulo.

En la mayoría de los casos tenemos que la acción de un grupo sobre cierto conjunto es por lo general continua más que tame. Si una acción continua tiene la particularidad que todas sus órbitas son localmente cerradas entonces la acción es tame.

Definición 10 *La órbita xG de un G-espacio X es localmente cerrada si es abierta en su clausura $\overline{xG}$*

El siguiente resultado implica que acciones continuas cuyas órbitas son localmente cerradas son tame.

Teorema 4 *Supongamos que G actúa de forma continua sobre una variedad M. Si cada G-órbita es localmente cerrada, entonces la acción es tame.*

Consideremos el mapeo natural $\pi : M \to M/G$. Como π es una función abierta y M posee una base numerable, se sigue que M/G también es segundo numerable. Para ver que M/G es un espacio Borel contablemente separado mostraremos que M/G posee la propiedad T_0, es decir que dados dos puntos al menos uno de ellos posee un abierto que no contiene al otro punto.

Sean $x, y \in M$ y consideremos $\pi(x)$ y $\pi(y)$. Asumamos que no son separados por un abierto, luego $yG \subset \overline{xG}$. De la misma forma, $xG \subset \overline{yG}$. Luego yG es denso en $\overline{xG}$. Por hipótesis yG es abierta en $\overline{xG}$, y por lo tanto $yG \cap xG \neq \emptyset$. Esto último, significa que $\pi(x) = \pi(y)$.

Como una consecuencia inmediata del resultado anterior tenemos al siguiente corolario.

Corolario 1 *Sea G un grupo compacto que actúa de forma continua sobre una variedad M. Entonces la G-acción es tame.*

Basta notar que por compacidad cada G-órbita es localmente cerrada.

0.2.2. Acciones Algebraicas

Las acciones algebraicas son acciones definidas por ecuaciones polinomiales, y como tales jugarán un papel importantísimo en lo que respecta a la representación de Gromov.

Definición 11 *Un conjunto algebraico afín, real o complejo, es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ el cual consiste de los ceros comunes de un conjunto de polinomios. Si para $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ denotamos con $\mathbb{F}[x]$ al conjunto de polinomios en n-indeterminadas y coeficientes en $\mathbb{F}$, entonces para $J \subset \mathbb{F}[x]$, definimos*

$$\mathcal{V}(J) = \{\vec{p} \in \mathbb{F}^n : f(\vec{p}) = 0, \textit{para todo } f \in \mathbb{F}[x]\}$$

.

Luego $V = \mathcal{V}(J)$ se llamará un conjunto $\mathbb{F}$-algebraico.

Definición 12 *La topología Zariski de $\mathbb{F}^n$ es aquella donde se definen los cerrados como todos los conjuntos afines algebraicos $\mathcal{V}_J(\mathbb{F})$.*

Lema 1 *Los conjuntos algebraicos afines satisfacen lo siguiente:*

- $\mathcal{V}(J_1) \cup \mathcal{V}(J_2) = \mathcal{V}(J_1 J_2)$.
- $\cap \mathcal{V}(J_\alpha) = \mathcal{V}(J)$, *donde J es el ideal generado por la unión de los J_α*
- $\mathcal{V}(\mathbb{F}[x]) = \emptyset$ *y* $\mathcal{V}(\emptyset) = \mathbb{F}^n$.

El lema anterior demuestra que en efecto los conjuntos algebraicos definen una topología sobre $\mathbb{F}^n$.

Es claro que para cada punto $\vec{p} \in \mathbb{F}^n$, el conjunto $V = \{\vec{p}\}$ es cerrado. En efecto, podemos tomar el polinomio $f \in \mathbb{F}[x]$ dado por $f(\vec{x}) = (x_1 - p_1) + \cdots + (x_n - p_n)$. Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{V}(f) = V$. Además, se puede probar que $\mathbb{Z}$ es Zariski denso en $\mathbb{C}$, es decir que cualquier polinomio que se anula sobre $\mathbb{Z}$ debe también anularse sobre $\mathbb{C}$.

Definición 13 *Sea V conjunto algebraico afín y sea $f \in \mathbb{F}[x]$. El conjunto abierto*

$$V_f = \{p \in V : f(p) \neq 0\},$$

en V se llama un conjunto abierto principal.

Es un buen ejercicio probar que los conjuntos abiertos principales forman una base para la topología Zariski de V.

Recordemos que $\mathbb{F}[x]$ es anillo Noetheriano, es decir que dada una cadena de ideales crecientes $J_1 \subset J_2 \subset \cdots$ eventualmente estabiliza: existe $k \in \mathbb{N}$ con $J_k = J_{k+1} = \ldots$. Esto implica que cualquier ideal de $\mathbb{F}[x]$ es generado por un número finito de polinomios.Por lo tanto, cualquier $V(J)$ es la intersección de un número finito de $V(f)$, $f \in \mathbb{F}[x]$.

Teorema 5 *Sea A una familia de conjuntos algebraicos afines en $\mathbb{F}^n$. Entonces A posee un miembro minimal.*

Definición 14 *Un conjunto algebraico V se llama irreducible si no existe una descomposición $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1, V_2 \subset V$ subconjuntos algebraicos propios.*

Como consecuencia del teorema anterior se deduce que cada V descompone, en una única forma, como una unión finita de subconjuntos algebraicos irreducibles:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_l,$$

donde cada V_i no está contenido en V_j para $i \neq j$. A los V_j se les llama las componentes irreducibles de V.

0.2.3. El Teorema de Densidad de Borel

El siguiente teorema será de suma utilidad en nuestro trabajo y es conocido en la literatura como el teorema de Densidad de Borel. No expondremos su prueba, pero el lector interesado puede consultar en [**?**] para un esquema de la demostración

Teorema 6 *Supongamos que $\mathbf{G}$ es un $\mathbb{R}$-grupo algebraico semisimple y conexo. Sea $G = \mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$, y asuma que G no posee factores compactos. Sea Γ un subgrupo cerrado tal que G/Γ posee una medida G-invariante. Entonces Γ es Zariski denso en $\mathbf{G}$.*

En la práctica vamos a utilizar una versión un poco diferente del teorema anterior, la cual expondremos a continuación.

Teorema 7 *Suponga que $G = \mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ actúa algebraicamente sobre V, una variedad algebraica real. Entonces cada medida finita G-invariante está soportada en los puntos fijos de G en V.*

Es conocido que las acciones algebraicas son tame, luego por un resultado anterior se sigue que las componentes ergódicas de la medida están soportadas en G-órbitas. Luego V/G es contablemente separado y el map $\pi : V \to V/G$ es una función Borel G-invariante. Usando el teorema 3 tenemos que π es esencialmente constante, y luego soportada en una órbita.

Cada tal órbita es un punto. En efecto, sea x un punto en la G-órbita en la cual la medida está soportada. Como la acción es algebraica se sigue que G_x es variedad algebraica real. Por otro lado, G/G_x posee una medida finita G-invariante. Aplicando el teorema de densidad de Borel con $\Gamma = G_x$ se tiene que $G = G_x^Z$, donde esto último denota la clausura Zariski de G_x. Como G_x es algebraico real se tiene que $G = G_x$. Por lo tanto, la G-órbita que soporta la medida es un punto. Al tomar todas las componentes ergódicas conclu\'imos el resultado.

El concepto de la envoltura algebraica fue introducido por Zimmer(ver [9]). El cálculo de tal envoltura algebraica en un caso particular es conocido en el caso del grupo de Lie simple, en el caso semisimple presentamos una nueva prueba la cual damos a continuación.

Teorema 8 *Sea G un grupo de Lie semisimple, conexo, sin factores compactos, actuando ergódicamente sobre M y preservando una medida finita μ. Sea P el haz fibrado principal trivial $M \times GL(\mathfrak{g})$ donde G actúa por $g(x, A) = (gx, Ad_G(g)A)$. Entonces la envoltura algebraica de esta acción es la clausura Zariski de $Ad_G(G)$ en $GL(\mathfrak{g})$.*

Si L es cualquier subgrupo de $GL(\mathfrak{g})$, una sección del haz P/L es una mapeo $M \to GL(\mathfrak{g})/L$, debido a que P es un haz fibrado trivial. Por lo tanto, el mapeo constante $n \mapsto [e]$ es una sección G-invariante de $GL(\mathfrak{g})/H$, donde H es la clausura Zariski de $Ad_G(G)$ en $GL(\mathfrak{g})$, luego la envoltura algebraica está contenida en H. Sea $L \subset H$ la envoltura algebraica de la acción. Por definición, existe una reducción G-invariante de L, luego existe un mapeo G-invariante $f : M \to H/L$. La medida $f_*\mu$ es ergódica y G-invariante sobre H/L, y una nueva aplicación del teorema de densidad de Borel para el caso semisimple indica que $H = L$.

0.2.4. El Teorema del Centralizador de Gromov

El siguiente resultado, muy importante por cierto, es conocido como el teorema del centralizador de Gromov. En base a este teorema podremos construir la representación lineal de Gromov, es decir el principal objetivo de este proyecto.

La demostración de este teorema es sumamente pesada y no se presentar en este trabajo. El lector que desee ver su génesis puede consultar [**?**]. Para una versión más reciente puede consultar [1].

Teorema 9 *Sea M una variedad analítica conexa a la cual se le anexa una estructura rígida analítica σ. Sea G un grupo de Lie, conexo, semisimple, sin factores compactos, y con centro finito el cual actúa analíticamente sobre M. Suponga que G preserva a σ y a una medida G-invariante μ, la cual es positiva sobre conjuntos abiertos. Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de campos vectoriales Killing sobre la cubierta universal $\widetilde{M}$ inducida por la acción de la cubierta universal $\widetilde{G}$ de G.*

Si $\mathcal{V}$ denota el espacio de campos vectoriales Killing analíticos sobre $\widetilde{M}$ que centralizan $\mathcal{G}$ entonces

1. *$\mathcal{V}$ es $\pi_1(M)$-invariante*
2. *$\mathcal{V}$ es de dimensión finita.*
3. *existe un abierto conulo $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$, invariante bajo $\pi_1(M)$ y $\widetilde{G}$, sobre el cual $\widetilde{G}$ actúa localmente libre y tal que $T_x(\widetilde{G}x) \subset ev_x(\mathcal{V})$ para cada $x \in \widetilde{U}$.*

0.3. La Representación Lineal de Gromov

Del teorema del Centralizador de Gromov para acciones de grupos de Lie semisimples se tiene que $\mathcal{H}$, el espacio de campos vectoriales Killing sobre $\widetilde{M}$ que centralizan al álgebra de Lie de campos vectoriales Killing sobre $\widetilde{M}$, da origen a una representación $\rho : \pi_1(M) \to GL(\mathcal{H})$ definida por $\rho(\alpha)(X) := d\alpha(X)$, donde hemos usado que cada $\alpha \in \pi_1(M)$ se puede ver como una transformación de escritorio sobre la cubierta univeral de M. El siguiente resultado justifica lo dicho anteriormente:

Lema 2 *Si $X \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \pi_1(M)$, entonces $d\alpha(X) \in \mathcal{H}$.*

Tomemos cualquier $Y^* \in \mathfrak{G}$, como en el teorema del centralizador de Gromov, y note que $d\alpha(Y^*) = Y^*$. Es claro que $d\alpha(Y^*)_{\alpha(m)}(f) = d\alpha_m(Y^*_m)$, además

$$\begin{aligned} d\alpha_m(Y^*_m) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\alpha(m \cdot \exp tY)) \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\alpha(m) \cdot \exp tY) \\ &= Y^*_{\alpha(m)}(f). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} [d\alpha X, Y^*] &= [d\alpha X, d\alpha Y^*] \\ &= d\alpha([X, Y^*]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

El siguiente teorema será una herramienta importante en el teorema de representación de Gromov.

Teorema 10 *Sea $P(M,\Gamma)$ un haz fibrado principal, donde Γ no es necesariamente algebraico. Asuma que H actúa por automorfismos de haces principales sobre P. Sea $\sigma : \Gamma \to G$ un homomorfismo en un grupo algebraico, y sea L la clausura Zariski de $\sigma(\Gamma)$. Sea $Q(M,G)$ el haz fibrado pricipal asociado , sobre el cual H actúa naturalmente por automorfismos. Entonces la envoltura algebraica de la H-acción sobre Q está contenida en L para casi todo $m \in M$.*

Como un corolario útil tenemos al siguiente.

Corolario 2 *Considere el $GL(\mathcal{V})$ fibrado principal $(\widetilde{M} \times GL(\mathcal{V}))/\pi_1(M)$. La envoltura algebraica de la G-acción sobre este haz principal está contenida en la clausura Zariski de $\rho(\pi_1(M))$.*

Sabemos que $\widetilde{M}(M, \pi_1(M))$ es un haz fibrado principal Consideremos el homomorfismo $\rho : \pi_1(M) \to GL(\mathcal{V})$. y buscamos el haz principal asociado, el cual en este caso es dado por $(\widetilde{M} \times GL(\mathcal{V}))/\pi_1(M)$. Usando el teorema anterior obtenemos el resultado buscado.

El siguiente teorema es el llamado teorema de representación lineal de Gromov. Este teorema constituye la parte principal del proyecto, cabe señalar que el proyecto lleva tal nombre.

Teorema 11 *Usando las mismas hipótesis del teorema del Centralizador de Gromov existe una representación* $\sigma : \pi_1(M) \to Gl(q, \mathbb{R})$ *para algún* q *tal que la clausura Zariski de* $\sigma(\pi_1(M))$ *contiene un grupo el cual es localmente isomorfo a* G.

La parte tres del teorema del centralizador de Gromov prueba que $ev(E^{\mathcal{V}})$ contiene el subhaz de espacios tangentes a las G-órbitas. Llamemos a tal subhaz como es usual TO.

El haz de marcos asociado a TO es $L(TO)$, el cual es trivial. Luego la envoltura algebraica para la G-acción sobre tal haz de marcos es exactamente la clausura Zariski de $Ad(G)$.

Por el corolario anterior la envoltura algebraica, o clausura Zariski, para la G-acción sobre el $GL(\mathcal{V})$ fibrado principal $(\widetilde{M} \times GL(\mathcal{V}))/\pi_1(M)$ está contenida en la clausura Zariski de $\sigma(\pi_1(M))$.

Existe un homomorfismo de $L(T,K)|_U$ a $L(TO)$, y luego existe una sobreyección de la envoltura algebraica de $L(T,K)|_U$ sobre la envoltura algebraica de $L(TO)$. Como las envolturas algebraicas de $L(T,K)|_U$ y $(\widetilde{M} \times GL(\mathcal{V}))/\pi_1(M)$ son las mismas, se sigue que la clausura Zariski de $\sigma(\pi_1(M))$ tiene un subgrupo que es sobreyectivo sobre $Ad(G)$. Al ser G semisimple se sigue que la clausura Zariski de $\sigma(\pi_1(M))$ contiene un subgrupo localmente isomorfo a G.

0.4. Revisión de Literatura

En esta parte haré mención de la literatura que más se usó en la realización del proyecto, pero para efectos de claridad incluiremos toda la literatura usada. Esto es sumamente importante por que demuestra que mucho de lo que está en este proyecto es nuevo en cuanto a las demostraciones que ofrecemos y en cuanto a los enunciados que brindamos. Lo que no es nuevo en cuanto al enunciado es en su mayoría nuevo en cuanto a la prueba que ofrecemos.

Para los conceptos de la dinámica de acciones, el referente es [9] . Este libro es muy didáctico y la biblia en lo que respecta a acciones de tipo tame.

Para los conceptos relativos a grupos algebraicos el referente es [3], y como segunda opción utilizamos de vez en cuando al también excelente libro [9].

Sin lugar a dudas el referente a los temas sobre fibrados principales y a los conceptos que se definen sobre ellos, tales como fibrados asociados, se sigue consultando del excelente libro [4].

Uno de los artículos que más se utilizó en el presente trabajo lo constituye [6]. Básicamente para revisar ciertas técnicas sobre grupos fundamentales.

Muchos otros libros, que sin la ayuda económica de la vicerectorría de Investigación no hubieran sido posible incorporar, no se citan en esta parte pero que sirvieron para aclarar muchas dudas que se presentaron durante el desarrollo del proyecto, y que por falta de interacción con otros matemáticos del área no se podían evacuar.

Cabe señalar que al revisar la literatura actual no se encontró un resultado similar al nuestro en cuanto a la hipótesis de semisimplicidad de nuestro grupo G y en cuanto a la version más general que hemos usado con respecto al teorema del Centralizador de Gromov.

Bibliografía

[1] A. Candel and R. Quiroga-Barranco, *Gromov's Centralizer Theorem*, Geometriae Dedicata

[2] R. Bishop and R. Crittenden , *Geometry of Manifolds*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 2001.

[3] R. Feres, *Dynamical Systems and Semisimple Lie Groups* . Cambridge University Press, 1998.

[4] S. Kobayaschi and K. Nomizu, *Foundations in Differential Geometry*, John Wiley, New York, 1980.

[5] R. Quiroga-Barranco, *Isometric actions of simple Lie groups on pseudoRiemnnian manifolds*, Annals of Mathematics. **164**(2006), 941-969.

[6] J. Rosales, *The signature in actions of semisimple Lie groups on pseudo-Riemannian manifolds*, to appear in PROYECCIONES Journal of Mathematics.

[7] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle like-metrics.* Annals of Mathematics. **69**(1959), 119-132.

[8] J. Szaro *Isotropy of Semisimple Group Actions on Manifolds with Geometric Structures*, American Journal of Mathematics **120**(1998), 129-158.

[9] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and Semi-simple Lie groups*, Birkhäuser, Boston, 1984.

0.5. Conclusiones y recomendaciones

El proyecto en cuestión sirvió de plataforma para lograr una aplicación inmediata del celebrado teorema del centralizador de Gromov. Cabe señalar que se logró poner tal resultado en un contexto más general que lo encontrado en la literatura, a saber el contexto de grupos de Lie semisimples y acciones algebraicas.

Se cumplieron los objetivos , tanto generales como específicos que se apuntaron en el inicio del proyecto.

Dos aspectos importantes a señalar en esta parte tienen que ver con la bibliografía y el tiempo en ejecutar el proyecto.

En primer lugar, quiero defender la compra de libros y artículos en el área de matemáticas y física teórica, ya que no tenemos en nuestra biblioteca del ITCR los libros para iniciarce en los orfrm[o]–genes de casi cualquier área de la matemática, y mucho menos revistas. Tampoco contamos con grupos amplios o al menos reducidos de investigadores con los cuales interactuar. .

0.6. Aportes y alcances

En esta parte mencionaremos los beneficios inmediatos y futuros de los resultados que obtuvimos en la realización del proyecto.

El beneficio inmediato de este tipo de proyectos es el hacer ciencia básica cuyos resultados pueden ser usados por colegas del área para sus investigaciones. En este sentido, hemos desarrollado una versión lo más general posible sobre la representación de Gromov. Esto se basa en el hecho primero que nuestro grupo fue semisimple, y segundo que nuestro teorema del Centralizador de Gromov está extendido a estructuras geométrica algebraicas.

Se logró generar más conocimiento en esta área y los resultados obtenidos se enviarán a una revista extranjera indexada.

No se dieron charlas al respecto, ya que la temática es sumamente técnica y demanda del expectador una gran cantidad de bagaje al respecto.

0.7. Anexo

0.7.1. Cumplimiento de objetivos.

Los siguientes objetivos se alcanzaron, en un 100 %, durante el desarollo del proyecto.

1. Establecer algunos resultados relativos al espacio cubriente de la variedad M y del grupo fundamental, $\pi_1(M)$. Esto se constata al revisar el corolario 2

2. Establecer una equivalencia entre el haz lineal asociado al espacio tangente a las órbitas y cierto espacio producto. Esto se verifica en parte de la prueba del resultado principal.

Dentro de las limitaciones que encontré puedo citar las siguientes:

- El precio de las cotizaciones que se dan en lugares como Amazon.com sobre los libros que se ocupan en el proyecto y el precio en que adquieren tales libros difiere notablemente. Debo indicar que debido a este desbalance no pude comprar un par de libros que necesitaba y que por ser tan recientes, salieron en mayo del 2011.

- Falta más acompañamiento por parte del oficial de proyecto asingado. En este sentido puedo indicar que uno queda prácticamente desamparado cuando el oficial se ausenta del país por períodos largos. Debería quedar un sustituto en tales casos, cosa que no sucedió esta vez.

- El desconocimiento que tienen las autoridades sobre lo que significa ciencia básica y los métodos de investigación y de presentación de trabajos en tales áreas. Esto trae serios problemas porque los trabajos en ciencia básica difieren notablemente en su metodología a los de ingeniería o a los que toman grandes muestras y analizan datos.

0.7.2. Observaciones generales.

Es mi sentir que el informe de un proyecto de investigación debe ser algo más sucinto, y que la parte innovadora u original debe venir consignada ya sea por una patente, un artículo sometido a consideración de alguna revista o un libro, para citar unos pocos ejemplos. En este sentido quiero expresar que le solicito a la vicerrectoría de investigación la ayuda para la traducción al idioma inglés del artículo que da origen a este proyecto de investigación.

.