Instituto Tecnológico de Costa Rica
Vicerrectoría de Investigación
Escuela de Matemática
Informe Final del Proyecto:
Foliaciones Totalmente Geodésicas con Hojas Localmente Simétricas .

José Rosales Ortega, [1]

19 de agosto de 2011

[1]Investigador. Escuela de Matemática, ITCR

Índice general

0.1. Resumen

El objetivo en este trabajo es considerar técnicas provenientes de la geometría de foliaciones y de los grupos de Lie semisimples para dar una descripción completa de las foliaciones Riemannianas totalmente geodésicas, con una hoja densa, sobre variedades de volumen finito cuando sus hojas son isométricamente cubiertas por un espacio irreducible de rango superior de tipo no compacto. Entre tales técnicas usamos las ecuaciones fundamentales de una submersión, ver [7]. También usamos la llamadas métricas bundle-like que son introducidas en [11], para citar las técnicas provenientes de la teoría de foliaciones.

0.2. Palabras Claves

Acción topológicamente transitiva, Grupos semisimples, Foliaciónn Riemanniana, Métrica bundle-like, subvariedades totalmente geosésicas.

0.3. Introducción

Algunos de los resultados que vamos a enunciar tienen que ver con el concepto de cubrimiento de una variedad. Este concepto resulta ser fundamental para entender algunos teoremas y lemas que vamos a enunciar, citamos por ejemplo el Teorema del Centralizador de Gromov, ver [10]. Empezamos con el concepto de cubrimiento y algunos resultados elementales que son ampliamente conocidos.

Definición 1 *Sea $\pi : E \to B$ un mapeo de cubrimiento. Si $f : X \to B$ es una función continua, entonces diremos que un levantamiento de f es otro mapeo $\widetilde{f} : X \to E$ tal que $\pi \circ \widetilde{f} = f$.*

Lema 1 *Sea $\pi : E \to B$ un mapeo de cubrimiento tal que $\pi(e_0) = b_0$. Dado un camino $f : [0, 1] \to B$ con $f(0) = b_0$, existe un único levantamiento $\widetilde{f}$ de f tal que $\widetilde{f}(0) = e_0$.*

$$\widetilde{f}(s) \;=\; (\pi|_{V_0})^{-1}\,(f(s)).$$

La continuidad de $\widetilde{f}$ en $[s_i, s_{i+1}]$ se deduce del hecho de que $\pi|_{V_0}$ es un homeomorfismo. El lema del pegado garantiza que $\widetilde{f}$ es continua en $[0, 1]$. Además, es claro que se cumple la relación $\pi \circ \widetilde{f} = f$ en $[0, 1]$.

Falta probar que $\widetilde{f}$ es única. Supongamos que $\widehat{f}$ es otro levantamiento de f con $\widehat{f}(0) = e_0$. Supongamos que ya probamos que $\widetilde{f}(s) = \widehat{f}(s)$ para $s \in [0, s_i]$. Sea V_0 como antes, entonces para $s \in [s_i, s_{i+1}]$ tenemos que $\widetilde{f}(s) = (\pi|_{V_0})^{-1}\,(f(s))$. Por otra parte, $\widehat{f}$ debe llevar $[s_i, s_{i+1}]$ en $\pi^{-1}(U) = \cup V_\alpha$. Como $\widehat{f}([s_i, s_{i+1}])$ es conexo se sigue que $\widehat{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_\alpha$ para algún α. Como $\widetilde{f}(s_i) = \widehat{f}(s_i)$, se concluye que $V_0 = V_\alpha$. Ahora bien, si $s \in [s_i, s_{i+1}]$ debe tenerse que $\widehat{f}(s)$ es igual a algún punto $\beta \in V_0$ que pertenece a $\pi^{-1}(f(s))$. Como sólo existe un tal punto β, el cual es $(\pi|_{V_0})^{-1}(f(s))$, se concluye que $\widehat{f}(s) = \widetilde{f}(s)$ en $[0,1]$.

Lema 2 *Si (E, π) es un espacio cubriente de B, entonces los conjuntos $\pi^{-1}(\{b\})$, para todo $b \in B$, poseen el mismo número cardinal.*

Sean b_0, b_1 puntos arbitrarios en la base B, y elija un camino continuo $f : [0,1] \to B$ con $f(0) = b_0$ y $f(1) = b_1$. Vamos a definir un mapeo $\lambda : \pi^{-1}(\{b_0\}) \to \pi^{-1}(\{b_1\})$, el cual se mostrará que es biyectivo. Si tomamos arbitrariamente un $e_0 \in \pi^{-1}(\{b_0\})$, entonces por el lema anterior existe un levantamiento $\widetilde{f}$ de f tal que $\widetilde{f}(0) = e_0$. Sea $e_1 = \widetilde{f}(1)$, y pongamos $\lambda(e_0) = \widetilde{f}(1)$. Ahora bien, si tomamos $\widehat{f}(s) = \widetilde{f}(1-s)$, el llamado camino inverso, podemos definir $\beta : \pi^{-1}(\{b_1\}) \to \pi^{-1}(\{b_0\})$ por medio de $\beta(e_1) = \widehat{f}(0)$. Es claro que λ y β son inversas la una de la otra.

0.3.1. Transformaciones de escritorio.

Supongamos que tenemos un mapeo de cubrimiento,$\pi : \widetilde{M} \to M$. Una manera de reacomodar los puntos en cada fibra $\pi^{-1}(\{p\})$, donde $p \in M$ se logra al definir el siguiente tipo de mapeos.

Definición 2 *Sea $\pi : \widetilde{M} \to M$ un mapeo de cubrimiento de M. Una transformación de escritorio del mapeo de cubrimiento π es un difeomorfismo $\psi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que $\pi \circ \psi = \pi$.*

Si denotamos por $\mathfrak{D}$ al conjunto de todas las transformaciones de escritorio del cubrimiento π, entonces $\mathfrak{D}$ es un grupo al tomar como operación a la composición.

El siguiente teorema es conocido en la literatura, pero su proueba no es presentada con detalle en la mayoría de textos consultados. Aquí presentamos una prueba que se inspira en resultados aparecidos en [6].

Teorema 1 *Sea $\pi : \widetilde{M} \to M$ un mapeo de cubrimiento de M tal que $\widetilde{M}$ es simplemente conexa. Entonces*

$$\pi_1(M) \;\cong\; \mathfrak{D}.$$

A cada $[\alpha] \in \pi_1(M)$ le vamos a asociar una transformación de esctritorio del cubrimiento π.

Sea $x_0 \in M$ fijo, y tomemos $\widetilde{x_0} \in \pi^{-1}(\{x_0\})$. Si α es un camino continuo en M con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, entonces consideremos $\widetilde{\alpha}$ el único levantamiento de α con $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x_0}$.

A cada $[\alpha] \in \pi_1(M)$ le asociamos la única transformación de escritorio $\psi_{[\alpha]} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que $\psi_{[\alpha]}(\widetilde{x_0}) = \widetilde{\alpha}(1)$. Note que esto está bien definido , ya que si $\beta \in [\alpha]$, es conocido que $\widetilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1)$. Denotemos con λ a tal transformación, y veamos que propiedades posee.

La transformación $\lambda : \pi_1(M) \to \mathfrak{D}$ cumple ser un homomorfismo de grupos, es decir, $\lambda([\alpha] * [\beta]) = \lambda([\alpha]) \circ \lambda([\beta])$, para todo $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M)$.

Claramente se tiene que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x_0}$ y $\widetilde{\alpha}(1) = \psi_{[\alpha]}(\widetilde{x_0})$. De la misma forma, $\widetilde{\beta}(0) = \widetilde{x_0}$ y $\widetilde{\beta}(1) = \psi_{[\beta]}(\widetilde{x_0})$. De lo anterior se tiene $\widetilde{\alpha} * (\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta})$ es levantamiento de $\alpha * \beta$. En primer lugar se tiene que $(\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta})(0) = \psi_{[\alpha]}(\widetilde{x_0}) = \widetilde{\alpha}(1)$, y en segundo

$$\begin{aligned} \alpha * \beta \qquad &= (\pi \circ \widetilde{\alpha}) * (\pi \circ \widetilde{\beta}) \\ &= (\pi \circ \widetilde{\alpha}) * (\pi \circ \psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta}) \\ &= \pi \circ (\widetilde{\alpha} * (\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta})). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\lambda([\alpha * \beta])(\widetilde{x_0}) = \psi_{[\alpha*\beta]}(\widetilde{x_0}) = (\widetilde{\alpha} * (\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta}))(1) = (\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta})(1)$$

Por otra parte, $(\lambda([\alpha]) \circ \lambda([\beta]))(\widetilde{x_0}) = (\psi_{[\alpha]} \circ \psi_{[\beta]})(\widetilde{x_0}) = (\psi_{[\alpha]} \circ \widetilde{\beta})(1)$. Por último, usando el hecho de que $\widetilde{M}$ es conexo se concluye que $\lambda([\alpha] * [\beta]) = \lambda([\alpha]) \circ \lambda([\beta])$, para todo $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M)$.

Mostremos que λ es sobreyectiva. En efecto, tomemos $\phi \in \mathfrak{D}$. Sea $\widetilde{\alpha}$ un camino en $\widetilde{M}$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}_0$ y $\widetilde{\alpha}(1) = \phi(\widetilde{x}_0)$. Consideremos el elemento de $\pi_1(M)$ dado por $[\pi \circ \widetilde{\alpha}]$. Observe que $\psi_{[\pi\circ\widetilde{\alpha}]}(\widetilde{x}_0) = \widetilde{\alpha}(1) = \phi(\widetilde{x}_0)$, y de nuevo apelando a la conexidad de $\widetilde{M}$ se concluye que $\phi = \psi_{[\pi\circ\widetilde{\alpha}]} = \lambda([\pi \circ \widetilde{\alpha}])$.

Para finalizar la prueba se mostrará que λ es inyectiva. En esta parte usaremos por primera vez que $\widetilde{M}$ posee grupo fundamental trivial. Supongamos que $\lambda([\alpha]) = 1_{\widetilde{M}}$. Luego $\psi_{[\alpha]} = 1_{\widetilde{M}}$, y por construcción se sigue que $\widetilde{\alpha}$ es homotópica a una constante, luego $[\alpha]$ debe ser el elemento identidad en $\pi_1(M)$.

El siguiente teorema será útil más adelante, y esencialmente indica cómo levantar una acción sobre el espacio cubriente de una variedad. La prueba de este teorema es original, aunque el resultado es conocido, puede consultarse [**?**].

Proposición 1 *Sea G un grupo de Lie conexo que actúa sobre una variedad conexa M. Entonces para cualquier cubrimiento $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ existe una acción de $\widehat{G}$, la cubierta universal de G, sobre $\widetilde{M}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \widehat{G} \times \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0\times\pi"'] & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"'] \\ G \times M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

En otras palabras, existe una acción de $\widehat{G}$ que conmuta con las transformaciones de escritorio y para la cual los mapeos de cubrimiento son equivariantes.

Consideremos el siguiente mapeo $\Psi : \widehat{G} \times \widetilde{M} \longrightarrow M$ dado por $\Psi(\widehat{g}, \widetilde{m}) = \pi_0(\widehat{g})\pi(\widetilde{m})$. Si fijamos el punto $(\widehat{e}, \widetilde{m}_0) \in \widehat{G} \times \widetilde{M}$, entonces se sigue que existe un levantamiento $\widetilde{\Psi} : \widehat{G} \times \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ con $\widetilde{\Psi}(\widehat{e}, \widetilde{m}_0) = \widetilde{m}_0$ y tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{G}\times\widetilde{M} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\Psi}"] & M \end{tikzcd}$$

Debido a que $\widehat{G}$ es simplemente conexo es fácil probar que $\Psi_*(\pi_1(\widehat{G}\times\widetilde{M},(\widehat{e},\widetilde{m}_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{m}_0))$, y por lo tanto se concluye que $\widehat{\Psi}$ es único.

Se afirma que $\widetilde{\Psi}(\widehat{e},\widetilde{m}) = \widetilde{m}$,y que $\widetilde{\Psi}(ab,\widetilde{m}) = \widetilde{\Psi}(a,\widetilde{\Psi}(b,\widetilde{m}))$ para todo $\widetilde{m}\in\widetilde{M}$ y $a,b\in\widehat{G}$.

Para probar la primera afirmación notemos que los siguientes mapeos $\rho(\widetilde{m}) = \widetilde{\Psi}(\widehat{e},\widetilde{m})$ e $I(\widetilde{m}) = \widetilde{m}$ son levantamientos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dotted] & M \end{tikzcd}$$

Por otra parte, notamos que $\rho(\widetilde{m}_0) = I(\widetilde{m}_0)$. Por lo tanto, por la unicidad del levantamiento concluimos que $\rho(\widetilde{m}) = I(\widetilde{m})$ para todo $\widetilde{m}\in\widetilde{M}$. Esto demuestra lo requerido en la primera afirmación.

Para probar la segunda parte empezamos considerando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{G}\times\widetilde{M} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\Psi}"] & M \end{tikzcd}$$

donde $\Psi : \widehat{G}\times\widetilde{M} \longrightarrow M$ es dado por $\Psi(\widehat{g},\widetilde{m}) = \pi_0(\widehat{g})\cdot\pi(\widetilde{m})$. Usando la conmutatividad del diagrama anterior es relativamente fácil concluir que $\widetilde{\Psi}(ab,\widetilde{m}) = \widetilde{\Psi}(a,\widetilde{\Psi}(b,\widetilde{m}))$. En resumen, concluimos que $\widetilde{\Psi}$ es una acción de $\widehat{G}$ sobre $\widetilde{M}$.

Por último, sea $\phi\in\mathfrak{D}$. Es claro de la conmutatividad del diagrama anterior que

$$\begin{aligned} \pi(\widehat{g}\cdot\phi(\widetilde{m})) &= \pi(\widetilde{\Psi}(\widehat{g},\phi(\widetilde{m}))) \\ &= \Psi(\widehat{g},\phi(\widetilde{m})) \\ &= \pi_0(\widehat{g})\cdot\pi(\phi(\widetilde{m})) \\ &= \pi_0(\widehat{g})\cdot\pi(\widetilde{m}) \end{aligned}$$

Por otra parte, existe una única $\psi\in\mathfrak{D}$ tal que $\widehat{g}\cdot\phi(\widetilde{m}) = \psi(\widehat{g}\cdot\widetilde{m})$, y de la condición anterior se concluye que $\phi = \psi$. Por lo tanto, $\widehat{g}\cdot\phi(\widetilde{m}) = \phi(\widehat{g}\cdot\widetilde{m})$, es decir que la acción de $\widehat{G}$ conmuta con las transformaciones de escritorio.

Ahora nos enfocamos en variedades con estructura geométrica, y la correspondiente estructura geométrica sobre su cubrimiento universal para el cual el mapeo de cubrimiento es una isometría local y el grupo fundamental actúa por isometrías. Para los detalles sobre estructuras geométricas consultar [**?**].

Proposición 2 *Sea $\sigma : L^{(k)}(M) \longrightarrow Q$ una estructura geométrica de tipo Q y orden k, y $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un espacio de cubrimiento de la variedad suave M. Existe una estructura geométrica $\widetilde{\sigma} : L^{(k)}(\widetilde{M}) \longrightarrow Q$ de tipo Q y orden k sobre $\widetilde{M}$.*

Primero definimos el mapeo $\lambda : L^{(k)}(\widetilde{M}) \longrightarrow L^{(k)}(M)$ por medio de $\lambda(j_0^k(\psi)) = j_0^k(\pi \circ \psi)$. A partir del mapeo anterior definimos una estructura geométrica sobre $\widetilde{M}$ por $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ \lambda$.

Lo único que debemos probar es que tal mapeo es $Gl^{(k)}(n)$-equivariante. En efecto,

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(\alpha \cdot \widetilde{g}) &= \widetilde{\sigma}(j_0^k(\phi \circ f)) \\ &= \sigma(j_0^k(\pi \circ \phi \circ f)) \\ &= \widetilde{g}^{-1}\widetilde{\sigma}(\alpha) \end{aligned}$$

El siguiente resultado será útil en la prueba del teorema principal de este trabajo. Es un resultado simple, pero su prueba es original.

Lema 3 *Sea $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un espacio de cubrimiento suave. Si $S \subset M$ tiene medida cero, entonces $\widetilde{S} = \pi^{-1}(S)$ también posee medida cero.*

Sea μ una medida en M y consideremos μ_* la medida en $\widetilde{M}$, definida por $\mu_*(V) = \mu(\pi(V))$. Para cada $x \in M$ encontramos un vecindario abierto U_x tal que π es eventualmente cubierto por los U_x. Como M es segundo numerable podemos suponer que S posee una cubierta numerable $\{U_i \cap S\}_i$. Cada uno de los tales U_i cumple que

$$\pi^{-1}(U_i) = \bigcup_n V_n^i, \quad \text{and } \pi|_{V_n^i} : V_n^i \longrightarrow U_i,$$

es un difeomorfismo. Luego se concluye que

$$\begin{aligned} \mu_*(\widetilde{S}) &= \mu_*(\bigcup_{i,n} \pi^{-1}(V_n^i \cap S)) \\ &\leq \sum_{i,n} \mu(\pi(\pi^{-1}(V_n^i \cap S))) = 0. \end{aligned}$$

0.4. Espacios Simétricos Riemannianos

Entre las variedades Riemannianas más agradables están las variedades homogéneas. Lo agradable de trabajar en variedades homogéneas estriba en el hecho en que cada uno de sus puntos se ve exactamente como cualquier otro. La mayor parte de esta sección es tomada de [2].

Definición 3 *Una variedad Riemanniana M se llama* **homogénea** *si su grupo de isometrías actúa de manera transitiva sobre M. Lo anterior es equivalente a decir que dados cualesquiera $x, y \in M$, existe $\phi : M \to M$, isometría, tal que $\phi(x) = y$.*

Definición 4 *Una variedad Riemanniana M se llamará* **espacio simétrico** *si cumple lo siguiente:*

- *M es conexa;*
- *M es homogénea, y*
- *existe $\phi : M \to M$ isometrfrm[o]–a involutiva tal que posee al menos un punto fijo aislado.*

Proposición 3 *Supongamos que M es una variedad Riemanniana y $\phi : M \to M$ una isometría involutiva tal que p es un punto fijo aislado de ϕ. Entonces*

1. *$d\phi_p = -I$; y*
2. *para cada geodésica γ con $\gamma(0) = p$ se tiene que $\phi(\gamma(t)) = \gamma(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Por una simple aplicación de la regla de la cadena se tiene que

$$d(\phi^2)_p = d\phi_{\phi(p)} \circ d\phi_p = (d\phi_p)^2.$$

Como ϕ es involutiva entonces se concluye que $d(\phi)^2_p = I$. Luego debe tenerse que la transformación lineal $d\phi_p : T_p(M) \to T_p(M)$ es un cero del polinomio $x^2 - 1$.

Vamos a probar que sólo puede cumplirse que $d\phi_p = -I$. Si suponemos lo contrario que $d\phi_p \neq -I$, entonces debido a que $d\phi_p$ es diagonalizable se debe tener necesariamente que 1 es el único valor propio, y por lo tanto elegimos un vector propio asociado, es decir $v \in T_p(M)$ con $d\phi_p(v) = v$. Sea γ geodésica con $\gamma(0) = v$ y $\gamma^{'}(0) = v$. Claramente se tiene que $\phi \circ \gamma$ es geodésica, además $(\phi \circ \gamma)(0) = p$ y $(\phi \circ \gamma)^{'}(0) = v$. Por la unicidad se concluye que $\phi \circ \gamma = \phi$. Por lo tanto, se llega a que p no es punto fijo aislado de ϕ, lo cual contradice la hipótesis.

Para la segunda parte consideramos $\rho(t) = \gamma(-t)$. Es claro que ρ es geodésica. Ahora bien, $(\phi \circ \gamma)(0) = p = \rho(0)$, y también por la parte anterior se concluye que

$$(\phi \circ \gamma)^{'}(0) = d\phi_p(v) = -v = -\gamma^{'}(0) = \rho(0).$$

Una vez más por la unicidad se sigue que $\phi \circ \gamma = \rho$.

Los grupos de Lie pueden ser usados para construir espacios simétricos. Para empezar con esta construcción recurrimos al hecho muy conocido siguiente: sea M una variedad homogénea y conexa, y considere $G = \mathrm{Iso}(M)^{\circ}$. Por la transitividad de G sobre M se tiene la siguiente identificación $M \cong G/K$, donde K es el estabilizador de algún punto de M.

Recíprocamente, si K es cualquier subgrupo compacto de un grupo G, entonces existe una métrica Riemanniana G-invariante sobre G/K, de modo que con tal métrica G/K es homogéneo. La exigencia de que K sea compacto es para asegurar que G actúa por isometrías sobre G/K.

Teorema 2 *Sean G un grupo de Lie conexo, K subgrupo de Lie compacto de G, y $\sigma : G \to G$ automorfismo involutivo, tal que K es subgrupo abierto del centralizador $C_G(\sigma) = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$.*

Entonces G/K es espacio simétrico tal que $\tau(gK) = \sigma(g)K$ es isometrfrm[o]–a involutiva de G/K con eK como punto fijo aislado.

Definición 5 *Una variedad Riemanniana completa M se dice ser* **localmente simétrica** *si su cubierta universal es un espacio simétrico.*

La definición anterior significa que existe un espacio simétrico X, y un grupo de isometrías, Γ, de X tal que

- Γ actúa libre y propiamente discontinua sobre X, y
- M es isométrica a Γ/X.

0.5. Subvariedades.

Estas notas representan una extensión del excelente artículo de Barret O'neill: *The fundamental Equations of a Submersion.*

Definición 6 *Una variedad P es una subvariedad de una variedad suave M si:*

- *P es un subespacio topológico de M,*
- *el mapeo inclusión $j : P \hookrightarrow M$ es suave en cada punto $p \in P$, y su diferencial $dj_p; T_p(P) \to T_{j(p)}(M)$ es inyectiva.*

Es inmediato que si P es una subvariedad de M y $\phi : M \to N$ es mapeo suave, entonces $\phi|_P$ es suave. Esto ya que $\phi|_P = \phi \circ j$, y al ser composición de mapeos suaves será trivialmente suave.

Como convención vamos a ignorar al mapeo j, y consideraremos $T_p(P)$ como subespacio vectorial de $T_p(M)$.

Definición 7 *Un sistema de coordenadas en $p \in M$ es un par (ξ, U), donde $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo y $U \subset M$ es un abierto de M que contiene a p. Es costumbre escribir $\xi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ para $p \in U$.*

Si $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ es un sistema de coordenadas en una variedad M, entonces al mantener constantes $n - m$ cualesquiera de las funciones coordenadas se produce una subvariedad m-dimensional conocida como ξ-slice coordenado Σ de U.

Definición 8 *Sea $P \subset M^n$. Un sistema de coordenadas $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ en M se llama adaptado a P siempre que $U \cap P$ sea un ξ-slice coordenado de U.*

En el caso en que P sea una subvariedad de M, es claro al usar el teorema de la función inversa que $\xi|_P$ es un difeomorfismo sobre su imagen, y por lo tanto un sistema de coordenadas en P.

Proposición 4 *Si P^m es subvariedad de M^n, entonces en cada punto de P existe un sistema de coordenadas de M que es adpatado a P.*

Sea $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ sistema de coordenadas para M en $p \in M$. Por simplicidad escribiremos $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, y sea $y^1, \ldots, y^m$ sistema de coordenadas para P en p. Como P es subvariedad se sigue que dj_p es inyectiva, y por lo tanto su matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \qquad \text{posee rango igual a } m.$$

Entonces podemos suponer que sus primeras m filas constituyen un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, $x^1|_P, \ldots x^m|_P$ forman un sistema de coordenadas para P sobre un vecindario W de p.

Denotemos con $\eta = (x^1|_P, \ldots, x^m|_P)$. Sea f^k la expresión coordenada para $x^k|_P$, es decir, $x^k \circ \eta^{-1} = f^k$, luego $x^k = f^k \circ \eta = f^k(x^1|_P, \ldots, x^m|_P)$ sobre W.

Luego, $z^k = x^k - f^k(x^1, \ldots, x^m)$ está bien definida sobre algún vecindario de p en M. Si $\zeta = (x^1, \ldots, x^m, z^{m+1}, \ldots, z^n)$ entonces la matriz jacobiana de ζ relativa a ξ es

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ & \\ A & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior es diagonal y por lo tanto invertible, de esto se sigue que ζ es un sistema de coordenadas sobre algún vecindario U de p en M. Ahora bien, como P es subespacio topológico de M podemos elegir U tal que $U \cap P \subset W$. Por otra parte, como $\mathcal{O} = (x^1, \ldots, x^m)(U \cap P)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, al encoger U, si es necesario, podemos suponer que $(x^1, \ldots, x^m)(U) \subset \mathcal{O}$.

Sobre $U \cap P$ las funciones z^k son todas cero, luego $U \cap P$ está contenida en el slice

$$\Sigma : \ z^{m+1} = 0, \ldots, z^n = 0.$$

Recíprocamente $\Sigma \subset U \cap P$, y de esto se concluye que $\Sigma = U \cap P$.

El siguiente resultado, en apariencia obvio, depende del hecho que las subvariedades poseen la topología inducida.

Corolario 1 *Sea P^m una subvariedad de M^n. Si $\phi : N \to M$ es un mapeo suave tal que $\phi(N) \subset P$, entonces el mapeo inducido $\overline{\phi} : N \to P$ es suave.*

Si $q \in N$ tomemos $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas sobre un vecindario $U \subset M$ del punto $\phi(q)$ que es adaptado a P, es decir que las últimas $n - m$ coordenadas son constantes en $U \cap P$. Por la continuidad de ϕ se sigue que $\overline{\phi}$ también es continua. La prueba de este hecho es la siguiente. Sea B abierto en P, luego $B = P \cap A$, donde A es abierto en M. Como $\phi(N) \subset P$ se tiene que $\phi^{-1}(A) = \overline{\phi}^{-1}(B)$, de donde se concluye que $\overline{\phi}^{-1}(B)$ es abierto. Ahora bien, existe un vecindario V de $q \in N$ tal que $\phi(V) \subset U \cap P$. Notemos que $x^1|_P, \ldots x^m|_P$ forman un sistema de coordenadas para $U \cap P$. Si $j : P \hookrightarrow M$ es el mapeo inclusión, entonces

$$(x^i|_P) \circ \overline{\phi} = x^i \circ j \circ \overline{\phi} = x^i \circ \phi.$$

Como ϕ y las $x^1, \ldots, x^m$ son suaves se concluye que $\overline{\phi}$ también es suave.

Corolario 2 *Un subconjunto P de una variedad suave M se puede hacer subvariedad en a lo más una forma.*

Por definición a P se le debe imponer la topologfrm[o]–a inducida. Supongamos que introducimos dos atlas al espacio P que nos producen las subvariedades P_1 y P_2 de M. Notemos que $j : P_1 \hookrightarrow M$ y $j : P_2 \hookrightarrow M$ son suaves por definición. Por el resultado anterior se sigue que los mapeos identidad $P_1 \to P_2$ y $P_2 \to P_1$ son suaves. Por lo tanto P_1 y P_2 son difeomorfos.

Proposición 5 *Un subconjunto P de una variedad M es una subvariedad de dimensión m si y sólo si en cada punto $p \in P$ existe un sistema de coordenadas de M adaptado a P por m-slices.*

Asignemos a P la topologfrm[o]–a inducida. Sea $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas en M en $p \in P$ adaptado tal que $U \cap P$ es el slice $x^j = x^j(p)$ para $j = m+1, \ldots, n$. Podemos suponer que $\xi(p) = 0$, ya que en caso contrario tomamos $\eta = \xi - \xi(p)$ el cual si vale cero en p. Como ξ es homeomorfismo, el mapeo $\xi_P = (x^1, \ldots, x^m)|_P$ es un homeomorfismo de $U \cap P$ al conjunto abierto $\xi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Se afirma que todos los tales sistemas de coordenadas topoloógicos $\xi|_P$ en P forman un atlas. Es inmediato verificar que su unión cubre a P, y que el traslape de dos cualesquiera de ellos es suvae. En efecto, para $1 \leq i \leq m$, se tiene que

$$u^i \circ \xi_P \circ \eta_P^{-1} = u^i \circ (\xi \circ \eta^{-1})|_{\mathbb{R}^m},$$

donde $\mathbb{R}^m$ es considerado como el m-plano de las primeras m entradas de $\mathbb{R}^n$.

Resta probar que tal atlas convierte a P en subvariedad de M. Para un sistema de coordenadas ξ como antes, la funciones $x^i|_P = x^i \circ j$ para $i = 1, \ldots, m$ son suaves, ya que constituyen el sistema de coordenadas $\xi|_P$, se sigue que el mapeo inclusión debe ser suave. Por otra parte, la matriz jacobiana de ξ relativa a $\xi|_P$ contiene una matriz identidad de tamaño $m \times m$, y por lo tanto dj es siempre inyectiva.

Definición 9 *Un campo vectorial X sobre M es tangente a una subvariedad P de M si $X_p \in T_p(P)$ para todo $p \in P$.*

Proposición 6 *Sea P una subvariedad de M. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a P, entonces $X|_P$ es un campo vectorial suave sobre P.Además , si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a P, entonces $[X, Y]$ también es tangente a P y además $[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$.*

Supongamos que la primera parte se ha probado. Diremos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$ son ϕ-relacionados si para $\phi : M \to N$ mapeo suave se tiene que $d\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)}$ para todo $p \in M$. Note que de la definición anterior se sigue $(d\phi_p(X_p))g = (Y_{\phi(p)})g$ para $g \in \mathfrak{F}(N)$, y de esto se tiene que $X_p(g \circ \phi) = (Yg)(\phi(p))$. Se concluye entonces que $X(g \circ \phi) = Yg \circ \phi$ para $g \in \mathfrak{F}(N)$. Usando esta caracterización se puede probar que si X_1 y Y_1 son ϕ-reacionados y lo mismo para X_2 y Y_2, entoces $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ también son ϕ-relacionados. En efecto,

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2](g \circ \phi) &= X_1X_2(g \circ \phi) - X_2X_1(g \circ \phi) \\
&= X_1(Y_2g \circ \phi) - X_2(Y_1g \circ \phi) \\
&= Y_1Y_2g \circ \phi - Y_2Y_1g \circ \phi \\
&= (Y_1Y_2g - Y_2Y_1g) \circ \phi \\
&= [Y_1, Y_2]g \circ \phi.
\end{aligned}$$

Lo anterior se usa para probar que $[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$. En efecto, note que $X|_P$ es j-relacionado con X, donde $j : P \hookrightarrow M$, esto equivale a decir que $dj_p((X|_P)_p) = X_p$, luego debe tenerse que $[X|_P, Y|_P]$ es j-relacionado con $[X, Y]$

Definición 10 *Una submersión $\psi : M \to B$ es una mapeo suave y sobreyectivo, tal que $d\psi_p : T_p(M) \to T_{\psi(p)}(B)$ es sobreyectivo para todo $p \in M$.*

Es necesario recordar que un punto $q \in B$ se llama valor regular del mapeo suave $\psi : M \to B$ siempre que $d\psi_p$ sea sobreyectiva para cada $p \in \psi^{-1}(q)$. Es conocido el siguiente lema

Lema 4 *Si $q \in \psi(M)$ es valor regular de un mapeo suave $\psi : M \to N$, entonces $\psi^{-1}(q)$ es una subvariedad de M, y $\dim(M) = dim(N) + \dim(\psi^{-1}(q))$.*

Recordemos que un tensor métrico $\mathbf{g}$ sobre una variedad M es un $(0, 2)$ campo tensorial simétrico no degenerado sobre M de frm[o]–ndice constante. En otras palabras, $\mathbf{g} \in \mathfrak{F}^0_2(M)$ asigna de manera suave a cada punto $p \in M$ un producto escalar $\mathbf{g}_p$ sobre el espacio tangente $T_p(M)$, y el frm[o]–ndice de $\mathbf{g}_p$ es el mismo para todo p.

Definición 11 *Sea (P, j) una subvariedad de una variedad pseudo Riemanniana M. Si el pullback $j^*(\mathbf{g})$ es un tensor métrico sobre P , entonces P se denomina subvariedad pseudo Riemanniana de M.*

Señalemos que el pullback $j^*(\mathbf{g})$ se define por $j^*(\mathbf{g})(v_1, v_2) = \mathbf{g}_{j(p)}(dj_p(v_1), dj_p(v_2))$ para $v_1, v_2 \in T_p(P)$.

Definición 12 *Sean* $(M, \mathbf{g}_M)$ *y* $(N, \mathbf{g}_N)$ *variedades pseudo Riemannianas. Una isometría de* M *a* N *es un difeomorfismo* $\phi : M \to N$ *tal que* $\phi^*(\mathbf{g}_N) = \mathbf{g}_M$*. Esto se debe interpretar de la siguiente forma: si* $v_1, v_2 \in T_p(M)$*, entonces*

$$\mathbf{g}_M(v_1, v_2) = \phi^*(\mathbf{g}_N)(v_1, v_2) = \mathbf{g}_N(d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2)).$$

Definición 13 *Una conexión* D *sobre una variedad suave* M *está dada por una función* $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*tal que*

D1 $D_{fV_1+gV_2}W = fD_{V_1}W + gD_{V_2}W$.

D2 $D_V(aW_1 + bW_2) = aD_VW_1 + bD_VW_2$.

D3 $D_V(fW) = (Vf)W + fD_VW$.

La fórmula de Koszul establece el siguiente teorema:

Teorema 3 *Sobre una variedad pseudo Riemanniana* M *existe una única conexión* D *tal que*

D4 $[V, W] = D_VW - D_WV$.

D5 $X\mathbf{g}(V, W) = \mathbf{g}(D_XV, W) + \mathbf{g}(V, D_XW)$.

Definición 14 *Sea* $x^1, \ldots, x^n$ *un sistema de coordenadas sobre un vecindario* U *en una variedad pseudo Riemanniana* M*. Los sfrm[o]–mbolos de Christoffel para este sistema de coordenadas son las funciones* $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$D_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k, \qquad \textit{para } 1 \leq i, j \leq n.$$

Es claro que se tiene la siguiente simetrfrm[o]–a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Definición 15 *Sea* M *una variedad pseudo Riemanniana con conexión de Levi-Civita* D*. La función* $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

se llama el tensor de curvatura Riemanniano de M*.*

0.5.1. Subvariedades pseudo Riemannianas

Definición 16 *Un campo vectorial Z sobre un mapeo suave $\phi : P \to M$ es un mapeo $Z : P \to T(M)$ tal que $\pi \circ Z = \phi$, donde π es la proyección $T(M) \to M$.*

Si M es meramente una subvariedad suave de $\overline{M}$, un campo vectorial X sobre el mapeo inclusión $j : M \hookrightarrow \overline{M}$ se llamará un $\overline{M}$-campo vectorial sobre M. Esto dice que X asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente X_p a $\overline{M}$ en p, y X será suave si $f \in \mathfrak{F}(\overline{M})$ implica que $Xf \in \mathfrak{F}(M)$.

Definición 17 *Denotaremos por $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ al conjunto de todos los $\overline{M}$-campos vectorials suaves sobre M.*

Si suponemos además que M es subvariedad pseudo Riemanniana de $\overline{M}$, entonces cada $T_p(M)$ es subespacio no degenerado de $T_p(\overline{M})$, en cuyo caso se tiene que

$$T_p(\overline{M}) = T_p(M) \oplus T_p(M)^{\perp}.$$

Definición 18 *Diremos que $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ es normal a M si cada $Z_p \in T_p(M)^{\perp}$. Al conjunto de tales campos vectoriales los denotarmos por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$.*

Es claro, al usar proyecciones ortogonales, que $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

Definición 19 *Sea M subvariedad pseudo Riemanniana de $\overline{M}$. La conexión de Levi-Civita, $\overline{D}$, sobre $\overline{M}$ da origen a la función $\mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ llamada la* **conexión inducida** *sobre $M \subset \overline{M}$. Para $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ consideremos, para cada $p \in M$, $\overline{V}, \overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, extensiones de V y X sobre un vecindario U de p en $\overline{M}$. Entonces deffrm[o]–nase $\overline{D}_V X$ sobre cada $U \cap M$ por $\overline{D}_{\overline{V}}\overline{X}$ restringido a $U \cap M$.*

Lema 5 *El $\overline{M}$-campo vectorial $\overline{D}_V X$ sobre M está bien definido.*

Es conocido que la restricción de un campo vectorial suave sigue siendo suave en $U \cap M$. Lo que se debe probar es que es independiente de las extensiones que se elijan. Usando sistemas de coordenadas sobre U, tenemos que $\overline{X} = \sum f^i \partial_i$. Luego

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\overline{V}}\overline{X} &= \overline{D}_{\overline{V}}(\sum f^i \partial_i) \\ &= \sum \overline{V}(f^i)\partial_i + \sum f^i \overline{D}_{\overline{V}}(\partial_i) \end{aligned}$$

Por otra parte observe que si $q \in U \cap M$, entonces

$$\overline{V}(f^i)(q) = \overline{V}_q(f^i) = V_q(f^i) = V_q(f^i|_{U \cap M}),$$

y además, $\overline{D}_{\overline{V}}(\partial_i)|_q = \overline{D}_{V_q}(\partial_i)$. Por lo tanto, la restricción de $\overline{D}_{\overline{V}}\overline{X}$ depende sólo de V y X.

De ahora en adelante usaremos la misma notación para la conexión de Levi-Civita de $\overline{M}$ y la conexión inducida $\overline{D} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Corolario 3 *Sea $\overline{D}$ la conexión inducida de $M \subset \overline{M}$. Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, entonces*

1. $\overline{D}_V X$ *es $\mathfrak{F}(M)$-lineal en V.*
2. $\overline{D}_V X$ *es $\mathbb{R}$-lineal en X.*
3. $\overline{D}_V(fX) = VfX + f\overline{D}_V X$, *para $f \in \mathfrak{F}(M)$.*
4. $[V, W] = \overline{D}_V(W) - \overline{D}_W(V)$.
5. $V\mathbf{g}(X, Y) = \mathbf{g}(\overline{D}_V X, Y) + \mathbf{g}(X, \overline{D}_V Y)$.

La idea es que en cada punto $p \in M$ extendamos todos los cmapos vectorial y funciones sobre un vecindario de $p \in \overline{M}$. Las cinco propiedades para la coneción de Levi-Civita en $\overline{M}$ son válidas, entonces las rectricciones a M de las propiedades anteriores dan los resultados deseados. Por ejemplo, $\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X})|_M = \overline{D}_V X$. Además, $\overline{V}(\overline{f})|_M = Vf$. Por otra parte, $\mathbf{g}(\overline{X}, \overline{Y})|_M = \mathbf{g}(X, Y)$.

Lema 6 *Para $M \subset \overline{M}$, si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces*

$$D_V W \;=\; tan\,\overline{D}_V W,$$

donde D es la conexión de Levi-Civita para M.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrario. Extienda localmente los campos vectoriales X, V, W y escriba la ecuación de Koszul

$$2\mathbf{g}(\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{W}), \overline{X}) = F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}).$$

Al restringir a M tenemos que $2\mathbf{g}(\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{W}), \overline{X}) = 2(\overline{D}_V W, X)$. Por otra parte, las primeras cuatro propiedades en el lema anterior prueban que $F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})|_M = F(V, W, U)$. Por lo tanto, se concluye que $(\overline{D}_V W, X) = (D_V W, X)$. Como X es tangente a M, podemos reemplazar $\overline{D}_V W$ por $\tan \overline{D}_V W$, y el resultado sigue.

Lema 7 *La función $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ tal que $II(V, W) = nor\overline{D}_V W$ es $\mathfrak{F}(M)$-bilineal y simétrica. A tal función se le conoce como el tensor de forma o el tensor de la segunda forma fundamental.*

Como $\overline{D}_V W$ es $\mathfrak{F}(M)$-lineal en V y $\mathbb{R}$-lineal en W, se sigue que lo misma propiedad la comparte II. Por otra parte, para $f \in \mathfrak{F}(M)$ se tiene que

$$\overline{D}_V(fW) = VfW \;+\; f\overline{D}_V W.$$

Como W es tangente a M, y la proyección *nor* es $\mathfrak{F}(M)$-lineal, luego

$$II(V, FW) = \mathrm{nor}\,\overline{D}_V(fW) = f\,\mathrm{nor}\,\overline{D}_V W = fII(V, W).$$

Finalmente,

$$II(V, W) - II(W, V) = \;\mathrm{nor}\,(\overline{D}_V W - \overline{D}_W V) = \;\mathrm{nor}\,[V, W] = 0.$$

Al juntar los lemas anteriores obtenemos la llamada ecuación de Gauss.

Teorema 4 *Sea M subvariedad pseudo Riemanniana de $\overline{M}$, con R y $\overline{R}$ sus respectivos tensores de curvatura, y II el tensor de forma. Entonces para campos vectoriales V, W, X, Y todos tangentes a M,*

$$\mathbf{g}(R_{VW}X, Y) \;=\; \mathbf{g}(\overline{R}_{VW}X, Y) + \mathbf{g}(II(V,X), II(W,Y)) - \mathbf{g}(II(V,Y), II(W,X)). \quad (1)$$

0.5.2. Subvariedades Totalmente Geodésicas

Esta subvariedades son las más simples desde el punto de vista del operador de forma. Son extrfrm[o]–nsecamente planas, pero no necesariamente intrfrm[o]–nsicamente planas.

Lema 8 *Sea M subvariedad pseudo Riemanniana de $\overline{M}$. Supongamos que α es una curva en M, y suponga que α es $\overline{M}$-geodésica. Entonces α es M-geodésica.*

Supongamos que o y p son puntos arbitrarios de α tales que $o = \alpha(t_0)$ y $p = \alpha(t_1)$. Sea N_o un vecindario normal de o en $\overline{M}$. Si r es suficientemente cercano a r_0 el segmento geodésico que va de o a p, denotado por α_{op}, está contenido en N_o. Es conocido que

$$\mathrm{L}(\alpha_{op}) \;=\; d_{\overline{M}}(o,p) \leq d_M(o,p) \leq \mathrm{L}(\alpha_{op}).$$

Por lo tanto, $\mathrm{L}(\alpha_{op}) \;=\; d_M(o,p)$. Esto significa que α_{op}es la curva de menor longitud en M que une o con p, y por lo tanto una geodésica en M.

Uno se pregunta si el recfrm[o]–proco es válido y cuáles subvariedades cumplen esto. A tales subvariedades es a las que vamos a definir inmediatamente.

Definición 20 *Una variedad pseudo Riemanniana M de $\overline{M}$ es* **totalmente geodésica** *si su tensor de forma es nulo, es decir, $II = 0$.*

La siguiente proposición presenta caracterizaciones sobre la definición anterior.

Proposición 7 *Sea M subvariedad pseudo Riemanniana de $\overline{M}$. Son equivalentes.*

1. *M es totalmente geodésica en $\overline{M}$.*

2. *Cada geodésica de M es también una geodésica de $\overline{M}$.*

3. *Si $v \in T_p(\overline{M})$ es tangente a M, entonces la $\overline{M}$-geodésica γ_v pertenece inicialmente a M.*

4. *Si α es una curva en M y $v \in T_{\alpha(0)}(M)$, entonces la traslación paralela de v a lo largo de α es la misma para M y para $\overline{M}$.*

Probemos primero que (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $v \in T_p(\overline{M})$ tangente a M y consideremos la geodésica de M con velocidad inicial v, es decir, $\alpha : I \to M$ con $\dot{\alpha}(0) = v$. Por hipótesis, α también es geodésica de $\overline{M}$. Por la unicidad de la geodésica se debe cumplir que $\alpha = \gamma_v|_I$.

Probemos que (1) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que M es totalmente geodésica en $\overline{M}$. Sea V el M-campo vectorial paralelo sobre α tal que $V(0) = v$. Claramente V es $\overline{M}$ paralelo por hipótesis. Por lo tanto, ambas traslaciones paralelas coinciden.

Probemos que (4) $\Rightarrow$ (2). Si γ es una geodésica de M de M, entonces γ' es M-paralela y luego $\overline{M}$-paralela, y por lo tanto γ es una geodésica de $\overline{M}$

0.6. El $\mathbb{R}$-rank de un espacio simétrico.

Definición 21 *Sea M una variedad Riemanniana la cual es un espacio simétrico. Un flat en M es una subvariedad conexa, totalmente geodésica y plana de M.*

Definición 22 *El rank(M) es el mayor número natural r, tal que M contenga un flat r-dimensional.*

Asumiremos que M no posee factores flat, es decir que la cubierta universal de M no es isométrica a un producto de la forma $Y \times \mathbb{R}^n$. Sea $G = \mathrm{Iso}(M)^\circ$, y como G actúa de manera transitiva sobre M, y ya que existe un subgrupo commpacto K de G, entonces $G/K = M$. Como M no posee factores triviales, G es grupo de Lie real, conexo, semisimple y con centro trivial.

Definición 23 *El $\mathbb{R}$-rank(G) es el mayor entero r, tal que M posee un flat cerrado, simplemente conexo r-dimensional.*

Si M es compacto, entonces cada subespacio cerrado de M totalmente geodeésica y flat debe ser un toro, y no $\mathbb{R}^n$, luego $\mathbb{R}$-rank(G) debe ser cero. Por otra parte, si M no es compacto, entonces M tiene geodésicas no acotadas, luego $\mathbb{R}$-rank(G) es mayor o igual a uno. Por lo tanto:

$$\mathbb{R} - \mathrm{rank}(G) \; = \; 0 \Leftrightarrow M \text{ es compacto.}$$

0.7. Teorema de Frobenius

En lo que sigue M denotará una variedad suave de dimensión n.

Definición 24 *Sea p un entero tal que $p \leq n$. Una distribución p-dimensional, P, sobre M asigna a cada $x \in M$ un subespacio de dimensión p, P_x, en $T_x(M)$.*

La distribución P será suave si para cada $x_0 \in M$ existe un vecindario abierto U de x_0 y p campos vectoriales suaves $X_1, \ldots, X_p$ sobre U cuyos valores en cada punto $x \in U$ generan a P_x.

Definición 25 *Sea P una distribución sobre M. Un campo vectorial X sobre M, es decir $X \in \mathfrak{X}(M)$, se dice que es tangente a P si $X_m \in P_m$ para cada $m \in M$.*

Denotaremos con $\mathfrak{X}_P$ al conjunto de todos los campos vectoriales que son tangentes a P.

Lema 9 *Para $m_0 \in M$ y para todo $v \in P_{m_0}$ existe $X \in \mathfrak{X}_P$ tal que $X_{m_0} = v$.*

Consideremos un vecindario abierto U donde P está generado por los campos vectoriales $X_1, \ldots, X_p$.

Ahora bien, $v = \lambda_1(X_1)_{m_0} + \cdots + \lambda_p(X_p)_{m_0}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Basta tomar, en apariencia, $X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_p X_p$, el cual parece que cumple las condiciones requeridas. Sin embargo hay que extender a los campos vectoriales a todo M. Tomemos una función bump ϕ con soporte en U y $\phi(m_0) = 1$, entonces

$$X = \lambda_1 \phi X_1 + \cdots + \lambda_p \phi X_p,$$

sí cumple lo requerido.

Definición 26 *Una distribución suave P se llama involutiva, o completamente integrable, si $[X, Y] \in \mathfrak{X}_P$ siempre que $X, Y \in \mathfrak{X}_P$.*

0.8. Revisión de Literatura

En esta parte haré mención de la literatura que más se usó en la realización del proyecto, pero para efectos de claridad incluiremos toda la literatura usada. Esto es sumamente importante por que demuestra que mucho de lo que está en este proyecto es nuevo en cuanto a las demostraciones que ofrecemos y en cuanto a los enunciados que brindamos. Lo que no es nuevo en cuanto al enunciado es en su mayoría nuevo en cuanto a la prueba que ofrecemos.

Para los conceptos de geometría pseudo Riemanniana, el referente es [6] . Este libro es muy didáctico y de suma importancia para encontrar teoría en lo que respecta a las submersiones de variedades Riemannianas para el proyecto.

Para los conceptos relativos a foliaciones el referente es [5], y como segunda opción utilizamos de vez en cuando al también excelente libro [4].

Sin lugar a dudas el referente a los temas sobre fibrados principales y a los conceptos que se definen sobre ellos, tales como conexiones, la primera forma fundamental y la torsión, se siguen conslutando del excelente libro [3].

Uno de los artículos que más se utilizó en el presente trabajo lo constituye [7]. Básicamente utilizamos de este trabajo el tensor A de tipo $(1, 2)$ que allí se define para probar en la parte final que la foliación $T\mathcal{O}^{\perp}$, la cual ya sabíamos que era integrable, es totalmente geodésica. Claro está que esto se consiguió al utilizar resultados que se encuentran en el libro [5].

Para lograr el fin anterior fue fundamental el estudio del artículo [11] ya que de él pudimos trabajar con métricas del tipo bundle-like que allí son definidas y que nosotros probamos que la métrica obtenida del objetivo 3 de nuestro proyecto es de ese tipo.

Otro artículo que nos permitió ell poder avanzar en nuestro trabajo lo constituye [10], ya que por medio de este pudimos lograr una condición suficiente para probar que el fibrado $T\mathcal{O}^{\perp}$ es integrable en términos de las signaturas del grupo semisimple G y de la variedad M.

El artículo [12] nos permitió obtener condiciones bajo las cuales pudimos probar que la acción del grupo G sobre M es localmente libre, y así cumplir con el objetivo número 1.

Muchos otros libros, que sin la ayuda económica de la vicerectrorría de Investigación no hubieran sido posible incorporar, no se citan en esta parte pero que sirvieron para aclarar muchas dudas que se presentaron durante el desarrollo del proyecto, y que por falta de interacción con otros matemáticos del área no se podían evacuar.

0.9. Marco Teórico

Para entender la geometría de foliaciones ha sido útil el considertar estructuras adaptadas a tales objetos geomeétricos. El trabajo de P. Molino sobre la teoría de estructura de las foliaciones Riemannianas y la dual de G. Cairns para foliaciones totalmente geodésicas son un ejemplo de tales estructuras adaptadas. Estas han permitido describir foliaciones de codimensin baja, particularmente los casos en dimensión uno y dos, los cuales son totalmente geodésicas o Riemannianos.

También se cuenta con descripciones precisas de variedades foliadas para foliaciones totalmente geodésicas y para foliaciones Riemannianas totalmente umbilicas, en ambos casos para 4-variedades compactas.

Por otra parte, es bien conocido el comportamiento rígido de grupos de Lie semisimples cuyo rango real sea alto, lo cual ha permitido el describir algunas propiedades de foliaciones con hojas localmente simétricas y clasificar acciones localmente libres de grupos de Lie simples no compactos.

Se pueden considerar los dos enfoques anteriores y aplicar algunas de sus técnicas para describir en detalle las foliaciones totalmente geodeésicas con una hoja densa sobre variedades de volumen finito.

0.10. Marco Metodológico.

En esta parte vamos a definir claramente el objeto de estudio y vamos a detallar, hasta donde sea posible, las herramientas y técnicas utilizadas.

La primer herramienta que utilizamos fue la clasificación de métricas pseudo Riemannianas bi invariantes sobre un grupo de Lie conexo. El resultado obtenido fue el siguiente:

Teorema 5 *Let G be a semisimple Lie group such that Lie$(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_l$, where each $\mathfrak{g}_i$ is a simple ideal of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. We shall suppose the following:*

- *The complexification of each $\mathfrak{g}_i$, for $i = 1, \ldots, k$ is simple; and*
- *The complexification of each $\mathfrak{g}_i$, for $i = k+1, \ldots, l$ is not simple and so there exists a complex structure J_i for each $\mathfrak{g}_i$.*

Then every bi-invariant pseudoRiemannian metric ϕ on $\mathfrak{g}$ is given by

$$\begin{aligned}\phi &= \lambda_1 B_{\mathfrak{g}_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_k B_{\mathfrak{g}_k} \\ &\oplus (\mu_1^{k+1} B_{\mathfrak{g}_{k+1}} + \mu_2^{k+1} B_{\mathfrak{g}_{k+1}}^{J_{k+1}}) \oplus \cdots \oplus (\mu_1^l B_{\mathfrak{g}_l} + \mu_2^l B_{\mathfrak{g}_l}^{J_l}),\end{aligned}$$

where each $B_{\mathfrak{g}_i}$ is the Killing–Cartan form on $\mathfrak{g}_i$, for $i = 1, \ldots, l$, all λ_i and μ_i^j are real numbers, and $B_{\mathfrak{g}_j}^{J_i}(X, Y) = B_{\mathfrak{g}_j}(X, J_i Y)$.

Posteriormente hemos obtenido el siguiente resultado que hace que cumplamos el primer objetivo planteado en el proyecto.

Teorema 6 *For G and M as before suppose G acts topologically transitively on M, i.e., there is a dense G-orbit, preserving its pseudoRiemannian metric and satisfying $n_0^1 + \cdots + n_0^l = m_0$. Then G acts everywhere locally free with nondegenerate orbits.*

En el escenario de una acción de G sobre la variedad M obtuvimos el siguiente resultado el cual es fundamental en nuestro proyecto.

Lema 10 *Let G be a connected Lie group acting locally free on a manifold M. Then the G-orbits in M define a foliation of codimension* $\dim M - \dim G$.

Algunas de las propiedades que obtuvimos sobre el haz tangente se resumen a continuación:

Corolario 4 *If $n_0^1 + \cdots + n_0^l = m_0$, and no factor of G acts trivially, and the action is topologically transitive, then*

1. *$TM = T\mathcal{O} \oplus T\mathcal{O}^\perp$, and*
2. *$T\mathcal{O}^\perp$ is Riemannian or antiRiemannian.*

Es importante conocer sobre la integrabilidad del haz tangente: logramos obtener el siguiente resultado.

Teorema 7 *Suppose G is a semisimple Lie group acting topologically transitive on M preserving its pseudoRiemannian metric and satisfying $n_0 = m_0$. Then $T\mathcal{O}^\perp$ is integrable.*

La siguiente definición fue dada por [11].

Definición 27 *The metric h is said to be bundle-like for the foliation $\mathcal{F}$ it is has the following property: for any open set U of M and for all vectors fields Y, Z on U that are foliated and perpendicular to the leaves, the function $h(Y, Z)$ is basic on U.*

Logramos probar como resultado fundamental del proyecto lo siguiente:

Teorema 8 *Suppose G is a semisimple Lie group acting topologically transitive on M preserving its pseudoRiemannian metric and satisfying $n_0 = m_0$. Then $T\mathcal{O}^{\perp}$ is totally geodesic.*

0.11. Conclusiones y recomendaciones

El proyecto en cuestión sirvió de plataforma para el estudio de las acciones de grupos de Lie semisimples sobre variedades pseudo Riemannianas. Se pudo generalizar una conjetura debida a Zimmer, y probada por Quiroga para grupos de Lie simples. Para el logro de esta generalización se tuvo que hacer mano de una gran cantidad de teoría que juntas proporcionaron las herramientas necesarias para el cumplimiento de los objetivos planteados al inicio de la investigación.

En términos generales se pueden describir tres principales conclusiones:

- Se logró caracterizar todas las métricas pseudo Riemannianas bi-invariantes sobre un grupo de Lie semisimple.
- Se logró encontrar una aplicación del teorema del Centralizador de Gromov para acciones algebraicas de grupos de Lie semisimples
- Se inició el estudio de acciones isométricas de grupos de Lie semisimples sobre variedades pseudo Riemannianas.

Dos aspectos importantes a señalar en esta parte tienen que ver con la bibliografía y el tiempo en ejecutar el proyecto.

En primer lugar, quiero defender la compra de libros y artículos en el área de matemáticas y física teórica, ya que no tenemos en nuestra biblioteca del ITCR los libros para iniciarce en los orfrm[o]–genes de casi cualquier área de la matemática, y mucho menos revistas. Tampoco contamos con grupos amplios o al menos reducidos de investigadores con los cuales interactuar Un aspecto importante que debe tenerse en cuenta al asignar horas a un proyecto de investigación en el área de ciencas básicas, principalmente en física teórica y matemticas, es que doce horas no es suficiente para obtener resultados serios en tan poco tiempo como el que solicitó el autor: 18 meses. Un pedimento realista de tiempo , tanto en horas como en meses debería ser de al menos 16 horas en un período de 24 meses.

0.12. Aportes y alcances

En esta parte mencionaremos los beneficios inmediatos y futuros de los resultados que obtuvimos en la realización del proyecto.

En primer lugar debemos señalar que la mayor parte de lo obtenido en el proyecto se difundió en forma de charlas. En total se impartieron tres charlas:

- En Febrero del 2010 se impartió la charla, en el sexto Encuentro de Investigadores en Matemática, titulada: ***G*-estructuras de tipo finito**

- En Febrero del 2010 se impartió la charla, en el sexto encuentro de Investigadores en Matemática: ***Métricas pseudo Riemannianas bi-invariantes sobre grupos de Lie semisimples.***

- En junio del presente año se impartió, en la sede regional de Occidente de la Univerisad de Costa Rica, la charla titulada: ***La forma de Killing-Cartan en álgebra de Lie semisimples.***

Por otra parte, uno de los materiales generados durante el proyecto, y que se encuentra en la parte de materiales, se enviará a una revista indexada para someterlo a publicación.

Se puede concluir expresando que lo desarrollado en el proyecto ha sido diseminado lo suficiente como para ser tomado en cuenta por la comunidad matemática.

Bibliografía

[1] R. Bishop and R. Crittenden , *Geometry of Manifolds*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 2001.

[2] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[3] S. Kobayaschi and K. Nomizu, *Foundations in Differential Geometry*, John Wiley, New York, 1980.

[4] I. Moerdicjk and J. Mrčun, *Introduction to Foliations and Lie Grupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2003.

[5] P. Molino, *Riemannian Foliations*, Birkhauser, 1983.

[6] B. O'neill, *SEMI-RIEMANNIAN GEOMETRY*, Academic Press, New York, 1983.

[7] B. O'neill, *THE FUNDAMENTALS EQUATIONS OF A SUBMERSION*. Michigan Math. J. **13**(196), 459-469.

[8] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle like-metrics*. Annals of Mathematics. **69**(1959), 119-132.

[9] R. Quiroga-Barranco, *Isometric actions of simple Lie groups on pseudoRiemnnian manifolds*, Annals of Mathematics. **164**(2006), 941-969.

[10] J. Rosales, *The signature in actions of semisimple Lie groups on pseudo-Riemannian manifolds*, preprint, 2010.

[11] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle like-metrics*. Annals of Mathematics. **69**(1959), 119-132.

[12] J. Szaro *Isotropy of Semisimple Group Actions on Manifolds with Geometric Structures*, American Journal of Mathematics **120**(1998), 129-158.

[13] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and Semi-simple Lie groups*, Birkhäuser, Boston, 1984.

0.13. Anexo

0.13.1. Cumplimiento de objetivos.

Los siguientes objetivos se alcazaron, en un 100 %, durante el desarollo del proyecto.

1. Probar que la G-acción es localmente libre.

2. Probar que el fibrado $\mathcal{H}^*$ es G-invariante.

3. Construcción de una métrica pseudo Riemanniana sobre $\widetilde{M}$.

El último de los objetivos del proyecto no se cumplió. Básicamente por que de un pronto a otro se cerró el proyecto. La situación por la cual no cumplí se analizará en la siguiente sección.

0.13.2. Limitaciones y problemas encontrados.

Dentro de las limitaciones que encontré, y que derivaron en la no feliz culminación de mi proyecto, puedo citar las siguientes:

- Hasta el mes de julio del 2010 el proyecto marchaba como se había planteado con el 80 % del total de objetivos cumplidos. Desde el inicio del segundo semestre del 2010, por motivos que desconozco, el director de la escuela de matemática no incluyó mi proyecto en el plan de trabajo respectivo. Este hecho me dejó en un estado de desorientación.

- El no haber firmado el plan de trabajo fue motivo para que el director de la escuela iniciara un proceso en mi contra. Varias semanas pasé tratando de probar que no era culpable de lo que se me acusaba, y aduciendo que se me había atropellado a mis derechos. Esto fue corroborado por la comisión que se creó en Recursos humanos para tal efecto, y la cual desestimó la acusación de la cual fui objeto.

- Durante varias semanas más, el director de la escuela, anduvo indigando en qué términos me encontraba con respecto al proyecto de investigación. Al final de una larga jornada fui citado por el comité técnico de la escuela y se me indicó si quería continuar con el proyecto. Esto era un vil atropello por que yo en ningún momento, ni en forma oral ni escrita, indiqué que ya no seguiría con el proyecto.

- Se me puso a elegir, tres semanas antes de terminar el curso lectivo, si optaba por dejar el grupo que se me había asignado o si continuaba con la investigación. Al final del semestre me encontraba sin proyecto de investigación.

0.13.3. Observaciones generales.

En la realidad siento que el apoyo brindado por la gente de la vicerrectoría de investigación, en especial del oficial a cargo de mi proyecto, fue muy bueno. Las visitas de oficial asignado a mi proyecto se hicieron con suficiente tiempo como para poder evacuar las dudas o inquietudes que se me presentaban a la fecha.

.