

---

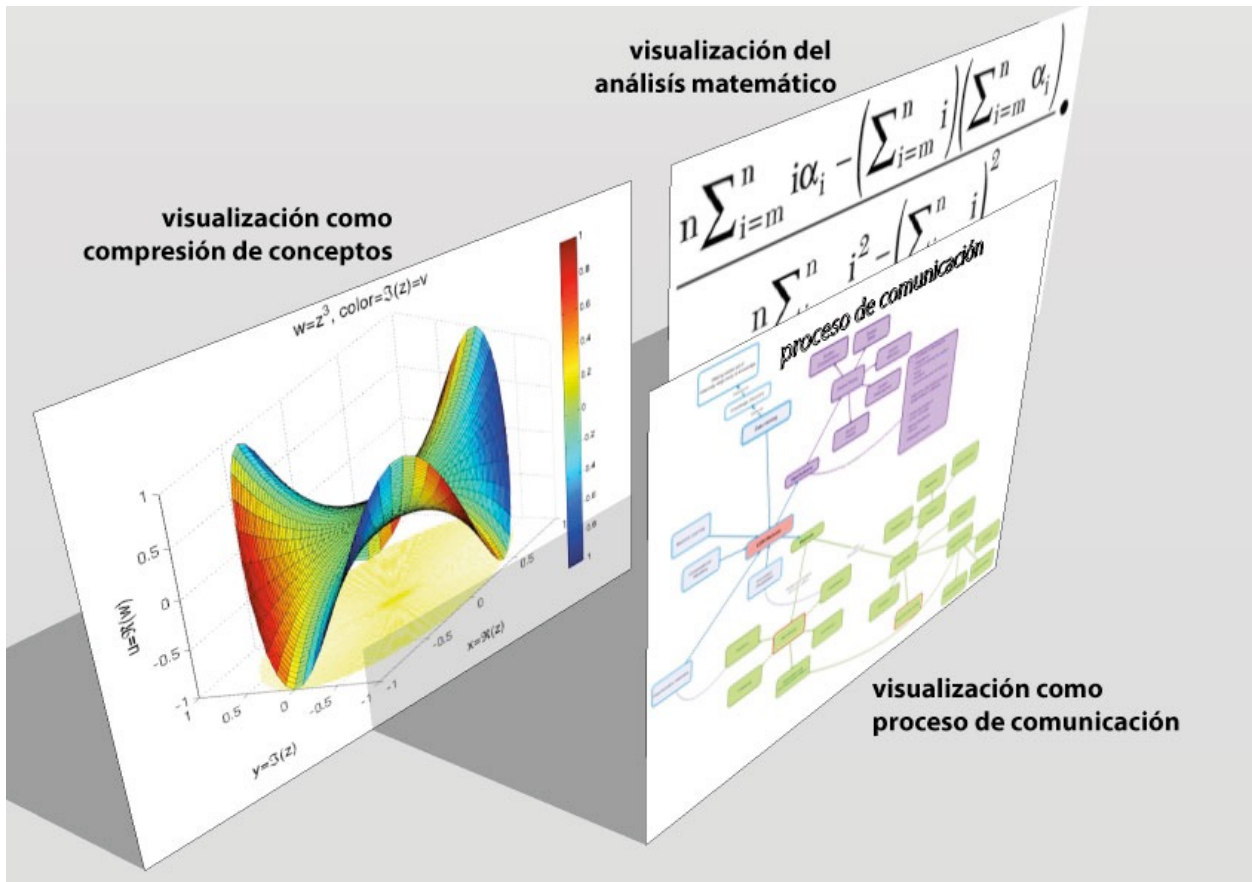
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Escuela de Matemática

## ModelTec : Modelo de Visualización del Conocimiento en el uso de tecnologías y tecnologías digitales

Informe final de proyecto de investigación

Fecha: 2013-2014

---



### Autores

Ph.D. Jorge Monge-Fallas. Escuela de Matemática

---

<b>Contenido</b>	
<b>Nombre del Proyecto .....</b>	<b>3</b>
<b>Autores y direcciones .....</b>	<b>3</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>3</b>
<b>Palabras claves .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción .....</b>	<b>5</b>
<i>1.1 Cuadro resumen de los objetivos, actividades y productos alcanzados .....</i>	<i>9</i>
<b>2. Marco teórico .....</b>	<b>10</b>
<i>2.1 La visualización en la evolución de las matemáticas .....</i>	<i>10</i>
<i>2.2 La comprensión y representación de conceptos matemáticos .....</i>	<i>13</i>
<i>2.3 La visualización como apoyo a la representación y construcción de conceptos.....</i>	<i>16</i>
<i>2.4 Las tecnologías y su papel en la enseñanza de la matemática .....</i>	<i>21</i>
<i>2.5 PCK: un marco conceptual para el conocimiento del profesor en torno a la enseñanza ...</i>	<i>23</i>
<i>2.6 TPCK: un marco conceptual para el conocimiento del profesor en torno a la enseñanza con tecnología .....</i>	<i>30</i>
<i>2.7 Planteamiento del problema y objetivos .....</i>	<i>35</i>
<b>3. Metodología utilizada .....</b>	<b>36</b>
<b>4. Análisis .....</b>	<b>40</b>
<b>4. Resultados.....</b>	<b>52</b>
<b>5. Discusión y conclusiones .....</b>	<b>54</b>
<b>6. Actividades de divulgación.....</b>	<b>55</b>
<b>7. Limitaciones o problemas encontrados .....</b>	<b>55</b>
<b>8. Bibliografía.....</b>	<b>55</b>



## Nombre del Proyecto

ModelTec: Modelo de visualización del conocimiento en el uso de tecnologías y tecnologías digitales (2013-2014)

## Autores y direcciones

Ph.D Jorge Monge-Fallas(**coordinador**) jomonge@itcr.ac.cr. Escuela de Matemática,

## Resumen

La visualización del conocimiento es un campo de estudio reciente(2005) que aparece en el área de la administración del conocimiento, este juega un papel importante en la transferencia del conocimiento. La visualización del conocimiento alcanza el objetivo de transferir el conocimiento haciendo uso de distintos tipos de visualización. Por lo que los tipos de visualización que se utilizan, la intensidad con la que deben ser aplicados, la complementariedad que deben tener, la claridad y la estructura con la que se lleve a cabo su ejecución son factores importantes a considerar. El marco y el modelo de visualización del conocimiento fue desarrollado por el arquitecto suizo Remo Burkhard, este marco general de visualización orienta el uso de las representaciones visuales para la transferencia del conocimiento. Además han colaborado en este nuevo campo de investigación: Martín Eppler, y Michael Meier entre otros.

En estos procesos de visualización la tecnología viene a convertirse en un muy buen aliado, nos da la posibilidad de tener múltiples representaciones de un concepto en pantalla y con la posibilidad de que por su naturaleza dinámica se puedan realizar generalizaciones sobre el mismo. Estos procesos de múltiples representaciones son fundamentales en la teoría de representaciones semióticas de Duval.

Con el marco general de visualización y la teoría de representaciones semióticas, parecía oportuno la búsqueda de un modelo para el uso de tecnologías digitales y no digitales que incorporaran la visualización del conocimiento. Este fue el objetivo principal de este proyecto. Partimos del campo de la visualización del conocimiento, pasamos por la teoría de representaciones semióticas de Duval, nos trasladamos al modelo para formación de profesor desarrollado por Shulman y denominado PCK, el cual posteriormente fue visto como un modelo integrador por Gew-Newsome y por último Mishra y Koehler incorporan la componente tecnológica dando origen al TCPK. Este acrónimo fue cambiado en el 2008 a TPACK por Thompson y Mishra. Es en este modelo donde consideramos oportuno

incorporar la visualización del conocimiento y lo he denominado TPACK\*. El reto parece ser muy claro, tomar el modelo e implementarlo en la enseñanza con tecnología por un periodo considerable y evaluar su ejecución. Lo considero un reto, dado que por su composición el profesor debe en principio tener el dominio sobre la parte disciplinar, a esto se le agrega el saber y las habilidades necesarias para la implementación de la tecnología y por último el conocimiento y competencias necesarias en el campo de la visualización del conocimiento.

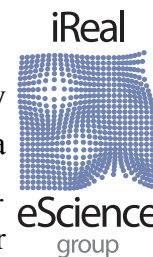


## **Palabras claves**

Visualización del conocimiento, visualización de información, tecnologías de información y tecnologías digitales.

## 1. Introducción

La visualización del conocimiento es un campo de investigación que surge en el 2005 y que estudia el potencial innato del ser humano para procesar en forma efectiva representaciones visuales en tareas de intenso conocimiento (Burkhard & Meier, 2005). Eppler y Burkhard (2004) señalan que el ser humano tiene la habilidad innata para procesar representaciones en formato visual y el cerebro está ampliamente equipado para llevar a cabo esta labor.



Constantemente existe la necesidad de nuevas ideas y orientaciones teóricas que contribuyan a establecer metodologías claras que permitan incorporar el uso de recursos tecnológicos con el objetivo de transferir conocimiento. La aparición de un nuevo campo de investigación que pretende de acuerdo a Burkhard (2005) con perspicacia mejorar la transferencia y creación de conocimiento, además de la transferencia de experiencias, actitudes, valores, expectativa, expectativas y opiniones, es una oportunidad que puede ser aprovechada.

Este nuevo campo de estudio nos ofrece así un marco referencial en el cual podríamos definir estrategias de enseñanza-aprendizaje en la educación en forma sistemática y previo un proceso de reflexión, en particular este podría ser utilizado en la enseñanza de algún tema particular o la transferencia de algún conocimiento específico. Por lo que es útil contar en cualquier institución de carácter tecnológico con soportes teóricos que nos permitan establecer nuevas estrategias metodológicas y didácticas para la transferencia del conocimiento utilizando tecnologías y tecnologías digitales.

La visualización del conocimiento alcanza su objetivo de transferir el conocimiento haciendo uso en la mayoría de los casos de tecnologías de información. Por lo que los tipos de visualización que se utilizan, la intensidad con la que deben ser aplicados, la complementariedad que deben tener, la claridad y la estructura con la que se lleve a cabo su ejecución son factores importantes a considerar.

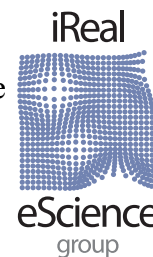
La estructura que establece Burkhard (2005) debe de considerarse cuando se quiere crear representaciones visuales cuyo objetivo es transferir y crear conocimiento.

Esta estructura está compuesta por cuatro perspectivas, estas perspectivas responden a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el conocimiento debe ser visualizado?: *define el objetivo*
- ¿Qué tipo de conocimiento necesita ser visualizado?: *define el contenido*
- ¿A quién está siendo dirigido?: *define para quien*

—¿Cuál es el mejor método para visualizar este conocimiento?: *define el medio*

Estas cuatro perspectivas definen el esqueleto conceptual (figura 1), el cual permite estructurar el pensamiento según Burkhard (2005).



Tipo de función	Tipo de conocimiento	Tipo de receptor	Tipo de visualización
Coordinación	Qué saber: Declarativo	Individual	Boceto
Atención	Cómo sabe: Procedimental	Grupal	Diagrama
Recuerdo	Por qué saber: Experimental	Organizacional	Imagen
Motivación	Dónde saber: Orientacional	Red	Mapa
Elaboración	Quién sabe: Individual		Objeto
Nuevas ideas			Visualización interactiva
			Historia

Fig 1: Fuente: marco general de visualización del conocimiento establecido por Burkhard.

La dificultad en la utilización de este marco general es definir la combinación adecuada, bajo el objetivo planteado cuál debe ser la representación visual que permite alcanzarlo.

Nuestra experiencia en este campo inició en el 2008 y desde esa fecha se han desarrollado dos proyectos en esta línea. El último se desarrolló en el periodo 2010-2011 nombrado “Visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática” (proyecto adscrito a la VIE) y cuyos resultados han sido favorables en la implementación del Marco General de Visualización del Conocimiento (Monge, 2011). Este marco general de visualización viene acompañado de un modelo, este modelo según Burkhard y Meier (2005) era necesario por las siguientes tres razones:

- Los modelos en las ciencias de la comunicación de Shannon y Weaver son muy generales al considerar el uso de representaciones visuales.
- Los científicos de la visualización no ofrecen un modelo holístico para la transferencia y creación del conocimiento a partir del uso de representaciones visuales.
- El modelo complementa la estructura de visualización del conocimiento y juntos pueden alcanzar las metas que se definen en la visualización del conocimiento.

El modelo presentado por Burkhard y Meier (2005) se muestra en la figura (16):

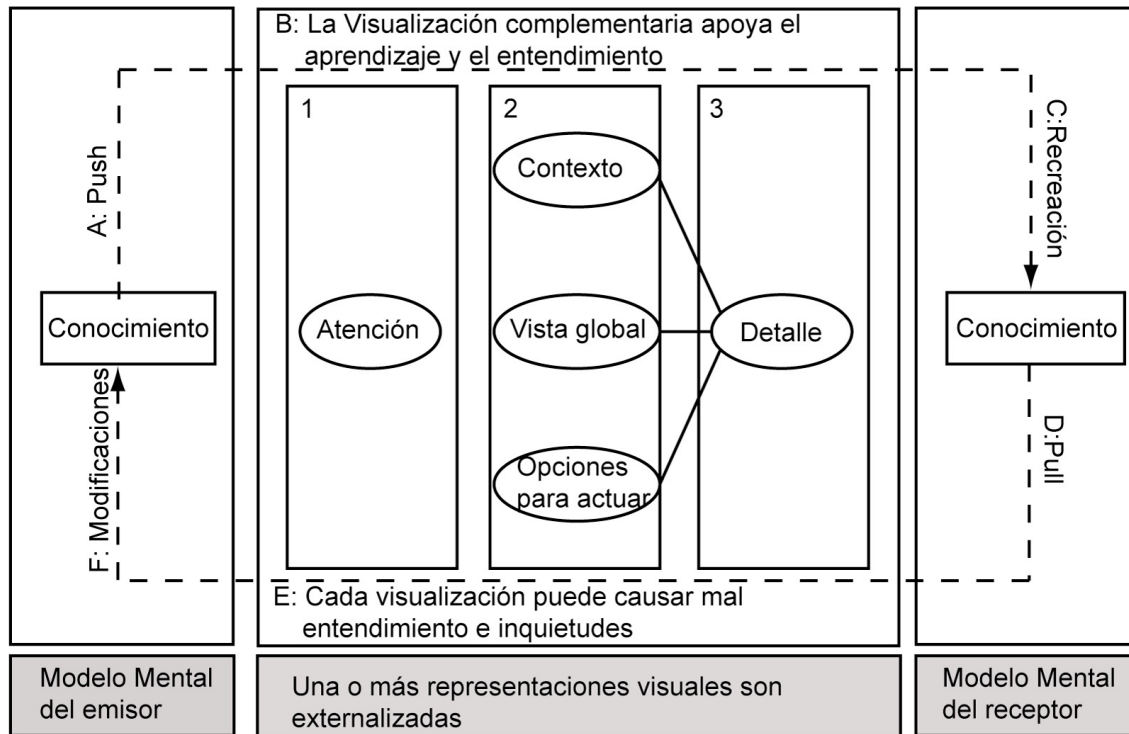


Fig 2 Modelo de Visualización del Conocimiento

El modelo está compuesto por tres partes o fases, el emisor, un medio y el receptor. El proceso inicia cuando el emisor a partir de su modelo mental, quiere transmitir a alguien algo de su conocimiento, este modelo mental se externaliza por medio de varias representaciones visuales explícitas, es decir entramos a la fase dos del modelo.

En esta segunda etapa el primer objetivo es llamar la atención del receptor, esto se puede alcanzar según Burkhard utilizando una imagen sugestiva o provocativa. Segundo el emisor requiere ilustrar el contexto, por medio de una vista global y presentar opciones para actuar. Es en este momento que el emisor puntualiza en los detalles, esto debe ocurrir en un diálogo dinámico con el receptor, dado que este es quien construye un conocimiento similar a partir de su propio modelo mental.

En cuanto a la construcción de este conocimiento, Escudero (2011) señala:

El proceso activo de manipular datos (sean estos cualitativos o cuantitativos) que pretende elaborar modelos abstractos de las relaciones que se establecen en la realidad física con el fin de ampliar nuestro conocimiento sobre dichos fenómenos y en último término, sobre la propia realidad.(p. 2)

Debido a las distintas suposiciones, creencias o conocimiento previo, puede ocurrir la mala interpretación del mensaje y por tanto una falla en la reconstrucción del conocimiento,

por lo que el modelo plantea una revisión y adecuación del medio de visualización utilizado hasta que el conocimiento sea transferido adecuadamente.

Este modelo introduce las características relevantes que necesitan ser consideradas cuando complementariamente las representaciones visuales son usadas para la transferencia y creación del conocimiento.

A lo largo de este periodo se ha adquirido una basta experiencia en este campo y su utilización como base teórica para el uso adecuado de tecnologías y tecnologías digitales. Sin embargo el modelo planteado por Burchard (2002) no había sido considerado y en consecuencia no había sido adaptado de tal forma que complemente el marco general y así nos guíe en el uso adecuado de las tecnología y tecnologías digitales en procesos educativos.





## 1.1 Cuadro resumen de los objetivos, actividades y productos alcanzados

En esta tabla se muestra el en resumen, el proyecto en términos de los objetivos alcanzados y los productos obtenidos:

<b>Objetivo general:</b> Establecer un modelo de visualización del conocimiento para el uso de las tecnologías y tecnologías digitales				
Objetivos específicos	Productos	Actividades	Período ejecución	Responsable
1. Crear un modelo prototipo a partir del modelo planteado por Burchard en la visualización del conocimiento y las investigaciones en el campo.	1.1. Modelo base	1.1.1 Análisis del modelo propuesto por Burchard e investigaciones a fines	1.1. 2013	Jorge
		1.2.1 Diseño del modelo prototipo	- 1.6. 2013	<b>100%</b>
Presentación de informe	Informe	Elaboración de informe de avance del proyecto	1.8. 2013 - 1.9. 2013	Jorge <b>100%</b>
2. Diseñar los elementos del marco general de visualización que se utilizarán para la transferencia de conocimiento.	2.1 Recursos del marco general de visualización	2.1.1. Definición del contexto de aplicación del modelo	1.6. 2013	Jorge
		2.1.2. Diseño de los tipos de visualización	-	<b>100%</b>
		2.1.3 Elaboración del marco general de visualización	1.12. 2013	
		2.1.4 Programación y desarrollo de los tipos de visualización.		
3. Implementar el modelo como guía para el uso adecuado de la tecnología y tecnologías digitales en la transferencia de conocimiento.	3.1 Diseño de un protocolo de ejecución del modelo	3.1.1. Definir el protocolo de implementación del modelo	1.1. 2014	Jorge
		3.1.2. Implementación del marco general de visualización.	- 1.6. 2014	100%
		3.1.3. Implementación del modelo		
		3.1.4. Evaluación del proceso de ejecución		
4. Validar el modelo en distintos contextos donde se utilice la tecnología y tecnologías digitales para la transferencia de conocimiento.	4.1 Un modelo teórico que apoya al marco general de visualización para el uso adecuado de la tecnología y tecnologías digitales	4.1.1. Valoración del proceso de ejecución y los resultados obtenidos	1.6. 2014	Jorge
		4.1.2 Ajustar y refinar el modelo	- 1.12. 2014	90%
Presentación de informe	Informe	Elaboración del informe final del proyecto	1.10. 2014	Jorge
			- 1.12. 2014	100%

El último objetivo no fue alcanzado completamente debido a la dificultad para llevar a cabo la validación en distintos grupos de muestra.

## 2. Marco teórico

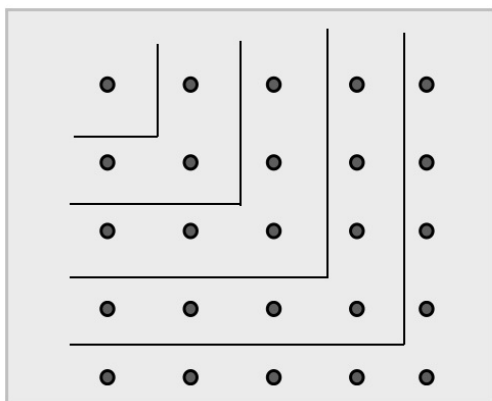
### 2.1 La visualización en la evolución de las matemáticas

En la evolución del desarrollo de las matemáticas desde la perspectiva y el papel de la visualización, cuatro son las épocas que han marcado la evolución histórica de la misma; el periodo antes de 1960, el periodo (1960-1975) conocido como la Matemática Moderna, el periodo (1975-1985) que impulsó la matemática “cercana a la realidad” y el periodo actual. Épocas caracterizadas por enfoques antagónicos en el tratamiento de la matemática y el papel de la visualización.

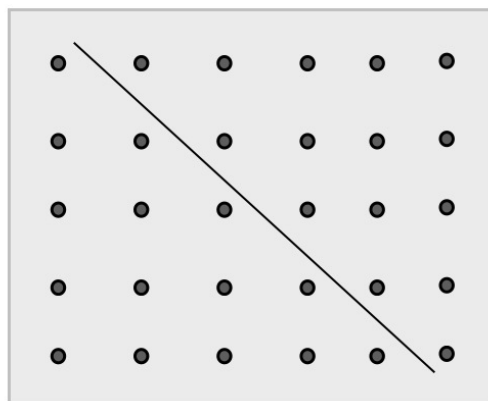
Por último posterior a la década de los 80’s investigadores como Janvier, Kaput, Hitt , Guzmán y Duval entre otros, aparecen con una seria preocupación por los problemas en el aprendizaje, la educación matemática y los sistemas de representación semiótica.

La visualización en matemática aparece desde la consolidación de la matemática como ciencia por lo pitagóricos primitivos, que utilizaron piedrecillas (cálculos) para el estudio de los números y sus relaciones (Guzmán, 1996).

El siguiente teorema es típico de esta época:



$$1 + 2 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

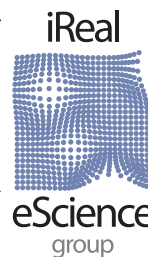


$$2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n + 2)$$

La visualización para los pitagóricos era algo completamente innato a la matemática, según Guzmán (1996), como innato es la capacidad del ser humano de procesar en forma efectiva representaciones visuales (Burkhard, 2005). Este planteamiento de Burkhard (2005) lo hace en el contexto del campo de la visualización del conocimiento.

A manera de ejemplo, el término teorema viene del latín *theorēma*, que significa afirmación susceptible de demostración científica, pero esta no es la única acepción. Teorema también viene del griego *θεώρημα* y lleva la misma raíz (*thea* = visión) que teoría y teatro.

Teorema significa “vista, espectáculo, objeto de contemplación” (Ochoa , 2005) . Al parecer la acepción que más predomina en la matemática actual es la que viene del latín, que Guzmán (1996, pp. 10) lo resume en: “ lo que se demuestra”.



Para Platón, la imagen evoca la idea como la sombra a la realidad y se potencia fuertemente su papel en la construcción matemática. Como ejemplo Guzmán (1996, pp.11) señala: “El círculo pintado no es la realidad del círculo. La realidad del círculo es la idea, pero la imagen juega un papel importante de evocación, es decir de recuerdo de la idea”.

De igual forma en algunos clásicos modernos como las Reglas para la dirección del espíritu de Descartes, la relación con la visualización es directa y señala el papel preponderante de las imágenes y figuras en lo referente al pensamiento matemático. Así el cálculo del siglo XVII nace con un componente fundamentalmente visual (Guzmán, 1996).

En el periodo de la matemática moderna los formalistas del siglo XX relegaron a segundo plano la visualización, tratándola desconfiada y sospechosamente.

Guzmán (1996) señala entre algunas posibles circunstancias que contribuyeron a esto :

- La incertidumbre de la justificación del cálculo durante el siglo XVII se liberó a finales del siglo XIX con la aritmetización del análisis por Weierstrass.
- La geometría no euclídea en el siglo XIX contribuyó a desconfiar de la intuición
- La polémica inicial relacionada a la Teoría de Conjuntos de Cantor.

Todo esto contribuyó a que los matemáticos pusieran énfasis en los aspectos formales que le proporcionaran seguridad y generara una corriente formalista no sólo en la fundamentación de la matemática (que de acuerdo con Guzmán (1996) era justificado), sino también a lo referente a la intercomunicación en la comunidad matemática, pero esta corriente influyó la educación matemática en varios niveles. Como resultado, el papel de la visualización se vio seriamente afectado en un contexto de desconfianza e inconsecuencia. Los libros de texto prescindieron de la visualización y se conformaron con lo imperativo del formalismo tanto a nivel de enseñanza superior como en niveles de educación inferior, esto es lo que algunos llamaron “las matemáticas modernas” (Guzmán,1996). Como ejemplo de esta desconfianza en la visualización, Guzmán (1996, pp.13) presenta un extracto de la introducción de un texto de Álgebra Lineal y Geometría Elemental de Jean Dieudonné que decía: “Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto,...”

Posterior a la Matemática Moderna(1960-1975) le sigue la “Matemática cercana a la realidad” que de acuerdo con Hitt (1997) se pasó de un extremo a otro. En este nuevo

momento todos los actores involucrados en la matemática y su enseñanza se centraron en hacer una matemática más “ cercana a la realidad”, las cuales degeneraron en la representaciones matemáticas absurdas como la siguiente:

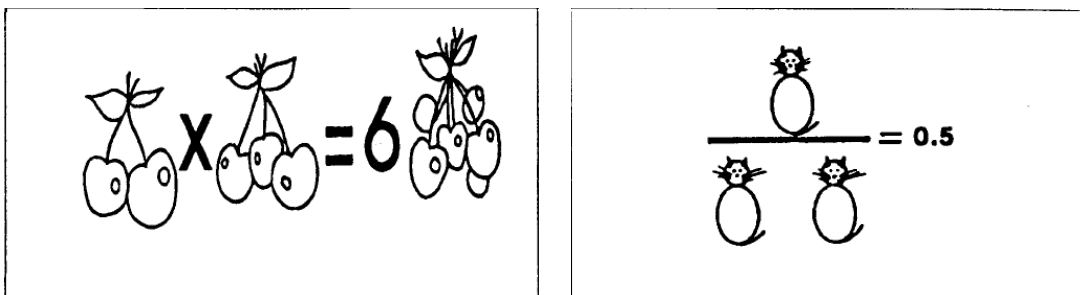


Fig 3 Tomado de Hitt(1987) p. 192

En la cual Adda (citada por Hitt(1997) ) señala: “se quieren hacer las cosas más atractivas, mas agradables, más fáciles y lo que se consigue es alejarse ” .

Es a partir de la década de los 90’s que se ve una tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático. Sin embargo la investigación sobre visualización en educación matemática aparece alrededor de los años 80s con autores como Bishop, Clements y Presmeg (2005), aunque para ese momento se restringe la noción de visualización y no es visto como un área o campo de investigación propiamente en educación matemática (Presmeg, 2005).

En esa misma década el surgimiento del constructivismo, además de la influencia del conductismo y la investigación en metodologías cualitativas marcan el inicio de una aceptación, es decir, se da un carácter valioso a la reflexión sobre preguntas complejas en educación matemática. Este periodo marca un renovado interés sobre el papel del pensamiento visual en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y la investigación cualitativa se convierte en un vehículo apropiado para el desarrollo de esta área.

La Conferencia Anual del Grupo Internacional para Psicología de la Educación Matemática (PME), fue uno de los lugares que dio origen a las primeras presentaciones sobre investigaciones realizadas, que involucran la visualización en la enseñanza de la matemática.

Presmeg (2005) señala que en la PME-13 llevada a cabo en 1998 en París, se presentó un artículo específicamente en imágenes visuales y un año después se presenta un reporte de investigación realizado por Dreyfus y Eisenberg que sugiere que los estudiantes de colegio son renuentes a usar procesamiento visual en matemática.

En 1998, por iniciativa de Fernando Hitt, profesor investigador del CINVESTAC de México en ese momento, se crea un grupo de trabajo sobre Representación y Visualización Matemática que realizó investigaciones sobre el tema por un periodo de cinco años.

Según Presmeg (2005) ya en 1991 en la PME-15 la visualización matemática como campo de estudio viene a dar sus frutos, en esta conferencia los temas de imágenes y visualización fueron presentadas como categoría separadas en la lista de temas. Diez reportes de investigación relacionados al tema de visualización en la enseñanza de la matemática fueron presentados por autores como Antonietti, Angelini, Bakar, Tall, Friedlander, Dreyfus y Presmeg entre otros.

En 1992 se continua un grupo de trabajo organizado por M. Mariotti y A. Pesci sobre visualización en la solución de problemas y el aprendizaje. Es importante hacer notar que hasta este momento la mayoría de las investigaciones eran enfocadas desde la perspectiva de la psicología.

Todo esto se inició gracias a la preocupación de muchos investigadores como Janvier, Kaput, Duval y Hitt entre otros, por entender los problemas en el aprendizaje de la matemática y los problemas que podía ocasionar una mala representación de un objeto matemático Hitt (1997).

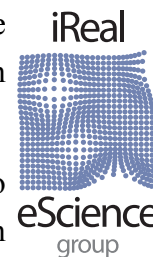
## 2.2 La comprensión y representación de conceptos matemáticos

Según Godino (citado por D'Amore, 2006) un objeto matemático “es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemática”. De igual forma Blumer (citado por D'Amore, 2006) lo define como: “Cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginario o de cualquier tipo”.

Estos son algunos tipos de objetos matemático(D'Amore, 2006):

- “lenguaje”; términos, expresiones, notaciones, gráficos
- “situaciones”; aplicaciones

En el caso de D'Amore (2004), enfatiza que: distinguir el “concepto” de su construcción no es fácil y, quizás, en alguno casos no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo, continuamente en fase de construcción. La particularidad de la matemática es que en la mayoría de los casos los conceptos se refieren a objetos matemáticos que no son físicos. Por lo que de acuerdo a este autor la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta:



todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de “objetos” para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos (D’Amore, 2004, p.5).



Cuando se cree que el estudiante está entrando en contacto con el “objeto” matemático, en realidad lo está haciendo con una representación semiótica particular de ese objeto y en consecuencia confundir el objeto con su representación semiótica.

Un planteamiento interesante sobre enseñanza y aprendizaje de un concepto es el planteado por Tall y Vinner 1981 (citado por Duarte, Trefftz y Restrepo (2006) ), ellos establecen que este debe de dividirse en dos partes.

- a. Concepto imagen: Son todas aquellas ideas abocadas cuando se hace referencia a un concepto matemático en particular. Estas ideas han sido formadas a lo largo de la vida del sujeto, e influyen positiva o negativamente en la adquisición y manejo del verdadero concepto matemático
- b. Concepto definición: Es la definición formal escrita los textos de matemática, en la cual las palabras tienen significados específicos referidos a ese contexto particular

Una situación interesante ante esta partición de acuerdo con Duarte, Trefftz y Restrepo (2006) es que:

Un alumno puede razonar a partir de su concepto imagen(en este caso sus conclusiones no siempre son verdaderas) o apelar al concepto definición, pudiendo darse el caso que no reconoce el concepto estudiado en muchas situaciones en las cuales se expone. Decimos que un alumno no ha comprendido un concepto matemático hasta que no haya integrado el concepto imagen y el concepto definición. Una forma de integrarlos es a partir de la visualización de las experiencias de aprendizaje que se diseñan en ambientes virtuales colaborativos. p. 126

Para Duarte, Trefftz y Restrepo (2006) la evocación de estas imágenes mentales asociadas a los conceptos estudiados permite la integración con los pre conceptos y los prerrequisitos que se le exigen a los estudiantes al momento de comenzar un tema nuevo. Los preconceptos son formados por un alumno en la experiencia de su vida en distintos contextos y que pueden influyen a favor o en contra del entendimiento de los conceptos matemáticos.

Hitt (1998), plantea que quizá la dificultad de algunos estudiantes en la construcción de conceptos está vinculado a las restricciones de representación que se tienen cuando se les enseña. Sin embargo es sabido por investigaciones empíricas, que la construcción de un objeto matemático por parte del estudiante está basado en el uso de varias representaciones semióticas. De allí la importancia de contribuir con las representaciones que un estudiante puede tener sobre un concepto, estimular las interrelaciones entre conceptos asociados a un tema, reconocimiento de patrones, propiciar nuevas hipótesis y algunos aspectos generales relacionados con la motivación, la memoria, el reconocimiento, la cooperación, la atención entre otros.

En la comprensión de conceptos matemáticos siempre existe la preocupación de que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones o que se siga favoreciendo las representaciones en el sistema algebraico en detrimento de las representaciones intuitivas. Esto es defendido por Hitt (1997), él cual indica además que la apropiación de un objeto matemático difícilmente se puede lograr si no se recurre a diversas representaciones del mismos.

Dentro de este proceso de la construcción de un concepto es importante aclarar el término de imagen conceptual. Este es considerado como un conjunto de imágenes asociados a un mismo concepto, la riqueza y las construcción de esta imagen conceptual está en función del manejo de distintas representaciones. Una adecuada elección de estas representaciones permitirá la construcción de imágenes mentales adecuadas y en consecuencia la construcción de conceptos (Hitt, 1997).

Para Duarte, Trefftz y Restrepo (2006);” Los conceptos matemáticos son las ideas más importantes sobre los cuales se construye el edificio matemático. La comprensión y el razonamiento que surja partir de ellos debe ser el objetivo fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje “ p. 125 .

En esta formación de conceptos matemáticos, Duval (1999) asume la necesidad de construir el concepto a partir de la interacción con las diferentes representaciones del objeto matemático, ya que cada una de ellas por sí sola es parcial, siendo importante para el proceso de comprensión, la conversión de una representación a otra (Alvarez, 2010).

Estos sistemas son llamados, sistemas de representación semióticos y han venido a jugar un papel importante en este nuevo renacer del uso de la visualización en la enseñanza de la matemática, olvidada en la Matemática Moderna.

Cuando se aborda un problema es posible utilizar representaciones semióticas en el procesos de interpretación del mismo, de igual forma el sistema de representación gráfico permite orientar el desarrollo en el sistema de las representaciones algebraicas (Hitt, 1997).

En esta nueva era, el pensamiento matemático se pueden evidenciar investigaciones en el campo de la enseñanza de la matemática en la que ante una definición formal, como es el caso particular de la definición del límite de una función real de variable real, se recurre al uso de numerosas representaciones “intuitivas” que le permiten al estudiantes adquirir una imagen mental adecuada del concepto de límite. Y de acuerdo con Hitt(1997), esta imagen conceptual promueve la articulación de distintas representaciones semióticas que poco a poco dan paso a definiciones más formales.

Tanto Duval(1999) como Hitt(1997) sugieren que para evitar que el estudiante confunda el objeto matemático con su representación, es necesario que el estudiante realice tareas de transformación entre al menos dos sistemas semióticos de representación.

### **2.3 La visualización como apoyo a la representación y construcción de conceptos**

Los temas de representación y visualización matemática han aparecido en la literatura como aspecto fundamental para entender la construcción de conceptos matemáticos y la resolución de problemas por parte del estudiante (Hitt ,1998)

En el marco de un panel sobre representación y visualización matemática dirigido por Fernando Hitt (1998) se hicieron algunas reflexiones relacionados a esta temática:

- La relevancia de hacer investigación empírica ligada a la representación y a la visualización matemática.
- La importancia de la teoría en seguir investigación en representación y visualización matemática.
- La aplicación de los resultados de investigación que vinculan el aprendizaje matemático del estudiante y el uso de múltiples representaciones dentro de un marco teórico.
- La influencia de múltiples bases tecnológicas vinculadas a las representación en la construcción de conceptos matemático del estudiante.

Ante estas cuestiones se considera que tradicionalmente la enseñanza se ha centrado en el uso de representaciones algebraicas con la intención de eliminar la confusión entre objetos matemáticos y sus representaciones. Normalmente no se toma en cuenta las representaciones



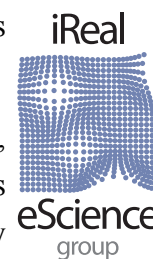


geométricas e intuitivas. Además se piensa que el sistema algebraico de representación es formal en contraposición con cualquier otro.

Ya tratamos algunos aspectos de la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999), en ella se establece que en la visualización se definen dos clases de registros; los registros con una estructura triádica de trascendencia (lenguaje natural, formas de representación 2D y 3D) y diádica de trascendencia (notación simbólica, lenguaje formal). De acuerdo con este mismo autor, el pensamiento matemático requiere de la activación en paralelo de dos o tres registros de representación.

Por otro lado los gráficos, los diagramas, las imágenes y formas geométricas o modelos son herramientas para la visualización del concepto abstracto en matemática, estos deben ser considerados en el proceso de enseñanza. Además por medio de éstos, los sentidos humanos ponen una alta relación entre el mundo físico o externo y los conceptos abstractos (Konyalioglu et al. , 2005). Así, al utilizar métodos de visualización, muchos de los conceptos matemáticos pueden considerarse concretos y clarificar para el estudiante su comprensión: éste es el objetivo que se persigue. Estas ideas son respaldadas por varios autores en sus investigaciones:

- “Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los “objetos” de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento” (D’Amore, 2004, p. 9 ).
- La visualización en el proceso de enseñanza incrementa el aprendizaje conceptual del estudiante (Konyalioglu et al. ,2005).
- Las actividades de aprendizaje deberán tomar ventaja de las capacidades de la tecnología y que además deberían involucrar múltiples representaciones de temas matemáticos, múltiples métodos de representación y la solución de problemas. Los gráficos e imágenes son usadas para representar las ideas abstractas de la matemática de una forma visual, además la visualización como se ha mencionado es parte esencial en el proceso de aprendizaje (Abu, Hassan y Sahid, 2001)
- Con una herramienta de visualización simple o compleja el estudiante puede ser conducido a investigar, a analizar fenómenos, a resolver problemas y mejorar la comprensión entre temas (Wiebe, Clark, Petlick y Ferzli, 2004) .
- La visualización de conceptos de carácter matemático, son posibles gracias al desarrollo de las TIC y las simulaciones interactivas y que estas ayudan a superar las dificultades de aprendizaje, en el caso particular de los fenómenos electromagnéticos (Alvarez, 2010).



El manejo de distintas representaciones matemáticas por parte de los estudiantes permitirá medios de construcción de imágenes mentales de un concepto matemático, el concepto de imagen según Tall y Vinner (1981). En estos días, el pensamiento matemático evidencia investigaciones en el campo de la enseñanza de la matemática en la que ante una definición formal, como es el caso particular de la definición del límite de una función real de variable real, se recurre al uso de un numerosas representaciones “intuitivas” que le permiten al estudiantes adquirir una imagen mental adecuada del concepto de límite. Y de acuerdo con Hitt(1997), esta imagen conceptual promueve la articulación de distintas representaciones semióticas que poco a poco dan paso a definiciones más formales.

Ya propiamente en el aprendizaje, Hitt (1998) señaló algunas ideas que podrían ser utilizadas o consideradas para un marco metodológico que brinden soporte al aprendizaje de la matemática por medio de la visualización:

- Aspectos teóricos del aprendizaje de la matemática los cuales toman en cuenta el papel de las representaciones semióticas en la construcción de conceptos matemáticos.
- Aspectos teóricos relacionados a las representaciones semióticas que tratan con una epistemología social del conocimiento matemático con aplicaciones didácticas en la clase.
- Un análisis de las ideas matemáticas relacionadas a un concepto mediante la historia de la matemática para describir los obstáculos epistemológicos.
- Al tomar en cuenta distintos sistemas de representación, nosotros podemos identificar variables relacionadas a contenidos cognitivos y de esta forma organizar la propuesta didáctica para apoyar que el estudiante articule en distintas representaciones.

En términos generales el uso de visualizaciones complementarias se considera una estrategia adecuada, dado que el sistema visual humano tiene distintos niveles de procesamiento y áreas especializadas que pueden ser explotadas separadamente.

Algunas condiciones sobre las cuales lo visual ayuda a tener un efecto sobre el aprendizaje son:

- Cuando las ilustraciones son exploratorias y tienen una cadena causa efecto.
- Cuando las ilustraciones exploratorias consisten en una serie de cuadros descriptivos del estado del sistema integrado con etiquetas verbales que escriben los cambios de estado mas que un cuadro de una imagen estática.

- Cuando los estudiantes pierden dominio del conocimiento.

De igual forma los proponentes de la visualización matemática apoyados por la computadora argumentan que la visualización puede ayudar a construir la intuición necesaria tanto para crear pruebas de teoremas como para entenderlas (Muznner ,1996).

Abu, Hassan y Sahid (2001) señalan que las actividades de aprendizaje deberán tomar ventaja de las capacidades de la tecnología y que además deberían involucrar múltiples representaciones de temas matemáticos y múltiples métodos de representación y solución de problemas.

Los gráficos e imágenes son usadas para representar las ideas abstractas de la matemática de una forma visual, además la visualización como se ha mencionado es parte esencial en el proceso de aprendizaje.

Wiebe, Clark, Petlick y Ferzli (2004) señalan que con una herramienta de visualización simple o compleja el estudiante puede ser conducido a investigar, a analizar fenómenos, a resolver problemas y mejorar la comprensión entre temas.

En términos generales el uso de visualizaciones complementarias se considera una estrategia adecuada debido a que el sistema visual humano tiene distintos niveles de procesamiento y áreas especializadas que pueden ser explotadas separadamente.

Algunas condiciones sobre las cuales lo visual ayuda a tener un efecto sobre el aprendizaje son:

- Cuando las ilustraciones son exploratorias y tienen una cadena causa efecto.
- Cuando las ilustraciones exploratorias consisten en una serie de cuadros descriptivos del estado del sistema integrado con etiquetas verbales que escriben los cambios de estado mas que un cuadro de una imagen estática.
- Cuando los estudiantes pierden dominio del conocimiento.

La visualización puede ser un método alternativo y un recurso poderoso para los estudiantes que hacen matemática, un recurso que puede orientar el camino de distintos medios de pensamiento acerca de la matemática más que la lingüística y el pensamiento lógico proposicional tradicional y la manipulación simbólica tradicional del álgebra. En esta misma línea Alvarez (2010) señala que:

La importancia que los investigadores en el área le confieren a la información visual para la formación de los conceptos matemáticos, queda expresada en la idea de Zimmermann [4] cuando afirma que el papel del pensamiento visual es tan

fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Y que esto es especialmente cierto si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual.(p.144 )



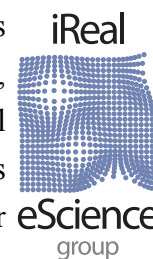
En un estudio reciente hecho por Wang, Peng, Cheng,Zhou y Liu (2011) plantean que mientras se disfruta de la flexibilidad de aprendizaje, los alumnos pueden sufrir de sobrecarga cognitiva y la desorientación conceptual y de navegación cuando se enfrentan a diversos recursos de información sobre tópicos dispares y estructuras complejas de conocimiento. Este estudio investiga el enfoque de la visualización del conocimiento (KV) para apoyar el aprendizaje en la línea de recursos abundantes y autorregulado y tiene la intención de integrar y facilitar tanto el procesamiento de la información objetiva y la construcción subjetiva del conocimiento en e-learning mediante la vinculación del conocimiento conceptual en los mapas visualizados con el aprendizaje. Como resultado, los estudiantes reportaron un alto grado de satisfacción y percepción de facilidad de uso y la utilidad del sistema y sus funciones relevantes para KV. Además al mismo tiempo, los estudiantes valoran de forma positiva en las entrevistas sobre el efecto del sistema en el aprendizaje como comprensión del andamiaje conceptual, la mejora de la memorización y el pensamiento, lo que facilita el acceso a los recursos de aprendizaje, y apoyar el aprendizaje individual y social.

Si bien todas estas funciones relacionadas con el KV jugaron un papel crítico en el éxito del sistema en su conjunto, cada uno de ellos se basó en la construcción de la estructura de conocimiento visualizado, el elemento clave del enfoque propuesto. Otro factor importante mencionado por Wang et. al. (2011) es que el apoyo al aprendizaje para los alumnos y los contenidos de aprendizaje o la calidad de la información se comprobó que estaban fuertemente correlacionadas con la satisfacción del usuario en este estudio.

Por último, la visualización se hace presente en los “Principios y estándares” del National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000), entre los objetivos se indican el desarrollo del sentido espacial y el reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico. De acuerdo con Gonzato, Godino y Neto (2011) lo mencionado en estos principios y estándares:

“justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Arrieta, 2003 y 2006; Battista, 2007; Bishop, 1983; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006) y, de manera particular, pone en evidencia la importancia del tema en la formación de profesores”. (p. 6 )

Los planteamientos de Duval, Guzman y Hitt y lo definido por la NTCM en cuanto a las representaciones visuales, coinciden con el objetivo de la Visualización del Conocimiento, una campo de investigación planteado por Remo Burkhard en el 2005, el cual parte del potencial innato que tiene el ser humano para procesar en forma efectiva representaciones visuales con el objetivo de transferir conocimiento. En la visualización del conocimiento por tanto se potencia el uso de representaciones visuales y para la generación de estas contamos actualmente con una serie de recursos tecnológicos tanto digitales como no digitales (Monge-Fallas , 2013).



## **2.4 Las tecnologías y su papel en la enseñanza de la matemática**

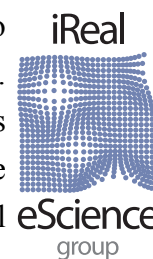
Concordamos con muchos autores que para el diseño de ambientes de aprendizaje que ayuden a alumnos a aprender, el aprendizaje debe ser: activo, autónomo, adaptado , colaborativo, constructivo, orientado a metas, diagnóstico, reflexivo y centrado en problemas. Para alcanzar esto el docente debe de tener ciertas competencias como: competencias tecnológicas, competencias didácticas y competencias tutoriales. Y además puntualiza que en el caso de las tecnologías de información y comunicación el docente además debe de poseer: competencias pedagógicas, colaboración y trabajo en red, manejo de aspectos sociales y manejo de aspectos técnicos (Marcelo, 2010).

De igual forma las tecnologías pueden verse desde distintos enfoques coincidiendo en que éstas deben verse como una herramienta. Por ejemplo Sánchez (2000) (citado por Castillo 2008), en el contexto del constructivismo señala que estas deben ser:

1. Como herramientas de apoyo que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas superiores
2. Como medio que facilite la integración de lo conocido y lo nuevo.
3. Como extensoras y amplificadoras de la mente, con el objetivo de que expandan el pensamiento cognitivo.
4. Como medios transparentes o invisibles al usuario, que hagan visible él aprender e invisible la tecnología.
5. Como herramientas que participan en un conjunto orquestado, lo que potencia su uso con metodologías activas como proyectos, trabajo colaborativo, mapas conceptuales e inteligencias múltiples.

Además estos ambientes de aprendizajes tienen un elevado grado de complejidad, un gran dinamismo, que obliga a los profesores integrar conocimientos diversos que tienen que ver con el contenido curricular que enseñan, con la naturaleza de los procesos cognitivos y las

actitudes de los alumnos y, aunado a esto dada vez con mayor relevancia: el conocimiento sobre el uso de tecnologías para el aprendizaje.(Valverde , Garrido y Fernández, 2010). Coincido con estos autores que la integración de las TIC en las aulas hacen aún más complejo estos ambientes de aprendizaje, dado que introducen nuevos ámbitos de conocimientos. Y en caso de que el profesor quisiera generar un impacto positivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, éste debe dominar ciertos conocimientos que le permitan desarrollar buenas prácticas educativas con tecnologías.



El uso de tecnologías digitales y no digitales en el aula, estas permiten contribuir el la comprensión de conceptos, esta es una interpretación de las TIC bajo mis propios prejuicios y predilecciones y esto los respalda Valverde , Garrido y Fernández (2010) , ellos consideran que estos prejuicios tienen que ver con “ las formas de uso y aplicación que consideramos «apropiadas» o «inapropiadas» “.

Un enfoque interesante de por qué la tecnología no ha impactado a la educación como si ha ocurrido en otros contextos, es el hecho de que las tecnologías educativas tradicionales se caracterizan por ser específicas y libres de ambigüedad, por ejemplo: un lápiz es para escribir, microscopio es para visualizar objetos pequeños, un borrador para borrar. Esta característica las hace muy estables a través del tiempo, además el funcionamiento interno de la mayorías de estos artefactos es muy simple y estrechamente relacionada con su función (Valverde, Garrido y Fernández ,2010).

De acuerdo con estos autores esto ha contribuido a que uso “ continuado y habitual las han convertido en tecnologías «transparentes» por ser herramientas docentes comunes, hasta el punto de dejar de ser conceptualizadas como «tecnologías» “. Esto precisamente es lo que debe ocurrir con las tecnologías digitales, y concuerdo con el término “transparente”. La tecnología debe ser transparente a nuestro planeamiento y su uso debe ser tan natural como hasta ahora venía siendo el borrador o el lápiz.

Claro como plantean Valverde , Garrido y Fernández (2010), las tecnologías no digitales son versátiles, en contraposición a las tecnologías digitales que además de inestables varían continuamente respecto al tiempo y su funcionamiento interno no es tan simple. Si nos enfocamos en la computadora, su composición es bastante compleja y es multifuncional, y más aún si nos referimos a las tabletas o los smart phone.

Esta versatilidad y complejidad vendría a complicar la introducción de las TIC en el contexto de aula (Valverde, Garrido y Fernández, 2010). Además estos autores señalan:

“ La inestabilidad de las TIC se manifiesta de dos formas. Por un lado, no existe un

conocimiento estable y duradero para el aprendizaje de estas tecnologías. Su obsolescencia se manifiesta en ritmos de cambio muy acelerados que son difíciles de asumir por muchos usuarios. Se necesita estar continuamente al día de las demandas novedosas de estas tecnologías, es decir, ser un aprendiz continuo. Por otra parte, las tecnologías digitales no suelen tener un comportamiento fiable debido a su continua modificación y mejora. El software es un producto nunca acabado, siempre por pulir, susceptible de ser alterado para cumplir nuevas funciones. Esto afecta a su calidad y obliga al profesorado a moverse en el terreno de la ambigüedad, la frustración y el cambio. Para algunos profesores esto es difícilmente asumible y admisible dentro de un aula.”

Esto pone en evidencia la necesidad que el profesor posee competencias en el contexto de las TICs, que le permitan de una manera directa entrar en esa complejidad y crear ambientes de aprendizaje con tecnología digital transparente a su proceso de enseñanza aprendizaje.

## **2.5 PCK: un marco conceptual para el conocimiento del profesor en torno a la enseñanza**

La reforma de la enseñanza planteada por Shulman (1987) se fundamenta en una idea de enseñanza que enfatiza en la comprensión el razonamiento, transformación y reflexión. Shulman plantea cuatro preguntas:

- What are sources of knowledge base of teaching?
- In what terms can these sources be conceptualized?
- What are the process of pedagogical reasoning and action?
- What are the implications for teaching policy and educational reform?

Los formadores de educadores a lo largo del tiempo mantienen su posición de que la enseñanza requiere de habilidades básicas: conocimiento del contenido y en general habilidades pedagógicas.

La enseñanza parte del supuesto de que el profesor comprende lo que se aprende y cómo ser enseñando. Luego procede a través de una serie de actividades durante el cuál, los estudiantes son provistos de instrucciones específicas y oportunidades de aprendizaje, de acuerdo con Shulman en última instancia el propio aprendizaje es responsabilidad del estudiante.

Shulman establece una categoría de conocimientos base que subyace en la comprensión del profesor necesario para promover la comprensión entre los estudiantes:

- conocimiento del contenido
- conocimiento pedagógico general
- conocimiento del curriculum
- conocimiento pedagógico del contenido
- conocimiento de los aprendices y sus características
- conocimiento del contexto educacional
- conocimiento de los fines de la educación, propósitos y valores, y sus bases filosóficas e históricas.

Se le da especial importancia a la primer categoría, dado que esta identifica el cuerpo de conocimiento para la enseñanza, éste representa la mezcla entre el contenido y la pedagogía en una comprensión de cómo un tópico particular, un problema o cuestiones son organizadas, representadas y adaptadas a los diversos intereses y habilidades de los aprendices.

Shulman plantea cuatro fuentes principales del conocimiento base para la enseñanza:

- formación académica en la disciplina a enseñar
- los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado
- la investigación sobre la escolarización
- la sabiduría que otorga la práctica misma

En el primer caso, el profesor debe conocer y comprender lo que enseña, cuales son las ideas y las destrezas más importantes de la disciplina, la forma en que los creadores de nuevo conocimiento incorporan las nuevas ideas y descartan otras, conocer las reglas y procedimientos que rigen un buen saber académico y la investigación. En sí no solo se requiere que el profesor tenga una buena formación académica si no que se requiere de una formación humanista. Para Shulman la responsabilidad del profesor es especial, dado que ellos son la principal fuente de comprensión de la materia para los estudiantes.

Estas categorías de conocimiento base, de acuerdo con Salazar (2005) fueron redefinidas y comprimidas por Grossman(1990) en cuatro áreas generales y la que se ha consolidado a través de los últimos años. Estas son:

- conocimiento pedagógico general
- conocimiento pedagógico del contenido



- conocimiento del contenido
- conocimiento del contexto

Este conocimiento pedagógico del contenido (PCK) incluye los saberes que le permiten al docente enseñar el contenido como: diversas formas de representación, analogías, ilustraciones ejemplos, explicaciones, demostraciones, es decir, las alternativas que tiene el docente para que el contenido es comprendido por los estudiantes. El PCK como lo plantea Shulman es la mezcla a partir del cual el contenido es organizado, representado y adaptado para la enseñanza. Esto supone que la capacidad de enseñabilidad de cierto contenido recae en el conocimiento profundo, flexible y cualificado del de contenido, además claro está de la capacidad de generar representaciones y reflexiones sobre ese conocimiento (Shulman citado por Salazar (2005)). De acuerdo con Salazar (2005) “el estudio del PCK ofrece la oportunidad de entender cómo los y las docentes llegan a hacer enseñables los contenidos” p. 4, además de que le da la competencia al docente de crear las distintas estrategias que le permiten hacer el contenido enseñable.

Shulman(1987) considera que si el docente tiene un dominio profundo de la disciplina entonces, puede analizar previamente cuáles componentes y relaciones del contenido podría presentar problemas en su comprensión por parte de los estudiantes. Aunque el conocimiento del contenido a enseñar es fundamental en este proceso, se considera infructuoso si no se considera los puntos de vista sobre el contenido que tienen los estudiantes(Salazar, 2005). El PCK parte del supuesto que existe esa conexión entre el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido y que esa interacción es la que permite que el docente transforme el contenido que va a enseñar. Esto se da precisamente cuando el “ docente reflexiona e interpreta críticamente la información pedagógica, disciplinar y del contexto” (Shulman citado por Salazar 2005, p.6) este proceso Shulman llamó: Modelo de Razonamiento y Acción Pedagógica.



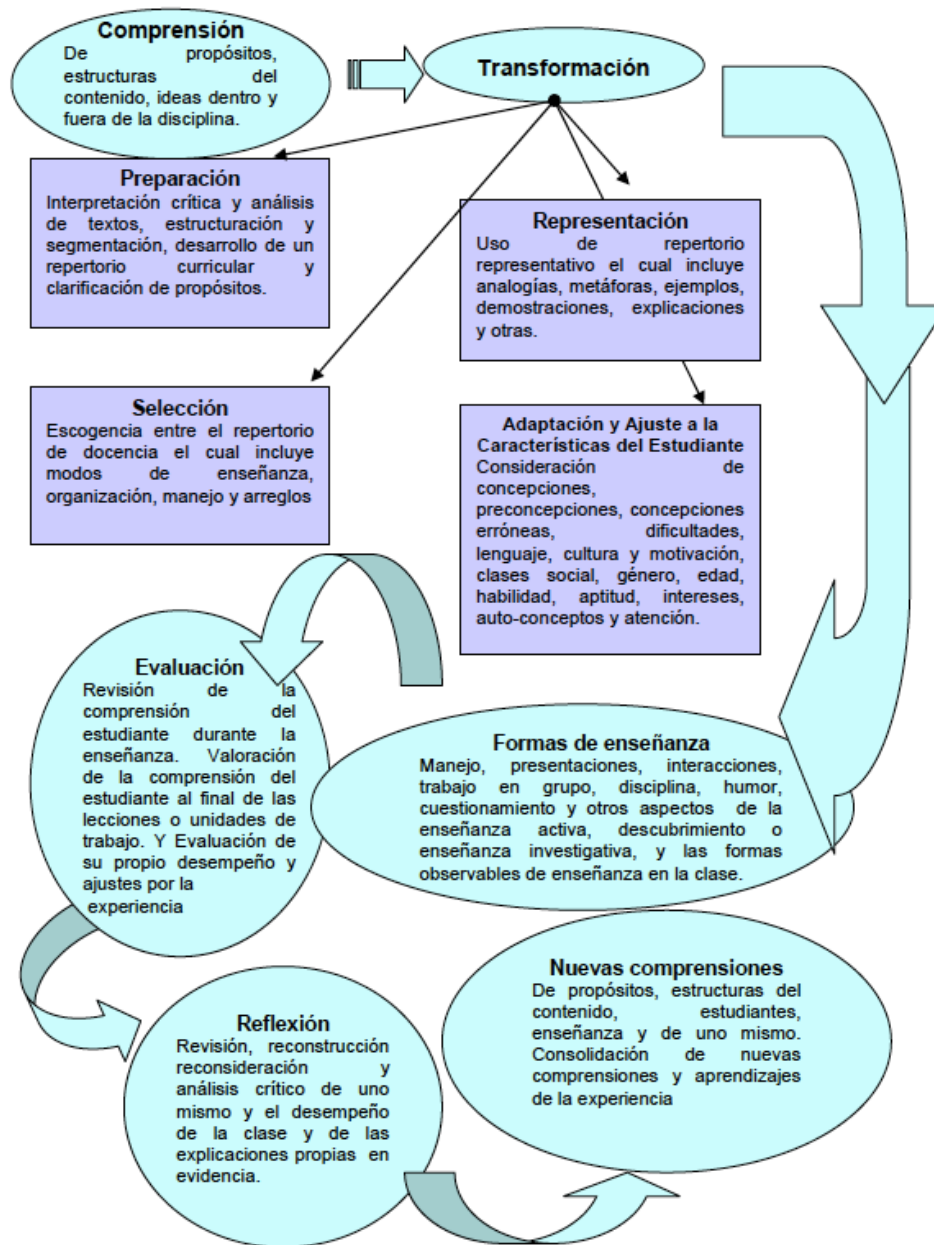


Fig 4. Modelo de razonamiento y acción pedagógica según Shulman, tomado de Salazar(2005) p.7

Este es un modelo razonable, por cuanto parte de que el profesor debe tener manejo profundo de la disciplina que va a enseñar, habilidades pedagógicas para crear actividades que transformen el contenido a enseñar en función del contexto del estudiante. Por su naturaleza dinámica este proceso es de continua retroalimentación. Al final Grossman (1990) (citado por Salazar 2005) considera que el PCK debe tomar el conocimiento del currículum y el contexto de aprendizaje.

Por lo general las escuelas formadoras de docentes, aunque consideran algunos de los aspectos plantado en el PCK no lo han concebido de una forma integrada ni incluso en la

formación de docentes. Autores como Gew-Newsome (1999) (citado por Salazar 2005) han creado modelos que expliquen la formación del PCK, entre ellos me interesa el modelo integrador que se muestra en la figura

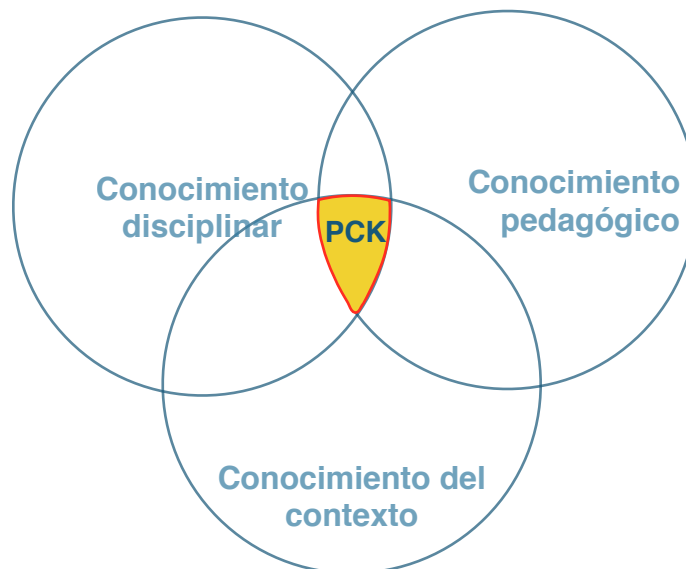


Fig 5: Modelo integrativo propuesto por Gew-Newsome en 1999

En este modelo los conocimientos son desarrollados en forma separada e integrados en el acto docente (Salazar 2005).

Loewenberg, Hoover, y Phelps (2008) realizaron un estudio en el cual tratan el conocimiento de contenido en el campo específico de la matemática, para considerar el conocimiento que la enseñanza de la matemática implica, empiezan investigando lo que la enseñanza implica por sí misma. Estos autores en lugar de empezar con la lista de contenidos del currículum que los profesores deben saber, desarrollan un enfoque empírico para entender el conocimiento de contenido necesario para la enseñanza. En su primer trabajo utilizaron los estudios de la práctica docente para analizar las demandas matemáticas de la enseñanza y, con base a estos análisis, desarrollaron un conjunto de hipótesis comprobables sobre la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza.

Estos autores y su grupo de investigación se enfocaron en la siguiente pregunta planteada por Ball, Hill, Bass (2005). ¿Qué necesitan saber los profesores y ser capaces de hacer para cumplir eficazmente la labor de enseñanza de la matemática?, además esta pregunta les permitía caracterizar el trabajo de abajo hacia arriba, iniciando con la práctica. De acuerdo con Loewenberg, Hoover, y Phelps (2008) parece obvio que los profesores necesitan saber el tema y procedimientos que ellos enseñan, sin embargo, estos autores se

centraron en cómo los profesores necesitan saber este contenido, además qué es lo que los profesores necesitan saber de las matemáticas, cómo y dónde los profesores pueden usar tal conocimiento matemático en la práctica. Básicamente se enfocaron en el trabajo del profesor;

1. ¿ qué hacen los profesores en la enseñanza de la matemática ?,
2. ¿cómo demanda el razonamiento matemático, la percepción, la comprensión y habilidades?

Un trabajo interesante en el cual se refiere al conocimiento matemático que los profesores necesitan llevar a cabo en su trabajo como profesores de matemática. Partiendo de que los profesores necesitan saber el contenido que van a enseñar, la pregunta es si necesitan saber algo más y si es así qué es lo que necesitan saber y en qué forma ellos necesitan saber esta matemática par usarla en su enseñanza( Loewenberg, Hoover, y Phelps 2008). Estos autores parten de dos hipótesis que resumo: la primera es que los profesores deben saber más de lo que está en el plan de estudio y la segunda; es que los profesores necesitan saber más del conocimiento del contenido pedagógico del curriculum. En ambos casos es claro que no queda explícito ese conocimiento de más que es necesario saber.

Como parte conclusiva de sus análisis previos establecieron que el conocimiento matemático y las habilidades son de naturaleza distinta, el cual se ve reflejado en un refinamiento del modelo PCK de Shulman. Observando este refinamiento en el modelo integrado de Gew-Newsome (1999)(citado por Salazar 2005), tenemos:



Fig 6: Modelo integrativo refinado específicamente en el área de la matemática por Loewenberg, Hoover, y Phelps en 2008

Dado que el conocimiento del contenido pedagógico está estrechamente relacionado con la práctica, este no requiere conocimiento adicional del estudiante o la enseñanza. Por lo que

estos autores se enfocan en el conocimiento del contenido especializado y el siguiente es un ejemplo sencillo que permite dilucidar lo que plantearon en su momento ( Loewenberg, Hoover, y Phelps 2008):

$$\begin{array}{r} 160 \\ - 102 \\ \hline 58 \end{array}$$

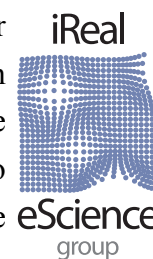


Diferencian los dos conocimientos, estableciendo como conocimiento del contenido común el algoritmo que le permite realizar el cálculo de la operación anterior. Pero se incluye como conocimiento especializado, aquél que le permite al profesor saber cuando un estudiante tiene la respuesta incorrecta, reconocer cuando un libro de texto da una definición inadecuada, y ser capaz de usar términos y notaciones correctamente cuando se habla y se escribe en la pizarra. Así que, si el profesor solo es capaz de identificar que la respuesta es incorrecta nada más, carece un conocimiento de contenido especializado que le permita apoyar al estudiante a que aprenda hacerlo bien. Es especial cuando el profesor se enfrenta a toda clase de soluciones de estudiantes, este debe averiguar lo que los estudiantes hacen, ver si el pensamiento es matemáticamente correcto para el problema y si el método trabajaría en general. Al final que el profesor interprete los errores y la evaluación de algoritmos alternativos no es todo lo que los profesores deben saber, también deben saber procedimientos, conocimiento de términos, explicaciones de conceptos, y de formas efectivas de representación ( Loewenberg, Hoover, y Phelps 2008). El punto que plantean los autores es no solo es lo que los profesores necesitan enseñar, sino, acerca de lo que ellos mismo necesitan saber y ser capaces de hacer con el fin de llevar a cabo cualquier forma responsable de la enseñanza.

La experiencia del profesor le permite anticipar los errores más comunes en un procedimiento dado, esto se confirma cuando el profesor ha estado expuesto día a día a lo que los estudiantes hacen, así se convierte esta experiencia en un tipo de conocimiento, que los autores denominan: conocimiento del contenido y el estudiante. De acuerdo con Loewenberg, Hoover, y Phelps (2008) esto se evidencia por que el profesor necesita predecir lo que los estudiante encuentran interesante y motivante, cuando se asigna un trabajo el profesor anticipa lo que probablemente los estudiantes vaya a hacer, si lo consideran difícil o fácil. Aquí interactúan el entendimiento matemático específico, la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático.

Este enfoque me parece oportuno en el contexto de la enseñanza y más aún si nos referimos a la enseñanza de la matemática, sin embargo hay un umbral que a veces cruzan

tanto los modelos de enseñanza como las teorías que las hacen imprácticas en la práctica. Por eso parto de modelos que nos permitan enriquecer el conocimiento, pero que también puedan ser implementadas en la labor docente. Tomado el último modelo refinado, aparece lo que he buscado en la investigación y que precisamente se fundamenta en el PCK, me refiero a cómo en este proceso de enseñanza podemos incorporar las tecnologías, sobre las cuales he trabajado los últimos años. Por lo que daremos un vistazo a como se plantea esta ampliación del modelo PCK refinado.



## **2.6 TPCK: un marco conceptual para el conocimiento del profesor en torno a la enseñanza con tecnología**

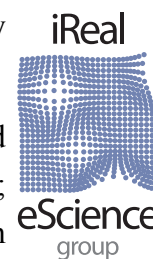
En cuanto a la tecnología en los procesos de enseñanza coincido con Mishra y Koehler (2006) cuando se refirieron a que el problema era la tendencia a mirar la tecnología y no su uso, y lo hemos visto en nuestra instituciones de educativas que la introducción de la tecnología en la educación no es suficiente. La pregunta como plantean Mishra y Koehler (2006) es: Qué necesitan saber los profesores para apropiadamente incorpora la tecnología en si enseñanza, esto lo planteaba Shulman (1987) pero a nivel de las áreas disciplinares que al final dieron origen al PCK. Al igual que en muchos campos como la Visualización del Conocimiento en el cual Burkhard y Eppler (2005) desarrollaron un marco conceptual para el uso de representaciones visuales con el objetivo de transferir conocimiento, Mishra y Koehler (2006) planearon lo mismo pero un marco conceptual que de soporte al uso de la tecnología en la educación, necesario para evitar ambigüedades y brindarles un soporte a los distintos profesores interesados en cómo integrar la tecnología en forma transparente y eficiente en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Para el desarrollo de su marco conceptual Mishra y Koehler (2006) parten del hecho de que la enseñanza es una actividad altamente compleja, es el matiz de muchas clases de conocimientos, es una habilidad cognitiva compleja que ocurre en un ambiente mal estructurado y dinámico. Todos los que trabajamos en educación sabemos que esto es así. La literatura ha mostrado que históricamente la formación de profesores se centraba en el conocimiento del contenido del profesor (Shulman, 1986; Veal & MaKinster 1999 citado por Mishra y Koehler, 2006)), posteriormente toma un nuevo rumbo y se enfoca en la pedagogía, pero que originalmente eran enfoques independiente fue hasta en 1986 Shulman avanza en torno al conocimiento que los docentes deberían tener para enfrentar eficientemente la enseñanza , al introducir el PCK(Pedagogical Content Knowledge) el cual discutimos previamente. El PCK es una mezcla del contenido y la pedagogía en el entendido de cómo aspectos particulares de una materia son organizados, adaptados y representados para su enseñanza.

Desde 1987 que introduce Shulman el PCK, este término ha sido ampliamente difundido y como lo señala Mishra y Koehler (2006):

For instance, in the area of science education, scholars such as Anderson and Mitchner (1994); Hewson and Hewson (1988); Cochran, King, and DeRuiter (1993); and professional organizations such as the National Science Teachers Association (NSTA, 1999) and National Council for the Accreditation of Teacher Education (NCATE, 1997) have all emphasized the value of PCK for teacher preparation and teacher professional development. An analysis of Teacher Educator's Handbook (Murray, 1996) shows Shulman as the fourth most cited author of the close to 1,500 authors in the book's author index, with an overwhelming majority of those references made to this concept of PCK (Segall, 2004). The notion of PCK since its introduction in 1987 has permeated the scholarship that deals with teacher education and the subject matter of education (see, for example, Ball, 1996; Cochran, King, & De- Ruiter, 1993; Grossman, 1990; Ma, 1999; Shulman, 1987; Wilson, Shulman, & Richert, 1987). It is valued as an epistemological concept that usefully blends the traditionally separated knowledge bases of content and pedagogy. (p. 1022)

De acuerdo con Mishra y Koehler (2006) ya para el 2006 la tecnología había cambiado la naturaleza del salón de clase, y haciendo referencia a los aspectos claves del PCK plantados por Shulman como: que las mas poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones o bien las formas de representación y formulación de un tema con el objetivo de hacerlo mas accesibles y comprensibles. Todos estos no podía obviarse por cuanto la tecnología venían a cambiar el rol en cada uno de estos aspectos y ofrece numerosas posibilidad para alcanzar estas representaciones, adaptaciones, ilustraciones. Y que al parecer llegaron para quedarse. Para Mishra y Koehler (2006) los profesores iban a tener mas que aprender el uso de las herramientas disponibles, ellos también tenían que aprender nuevas técnicas y habilidades dado la rapidez con que las tecnologías se vuelven obsoletas. Por lo que el conocimiento tecnológico venía a convertirse en un eslabón más como lo era el conocimiento del contenido planteado por Shulman en su momento, que de hecho al inicio tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico fueron considerados como independientes, para el 2006 de acuerdo con Mishra y Koehler venía ocurriendo lo mismo con el conocimiento tecnológico. Por lo que ambos autores incorporaron al PCK plantado por Shulman la componente tecnológica para obtener lo que en principio denominaron como TPCK.



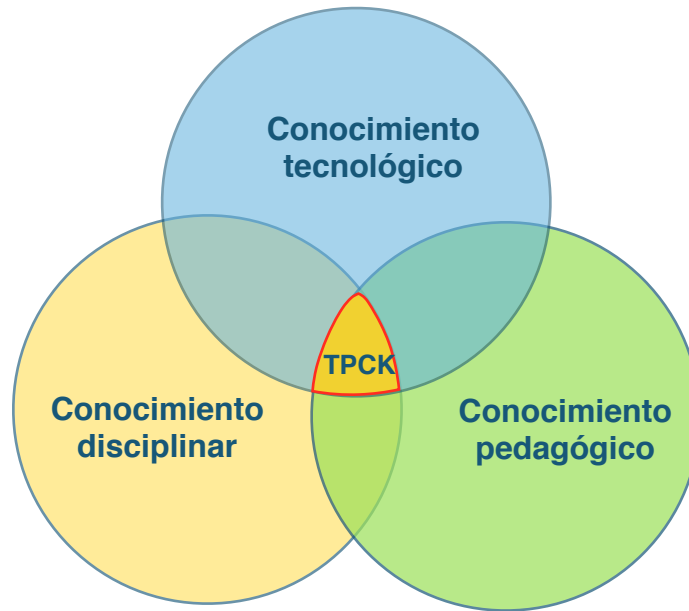


Fig 7 : Pedagogical Technological Content Knowledge propuesto por Mishra y Koehler en 2006

Como se aprecia el modelo además del conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico incorporar el conocimiento tecnológico, pero además los traslapes generan cuatro conocimientos: el que involucra a los tres, es decir el TCPK, y otros tres que inter-relacionan únicamente dos conocimientos.

En el 2008 el acrónimo TCPK fue cambiado debido a la dificultad asociadas a las siglas, además de problemas para recordar el orden correcto, dado que era considerado como un desafío(Thompson y Mishra, 2008). Según estos autores el TCPK es bastante simple, una poder idea pero con un nombre complicado y un acrónimo que perjudicó su utilidad y el poder. Fue en la 9<sup>th</sup> Annual National Technology Leadership Summit que se le preguntó a profesores de cada una de las asociaciones líderes y a editores de revistas que asisten a la cumbre sobre nombres alternativos TCPK y después de muchas deliberaciones el nombre fue cambiado a TPACK. Thompson y Mishra (2008) señalan que este nuevo nombre captura dos aspectos importantes para el trabajo con tecnología. El primero es el que se enfatiza a través de las letras, las tres clases de conocimiento(Technology, Pedagogy and Content), los cuales se consideran esenciales en una integración inteligente de la tecnología. Y la segunda es que estos tres dominios de conocimiento no deben considerarse aislados sino integrados en forma completa en lo que ellos llamaron un “Total PACKage”, y que cumpliera el objetivo de ayudar a profesores a tomar ventaja de la tecnología para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Una cuestión interesante que plantean estos autores es que, ellos creían que después de que los profesores aprendieran a usar tecnología, ellos de forma natural encontrarían la manera de utilizar la tecnología en la enseñanza de su contenido, yo



parcialmente lo pensaba así, sin embargo ahora lo considero una concepción errónea. Se plantea que necesita más una concepción tecnocentrista, dado que el conocimiento de la tecnología no conduce a una enseñanza efectiva con tecnología, involucra la habilidad de tomar decisiones informadas sobre como tomar ventaja de las fortalezas de la tecnología que apoyen estrategias pedagógicas en contenidos específicos. Por eso Thompson y Mishra (2008) recomiendan al igual que muchos otros investigadores el uso de TPACK.

Lo más importante cuando se trabaja con tecnología, no es la tecnología misma sino, la planificación educativa . En este caso, siempre es importante un marco teórico que respalde el trabajo metodológico cuando se trabaja con tecnología, el modelo que hemos venido trabajando propuesto por Shulman ( 1987) y el modelo integrado de Gew-Newsome (1999) (citado por Salazar 2005), este ha sido tomado como base por Mishra y Koehler (2006) y han incorporado la componente de tecnología, creando un nuevo modelo al cual denominaron Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK).

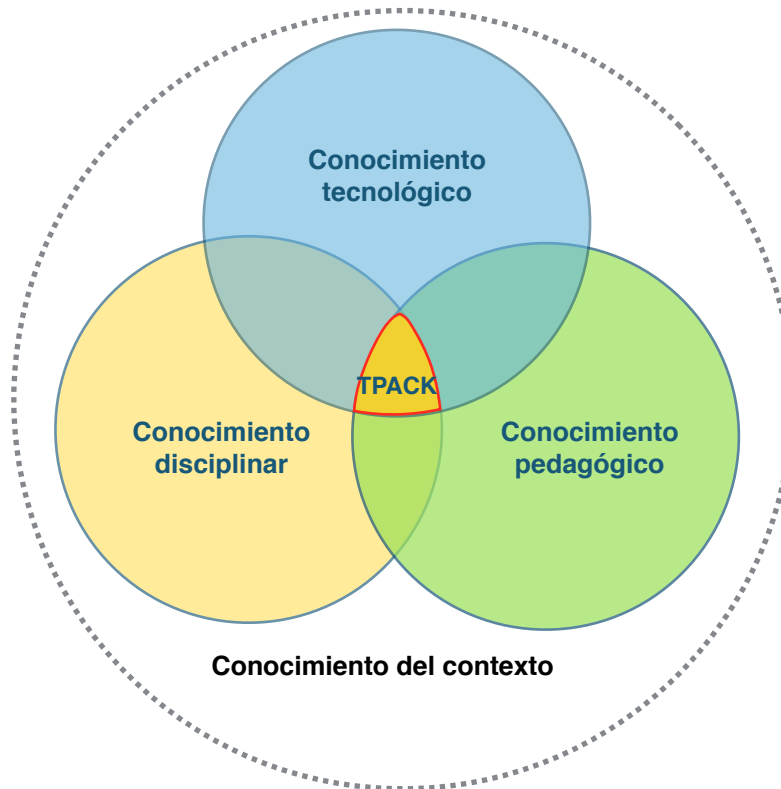
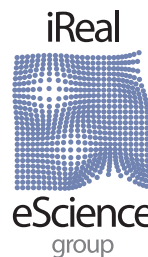


Fig 8: Modelo TPACK por Mishra & Koehler en el cual se considera el contexto

Como se puede ver el modelo propuesto por Mishra y Koehler (2006), sigue considerando un modelo integrado, pero ahora los conocimientos que se integran son : el conocimiento disciplinar, el conocimiento pedagógico y el conocimiento tecnológico. Además la intersección estos tres conocimientos genera el TPACK, claro que Mishra y Koehler, los

enmarcan dentro del conocimiento contextual. La versatilidad del modelo permite otras tres intersecciones que también dan paso a relacionados importantes como: conocimiento tecnológico pedagógico, conocimiento tecnológico disciplinar y el conocimiento pedagógico disciplinar.



Dado que ya se habían clarificado cada uno de los conocimientos definidos en PCK, nos resta únicamente el conocimiento tecnológico. Este conocimiento toma en consideración tanto tecnologías tradicionales como pizarra, tiza, marcadores entre otros y las tecnologías digitales como la computadora, teléfonos inteligentes, tabletas, internet etc. Este conocimiento además de incluir las habilidades para manejar dichas tecnologías, requiere por el carácter cambiante de las tecnologías digitales de las competencias necesarias para adaptarse continuamente a los cambios que se producen (Caras, 2012 ).

Para enmarcar la tecnología en la enseñanza de algún contenido de la disciplina de acuerdo con (Caras , Mishra y Koehler , ) se quiere un conocimiento de las distintas intersecciones:

- Conocimiento tecnológico disciplinar
- Conocimiento tecnológico pedagógico
- Conocimiento pedagógico disciplinar

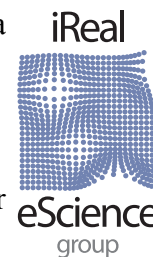
Nos referiremos a los dos primeros. En el conocimiento tecnológico disciplinar, que claramente establece la relación entre lo tecnológico y la disciplinar. Este conocimiento requiere que el profesor seleccione la tecnología adecuada a cierto contenido y la manera de adecuarla e implementarla de forma eficiente en el abordaje del contenido. Así como su selección puede limitar, también nos permite ampliar considerablemente la posibilidad de crear nuevas y variadas representaciones con gran flexibilidad (Caras, 2012 ).

En el caso del conocimiento tecnológico disciplinar, su potencial en contextos de enseñanza aprendizaje no debe desaprovecharse. Sin embargo, el conocimiento de como se enseña cambia cuando se quiere integrar la tecnología en estos procesos de enseñanza aprendizaje. La tecnología nos permite definir nuevas estrategias pedagógicas, por lo que, este conocimiento requiere el conocimiento de diversas herramientas tecnológicas para la realización de ciertas tareas y la habilidad para elegir las en función de su adaptabilidad a contextos educativos y como dice (Caras, 2012) “Supone el desarrollo de una mente abierta y creativa poder adaptar las herramientas que existen, que no siempre fueron creadas para fines educativos y reconfigurarlas.” p. 5

Se puede resumir de acuerdo con (Caras, 2012 ) el TPACK como la base para una buena enseñanza con tecnología, la cual requiere la comprensión de:

- la representación de ideas utilizando la tecnología,
- técnicas pedagógicas que utilizan la tecnología en formas constructivas para enseñar un contenido,
- conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de un concepto y cómo la tecnología puede contribuir a compensar esas dificultades que enfrentan los alumnos,
- conocimiento de las ideas e hipótesis previas de los alumnos y sobre cómo la tecnología puede ser utilizada para construir conocimiento disciplinar.

Como vemos al final este modelo TPACK es consistente con el marco general de visualización y la teoría de representaciones semióticas de Duval.



## 2.7 Planteamiento del problema y objetivos

La dificultad en la utilización de este marco general es definir la combinación adecuada, bajo el objetivo planteado, cuál debe ser la representación visual que permite alcanzarlo.

Nuestra experiencia en este campo inició en el 2008 y desde esa fecha se han desarrollado dos proyectos en esta línea. El último se desarrolló en el periodo 2010-2011 nombrado “Visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática” (proyecto adscrito a la VIE) y cuyos resultados han sido favorables en la implementación del Marco General de Visualización del Conocimiento (Monge-Fallas, 2011).

A lo largo de este periodo se ha adquirido una basta experiencia en este campo y su utilización como base teórica para el uso adecuado de tecnologías y tecnologías digitales. Sin embargo el modelo planteado por Burchard(2002) no ha sido considerado y en consecuencia no ha sido adaptado de tal forma que complemente el marco general y así nos guíe en el uso adecuado de las tecnología y tecnologías digitales en procesos educativos. Como vimos, la evolución del TPACK en los procesos de enseñanza-aprendizaje con tecnología nos permite junto con la teoría de la visualización del conocimiento pensar en definir un nuevo modelo que incorpore de forma transparente la tecnología, aprovechando las bondades de la visualización del conocimiento que pueda ser utilizado en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

De ahí que los objetivos planteados en el proyecto eran los siguientes:

**General:** Establecer un modelo de visualización del conocimiento para el uso de las tecnologías y tecnologías digitales



**Específicos:** Los siguientes son los objetivos específicos del proyecto

- Crear un modelo prototipo a partir del modelo planteado por Burchard en la visualización del conocimiento y las investigaciones en el campo.
- Diseñar los elementos del marco general de visualización que se utilizaran para la transferencia de conocimiento.
- Implementar el modelo como guía para el uso adecuado de la tecnología y tecnologías digitales en la transferencia de conocimiento.
- Validar el modelo en distintos contextos donde se utilice la tecnología y tecnologías digitales para la transferencia de conocimiento.

### 3. Metodología utilizada

En este proyecto partimos de la base de la visualización conocimiento y como punto de partida el modelo planteado por Burkhard (2005) (figura 7), dado que este modelo fue desarrollado en el contexto de la administración del conocimiento, queríamos ver la posibilidad de adaptarlo para el contexto específico de la enseñanza y particular cuando se usan tecnologías.

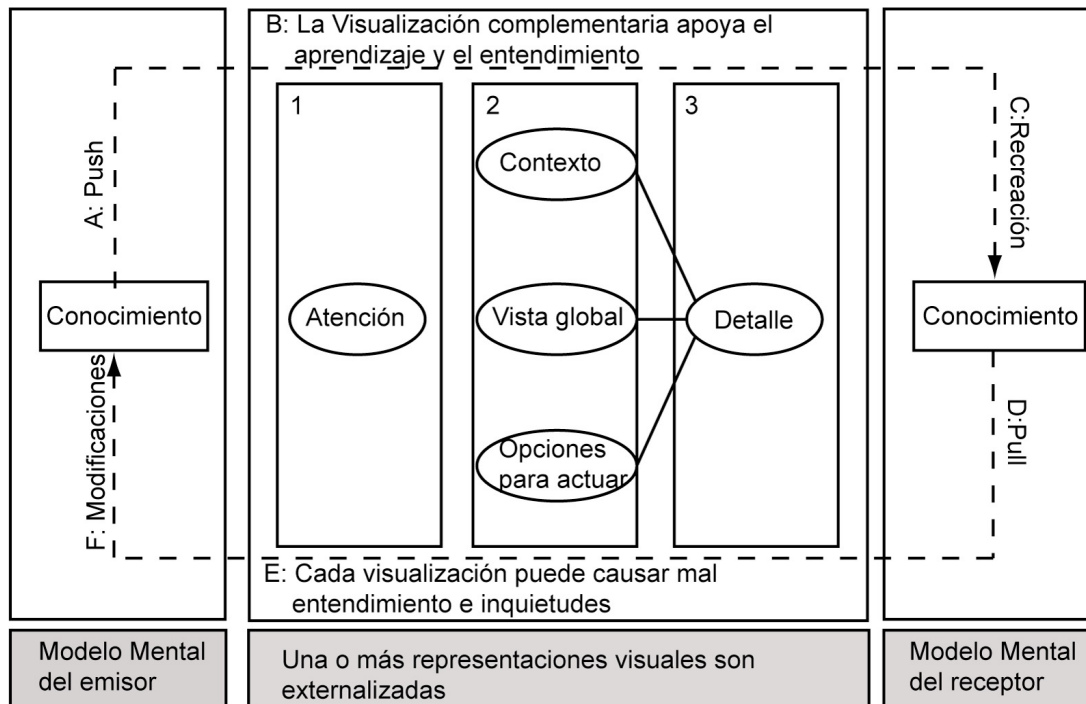


Fig 9: Modelo de Visualización del Conocimiento

Este modelo se fundamenta en el marco general de visualización planteado por Burkhard y Eppler (2005) el cual establece que si se van a utilizar representaciones visuales para transferir conocimiento, entonces este marco general de visualización debería ser considerado:



Tipo de función	Tipo de conocimiento	Tipo de receptor	Tipo de visualización
Coordinación	Qué saber: Declarativo	Individual	Boceto
Atención	Cómo sabe: Procedimental	Grupal	Diagrama
Recuerdo	Por qué saber: Experimental	Organizacional	Imagen
Motivación	Dónde saber: Orientacional	Red	Mapa
Elaboración	Quién sabe: Individual		Objeto
Nuevas ideas			Visualización interactiva
			Historia

Fig 10: Marco general de Visualización del Conocimiento

Partimos del marco general de visualización y modelo planteado por Burkhard (2005), además del modelo planteado por Shulman(1987) y modificado Misrha y Koehler(2006)

Por la dificultad de implementación en varios grupos se tomó la decisión de hacer un estudio de caso, elegido para esta investigación en particular un grupo de Cálculo y Geometría Analítica.

De acuerdo con Barrios,González, Padín, Peral, Sánchez, y Tarín. (sf), “El estudio de casos constituye un campo privilegiado para comprender en profundidad los fenómenos educativos aunque también el estudio de casos se ha utilizado desde un enfoque nomotético” p.2

Además estos autores llaman a los caso: “ situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación. Así, por ejemplo en educación, un aula, un alumno autista o un programa de enseñanza pueden considerarse un caso.” p.3

Dado que el objetivo principal es la búsqueda de un modelo de enseñanza aprendiza que incorporen la tecnología, tomamos como punto de partida el modelo planteado por Burkhard (2005) y además tomamos como referencia de la literatura el modelo PCK definido por Shulman (1987) y modificado por Misrha y Koehler (2006) al incorporarle la componente tecnológica, el cual fue denominado TPACK. Por lo que en el periodo de la investigación se fueron analizando variaciones en estos modelos para adaptarlos y consolidarlo en el proceso.

Como punto de partida se planeó la evaluación de ocho clases en particular, para la cual en cada una de ellas se siguió un marco general de visualización. Al finalizar cada clase se hizo una valoración en términos de la observación sobre el trabajo y participación de los estudiantes.

Se utilizaron dos instrumentos de evaluación: el primero un instrumentos simple, aplicado al finalizar cada clase, el cuál únicamente muestra el nivel de agrado del estudiante sobre las actividades desarrolladas en la clase, las cuales calificaban de acuerdo con:

## Evaluación

Grupo: \_\_\_\_\_

Necesitamos una valoración sobre las actividades realizadas en la clase del día de hoy, por lo que le solicitamos que marque con una X una de las siguientes casillas según el grado de satisfacción:

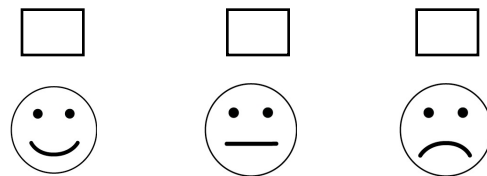


Fig 11: Muestra del instrumento de evaluación

El otro instrumento es un diferencial semántico desarrollado en investigaciones previas que permiten medir cómo los estudiantes percibían las actividades realizadas en clase en función de la tecnología utilizada.

El diferencial semántico (DS) es una técnica que sirve para percibir el grado y el significado afectivo, subjetivo o connotativo de los conceptos, objetos y, en general, de los eventos por medio de adjetivos o descriptos (Madrid, 2007). El Diferencial Semántico valora cada una de las parejas de adjetivos bipolares de acuerdo con el valor de la media aritmética de los datos correspondientes.

Las parejas de adjetivos bipolares utilizados fueron las siguientes:

1	DESALESTADORAS	INSPIRADORAS
2	DIFÍCILES	FÁCILES
3	ABURRIDAS	DIVERTIDAS
4	CONFUSAS	CLARAS
5	FRUSTRANTES	MOTIVADORAS
6	ESTRESANTES	RELAJANTES
7	COMPLICADAS	SENCILLAS
8	IRREFLEXIVAS	REFLEXIVAS
9	DESAGRADABLES	AGRADABLES
10	PASIVAS	DINÁMICAS
11	NO FORMATIVAS	FORMATIVAS
12	TRADICIONALES	INNOVADORAS
13	DESORDENADAS	SISTEMÁTICAS

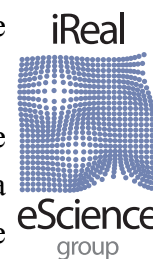
El diferencial semántico utilizado contaba con siete opciones, distribuidas desde el valor 1 hasta el valor 7. De acuerdo con esta distribución, el valor 1 implica una actitud negativa extrema (muy negativa) y 7 una actitud positiva extrema (muy positiva). El valor 4 se asocia con una posición de indiferencia o de equilibrio.

Para facilitar el análisis y la interpretación de los datos, especialmente de las medias diferentes de los valores extremos, se procedió a definir las siguientes categorías, de acuerdo con el valor de la media de cada pareja de adjetivos bipolares:

- $1 \leq d < 2$ : actitud muy negativa
- $2 \leq d < 3$ : actitud negativa moderada
- $3 \leq d < 4$ : actitud negativa baja
- $4 \leq d < 5$ : actitud positiva baja
- $5 \leq d < 6$ : actitud positiva moderada
- $6 \leq d \leq 7$ : actitud muy positiva

Con fundamento en Nunnally y Bernstein, citados en Hogan (2004), plantea que para una prueba con la que se pretenda tomar decisiones sobre una persona (diagnóstico psicológico, selección de personal, licencia para ejercer una profesión, etc.) se requiere una prueba de alta confiabilidad (0,90 como mínimo aceptable y 0,95 como la norma deseable); en tanto que sí

el uso de la prueba es para la investigación se requiere una confiabilidad moderada (0.80 se considera adecuada).



Aplicando la técnica del Alfa de Cronbach, utilizando el programa SPSS versión 19, se obtuvo un valor de 0,827 (tabla 12) para el diferencial semántico utilizado en la investigación, razón por la cual podemos afirmar que el instrumento es confiable, lo que avala su uso en esta investigación.

Parámetro	Valor
Alfa de Cronbach	0,827
N de elementos	13

**Tabla 1:** Estadísticos de fiabilidad diferencial semántico

## 4. Análisis

Como se mencionó en la metodología, se desarrollaron varias clases. Tomando como base un marco general de visualización, en el cual se incorporaron distintos grados de tecnología, y con diferentes roles para los estudiantes. Mostramos cada uno de los marcos generales desarrollados y algunas observaciones importantes.

### Marco general de visualización: clase #1

**Tema:** Secciones cónicas

**Fecha:** 29 de julio

**Enfoque:** Se trata el tema desde una perspectiva histórica, apuntando a su utilidad y un tratamiento basado en su definición como lugar geométrico.

**Estilo:** Esta clase en particular se desarrollará basada en la enseñanza y apelando a la interacción de los estudiantes que genere aprendizaje.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Software Blender	Atención Motivación	Declarativo	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 2: Geogebra	Recuerdo Motivación	Declarativo	Grupo	Diagrama interactivo
Recurso 3: Cmap Tools	Coordinación	Declarativo	Grupo	Mapa conceptual



**Observaciones:**

La clase fue aplicada, sin embargo la ejecución no fue la mejor. Objetivamente la participación directa del estudiantes fue necesaria o por lo menos en la ejecución de algunas tareas.

**Marco general de visualización: clase #2**

**Tema:** Coordenadas polares

**Fecha:** 7 de agosto

**Enfoque:** Se utilizará distintos dispositivos electrónicos como tabletas, teléfonos celulares para la graficación de curvas en coordenadas polares. En este caso se orientará en el aprendizaje más que en la enseñanza.

**Estilo:** El trabajo base se hará con una guía de clase que pretende que además de la parte de graficación en formato digital, se aprovechen algunos aspectos de tipo analítico.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Dispositivo electrónico	Atención Motivación	Declarativo Procedimental	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 3: Pizarra interactiva	Coordinación Atención	Conceptual y procedimental	Grupo	Proyector interactivo

**Observaciones:**

La clase estuvo bien, pero se encontraron algunas dificultades relacionadas con las indicaciones, algunos enunciados indicaban más de una tarea y esto confundió. El otro detalle importante es el conocimiento previo y caracterización de los recursos adecuados para el trabajo que se iba a realizar.

**Marco general de visualización: Clase #3**

**Tema:** Superficies

**Fecha:** 16 de septiembre

**Enfoque:** Se utilizará el proyector interactivo y además distintos software para la graficación de superficies. La utilización de la tecnología será para la enseñanza.

**Estilo:** El profesor establecerá la taxonomía de las superficies y graficará varias de ellas con el objetivo de caracterizarlas. En este caso el profesor usa la tecnología para enseñar ciertos conceptos, por lo que se preveía no mucha participación de los estudiantes. Podemos definir esta clase como una clase magistral con tecnología

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Pizarra interactivo	Atención Motivación	Declarativo Procedimental	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 3: Software grapher	Coordinación Atención	Conceptual y procedimental	Grupo	Visuaización interactiva

**Observaciones:** Lo interesante es que se podría pensar, que el uso de todos esos recursos que permiten visualizar de forma muy distinta y dinámica en comparación de al utilizar una pizarra común, es percibida a veces por el profesor como una “clase bonita” y por qué no muy tecnológica. Sin embargo como era de esperar la participación fue escasa, y en la clase siguiente se hizo un diagnóstico general sobre la clase previa y si se quiere de una forma “sorprendente” la mayoría de los estudiantes no recordaban los conceptos desarrollados en dicha clase. ¿A caso será que el estudiante cree que cuando ve no aprende? o a si será. Esta interrogante había sido planteada por Dreyfus y Eisenberg (1982) sobre la renuencia de los estudiantes a la visualización matemática.

Ya para este clase se les aplicó el instrumento básico y nos confirma la percepción del estudiante en dicha clase. El siguiente gráfico muestra como los estudiantes percibieron las actividades que fueron desarrolladas en esa clase.

### Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase

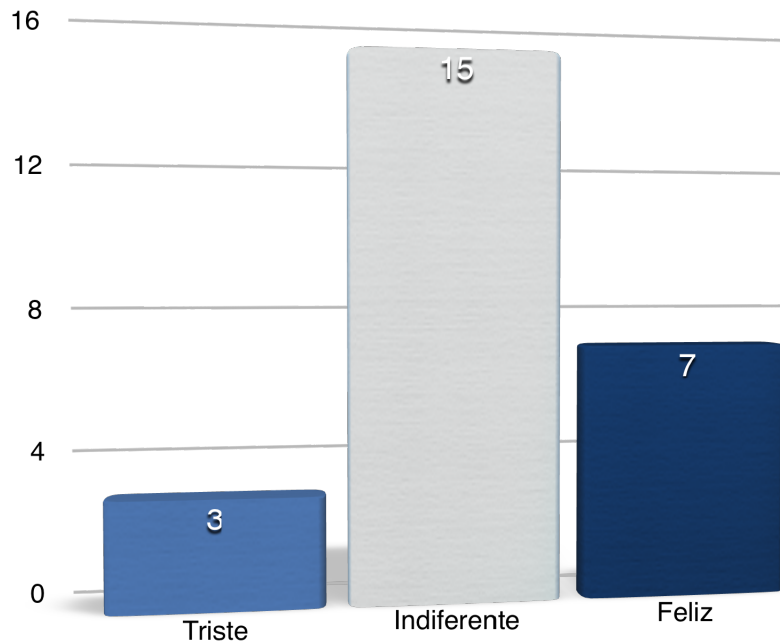


Gráfico 1: Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase

Claramente podemos observar el nivel de indiferencia ante esa clase, esto podría ser desmotivador para alguien que se inicia en la incorporación de la tecnología en su labor docente y en consecuencia llegar a conclusiones erróneas, la más común: la tecnología no sirve o no aporta. La experiencia nos indica que es una cuestión metodológica y pedagógica, si se quiere de enfoque.

### Marco general de visualización: Clase #4

**Tema:** Superficies

**Fecha:** 18 de septiembre

**Enfoque:** Se utilizará distintos dispositivos electrónicos para la graficación de superficies. En este caso se orientará en el aprendizaje más que en la enseñanza.

**Estilo:** El trabajo base se hará con una guía de clase y se pretende que además de la parte de graficación digital se aprovechen algunos aspectos de tipo analítico. El trabajo se desarrollará en grupos, por lo que mucho del trabajo recaerá en el estudiante.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Dispositivo electrónico	Atención Motivación	Declarativo Procedimental	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 3: Pizarra interactiva	Coordinación Atención	Conceptual y procedimental	Grupo	Proyector interactivo

**Observaciones:** Lo primero e importante es que en los grupos, los estudiantes no leen las indicaciones planteadas en la guía e incluso aquellas que aclaran conceptos y procesos que requieren ser desarrollados. El avance en el trabajo fue lento y se pudo a lo sumo alcanzar desarrollar la tercera parte de lo planteado.

En general trabajaron con tablet y computadora, esto por el tipo de graficación que había que realizar. Los software utilizados fueron: Microsoft Mathematics, Grapher y Quick Grapher.

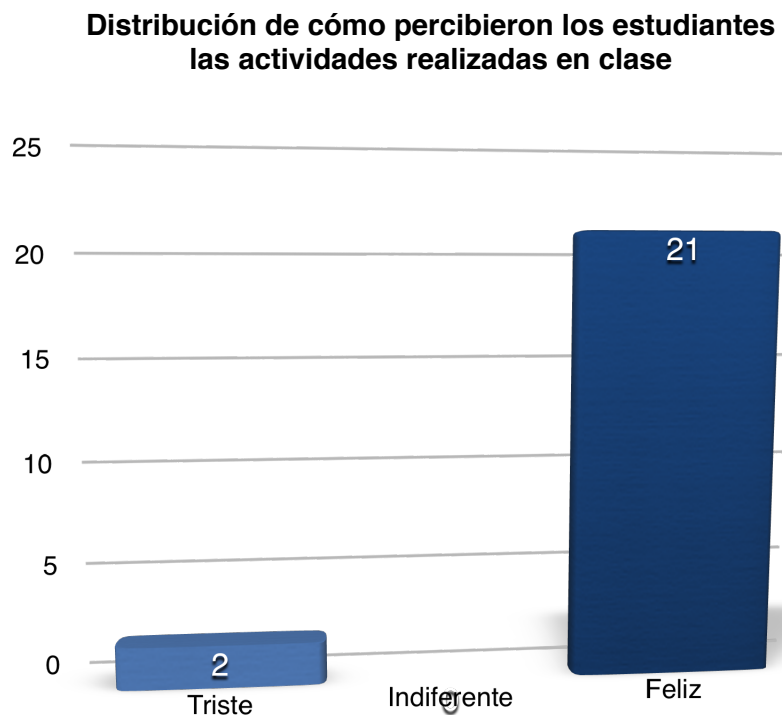


Gráfico 2: Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase

A pesar de que el avance y los problemas con el seguimiento de la guía no fue el adecuado, su nivel de satisfacción comparativamente a la clase previa es completamente superior. De igual forma llegamos a un extremo donde el estudiante se siente bien y el avance en términos académicos fue satisfactorio pero no lo esperado.

### Marco general de visualización: Clase #5

**Tema:** Superficies

**Fecha:** 25 de septiembre

**Enfoque:** Tomando como base el trabajo que quedó pendiente, se realizará una comprobación de dicho trabajo.

**Estilo:** Se combinará el trabajo del profesor y el de los estudiantes, se orientará a través de preguntas y la participación en la clase aspectos relevantes del contenido tratado.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Pizarra interactiva	Atención(beneficio cognitivo)	Declarativo(¿ qué saber?) Procedimental(¿ cómo saber?)	Grupo	Proyector interactivo
Recurso 2: Software interactivo	Elaboración Atención (beneficio cognitivo)	Conceptual y procedimental	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 3: Imágenes	Motivación(beneficio emocional)	Experimental(¿ Por qué saber?)	Grupo	Imagen

**Observaciones:** Se utilizaron imágenes introductorias que mostraban el uso de superficies planas y curvas en el diseño de edificios relevantes como obras de Antonio Gaudí y Santiago Calatrava. Se aprovechó lo que los estudiantes habían realizado en la clase previa y con lo obtenido se realizó un resumen de los aspectos más relevantes del trabajo asignado.

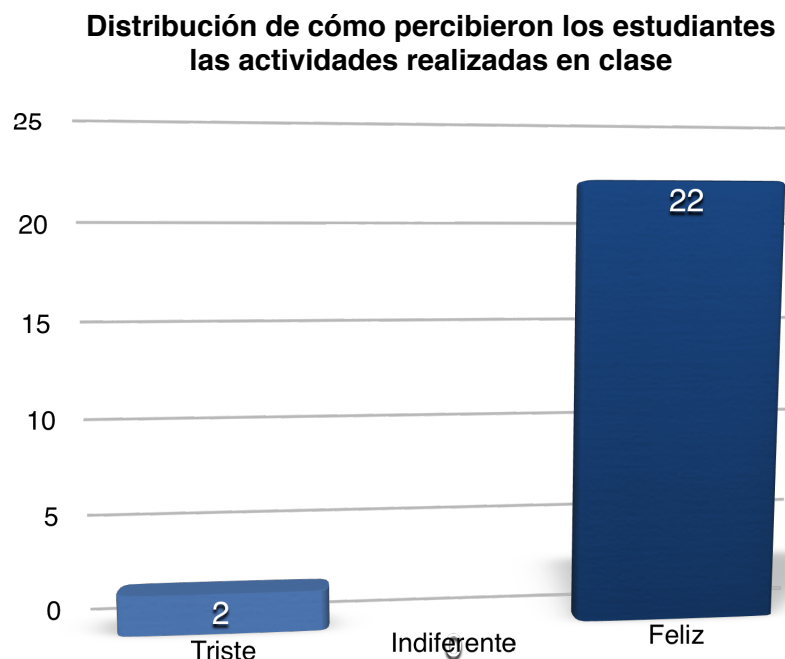


Gráfico 3: Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase

En esta clase se hace un balance entre la participación del estudiante y el trabajo del profesor, lo importante es que se establecen algunos conocimientos que los estudiantes

trabajaron previamente y al final se obtuvo un buen nivel de satisfacción tanto para el estudiante como para el profesor.



## Marco general de visualización: Clase #6

**Tema:** Funciones en varias variables

**Fecha:** 02 de octubre

**Enfoque:** Se partirá de dos ejemplos prácticos que evidencia lo importante de las funciones en varias variables.

**Estilo:** Se combinará el trabajo del profesor y el de los estudiantes, se orientará a través de preguntas y la participación en la clase aspectos relevantes del contenido tratado, haciendo una analogía con lo ya conocido.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Pizarra interactiva	Atención(beneficio cognitivo)	Declarativo(¿ qué saber?) Procedimental(¿ cómo saber?)	Grupo	Proyector interactivo
Recurso 2: Software interactivo	Elaboración Atención (beneficio cognitivo)	Conceptual y procedimental	Grupo	Visualización interactiva
Recurso 3: Imágenes	Motivación(beneficio emocional)	Experimental(¿ Por qué saber?)	Grupo	Imagen

**Observación:** Esta clase no se pudo evaluar

## Marco general de visualización: Clase #7

**Tema:** Derivadas parciales

**Fecha:** 07 de octubre

**Enfoque:** Se enfocará en el desarrollo de ejemplos dando las definiciones y viceversa

**Estilo:** Se utilizará el proyector interactivo, pero en este caso los ejemplos que se van a desarrollar se les darán a los estudiantes para que ellos los resuelvan y se resuma en la pizarra. Lo que se busca es lograr ese equilibrio entre el uso de tecnología y una participación activa del estudiante.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Recurso 1: Pizarra interactiva	Atención(beneficio cognitivo)	Declarativo(¿ qué saber?) Procedimental(¿ cómo saber?)	Grupo	Proyector interactivo

**Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase**

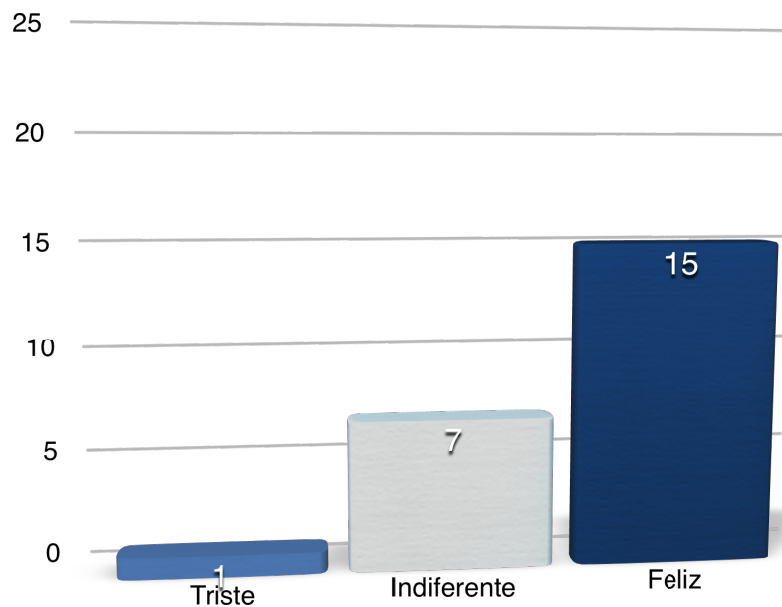


Gráfico 4: Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase



**Observaciones:** Los resultados muestran niveles de satisfacción adecuado y además de una apropiación oportuna de conceptos a partir del trabajo de los estudiantes.



## Marco general de visualización: Clase #8

**Tema:** Lagrange e introducción a las integrales múltiples

**Fecha:** 21 de octubre

**Enfoque:** .Se enfocará en la parte intuitiva del concepto de integral y por otro lado la parte procedimental para el cálculo de integrales iteradas.

**Estilo:** Se utilizará el proyector, pizarra y presentaciones animadas. Sin embargo se trabajarán de forma conjunto ejemplos básicos de integración iterada e integrales dobles.

Perspectiva/ Recursos	Funcional	Conocimiento	Audiencia	Visualización
Proyecto	Atención(beneficio cognitivo)	Conceptual	Grupo	Visualización interactiva
Pizarra normal	Elaboración Atención (beneficio cognitivo)	Declarativo(¿ qué saber?)	Grupo	Boceto

El material de apoyo es para usar tecnología pero que el estudiante haga algo y la clase no quede a nivel magistral.

**Observaciones:** El trabajo se llevó con normalidad, los estudiantes participaron en la solución de los ejercicios y en términos generales la clase se desarrolló en forma adecuada.

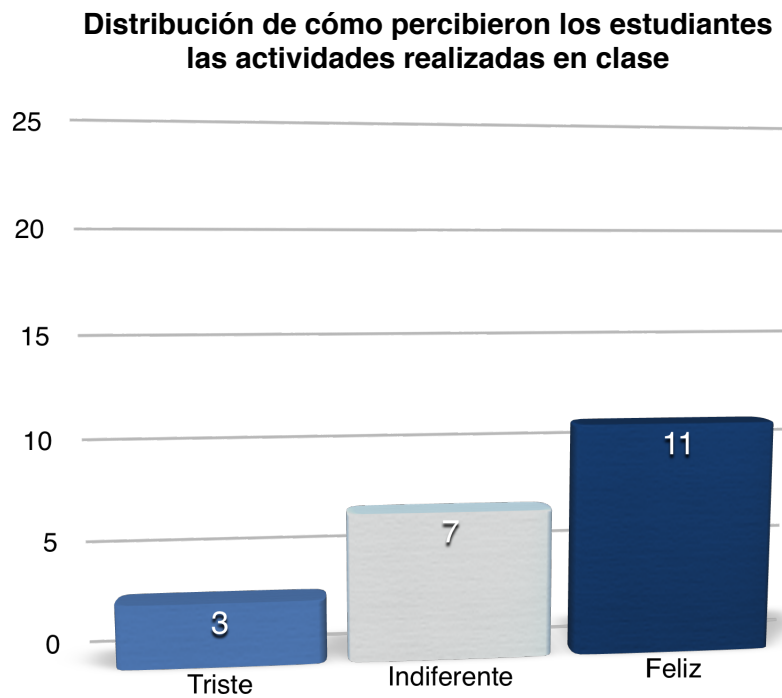


Gráfico 5: Distribución de cómo percibieron los estudiantes las actividades realizadas en clase

Semanas previas al finalizar el semestre se les aplicó el diferencial semántico y se obtuvieron los siguientes datos generales.

### Valoración general del diferencial semántico

Items	Media
#1 DESALESTADORAS- INSPIRADORAS	6
#2 DIFÍCILES-FÁCILES	5.45
#3 ABURRIDAS - DIVERTIDAS	5.42
#4 CONFUSAS-CLARAS	5.62
#5 FRUSTRANTES- MOTIVADORAS	5.23
#6 ESTRESANTES- RELAJANTES	5.08
#7 COMPLICADAS- SENCILLAS	5.31
#8 IRREFLEXIVAS- REFLEXIVAS	5.04
#9 DESAGRADABLES - AGRADABLES	6.12
#10 PASIVAS -DINÁMICAS	4.96
#11 NO FORMATIVAS- FORMATIVAS	6
#12 TRADICIONALES- INNOVADORAS	6.62
#13 DESORDENADAS - SISTEMÁTICAS	6.54
<b>Total</b>	<b>5.64538461538462</b>

Podemos observar que en general la percepción de los estudiantes respecto a las actividades realizadas en clase incorporando la tecnología fue positiva, en sólo uno de los ítem se muestra una actitud positiva baja, pero la que predomina es la de una actitud positiva moderada y en tres de los ítems se percibe una actitud muy positiva.

## 4. Resultados

Primero revisamos algunos aspectos importantes relacionados al diferencial semántico, para ello consideramos el siguiente gráfico de barras.

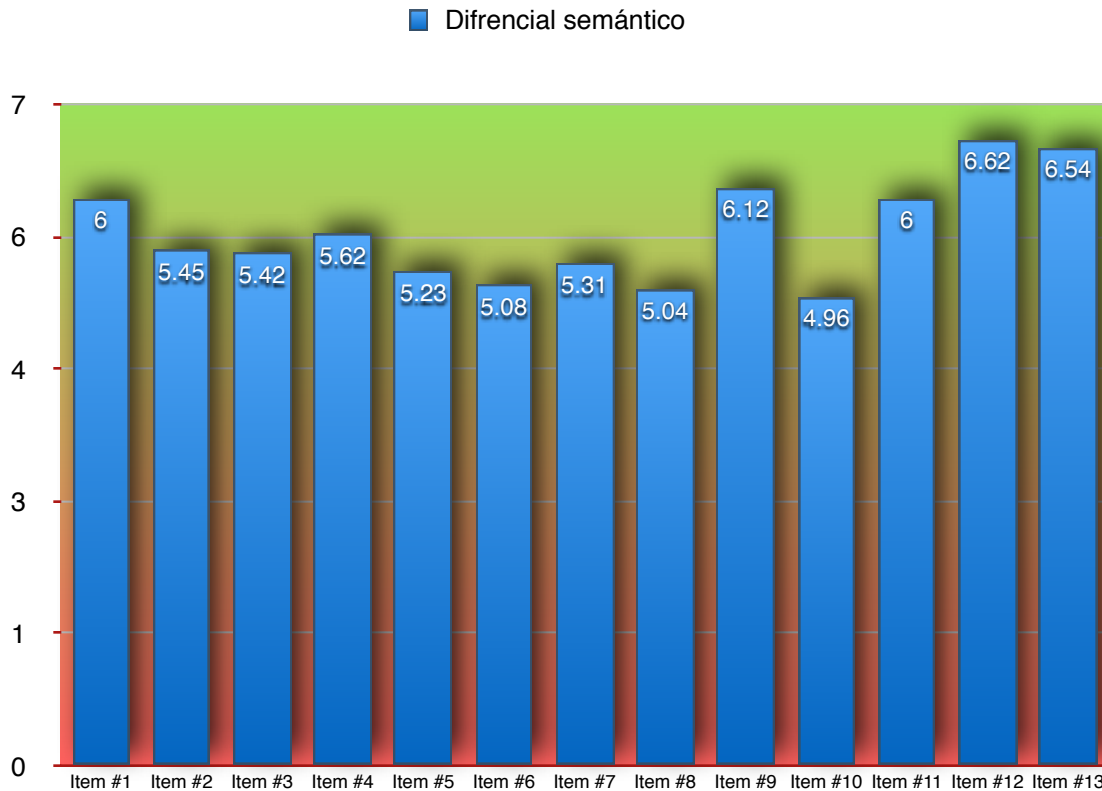


Gráfico 5: Distribución por pares de adjetivos en el diferencial semántico

El fondo del gráfico anterior muestra en rojo las categorías de actitudes más bajas del diferencial semántico y se van “degradando” al verde, que en este caso representa las categorías positivas de actitud del diferencial semántico. Todos los ítem caen por encima de la “zona roja” mostrando en general actitudes positivas respecto a las actividades realizadas en clase incorporando la tecnología. Destacamos el ítem #10 (PASIVAS -DINÁMICAS) que cae dentro de la categoría de una actitud positiva baja, esto se ha presentado ya en otras investigaciones (Monge-Fallas, 2013) y es un aspecto que hay que ponerle atención especial. Esto por cuanto refleja en cierta medida la forma en que el profesor da su clase con tecnología, es decir, es un reflejo de cuando se usa tecnología pero el estudiante no tiene una participación activa en la misma. De igual forma el ítem #12 (TRADICIONALES-INNOVADORAS) nos ofrece la oportunidad para investigar qué entienden los estudiantes

por innovadores: ¿basta un proyector y una computadora, para que una clase sea percibida como innovadora?.

Respecto al modelo para uso de tecnología digitales y no digitales, recordamos que nuestro punto de partida fueron: el modelo PCK propuesto por Shulman(1987), el modelo TPACK de Misra y Koehler (2006) y el modelo propuesto por Burkhard (2005). Al final después de un análisis exhaustivo propongo como elemento integrador al modelo TPACK con una componente en la visualización del conocimiento, a este modelo lo he denominado TPACK\* (figura 12). Las tres componentes del TPACK, requieren de procesos de comunicación muy claros, formas eficientes de representación sin importar si se utilizan tecnologías digitales o no digitales. En cada uno de ellos se busca la “transferencia” de conocimiento y todos convergen en el salón de clase, sitio principal donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje. Igual se podrían definir varios tipos de conocimiento que se originan de las intersecciones de las cuatro componentes, varios de estos ya han sido comentados. Sin embargo podemos mencionar que se genera una aplicación de la visualización del conocimiento en la parte tecnológica, la visualización del conocimiento en el contenido disciplinar y la visualización del conocimiento dentro de las estrategias metodológicas.

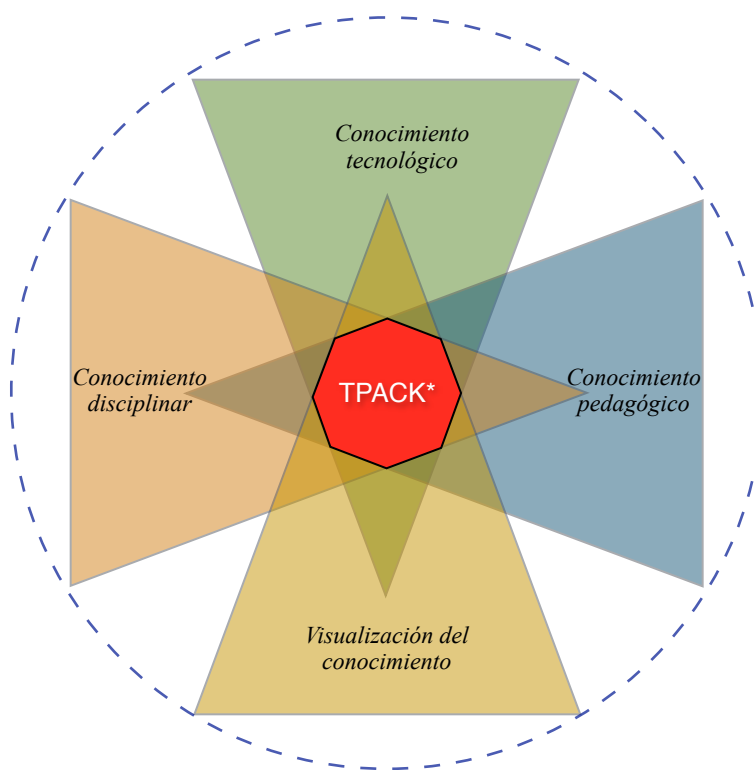
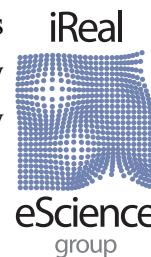


Figura 12: Modelo TPACK\* que integra la visualización del conocimiento por Monge-Fallas (2014)

Me parece una oportunidad importante considerar este modelo para futuras investigaciones, de tal forma que nos permita consolidarlo en función de las ventajas y desventajas al momento de implementarlo. Al igual que el modelo de Shulman(1987) y Misra y Koehler (2006), este modelo está sujeto al conocimiento del contexto.



Al final la mayoría de los objetivos fueron alcanzados exitosamente, exceptuando aquel que pretendía evaluarlo en distintos contextos. La razones fueron expuestas previamente, sin embargo deja claramente la posibilidad de explorar este modelo a través de distintos trabajos de graduación en la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora en el program de Licenciatura.

## 5. Discusión y conclusiones

Ya vimos que interrogante como: ¿A caso será que el estudiante cree que cuando ve no aprende?, surgen cuando se trabaja con visualización sin importar si se utiliza tecnología, y fueron planteada previamente por Dreyfus (1982) sobre la renuencia de los estudiantes a la visualización matemática, pero refiriéndose a esto Presmeg (1999) plantean que generalmente los estudiante de matemática a diferencia de los matemáticos raramente exploran el potencial considerable de los métodos visuales como apoyo al aprendizaje significativo.

En el grupo la percepción general de las actividades realizadas en clase en términos de la motivación es positiva. Esto es consistente con lo planteado por Burkhard (2005), el cuál garantiza que las representaciones visuales inspiran, motivan, energizan y activan a la audiencia. Esto permite que la audiencia se involucre en la interpretación y la exploración gráfica.

Los estudiantes consideran en forma positiva que las clases con tecnología son mucha más fáciles y sencillas que de la forma tradicional. Esto puede deber de acuerdo con Burkhard y Meier (2005) a que en la transferencia del conocimiento la visualización interactiva contribuye a fascinar a la audiencia, habilita la colaboración interactiva a través del tiempo y el espacio, permite la representación y exploración de datos complejos y la creación de nuevas ideas.

La pregunta como plantean Mishra y Koehler (2006) es: Qué necesitan saber los profesores para apropiadamente incorpora la tecnología en la enseñanza, esto lo planteaba Shulman(1987) pero a nivel de las áreas disciplinares que al final dieron origen al PCK. Por lo que objetivo del nuevo modelo TPACK\* es ayudar a profesores a tomar ventaja de la

tecnología para mejorar el aprendizaje de los estudiantes potenciando el uso de la tecnología y aprovechando las bondades de las visualización del conocimiento.



## 6. Actividades de divulgación

Se participó con una ponencia llamada: Visualización del conocimiento en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática, en IX Festival Internacional de Matemática, se realizó del 12 al 14 de junio, 2014, en el Colegio Los Delfines en Quepos, Puntarenas. Se prevé la participación con una potencia en el CIEMAC que se llevará a cabo a finales de este año 2015. Además se está en proceso de la redacción de un artículo relacionado al proyecto.

## 7. Limitaciones o problemas encontrados

Dentro de las limitaciones encontradas para el desarrollo del proyecto destaca el hecho que en el primer año de ejecución del proyecto no se contaron con horas reales asignadas. El proyecto fue aprobado con presupuesto de la VIE, pero sin horas. Esto evidentemente dificultó el avance adecuado de los objetivos planteados originalmente.

Además por razones de carga académica fue imposible extender la implementación del modelo a distintos grupos.

## 8. Bibliografía

- Abu, N., Hassan, M. & Sabih, S. (2001). Mathematical Animations: The art of teaching. Comunicación presentada en la 31<sup>st</sup> ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference.
- Alvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, n.º 1/4, 144-148.
- Antonio Caras Rivas() Módulo de Enseñar y aprender conTIC . Fundación telefónica de España.
- Barrios, I, González, J., Padín, L., Peral, P., Sánchez, I. y Tarín. E. (sf) Métodos de investigación educativa: Estudio de casos. Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado de [https://www.uam.es/personal\\_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Est\\_Casos\\_doc.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Est_Casos_doc.pdf)
- Burkhard, R & Meier, M. (2005). Tube Map Visualization: Evaluation of a Novel

- Knowledge Visualization Application for the Transfer of Knowledge in Long-Term Projects. *Journal of Universal Computer Science*, n.º 4/11, 473-493.
- Burkhard, R. (2002). Learning from Architects Difference between Knowledge Visualization and Information Visualization. *Proceeding of the Eighth Conference on Information Visualisation*: IEEE, 519-524.
- Burkhard, R. (2005). *Knowledge Visualization*. A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Sciences. Recuperado de [http://www.ia.arch.ethz.ch/files\\_publications/remo\\_burkhard2005\\_burkhard\\_knowledge\\_visualization\\_dissertation\\_remo\\_burkhard.pdf](http://www.ia.arch.ethz.ch/files_publications/remo_burkhard2005_burkhard_knowledge_visualization_dissertation_remo_burkhard.pdf)
- Caras, A.(2012). TPACK. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=TnMEIUsNzzk>
- Castillo, S.( 2008). Propuesta pedagógica basada en le constructivismos para el uso optimo de las TICs en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2): 171-194
- D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20Conceptualisacion.pdf>
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*. Relime, número especial.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 5/13, 360-380.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceeding of the Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Recuperado de <http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf>
- Eppler, M & Burkhard, R. (2004). Knowledge Visualization: Towards a New Discipline and its Fields of Application. Recuperado de <http://www.bul.unisi.ch/cerca/bul/publicazioni/com/pdf/wpca0402.pdf>
- Escudero, L. (2011). *Modelos de visualización del conocimiento y su impacto en el aprendizaje significativo*. Recuperado de <http://web.ua.es/en/ice/jornadas-redes-2011/documentos/proposals/184513.pdf>



- Esteban, P., Trefftz, H y Restrepo, J. (2006). Estrategias de visualización en el cálculo en varias variables. Recuperado de <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB4QFjAA&url=http%3A%2F%2Faprendeenlinea.udea.edu.co%2Fprevistas%2Findex.php%2Fprevistaeypp%20F%20art%20F%20down%20load%2F6092%2F5498&ei=OY9wVey7LlUuNuPtg6gl&usg=AFQjCNH5jnb17JC72DhKhXi8hyvV0DyH8Q&sig2=8DZALiY7iMk19jWzdOSVSA&bvm=bv.94911696,d.eXY>
- Gonzalo, M., Godino, D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, n.º 3/23, 5-37.
- Gonzalo, M., Godino, D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, n.º 3/23, 5-37.
- Guzman, M. (1996). El papel de la visualización. *El Rincón de la pizarra*(pp. 1-23). Madrid: Pirámide .
- Hitt, F. (1997). Sistemas semióticos de representación. *Avance y Perspectiva* vol. 16 .
- Hitt, F. (1998). *Working Group on Representations and Mathematics Visualization*. Cinvestav-IPN, Mexico. Recuperado de [http://www.west.asu.edu/cmw/pme/plenaryworgweb/PMENA\\_FHitt-WG.htm](http://www.west.asu.edu/cmw/pme/plenaryworgweb/PMENA_FHitt-WG.htm)
- Konyalioglu, S., Konyalioglu, A.,Ipek, A & Isik, A. (2005). The role of Visualization on Student's Conceptual Learning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-9.
- Loewenberg, D., Hoover, M, & Phelps. G.(2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* November/December 2008 59: 389-407.
- Loewenberg, D., Hoover, M, & Phelps. G.(2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* November/December 2008 59: 389-407.
- Madrid, J. (2007). Aplicación del diferencial semántico para la evaluación de calculadoras. Comunicación presentada en el. *Encuentro Latinoamericano de Diseño*. Buenos Aires, Argentina.
- Marcelo, C. (2010). Las tecnologías para la innovación y la práctica docente.Revista Brasileira de Educação v. 18 n. 52 jan.-mar. 2013. Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v18n52/03.pdf>
- Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A

Framework for Teacher Knowledge.

Monge-Fallas, J. (2013). *Visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia, España. Disponible en la base de datos de TESEO.

Muznner, T. (1996). Mathematical Visualization: Standing at the Crossroads. *Proceedings of the 7th IEEE Visualization Conference (VIS'96)*. Recuperado de la base de datos IEEE Xplorer.

N.C.T.M. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. S.E.M. Thales, (traducción de NCTM, *The Principles and Standards for School Mathematics*, 2000, Reston, VA: NCTM).

Presmeg, N. (2005). *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. Emergence from psychology. Recuperado de <http://merg.umassd.edu/projects/symcog/bibliography/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>

Salazar, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reforme. *Harvard Educational Review* Vol. 57 N 1.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma . *Harvard Educational Review*. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2 (2005).

Tall , D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n.º 2/12, 151-169.

Thompson, A. & Mishra, P.(2008). Breaking News: TPACK Becomes TPACK! *Journal of Computing in Teacher Education* Volume 24 / Number 2 Winter 2007–2008.

Valverde, J., Garrido, M., Fernández, A. y Fernández, R.(2010). Enseñar y aprender con tecnología: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. Recuperado de [http://www.researchgate.net/publication/42377371\\_Ensear\\_y\\_aprender\\_con\\_tecnologas\\_un\\_modelo\\_terico\\_para\\_las\\_buenas\\_prcticas\\_educativas\\_con\\_TIC](http://www.researchgate.net/publication/42377371_Ensear_y_aprender_con_tecnologas_un_modelo_terico_para_las_buenas_prcticas_educativas_con_TIC)

Wang, M., Peng, J., Cheng, B., Zhou, H., & Liu, J. (2011). Knowledge Visualization for Self-Regulated Learning. *Educacional Technology & Society*, n.º 3/14, 28–42.

Wiebe, E., Clark A., Petlick, J. & Ferzli, M. (2004). VisTE: Visualization for Technology Education; An Outreach Program for Engineering Graphics Education. *Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education*



*Annual Conference & Exposition.* Recuperado de <http://www4.ncsu.edu/~wiebe/publications.html>

