Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemáticas

Ejercicios de Matemática para Administración

A. Matemática Básica

M.Sc. Luis Alejandro Acuña

2008

Contenido

Capítulo 1
Los números reales

1.1 Operaciones básicas

Las cuatro operaciones básicas entre los números reales son la adición, sustracción, multiplicación y división. Dados dos números a y b, ellas se representan con las notaciones

$$a+b, \qquad a-b, \qquad a\cdot b = a\times b = ab \qquad \text{y} \qquad a\div b = a/b \;\; (\text{si } b\neq 0)$$

respectivamente.

Estas cuatro operaciones tienen las siguientes propiedades, para cualesquiera números a, b y c:

- $a+(b+c)=(a+b)+c$
- $a+0=0+a=a$
- $a+(-a)=0$
- $a+b=b+a$
- $a(b+c)=ab+ac$
- $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
- $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$
- $a\cdot(1/a)=1$ si $a\neq 0$
- $a\cdot b = b\cdot a$

Además se cumplen las siguientes leyes de signos:

- $-(-a)=a$
- $(a)(-b)=(-a)(b)=-(a\cdot b)$
- $(-a)(-b)=a\cdot b$
- $a+(-b)=a-b$
- $(-a)\div b = a\div(-b) = -(a\div b)$
- $(-a)\div(-b)=a\div b$

Cuando una expresión involucra varias de estas operaciones, ellas se interpretan en el siguiente orden:

1. Primero se evalúan los paréntesis, si los hay.
2. En segundo lugar, multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha entre ellas.
3. En tercer lugar, adiciones y sustracciones, de izquierda a derecha entre ellas.

Ejemplo 1

La expresión $1-3\times 5$ *no* se evalúa restando primero $1-3=-2$: es erróneo decir que $1-3\times 5$ es igual a -2×5. Lo correcto es multiplicar primero y restar después:

$$1-3\times 5 = 1-15 = -14.$$

En $(1-3)\times 5$, la primera operación sí es $1-3$, por estar entre paréntesis:

$$(1-3)\times 5 = (-2)\times 5 = -10.$$

El valor de $2\div 6\times 5$ *no* es igual a $2\div 30$. La división y la multiplicación se evalúan de izquierda a derecha:

$$2\div 6\times 5 = \frac{1}{3}\times 5 = \frac{5}{3}.$$

Finalmente, en la expresión $2\div(6\times 5)$ sí empezamos calculando el producto, dado el paréntesis:

$$2\div(6\times 5) = 2\div 30 = \frac{1}{15}$$

Evalúe

1. $-3+8$
2. $4+(-3)$
3. $-6+\dfrac{7}{2}$
4. $\dfrac{5}{3}+(-4)$
5. $11-(-2)$
6. $-9-4+6$
7. $\dfrac{2}{3}+2-\dfrac{-3}{5}$
8. $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{15}{7}$
9. $-3\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{-9}{8}$
10. $6+4\left(-\dfrac{1}{3}\right)$
11. $\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-1}{4}$
12. $3\cdot\dfrac{2}{-5}+\dfrac{-6}{-7}\cdot\dfrac{1}{9}$
13. $\dfrac{3}{5}\div(-2)$
14. $\dfrac{1}{8}\div\dfrac{2}{7}$
15. $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{-1}{6}+4\div\dfrac{1}{3}$
16. $\left(1+\dfrac{-5}{2}\right)\div\left(\dfrac{3}{2}-3\right)$
17. $4\div 2\div 2$
18. $4\div(2\div 2)$
19. $\left[\dfrac{-3}{4}-\dfrac{3}{2}\div(-2)\right]\div 7$
20. $7\div\left[\dfrac{-3}{2}\div(-2)-\dfrac{3}{4}\right]$
21. $\dfrac{(1/2)\div(3/4)\div(3/2)}{(1-1/3)\div(1-1/5)}$

22. $\dfrac{-2\cdot 15+10}{3-7\cdot 2+1}-\dfrac{5(-4-1)-7(-6)}{-3-3(-5)}$

23. $\dfrac{7\cdot\frac{1}{9}-2\cdot\frac{14}{15}}{2\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{5}}-\left[\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{20}\right]\left[-\dfrac{5}{7}-\dfrac{5}{14}\right]$

24. $3x+2y-4x$

25. $2(5t-1)+10(t+1)\div 4$

26. $2p(p-q)-2q(q-p)$

27. $(a+b)(a-b)-3(a+b)-2(a-b)$

1.2 Potencias y radicales

Elevar una base a un exponente entero y positivo significa multiplicar varios factores iguales a la base, tantos como indica el exponente:

$$b^n = b\cdot b\cdots b \qquad (n \text{ factores})$$

Ejemplo 2

En la potencia 7^3, la base es 7 y el exponente es 3. El resultado de la potencia es el producto de tres factores iguales a 7: $7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 343$.

Ejemplo 3

El valor de $(-3)^2$ es 9 porque $(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$.

Pero el valor de -3^2 es -9 porque $-3^2 = -(3)(3) = -9$.

En cambio, $(-5)^3$ y -5^3 son ambos iguales a -125:

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125 \quad \text{y} \quad -5^3 = -(5)(5)(5) = -125$$

En general, $(-x)^n = (x)^n$ si n es par, pero $(-x)^n = -(x^n)$ si n es impar.

Un exponente negativo indica el recíproco de la potencia con exponente positivo:

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Si la base es una fracción, lo anterior es equivalente a invertir la fracción y cambiar el signo del exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo 4

Los resultados de elevar 12^{-3} y $(5/4)^{-2}$ son:

- $12^{-3} = \dfrac{1}{12^3} = \dfrac{1}{1728}$
- $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2} = \dfrac{16}{25}$

Un exponente de la forma $1/n$, con n entero positivo, representa una raíz n-ésima:

$$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$$

y un exponente de la forma m/n, con m y n enteros, n positivo, se refiere a la raíz n-ésima elevada a la m:

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b}^{\,m}$$

Si la base b es positiva, el exponente m podría estar dentro o fuera de la raíz indistintamente:

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b}^{\,m} = \sqrt[n]{b^m} \quad \text{si } b > 0$$

$$b^{m/n} = (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m} \quad \text{si } b > 0$$

Ejemplo 5

El resultado de la potencia $64^{1/3}$ es la raíz cúbica de 64:

$$64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

El resultado de $25^{7/2}$ es la raíz cuadrada de 25 elevada a la 7:

$$25^{7/2} = \sqrt{25}^{\,7} = 5^7 = 78125$$

Para cualesquiera bases a y b reales, y exponentes n y m racionales, se cumple:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$
- $a^0 = 1$, si $a \neq 0$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, si $b \neq 0$

Cuando una expresión involucra varias operaciones, estas se interpretan en el siguiente orden:

1. Primero se evalúan los paréntesis, si los hay, de dentro hacia fuera.
2. En segundo lugar, potencias y raíces.
3. En tercer lugar, multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha entre ellas.
4. En cuarto lugar, adiciones y sustracciones, de izquierda a derecha entre ellas.

Ejemplo 6

La expresión $3\cdot 5^2 - 4 \div (1+6\cdot 3^{-1})\cdot 3+2$ se evalúa en este orden:

$$\begin{array}{rl}
3\cdot 5^2 - 4 \div (1+6\cdot \frac{1}{3})\cdot 3+2 & \text{se empieza con el paréntesis}\\
3\cdot 5^2 - 4 \div (1+2)\cdot 3+2 & \text{dentro del paréntesis, primero el producto}\\
3\cdot 5^2 - 4 \div 3\cdot 3+2 & \text{listo el paréntesis}\\
3\cdot 5^2 - \dfrac{4}{3}\cdot 3+2 & \text{de izquierda a derecha: primero la división\dots}\\
3\cdot 5^2 - 4+2 & \text{\dots\ y luego el segundo producto}\\
3\cdot 25 - 4+2 & \text{primero la potencia}\\
75 - 4+2 & \text{segundo el producto}\\
71+2 & \text{de izquierda a derecha: primero la sustracción\dots}\\
73 & \text{y por último la adición}
\end{array}$$

Ejemplo 7

El valor de la expresión $\left(\dfrac{5^2\cdot 4^{-3}}{5^{-1}}\right)^{-3}$ es

$$\left(\frac{5^2\cdot 4^{-3}}{5^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{5^{-1}}{5^2\cdot 4^{-3}}\right)^{3} = \frac{5^{-3}}{5^6\cdot 4^{-9}} = \frac{4^9}{5^6\cdot 5^3} = \frac{(2^2)^9}{5^{6+3}} = \frac{2^{18}}{5^9}$$

Ejemplo 8

La expresión $\sqrt[5]{\dfrac{4^5\cdot(-5)^7}{(-2)^4}}$ puede simplificarse así:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{\frac{4^5\cdot(-5)^7}{(-2)^4}} &= \left(\frac{4^5\cdot(-5)^7}{(-2)^4}\right)^{1/5} = \left(\frac{(2^2)^5\cdot -5^7}{2^4}\right)^{1/5} = \left(-\frac{2^{10}\cdot 5^7}{2^4}\right)^{1/5}\\
&= (-2^6\cdot 5^7)^{1/5} = -(2^{5+1}\cdot 5^{5+2})^{1/5} = -(2^5\cdot 2^1\cdot 5^5\cdot 5^2)^{1/5}\\
&= -(2^5\cdot 5^5)^{1/5}\cdot(2\cdot 5^2)^{1/5} = -2\cdot 5\cdot(2\cdot 25)^{1/5} = -10\cdot 50^{1/5}
\end{aligned}$$

o bien $-10\sqrt[5]{50}$.

Simplifique

28. $\dfrac{(3^4)^3\cdot(3^2)^3}{(-3)^{15}\cdot 3^4}$

29. $\dfrac{1-3^{-1}-2\cdot 5^{-2}}{3^{-1}+3^{-2}}$

30. $\dfrac{1+4^{-2}-2\cdot 4^{-2}}{6\cdot 4^{-2}+1+5\cdot 4^{-1}}$

31. $\dfrac{-3\cdot 4^{-1}+1+2\cdot 4^{-2}}{4^{-1}-2\cdot 4^{-2}}$

32. $\dfrac{(2-3\cdot 7)^{-1}}{-7^{10}\cdot 10^{10}}$

33. $\dfrac{25^6\cdot 14^{10}}{-7^{10}\cdot 10^{10}}$

34. $\dfrac{(1/2)+(3/4)^2}{-5^2/4}$

35. $\dfrac{5}{2}+\left(\dfrac{2\cdot 3^{-2}}{2^{-1}}\right)^{-2}$

36. $\dfrac{2\cdot 5+3^{-1}}{\frac{5}{4}\div 5-3^{-1}}$

37. $\dfrac{3\cdot 2^{-2}-1}{2^{-2}+1}\cdot(4^{-2}-3)$

38. $\dfrac{2-(7\cdot 5^{-2}-3\cdot 5^{-2})}{(3^{-1}\cdot 2)^2-(-1)^3-2\cdot 3^{-1}}$

39. $\left(\dfrac{4\cdot 2^{-4}-1}{2^{-2}+2^{-2}}\right)\div\left(2^2\cdot 4^{-2}-3^{-1}\right)^{-2}$

40. $\sqrt{200}$

41. $\sqrt{540}$

42. $\sqrt[3]{3969}$

43. $\sqrt[5]{\dfrac{46656}{25}}$

44. $\sqrt[6]{\dfrac{12^5\,15^4}{10^7}}$

45. $2^{-1/3}(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16})$

46. $24^{3/2}$

47. $(-48)^{2/3}$

48. $-(25)^{5/3}$

49. $720^{5/4}$

50. $-64800^{3/5}$

51. $\left(\dfrac{675}{56}\right)^{4/3}$

52. $3\sqrt{18}-2\sqrt{50}+2\sqrt{98}$

53. $\frac{4}{5}\sqrt{10}\sqrt{50}$

54. $6\sqrt{6}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{6}$

55. $\sqrt{(-5)^2}$ y $-\sqrt{5^2}$

56. $\sqrt[3]{(-5)^3}$ y $-\sqrt[3]{5^3}$

57. $\dfrac{\sqrt[4]{5^3\,2^5\,6^3}}{\sqrt{10^3\,3^4}}$

58. $\dfrac{2^{3/5}\,3^{-1/2}\,5^{3/2}}{6^{-2/5}\,15^{1/2}}$

1.3 Racionalización

Cuando una fracción contiene raíces en el denominador, a veces es deseable encontrar una expresión equivalente cuyo denominador no contenga raíces. Por ejemplo, las expresiones $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

son equivalentes (ambas son iguales a $2^{-1/2}$), pero la segunda no tiene raíces en el denominador. Se dice que el denominador en la segunda expresión está racionalizado (porque el denominador es un número racional).

Para racionalizar el denominador en una fracción cuyo denominador no contenga sumas ni restas, puede multiplicarse tanto el numerador como el denominador de la fracción por la raíz del factor que haga falta para simplificar la raíz en el denominador. Para esto usualmente será necesario factorizar el denominador primero.

Ejemplo 9

Racionalizar el denominador de $\dfrac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}}$.

El número en la raíz se factoriza como $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, y para que su raíz cuadrada sea exacta están faltando un factor 2 y un factor 5. Entonces multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{10}$:

$$\begin{aligned}\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}} &= \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{1440}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 5}\cdot\sqrt{2\cdot 5}} \\ &= \frac{18\sqrt{2^2\cdot 5}}{\sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2}} = \frac{18\cdot 2\sqrt{5}}{2^3\cdot 3\cdot 5} = \frac{3}{10}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Si la raíz por simplificar no es cuadrada, se usa la misma idea anterior, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10

Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}}$.

Para que la raíz quinta sea exacta, el subradical $2^3 \cdot 7^2$ necesita un factor 2^2 y un factor 7^3. Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2\cdot 7^3}}{\sqrt[5]{2^2\cdot 7^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^2\cdot 7^3}}{\sqrt[5]{2^5\cdot 7^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^2\cdot 7^3}}{2\cdot 7} = \frac{\sqrt[5]{2^2\cdot 7^3}}{14}$$

Cuando el denominador contiene una suma o resta de raíces cuadradas, multiplicamos numerador y denominador por la operación conjugada[1]. Esto se hace para usar la fórmula

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

y así cancelar las raíces.

[1]El *conjugado* de una resta es la suma de los mismos términos, y el conjugado de una suma es la resta. Por ejemplo, el conjugado de $1+\sqrt{3}$ es $1-\sqrt{3}$.

Ejemplo 11

Racionalizar el denominador de $\dfrac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}$.

Ahora el conjugado del denominador es $2\sqrt{6}-\sqrt{15}$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}} &= \frac{21\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}\cdot\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{15}}{2\sqrt{6}-\sqrt{15}} = \frac{21\sqrt{3}(2\sqrt{6}-\sqrt{15})}{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{15})^2}\\ &= \frac{42\sqrt{18}-21\sqrt{45}}{4\cdot 6-15} = \frac{42\cdot 3\sqrt{2}-21\cdot 3\sqrt{5}}{9} = 14\sqrt{2}-7\sqrt{5}\end{aligned}$$

Si el denominador contiene una suma o resta con raíces cúbicas, la fórmula que usamos del caso anterior, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, debe ser sustituida por una de las dos siguientes:

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3\\ (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3\end{aligned}$$

como veremos en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 12

Racionalizar el denominador de $\dfrac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})}$.

Este denominador contiene una raíz cuadrada multiplicando, $\sqrt{5}$. Podemos empezar por deshacernos de ella como en los primeros ejemplos de esta sección, multiplicando por $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}\frac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} &= \frac{75}{\sqrt{5}(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{75\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})}\\ &= \frac{75\sqrt{5}}{5(3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})} = \frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}\end{aligned}$$

Ahora procedemos a racionalizar la suma de raíces cúbicas. Necesitamos identificar el denominador, $3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}$, con la expresión $a+b$ en la primera de las dos fórmulas anteriores; esto es, tomamos $a=3\sqrt[3]{2}$ y $b=\sqrt[3]{6}$, para multiplicar numerador y denominador por (a^2-ab+b^2) y obtener el producto a^3+b^3:

$$\begin{aligned}\frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}} &= \frac{15\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}}\cdot\frac{(3\sqrt[3]{2})^2-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6}^2}{(3\sqrt[3]{2})^2-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6}^2}\\ &= \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{36})}{(3\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{36})^3} = \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{36})}{(3^3\cdot 2)+36}\\ &= \frac{15\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{36})}{90} = \frac{\sqrt{5}(9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{36})}{6}\end{aligned}$$

Es importante notar que en todos los ejemplos anteriores se racionalizó el denominador. En algunos casos puede requerirse racionalizar el numerador, para lo cual se usa el mismo método pero con miras a simplificar cualquier raíz en el numerador.

Ejemplo 13

Racionalizar el numerador de $\frac{1-5\sqrt{3}}{2}$.

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}\frac{1-5\sqrt{3}}{2} &= \frac{1-5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+5\sqrt{3}}{1+5\sqrt{3}} = \frac{(1)^2-(5\sqrt{3})^2}{2(1+5\sqrt{3})} = \frac{1-25\cdot 3}{2(1+5\sqrt{3})}\\ &= \frac{-74}{2(1+5\sqrt{3})} = \frac{-37}{1+5\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Racionalice el denominador y simplifique

59. $\frac{6}{\sqrt{3}}$

60. $\frac{-30\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

61. $\frac{4\sqrt{18}}{7\sqrt{12}}$

62. $\frac{12}{\sqrt[3]{9}}$

63. $\frac{-80\sqrt{35}}{\sqrt[4]{125}\sqrt{10}}$

64. $\frac{3\sqrt[5]{2^8}-2\sqrt[5]{2^{13}}}{\sqrt[5]{8}}$

65. $\frac{39}{4-\sqrt{3}}$

66. $\frac{\sqrt{5}-4}{2+\sqrt{5}}$

67. $\frac{15}{\sqrt{3}+\sqrt{8}}$

68. $\frac{55}{2\sqrt{15}-3\sqrt{3}}$

69. $\frac{4}{-2+\sqrt[3]{10}}$

70. $\frac{100}{\sqrt[3]{18}-2\sqrt[3]{-4}}$

Racionalice el numerador y simplifique

71. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

72. $\frac{\sqrt{3}-4}{6\sqrt{2}}$

73. $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{8}$

74. $\frac{\sqrt{1/5}-3}{15-\sqrt{5}}$

75. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5}$

76. $1+\sqrt[3]{4}$

Simplifique, racionalizando el denominador si es necesario y dejando la respuesta en términos de exponentes positivos

77. $\sqrt{30}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{45}^{-1}$

78. $(4\sqrt{2})^3\cdot(-5^2\cdot 3^{-2})^{-1}\cdot\sqrt{8}^{-3}$

79. $\dfrac{6^{-1/2}\cdot 3^{3/2}}{1-\sqrt{3}}$

80. $\left[\dfrac{(2-3\cdot 2^{1/2})(5^{-1/3}\cdot 4^{-1/6})^3}{(9^{1/4}\cdot 6^{-1/2})^2}\right]^{-1}$

81. $\dfrac{(50^{1/3}\cdot 6^{-1/4})^2}{\sqrt[3]{5}\,(1-\sqrt{2})}$

82. $(-12\sqrt{2})^{2/3}\cdot\sqrt[6]{100}\cdot\sqrt[3]{-25}\cdot(\sqrt[3]{3}+1)^{-1}$

CAPÍTULO 2

Expresiones algebraicas

2.1 Valor numérico

En Matemáticas es común tener expresiones cuyo valor numérico depende del valor de una o varias variables. Por ejemplo, la expresión $3x^2 - 5y$ puede tomar distintos valores dependiendo de lo que valgan x y y. Las reglas algebraicas que vimos en el capítulo anterior se mantienen cuando las expresiones involucran variables (siempre que estén definidas).

Ejemplo 1

Así se evalúa la expresión $3x^2 - 5y$ para $x = -2$ y $y = 4$:

$$3x^2 - 5y = 3(-2)^2 - 5(4) = 3(4) - 20 = -8$$

Determine el valor numérico

1. $\dfrac{2x + y - (x+y)^{-2}}{(x-y)^{1/3}}$ para $x = 3$, $y = -5$

2. $2\sqrt{9n} - 5\sqrt{4n} + 4\sqrt{n}$ para $n = 3$

3. $2\sqrt{a}(4\sqrt{5ab} - 5\sqrt{b})$ para $a = 5$, $b = 4$

4. $\dfrac{x^{-2} - y^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}}$ para $x = -3$, $y = 6$

5. $\frac{3}{5}x^3y^2z$ para $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = \frac{5}{3}$

6. $\sqrt[3]{x} \cdot y^{-2}z$ para $x = -8$, $y = 2$, $z = 1/4$

7. $-2x^2 + ax - b$ para $a = -2$, $b = -7$, $x = -3$

8. $3x^3 + \dfrac{ax}{c} + 3$ para $a = 49$, $c = 7$, $x = -1$

9. $3x^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4z - \frac{3}{4}y^2z^3$ para $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$, $z = -1$

10. $\dfrac{\left(\dfrac{2p+3}{p}\right)(1 - 2/q)}{p^3 + p/q}$ para $p = -2$, $q = 1/2$

Evalúe la expresión que se pide

11. Cuando el precio unitario de un artículo es p, el proveedor ofrece una cantidad $q = \dfrac{105p^2}{5p^2+48}$ de unidades por semana. ¿Cuántas unidades por semana ofrecerá si el precio es 13.5?

12. Para una cierta película, el ingreso total por taquilla n meses después del lanzamiento está dado por $I = \dfrac{95n^2}{n^2+3}$, en millones de dólares. ¿Cuánto es el ingreso total después de 6 meses?

13. La población de Costa Rica durante el siglo 20 estuvo dada aproximadamente por la fórmula $P = 206\,065 \cdot 1.02973^t$, donde t es el número de años desde 1900. ¿Cuánto fue la población de Costa Rica en 1985?

14. El costo combinado de producir una cantidad q_1 de un artículo y una cantidad q_2 de otro artículo es $C = 0.04q_1^2 + 38q_1 + 54q_2 + 900$. ¿Cuál es el costo de producir 120 unidades del primero y 150 del segundo?

15. El costo promedio al producir un lote de varios artículos idénticos es $\dfrac{CF + c \cdot n}{n}$, donde CF es el costo fijo de producción, c el costo unitario y n el número de artículos. Calcule el costo promedio si el costo fijo es 250 000, el costo unitario es 28 y el número de artículos es 5000.

16. La altura de un objeto que se lanza hacia arriba, después de t segundos, es $h = h_0 + v_0t - 4.9t^2$, donde h_0 es la altura desde donde se lanza y v_0 la velocidad con que se lanza. Si un objeto se lanza desde un techo a 7 m de altura, a una velocidad de 15 m/s, ¿cuál será su altura tres segundos después?

17. Si una cantidad de dinero D se invierte a un porcentaje de interés compuesto $p\%$ anual durante n años, el monto acumulado al cabo de ese tiempo será $A = D(1+0.01p)^n$. ¿Cuánto se acumula si se invierte \$10 000 al 4% anual durante ocho años?

2.2 Sumas, restas y productos

Al sumar expresiones con variables pueden agruparse los términos semejantes, que son los sumandos que contienen las mismas variables y con los mismos exponentes.

Ejemplo 2

La suma de las expresiones $a^3 + 4a^2b - 5ab + b^3$ y $2ab - 3ab^2 - 2a^3$ es

$$\begin{aligned}
&(a^3 + 4a^2b - 5ab + b^3) + (2ab - 3ab^2 - 2a^3) \\
&\qquad = a^3 - 2a^3 - 5ab + 2ab + 4a^2b + b^3 - 3ab^2 \\
&\qquad = -a^3 - 3ab + 4a^2b + b^3 - 3ab^2
\end{aligned}$$

Al multiplicar expresiones algebraicas debe recordarse la ley de suma de exponentes: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. También debe tenerse en cuenta la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $a(b+c) = ab+ac$, que se generaliza a $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ y a otras formas más complejas dependiendo del número de sumandos en cada factor.

Ejemplo 3

El producto de $4x-2a$ y $3x^2-2ax+5a^2$ es

$$\begin{aligned}(4x-2a)(3x^2-2ax+5a^2) &= (4x)(3x^2)+(4x)(-2ax)+(4x)(5a^2)\\ &\quad +(-2a)(3x^2)+(-2a)(-2ax)+(-2a)(5a^2)\\ &= 12x^3-8ax^2+20a^2x-6ax^2+4a^2x-10a^3\\ &= 12x^3-14ax^2+24a^2x-10a^3\end{aligned}$$

Algunos productos ocurren frecuentemente y es importante reconocerlos y recordar sus fórmulas. A esos productos se les llama *productos especiales*, y sus fórmulas se llaman *fórmulas notables*. Los más importantes son:

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplo 4

Al multiplicar $(3pq^2-\frac{1}{2}p^3)(3pq^2+\frac{1}{2}p^3)$ reconocemos la tercera de las fórmulas recién mencionadas, con $a = 3pq^2$ y $b = \frac{1}{2}p^3$. Entonces el producto es

$$(3pq^2-\tfrac{1}{2}p^3)(3pq^2+\tfrac{1}{2}p^3) = (3pq^2)^2-(\tfrac{1}{2}p^3)^2 = 9p^2q^4-\tfrac{1}{4}p^6$$

Ejemplo 5

Para desarrollar la potencia $(4v^3w-2uvw^2)^3$ usamos la quinta fórmula notable con $a = 4v^3w$ y $b = 2uvw^2$:

$$\begin{aligned}(4v^3w-2uvw^2)^3 &= (4v^3w)^3-3(4v^3w)^2(2uvw^2)+3(4v^3w)(2uvw^2)^2-(2uvw^2)^3\\ &= 64v^9w^3-3(16v^6w^2)(2uvw^2)+3(4v^3w)(4u^2v^2w^4)-8u^3v^3w^6\\ &= 64v^9w^3-96uv^7w^4+48u^2v^5w^5-8u^3v^3w^6\end{aligned}$$

Dados $A = 6pq^2 - 4pr$, $B = 5pr + q^3$ y $C = 2q^3 - 7pq^2$, simplifique la expresión

18. $A + 2B$

19. $4C - 3A$

20. $-2A + B + 5C$

21. $B - 3A + C - 17pr$

22. $4A + B - 2C - (pq - 3q^3)$

23. $A \cdot B$

24. $A \cdot C$

25. $p \cdot B \cdot C$

Desarrolle el producto

26. $(3x - 5x^2)(1 + 4x)$

27. $(a - b)(2a + 3b - c)$

28. $(4p - 3q)(16p^2 + 12pq + 9q^2)$

29. $r(s - 5t)(15t + 3s)$

30. $(2v + w)^2$

31. $(3ab^2 + 5ac)^2$

32. $(\frac{3}{2}p^2 - 2q^3)^2$

33. $(2\sqrt{3}x^{5/2} - 7x^{3/2})^2$

34. $(4i + 6j)(4i - 6j)^2$

35. $(3c\sqrt{d} - \frac{4}{3}x^{-2/5})(\frac{4}{3}x^{-2/5} + 3c\sqrt{d})$

36. $(2m + 5n)^3$

37. $(\frac{4}{3}x^2 + xy)^3$

38. $(5\sqrt[3]{2p} - \frac{1}{3}p)^3$

39. $(4x^2y^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2/3}y)^3$

Simplifique

40. $3x + 4y + x - [x - 2(y - x) - y]$

41. $(x + y)(x^2 - 1)$

42. $(b^x - b^{x+1})b^2x$

43. $(2 + 3x^2b^2)(3 + 2x^2b^2)$

44. $2a^x - 3a^{x-1}(a^x + 2a)$

45. $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + x - 2y\}$

46. $6a^2 - a[2a^2 - 3(-2a - 4b)] - 3ab$

47. $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$

48. $(x^2 - 5x + 6)(x - 3) - x(x^2 - 5x + 6)$

49. $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$

50. $\left(\frac{4}{5}ab + \frac{1}{7}bc - \frac{2}{3}ac\right) - \left(-\frac{4}{5}ab + \frac{3}{14}bc - \frac{1}{5}ac\right)$

51. $(x^{2-a}+x^{1+a}+1)(x^a-x^2)$

52. $(-4xy^2w)(-\frac{3}{2}x^2y)(-5x^2y^3w)$

53. $\frac{1}{2}(m^2+m+1)-(4m^2-4m+2)$

54. $(2a-b)[(4a+b)a+b(a+b)]x^2$

55. $5a+\{3b+[6c-2a-(a-c)]\}-[9c-(7b+c)]$

56. $3(x^2-2yz+y^2)-4(x^2-y^2-3yz)+x^2+y^2$

57. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)(x+a)$

58. $2(x-3)^2+5(x-3)+(x-3)^2-3(x-3)$

59. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a-b)(a+b)^2$

60. $(4xy-10x^2y-3xy^2)-(7x^2y-5xy+12xy^2)$

2.3 División de polinomios

Al dividir dos números enteros, sabemos que el resultado podría ser exacto o incluir un residuo. Un ejemplo de lo primero es $91\div 7$, donde el cociente es 13 con residuo 0, porque $91=7\times 13$ exactamente. Y un ejemplo de lo segundo es $56\div 9$, donde el cociente es 6 (porque 6×9 "cabe" en 56 pero 7×9 se excede) y el residuo es 2 porque $56=6\times 9+2$.

En general, una división $a\div b$ tendrá un cociente c y un residuo r, lo que significa que $a=b\times c+r$ (en el último ejemplo teníamos $a=56$, $b=9$, $c=6$ y $r=2$). En palabras,

$$\text{dividendo}=\text{divisor}\times\text{cociente}+\text{residuo}.$$

Otra forma equivalente de describir el resultado de la división es

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}}=\text{cociente}+\frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

En el último ejemplo habíamos escrito $56=6\times 9+2$. La otra forma de escribir este resultado es $\dfrac{56}{9}=6+\dfrac{2}{9}$.

Lo mismo sucede al dividir dos polinomios: la división puede ser exacta, como en

$$\frac{t^2-1}{t-1}=t+1 \quad \text{porque } t^2-1=(t-1)(t+1)$$

o puede incluir un residuo, como en

$$\frac{c^2+2c+3}{c+2}=c+\frac{3}{c+2} \quad \text{porque } c^2+2c+3=(c+2)c+3.$$

La división de polinomios procede como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6

Para dividir $(5p^3+3p^2-p+2)\div(p^2+p-2)$ se escribe el dividendo y a su derecha el divisor, cada uno con sus términos en orden decreciente de exponente:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Se divide el primer término del dividendo, $5p^3$, entre el primero del divisor, p^2: $5p^3 \div p^2 = 5p$. Este resultado se escribe bajo el divisor, y luego se multiplica por cada término del divisor, escribiendo cada producto debajo del dividendo, en la columna apropiada a su exponente y con el signo cambiado:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p
\end{array}$$

Se suman las columnas bajo el dividendo:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p \\ \cline{1-4}
 & -2p^2 & +9p & +2 &
\end{array}$$

y se repite el procedimiento, usando la última línea a la izquierda como el nuevo dividendo y acumulando los resultados bajo el divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l}
5p^3 & +3p^2 & -p & +2 & p^2+p-2 \\ \cline{5-5}
-5p^3 & -5p^2 & +10p & & 5p-2 \\ \cline{1-4}
 & -2p^2 & +9p & +2 & \\
 & +2p^2 & +2p & -4 & \\ \cline{2-4}
 & & +11p & -2 &
\end{array}$$

El proceso termina cuando el nuevo dividendo tenga grado menor que el divisor, como es el caso ahora. El cociente es $5p-2$ y el residuo es $11p-2$. El resultado de la división se escribe

$$\frac{5p^3+3p^2-p+2}{p^2+p-2} = 5p-2+\frac{11p-2}{p^2+p-2}$$

Ejemplo 7

Calcular $(6+2t^3-5t)\div(2t-3)$.

Empezamos por plantear la división, cuidando de escribir los términos del dividendo y del divisor en orden decreciente de exponente, y dejando espacios en blanco para los términos ausentes del dividendo. En este caso, el término t^2 está ausente pero en el planteo debe reservársele una columna, así:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2t^3 & & -5t & +6 & 2t-3 \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Una opción, para forzarse a escribir todos los términos y reducir el riesgo de olvidar alguno, es escribir $0t^2$ para el término ausente:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2t^3 & +0t^2 & -5t & +6 & 2t-3 \\ \cline{5-5} \end{array}$$

El procedimiento es así:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2t^3 & +0t^2 & -5t & +6 & 2t-3 \\ \cline{5-5} -2t^3 & +3t^2 & & & t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4} \\ \cline{1-4} & +3t^2 & -5t & +6 & \\ & -3t^2 & +\frac{9}{2}t & & \\ \cline{2-4} & & -\frac{1}{2}t & +6 & \\ & & +\frac{1}{2}t & -\frac{3}{4} & \\ \cline{3-4} & & & +\frac{21}{4} & \end{array}$$

Y el resultado es $t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}+\dfrac{21/4}{2t-3}$.

Cuando el divisor tiene la forma $x-c$, donde x es la variable y c alguna constante, puede usarse el método de *división sintética*, un procedimiento abreviado de división. Note que c es la constante que se resta de la variable. Por ejemplo, en $x-4$, $c=4$; en $v+8$, $c=-8$; en $y+3/2$, $c=-3/2$.

En el planteo se escriben los coeficientes del dividendo (solamente los coeficientes, sin la variable), también en orden decreciente e incluyendo ceros para los términos ausentes, y a su derecha el valor de la constante c. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Para dividir $(-4w^5+12w^3-3w^2-15)\div(w+2)$, escribimos

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Se empieza por copiar el primer coeficiente, -4, debajo de la línea horizontal. En adelante, cada número que se escriba bajo esa línea se multiplicará por $c=-2$; el producto se escribirá sobre la línea en la siguiente columna hacia la derecha, y la suma de esa columna se escribirá bajo la línea:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} -4 & 0 & +12 & -3 & 0 & -15 & -2 \\ & 8 & -16 & 8 & -10 & 20 & \\ \hline -4 & 8 & -4 & 5 & -10 & 5 & \end{array}$$

Al terminar, el último número bajo la línea horizontal es el residuo (5 en este caso), y los números anteriores son los coeficientes del cociente, que tendrá un grado menos que el dividendo. En este ejemplo:

$$-4w^4+8w^3-4w^2+5w-10+\frac{5}{w+2}$$

Si el divisor es lineal pero no de la forma $x-c$ sino $ax-c$ (donde x tiene algún coeficiente distinto de 1), todavía puede usarse división sintética si el dividendo y el divisor se dividen ambos por a (lo que da un nuevo divisor $x-c/a$), como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Para dividir $(6y^3-8y^2-5)\div(3y-5)$, empezamos por dividir el dividendo y el divisor por 3:

$$\frac{6y^3-8y^2-5}{3y-5}=\frac{2y^3-\frac{8}{3}y^2-\frac{5}{3}}{y-\frac{5}{3}}.$$

Entonces procedemos como en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -8/3 & 0 & -5/3 & 5/3 \\ & 10/3 & 10/9 & 50/27 & \\ \hline 2 & 2/3 & 10/9 & 5/27 & \end{array}$$

El resultado es $2y^2+\frac{2}{3}y+\frac{10}{9}+\dfrac{5/27}{y-5/3}$.

Divida, usando división sintética siempre que sea posible

61. $(6y^4+y^3-15y^2)\div(2y^2)$

62. $(12z^3-3z^2-8z)\div(3z)$

63. $(13c^5-6c^3+8c^2)\div(4c^2)$

64. $(3q^3-2q^2+1)\div(q^2-1/2)$

65. $(t^5-t)\div(t^2+3)$

66. $(4p^3+4p^2-29p+21)\div(2p-2)$

67. $(27b^3-64)\div(3b-4)$

68. $(4c^3-5c^2+3c-2)\div(c+1)$

69. $(1-w^2+w^4)\div(1-w)$

70. $(2a^3+a^5-3a-2)\div(a^2-3a+1)$

71. $(4v^3+5v^2+v^4+2v)\div(v^2+2+3v)$

72. $(2c^5-18c)\div(c^3+3c)$

73. $(3u-3+u^2)\div(1-u)$

74. $(r^3+3r^2+3r+1)\div(r+1)$

75. $(2x^4-x^3+2x^2-3x-5)\div(x+2)$

76. $(4t^3+5t+3)\div(t+1/2)$

77. $(16q^4-2q^3-3q^2+4q-5)\div(q-5/2)$

78. $(6z^3+5z^2-4z+3)\div(2z-3)$

79. $(4v^3+20v^2+11v-35)\div(2v+1)$

80. $(x^6+3)\div(2-x)$

81. $(b^2-8b^4-3b+b^3-4)\div(b-7)$

82. $(w^3+125)\div(w+5)$

2.4 Factorización

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como un producto de polinomios. Por ejemplo, el polinomio x^2-5x+6 puede factorizarse como $(x-3)(x-2)$ porque al desarrollar este último producto el resultado es el polinomio original.

Los principales métodos de factorización, en orden de complejidad, son: factor común, agrupación, fórmula notable, suma/diferencia de cubos, tanteo, fórmula cuadrática y división sintética. Al tratar de factorizar un polinomio deberían intentarse los métodos en ese orden, hasta encontrar uno que funcione. A veces habrá que usar varios hasta factorizar completamente.

2.4.1 Factor común y agrupación

Si todos los sumandos en un polinomio tienen un factor en común, puede escribirse ese factor común multiplicando al resultado de dividir el polinomio original entre el factor común.

Ejemplo 10

Para factorizar $24a^2xy^3-60ab^2y^4+90a^3bx^2y^2$ notamos que, entre los coeficientes numéricos (24, -60 y 90) hay un factor común 6, y entre los factores literales se repiten a y y^2. Entonces el factor común es $6ay^2$, y la factorización es

$$24a^2xy^3-60ab^2y^4+90a^3bx^2y^2=6ay^2\left(4axy-10b^2y^2+15a^2bx^2\right)$$

El factor común podría no ser un monomio sino un polinomio, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

En el polinomio $15p^4(2a-b)^2-25p^3q^2(2a-b)$ se repiten los factores 5, p^3 y $(2a-b)$. Entonces

$$15p^4(2a-b)^2-25p^3q^2(2a-b)=5p^3(2a-b)[3p(2a-b)-5q^2]$$

Si hay fracciones, el factor común también puede incluir al denominador común.

Ejemplo 12

Al factorizar $\frac{35}{12}(t-1)^2(t+3)+\frac{49}{8}(t+1)(t-1)(t+3)^4$, el factor común es $7(t-1)(t+3)$, y el mínimo denominador común es 24. La factorización es

$$\begin{aligned}\frac{35}{12}(t-1)^2(t+3)+&\frac{49}{8}(t+1)(t-1)(t+3)^4\\&=7(t-1)(t+3)\left[\frac{5}{12}(t-1)+\frac{7}{8}(t+1)(t+3)^3\right]\\&=7(t-1)(t+3)\left[\frac{10}{24}(t-1)+\frac{21}{24}(t+1)(t+3)^3\right]\\&=\frac{7}{24}(t-1)(t+3)\left[10(t-1)+21(t+1)(t+3)^3\right]\end{aligned}$$

El método de agrupación consiste en hacer, entre los términos del polinomio, grupos que tengan algún factor común, para factorizar esos grupos por aparte y luego buscar algún factor común entre todos los grupos.

Ejemplo 13

En el polinomio $6a^2bxy - 15a^3x^2 + 10by^2 - 25axy$ puede notarse que, aunque no hay ningún factor común a todos los términos, los dos primeros términos tienen el factor común $3a^2x$, y los dos últimos tienen $5y$. Entonces

$$6a^2bxy - 15a^3x^2 + 10by^2 - 25axy = 3a^2x(2by - 5ax) + 5y(2by - 5ax).$$

Esta expresión no está factorizada (es una suma, no un producto), pero sus dos términos tienen el factor común $(2by - 5ax)$. Se puede entonces factorizar así:

$$3a^2x(2by - 5ax) + 5y(2by - 5ax) = (2by - 5ax)(3a^2x + 5y).$$

Esa es la factorización completa del polinomio original.

Al usar el método de agrupación, no siempre tendremos la suerte de que los grupos aparezcan ordenados en el polinomio. A veces será necesario probar varias agrupaciones hasta dar con la que permite factorizar. Por ejemplo, el mismo polinomio anterior podría presentarse como $6a^2bxy - 25axy + 10by^2 - 15a^3x^2$. Si agrupáramos los dos primeros y los dos últimos términos obtendríamos

$$6a^2bxy - 25axy + 10by^2 - 15a^3x^2 = axy(6ab - 25) + 5(2by^2 - 3a^3x^2)$$

que no está factorizado ni puede factorizarse más, porque sus dos términos no comparten ningún factor común.

Recuerde intentar todos los métodos de factorización en el orden en que se mencionaron. Antes de factorizar por agrupación intente sacar algún factor común a todo el polinomio.

Ejemplo 14

Para factorizar $60p^4q + 88p^2q - 48p^3q^2 + 12p^2q^3 - 22pq^2 - 110p^3$ empezamos por notar que sí hay un factor común a sus seis términos: $2p$. Como primer paso escribimos

$$\begin{aligned} &60p^4q + 88p^2q - 48p^3q^2 + 12p^2q^3 - 22pq^2 - 110p^3 \\ &\qquad = 2p(30p^3q + 44pq - 24p^2q^2 + 6pq^3 - 11q^2 - 55p^2). \end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis pueden agruparse para factorizar, notando que el primero, el tercero y el cuarto comparten el factor $6pq$, y los otros tres comparten un 11:

$$\begin{aligned} &30p^3q + 44pq - 24p^2q^2 + 6pq^3 - 11q^2 - 55p^2 \\ &\qquad = 30p^3q - 24p^2q^2 + 6pq^3 + 44pq - 11q^2 - 55p^2 \\ &\qquad = 6pq(5p^2 - 4pq + q^2) + 11(4pq - q^2 - 5p^2) \end{aligned}$$

Ahora los factores entre paréntesis no son idénticos: difieren en el orden, que no importa, y en el signo, que sí importa. Para arreglar el signo puede sacarse un $-$ como factor común del segundo paréntesis:

$$\begin{aligned}
&30p^3q+44pq-24p^2q^2+6pq^3-11q^2-55p^2\\
&\qquad = \cdots\\
&\qquad = 6pq(5p^2-4pq+q^2)-11(-4pq+q^2+5p^2)\\
&\qquad = (5p^2-4pq+q^2)(6pq-11)
\end{aligned}$$

Entonces la factorización completa de $60p^4q+88p^2q-48p^3q^2+12p^2q^3-22pq^2-110p^3$ es

$$2p(5p^2-4pq+q^2)(6pq-11)$$

Al factorizar por agrupación, generalmente es posible agrupar de distintas maneras para llegar al mismo resultado. En el ejemplo anterior, los términos de $30p^3q+44pq-24p^2q^2+6pq^3-11q^2-55p^2$ podrían agruparse en pares después de ordenarlos así:

$$\begin{aligned}
&30p^3q-55p^2-24p^2q^2+44pq+6pq^3-11q^2\\
&\qquad = 5p^2(6pq-11)-4pq(6pq-11)+q^2(6pq-11)\\
&\qquad = (6pq-11)(5p^2-4pq+q^2).
\end{aligned}$$

2.4.2 Fórmulas notables

Unas páginas atrás habíamos mencionado las fórmulas notables:

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ahora podemos usarlas para factorizar, si reconocemos en un polinomio la forma de una de ellas.

Ejemplo 15

En el polinomio $25x^2y^4-20tx^4y^2+4t^2x^6$ reconocemos la segunda fórmula notable: el primer término es el cuadrado de $a=5xy^2$, el último término es el cuadrado de $b=2tx^3$ y el término del medio, excepto por su signo, es el doble producto de ambos. Entonces factorizamos

$$\begin{aligned}
25x^2y^4-20tx^4y^2+4t^2x^6 &= (5xy^2)^2-2(5xy^2)(2tx^3)+(2tx^3)^2\\
&= (5xy^2-2tx^3)^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 16

Para factorizar $45r^2+30r+5-20u^2$ empezamos por sacar el factor común 5:

$$45r^2+30r+5-20u^2 = 5(9r^2+6r+1-4u^2).$$

En los tres primeros términos entre paréntesis reconocemos la primera fórmula notable con $a=3r$, $b=1$:

$$9r^2+6r+1-4u^2 = (3r+1)^2-4u^2.$$

Ahora reconocemos la tercera fórmula notable con $a=(3r+1)$ y $b=2u$. Entonces

$$45r^2+30r+5-20u^2 = 5\left[(3r+1)^2-4u^2\right] = 5\left[(3r+1)+2u\right]\left[(3r+1)-2u\right]$$

Ejemplo 17

En $150ax^4+8a^3-125x^6-60a^2x^2$ los términos no están en orden, pero al escribirlos según el exponente de a, como $8a^3-60a^2x^2+150ax^4-125x^6$, reconocemos la quinta fórmula notable: el primer término es el cubo de $2a$, el último es el cubo de $5x^2$ y los dos en el medio son lo que deben ser:

$$\begin{aligned} 8a^3-60a^2x^2 &+ 150ax^4-125x^6 \\ &= (2a)^3-3(2a)^2(5x^2)+3(2a)(5x^2)^2-(5x^2)^3 \\ &= (2a-5x^2)^3 \end{aligned}$$

2.4.3 Sumas y diferencias de cubos

Para cualesquiera números reales a y b se cumplen las fórmulas

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{y} \qquad a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(que no deben confundirse con las fórmulas notables de $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$).

Ejemplo 18

Para factorizar $5p^4q^6+40pr^9$ notamos en primer lugar que hay un factor común, $5p$, de modo que $5p^4q^6+40pr^9 = 5p(p^3q^6+8r^9)$. Ahora la expresión entre paréntesis es una suma de cubos: a^3+b^3 con $a=pq^2$ y $b=2r^3$:

$$\begin{aligned} p^3q^6+8r^9 &= (pq^2)^3+(2r^3)^3 = \left[(pq^2)+(2r^3)\right]\left[(pq^2)^2-(pq^2)(2r^3)+(2r^3)^2\right] \\ &= (pq^2+2r^3)(p^2q^4-2pq^2r^3+4r^6) \end{aligned}$$

Entonces la factorización completa es $5p(pq^2+2r^3)(p^2q^4-2pq^2r^3+4r^6)$.

Ejemplo 19

El polinomio $64x^6 - y^6$ es una diferencia de cubos. Pero recuerde que los métodos de factorización deberían intentarse en el orden en que se presentaron. Y resulta que $64x^6 - y^6$ es también una diferencia de cuadrados, así que por ahí deberíamos empezar:

$$64x^6 - y^6 = (8x^3)^2 - (y^3)^2 = (8x^3 + y^3)(8x^3 - y^3).$$

Ahora el primer paréntesis es la suma de los cubos de $2x$ y y, y el segundo su diferencia, así que factorizamos cada uno según su fórmula:

$$64x^6 - y^6 = (8x^3 + y^3)(8x^3 - y^3) = (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2).$$

Note que si hubiéramos empezado usando la fórmula de diferencia de cubos para el polinomio original obtendríamos

$$64x^6 - y^6 = (4x^2)^3 - (y^2)^3 = (4x^2 - y^2)(16x^4 + 4x^2y^2 + y^4).$$

El primer paréntesis fácilmente se factoriza como $(2x-y)(2x+y)$, pero el segundo no es fácil de factorizar. Por eso es preferible factorizar primero la diferencia de cuadrados, y después la suma y la resta de cubos[1].

2.4.4 Tanteo y fórmula cuadrática

Si un polinomio cuadrático con una sola variable, como $ax^2 + bx + c$, tiene todos sus coeficientes enteros y además $a = 1$, a veces es posible factorizarlo por *tanteo* o *inspección*: buscando dos enteros d_1 y d_2 que permitan la factorización

$$x^2 + bx + c = (x + d_1)(x + d_2).$$

Como $(x+d_1)(x+d_2) = x^2 + (d_1+d_2)x + d_1d_2$, entonces para que la factorización sea correcta es necesario que $d_1 + d_2 = b$ y que $d_1d_2 = c$; es decir, que d_1 y d_2 sean dos números cuya suma sea b y su producto sea c.

[1] El polinomio $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$ puede factorizarse con un método que no cubrimos: el de completar cuadrados. En este caso, consiste en notar que la forma del polinomio se parece a la primera fórmula notable, excepto que el término del medio debería ser $8x^2y^2$. Para eso, al polinomio le falta $4x^2y^2$; entonces sumamos y restamos esa cantidad así:

$$16x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = 16x^4 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 = 16x^4 + 8x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2.$$

Ahora los tres primeros términos forman la primera fórmula notable y se factorizan como $(4x^2 + y^2)^2$. Junto con el nuevo término se forma entonces la tercera fórmula notable:

$$(4x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = \left[(4x^2 + y^2) + 2xy\right]\left[(4x^2 + y^2) - 2xy\right].$$

Combinando eso con $4x^2 - y^2 = (2x-y)(2x+y)$ se obtiene la factorización completa. Pero el orden que usamos para los métodos de factorización (primero cuadrados y después cubos) lleva al mismo resultado mucho más fácilmente.

Ejemplo 20

En el polinomio $3t^2-6t-24$ encontramos en primer lugar el factor común 3:

$$3t^2-6t-24=3(t^2-2t-8).$$

Para el polinomio entre paréntesis, de la forma t^2+bt+c con $b=-2$ y $c=-8$, buscamos dos números cuya suma sea -2 y su producto sea -8: ellos pueden ser -4 y 2, en cualquier orden. Entonces $t^2-2t-8=(t-4)(t+2)$, y

$$3t^2-6t-24=3(t-4)(t+2)$$

Si no es fácil encontrar los números d_1 y d_2, si $a\neq 1$ o si los coeficientes no son todos enteros, puede usarse también el método de la *fórmula cuadrática*, que dice que

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2),$$

donde

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

son las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Si b^2-4ac, llamado el *discriminante* del polinomio, es negativo, entonces no tiene raíz cuadrada real, y el polinomio no puede factorizarse[2].

Ejemplo 21

Para factorizar $16p^3+32p^2-20p$, empezamos por sacar el factor común, $4p$:

$$16p^3+32p^2-20p=4p\,(4p^2+8p-5).$$

Ahora, el polinomio $4p^2+8p-5$ es cuadrático con $a=4$, $b=8$ y $c=-5$. Su factorización será $4(p-r_1)(p-r_2)$, donde

$$r_1=\frac{-8+\sqrt{8^2-4(4)(-5)}}{2(4)}=\frac{-8+\sqrt{144}}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

y

$$r_2=\frac{-8-\sqrt{8^2-4(4)(-5)}}{2(4)}=\frac{-8-\sqrt{144}}{8}=\frac{-20}{8}=-\frac{5}{2},$$

es decir, $4p^2+8p-5=a(p-r_1)(p-r_2)=4(p-\frac{1}{2})(p+\frac{5}{2})$. Entonces

$$16p^3+32p^2-20p=4p\cdot 4(p-\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{5}{2})=16p\,(p-\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{5}{2}).$$

Opcionalmente, puede tomarse denominador común dentro de las fracciones así:

$$\begin{aligned}16p^3+32p^2-20p&=16p\left(\frac{2p-1}{2}\right)\left(\frac{2p+5}{2}\right)\\&=\frac{16p\,(2p-1)(2p+5)}{2\cdot 2}=4p\,(2p-1)(2p+5)\end{aligned}$$

[2]Esto es, no puede factorizarse en el conjunto de números reales, pero sí en el conjunto de los números complejos, donde existen las raíces cuadradas de números negativos. Pero eso está fuera de nuestro contexto.

Ejemplo 22

El polinomio $\frac{2}{5}c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{4}{15}$ no tiene coeficientes enteros, pero el método de la fórmula cuadrática funciona como antes:

$$r_1 = \frac{\frac{2}{3} + \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{5})(-\frac{4}{15})}}{2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{196}{225}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{14}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{8/5}{4/5} = 2$$

y

$$r_2 = \frac{\frac{2}{3} - \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{5})(-\frac{4}{15})}}{2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{196}{225}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{14}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{-4/15}{4/5} = -\frac{1}{3}.$$

Entonces $\frac{2}{5}c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{4}{15} = a(c - r_1)(c - r_2) = \frac{2}{5}(c-2)(c+\frac{1}{3})$.

Tomando denominador común como en el ejemplo anterior, podemos dar el resultado también como $\frac{2}{15}(c-2)(3c+1)$.

En el ejemplo anterior también se podía tomar denominador común al inicio:

$$\frac{2}{5}c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{4}{15} = \frac{6c^2 - 10c - 4}{15} = \frac{2}{15}(3c^2 - 5c - 2)$$

lo que da un polinomio más fácil de factorizar.

Al usar el método de la fórmula cuadrática, vale la pena notar que los valores de r_1 y r_2 también se pueden obtener de la calculadora al plantear la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, suponiendo que su calculadora resuelve ecuaciones cuadráticas. Recuerde, sin embargo, que la calculadora no factoriza; solamente encuentra los valores de r_1 y r_2. No puede faltar el coeficiente a en la factorización $a(x - r_1)(x - r_2)$.

Ejemplo 23

El polinomio $w^2 - 2w - 1$ tiene todos sus coeficientes enteros, pero es imposible encontrar por tanteo dos números enteros cuya suma sea -2 y su producto -1. Al resolver la ecuación $w^2 - 2w - 1 = 0$ en calculadora, obtenemos las soluciones $r_1 \approx -0.41421$ y $r_2 \approx 2.41421$. Entonces la factorización aproximada es

$$w^2 - 2w - 1 = a(w - r_1)(w - r_2) \approx (w + 0.41421)(w - 2.41421).$$

Para obtener la factorización exacta necesitamos la fórmula cuadrática, que da

$$r_1 = \frac{2 + \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

y

$$r_2 = \frac{2 - \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

Entonces la factorización es

$$w^2 - 2w - 1 = [w - (1 + \sqrt{2})][w - (1 - \sqrt{2})] = [w - 1 - \sqrt{2}][w - 1 + \sqrt{2}]$$

2.4.5 División sintética

Si una división de polinomios tiene un cociente exacto, $\dfrac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$, entonces el dividendo se factoriza como

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente}.$$

Por ejemplo, $(2x^3 - 11x^2 + 16x - 3) \div (x - 3) = 2x^2 - 5x + 1$ con residuo cero, así que

$$2x^3 - 11x^2 + 16x - 3 = (x - 3)(2x^2 - 5x + 1).$$

Dado un polinomio en una sola variable y con coeficientes enteros, puede intentarse la división sintética con varios divisores de la forma $(x - c)$ con c constante, hasta encontrar un valor de c que dé un residuo cero.

Si el coeficiente principal del polinomio (el coeficiente numérico del término con exponente mayor) es igual a 1, los únicos valores de c que podrían dar residuo cero son los divisores del término constante del polinomio.

Ejemplo 24

Para factorizar $v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50$ notamos que su coeficiente principal (el de v^4) es 1. Entonces vamos a intentar división sintética con divisores de la forma $(v - c)$ donde c será algún divisor de 50. Los divisores de 50 son: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25 y ± 50.

Intentamos con $c = 1$, es decir, dividiendo $(v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50) \div (v - 1)$:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -27 & 25 & 50 & 1 \\
 & 1 & 0 & -27 & -2 & \\
\hline
1 & 0 & -27 & -2 & 48 &
\end{array}$$

El residuo es 48, no 0, así que la división no es exacta. Probamos con $c = -1$:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -27 & 25 & 50 & -1 \\
 & -1 & 2 & 25 & -50 & \\
\hline
1 & -2 & -25 & 50 & 0 &
\end{array}$$

Esta vez la división es exacta, e implica que

$$v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50 = (v + 1)(v^3 - 2v^2 - 25v + 50).$$

Continuamos con la factorización de $v^3 - 2v^2 - 25v + 50$, también por división sintética. El coeficiente principal es 1 y el coeficiente constante es 50, cuyos divisores son, como antes, ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25 y ± 50. Pero ya probamos con $c = 1$ y no funcionó. Si un divisor no funciona una vez, no funcionará nunca más en aplicaciones repetidas de división sintética para factorizar un polinomio.

El divisor $c = -1$ no está descartado, de modo que lo probamos de nuevo:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -25 & 50 & -1 \\ & -1 & 3 & 22 & \\ \hline 1 & -3 & -22 & 72 & \end{array}$$

No funciona, así que pasamos al siguiente divisor, $c = 2$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -25 & 50 & 2 \\ & 2 & 0 & -50 & \\ \hline 1 & 0 & -25 & 0 & \end{array}$$

Ahora sí tenemos una división exacta, que nos dice que $v^3 - 2v^2 - 25v + 50 = (v-2)(v^2 - 25)$, y entonces la factorización del polinomio original va así:

$$v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50 = (v+1)(v-2)(v^2 - 25).$$

Podríamos factorizar $v^2 - 25$ por división sintética, haciendo una nueva lista con los divisores de 25: ± 1, ± 5, ± 25, de los cuales ya descartamos ± 1. Pero es mucho más fácil recordar los métodos anteriores, en particular el de fórmula notable: $v^2 - 25 = (v+5)(v-5)$, así que

$$v^4 - v^3 - 27v^2 + 25v + 50 = (v+1)(v-2)(v+5)(v-5)$$

es la factorización completa.

El ejemplo anterior ilustra la necesidad frecuente de usar división sintética varias veces para factorizar un polinomio. Pero en realidad violamos la recomendación que hemos visto varias veces, de usar los métodos de factorización en el orden en que los vimos. Cuando tuvimos que factorizar $v^3 - 2v^2 - 25v + 50$, habría sido mejor usar el método de agrupación:

$$v^3 - 2v^2 - 25v + 50 = v^2(v-2) - 25(v-2) = (v-2)(v^2 - 25)$$

que es mucho más simple que el de división sintética.

Moraleja: no olvide intentar los métodos de factorización en el orden en que los hemos presentado.

En el ejemplo anterior probamos dos veces con $c = -1$, que funcionó la primera vez pero no la segunda. En el siguiente ejemplo vemos por qué no debe descartarse un divisor mientras no haya fallado.

Ejemplo 25

En el polinomio $b^4 - 8b^3 - 42b^2 + 360b - 567$, la lista de divisores de 567 es impresionante: ± 1, ± 3, ± 7, ± 9, ± 21, ± 27, ± 63, ± 81, ± 189 y ± 567. Por suerte no tardamos en encontrar uno que sirva, luego de descartar $c = 1$ y $c = -1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -8 & -42 & 360 & -567 & 3 \\ & 3 & -15 & -171 & 567 & \\ \hline 1 & -5 & -57 & 189 & 0 & \end{array}$$

Entonces $b^4-8b^3-42b^2+360b-567=(b-3)(b^3-5b^2-57b+189)$. Ahora la lista de divisores de 189 es: ±1, ±3, ±9, ±21, ±27 y ±63. Como no hemos descartado el 3, lo probamos de nuevo y resulta que vuelve a servir:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & -57 & 189 & 3 \\ & 3 & -6 & -189 & \\ \hline 1 & -2 & -63 & 0 & \end{array}$$

Ya tenemos $b^4-8b^3-42b^2+360b-567=(b-3)(b-3)(b^2-2b-63)$, y este último paréntesis puede factorizarse por tanteo: $b^2-2b-63=(b-9)(b+7)$. Finalmente,

$$b^4-8b^3-42b^2+360b-567=(b-3)(b-3)(b-9)(b+7)$$

Si el coeficiente principal no es 1 (pero todos los coeficientes son enteros), los valores posibles de c son las fracciones de la forma a/b, donde a es un divisor del coeficiente constante y b un divisor del coeficiente principal.

Ejemplo 26

Al usar división sintética en $12y^3+16y^2-41y-15$, debemos intentar divisores de la forma $(y-c)$ donde $c=a/b$ con a divisor de 15 y b divisor de 12. Como los divisores de 15 son ±1, ±3, ±5 y ±15, y los divisores de 12 son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12, entonces la lista de valores posibles de c es

$$1,\ 3,\ 5,\ 15,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{15}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{3}=1,\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{15}{3}=5,$$
$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{15}{4},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{15}{6}=\tfrac{5}{2},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{3}{12}=\tfrac{1}{4},\ \tfrac{5}{12},\ \tfrac{15}{12}=\tfrac{5}{4},$$

cada uno positivo o negativo. Eliminando repeticiones, los valores posibles son

$$\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm15,\ \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{3}{2},\ \pm\tfrac{5}{2},\ \pm\tfrac{15}{2},\ \pm\tfrac{1}{3},\ \pm\tfrac{5}{3},$$
$$\pm\tfrac{1}{4},\ \pm\tfrac{3}{4},\ \pm\tfrac{5}{4},\ \pm\tfrac{15}{4},\ \pm\tfrac{1}{6},\ \pm\tfrac{5}{6},\ \pm\tfrac{1}{12},\ \pm\tfrac{5}{12},$$

Después de descartar varias posibilidades llegamos a

$$\begin{array}{rrrr|l} 12 & 16 & -41 & -15 & 3/2 \\ & 18 & 51 & 15 & \\ \hline 12 & 34 & 10 & 0 & \end{array}$$

Entonces $12y^3+16y^2-41y-15=(y-\frac{3}{2})(12y^2+34y+10)$. El polinomio restante ya es cuadrático, así que lo factorizamos por fórmula cuadrática (la que dice que $ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$, donde r_1 y r_2 son los ceros del polinomio). Mejor aún, por factor común primero:

$$12y^2+34y+10=2(6y^2+17y+5)=2\cdot6(y+\tfrac{5}{2})(y+\tfrac{1}{3})$$

porque las soluciones de $6y^2+17y+5=0$ son $r_1=-5/2$ y $r_2=-1/3$. Tomando denominador común,

$$\begin{aligned} 2\cdot 6(y+\tfrac{5}{2})(y+\tfrac{1}{3}) &= 12\left(\frac{2y+5}{2}\right)\left(\frac{3y+1}{3}\right) = 12\frac{(2y+5)(3y+1)}{6} \\ &= 2(2y+5)(3y+1). \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} 12y^3+16y^2-41y-15 &= (y-\tfrac{3}{2})\cdot 2(2y+5)(3y+1) \\ &= \left(\frac{2y-3}{2}\right)\cdot 2(2y+5)(3y+1) \\ &= (2y-3)(2y+5)(3y+1) \end{aligned}$$

Si el coeficiente constante es cero, sus divisores son todos los números enteros excepto el cero mismo. Pero eso no debe ser motivo de pánico: si un polinomio en una variable tiene un coeficiente constante igual a cero, necesariamente tiene algún factor común.

Ejemplo 27

En $w^5-3w^3-2w^2$ el coeficiente constante es cero, lo cual significa que hay un factor común. En efecto, podemos sacar w^2 y obtener

$$w^5-3w^3-2w^2 = w^2(w^3-3w-2).$$

El polinomio entre paréntesis se factoriza por división sintética (con $c=2$) como $(w^3-3w-2)=(w-2)(w^2+2w+1)$, y este último paréntesis por fórmula notable: $(w^2+2w+1)=(w+1)^2$. La factorización completa es

$$w^5-3w^3-2w^2 = w^2(w-2)(w+1)^2$$

2.4.6 Factorización con ayuda de la calculadora

En la página 25 mencionamos que es posible usar una calculadora para encontrar los valores de r_1 y r_2 en la factorización $a(x-r_1)(x-r_2)$ de un polinomio cuadrático.

Si su calculadora resuelve ecuaciones cúbicas, entonces también puede ayudarle a factorizar polinomios cúbicos. La clave está en que cualquier ax^3+bx^2+cx+d se factoriza como $a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, donde r_1, r_2 y r_3 son las soluciones de la ecuación $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Por ejemplo, al digitar en la calculadora el polinomio $v^3-2v^2-25v+50$ del Ejemplo 24, la calculadora encuentra las soluciones $r_1=5$, $r_2=-5$ y $r_3=2$, implicando que la factorización es $1(v-5)(v+5)(v-2)$ como habíamos encontrado.

Para el polinomio $b^3-5b^2-57b+189$ del Ejemplo 25, la calculadora da $r_1=9$, $r_2=-7$ y $r_3=3$, confirmando nuestros cálculos anteriores.

Y para $12y^3+16y^2-41y-15$, del Ejemplo 26, las soluciones son $r_1=3/2$, $r_2=-5/2$ y $r_3=-1/3$. Entonces la factorización es $12(y-3/2)(y+5/2)(y+1/3)$, que al sacar denominador común se reduce a $(2y-3)(2y+5)(3y+1)$.

Si el polinomio cúbico no tiene tres soluciones reales, al menos tendrá una, y podemos usarla para ir directamente al valor de c que dará un residuo cero en la división sintética.

Ejemplo 28

Al digitar los coeficientes del polinomio $6z^3-13z^2-3z-5$ en la calculadora, encontramos una única solución real, $r_1=5/2$. Aunque esto no permite conocer la factorización completa, nos guía en la elección de c al hacer división sintética: tenemos seguridad de que $c=5/2$ funcionará. Entonces

$$\begin{array}{rrrr|l} 6 & -13 & -3 & -5 & 5/2 \\ & 15 & 5 & 5 & \\ \hline 6 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

de modo que $6z^3-13z^2-3z-5=(z-5/2)(6z^2+2z+2)$. Este último polinomio cuadrático tiene discriminante negativo, $b^2-4ac=2^2-4(6)(2)=-44$, así que no se factoriza más que por factor común:

$$6z^3-13z^2-3z-5=(z-5/2)\cdot 2(3z^2+z+1)=(2z-5)(3z^2+z+1)$$

Factorice por factor común o por agrupación

83. $15axy^2-30a^2by+20a^3bx^2y$

84. $21p^2q+14p^3q^5+14p^4q^2$

85. $3x(2a+b)-15y(2a+b)+6z(2a+b)$

86. $34a^2b(x-4y)+85a^3(2x-8y)-34ab^2(4y-x)$

87. $12ax+6aw-10xb-5bw$

88. $27a^2bxy+9a^2bp-12cx^2y-4cpx$

89. $6a^2r^2s-3a^2rt-96ar^2s+48art+150r^2s-75rt$

90. $6abx^2-9ax^2+15bx^2-8abxy+12axy-20bxy+16aby^2-24ay^2+40by^2$

Factorice por fórmula notable (o por alguno de los métodos anteriores)

91. $25a^2 - 150a^2b + 225a^2b^2$

92. $6r^6s^3 + 36ar^4s^2 + 72a^2r^2s + 48a^3$

93. $12t^6 + 147 + 84t^3$

94. $450r^4 - 81r^8 - 625$

95. $24a^5x^3 - 108a^4bx^2 + 162a^3b^2x - 81a^2b^3$

96. $4a^2x + 8a^2y - b^6x - 2b^6y$

Factorice por suma o diferencia de cubos (o por alguno de los métodos anteriores)

97. $54x^6y^5 - 250y^2z^3$

98. $3av^6 + bv^7 - 24aw^3 - 8bvw^3$

99. $x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6 - c^3$

100. $a^{12} - b^{12}$

Factorice por tanteo o fórmula cuadrática (o por alguno de los métodos anteriores)

101. $t^2 + 3t - 40$

102. $b^2 - 2b - 48$

103. $2y^3 + 8y^2 - 24y$

104. $2u^2 + 7u - 15$

105. $2 + 5x - 7x^2$

106. $3c^2 - 3c - \frac{9}{4}$

107. $-7v^2 - \frac{392}{3}v - 84$

108. $2w^2 - 29.2w - 12$

109. $4x^2 - 24x + 23.04$

110. $5m^2 + 6m - 3$

Factorice por división sintética (o por alguno de los métodos anteriores)

111. $k^5 - 3k^3 - 2k^2$

112. $8v^3 + 20v^2 + 14v + 3$

113. $y^4 - 3y^2 + 4 - 2y^3 + 4y$

114. $9r^5 - 108r^4 + 513r^3 - 1206r^2 + 1404r - 648$

115. $3z^4 - 5z^3 - 9z^2 + 15z$

Factorice completamente, usando los métodos más apropiados a cada caso

116. $5y + y^2$

117. $m^2 + 2mb + b^2$

118. $a^2 + a - ab - b$

119. $u^2 - 36$

120. $9x^2 - 6xy + y^2$

121. $1 + z^3$

122. $27a^3 - 1$

123. $a^3 - 6a^2b + 5ab^2$

124. $2xy - 6y + xz - 3z$

125. $-6r^2 + 36r + \frac{854}{27}$

126. $1 - 4r + 4r^2$

127. $4x^2 - 5xy^2 + y^4$

128. q^2-q-30

129. $15w^2+11w-14$

130. $108+18w-24w^2-6w^3$

131. $8m^3-27y^6$

132. $-4y^2-28y-\frac{152}{9}$

133. $8v^3-12v^2+6v-1$

134. $1-3b^2$

135. $125x^6+1$

136. $a^2-m^2+2ab+b^2$

137. $5z^3+37z^2+67.2z+36$

138. c^5-c^4+c-1

139. $5r^2+40r-201.25$

140. $6t^2-19t-20$

141. $25x^4-81y^2$

142. $16a^2-24ab+9b^2$

143. $x^2-a^2+2xy+y^2+2ab-b^2$

144. $42p^2-86p-2p^4+6p^3-120$

145. $7m^5n^3-21m^4n^2+21m^3n-7m^2$

146. $72pr^2-15p^3r^2+25.5p^2r^2$

147. a^4-2a^3+2a-1

148. $a^2+12ab+36b^2$

149. $6x^2-3x+0.5-4x^3$

150. $343+8p^3$

151. $20-t-t^2$

152. $6u^2+\frac{2910}{7}u-300$

153. n^2+n-42

154. v^3-64

155. r^3-64r^5

156. $(z+1)^4-81$

157. $(m+n)^2-6(m+n)+9$

158. $9u^3+45u-45u^2$

159. $7u^4-14u^2-56$

160. $4t^2-4t^5-5t^3-t+4t^4$

161. $18x^4y^3+6x^3y^3-60x^2y^3$

162. $15q^4-15q^3+20q^2$

163. $a^2-x+a-x^2$

164. $9m^2+4a^2-12am$

165. $9x^2-57.6x+63$

166. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

167. $8c^2-22c-21$

168. $1+18ab+81a^2b^2$

169. $15+14x-8x^2$

170. $3yw^2+cw^2-\frac{7}{2}cw-\frac{45}{2}y-\frac{15}{2}c-\frac{21}{2}yw$

171. $b^{10}-b^8-b^6+b^4$

172. $a^2-b^3+2b^3x^2-2a^2x^2$

173. $2am-3b-c-cm-3bm+2a$

174. $w^2-2w/3+1/9$

175. $27t^2+45t+5.4t^3+25$

176. $9a^2-x^2-4x+12a$

177. $9x^2-y^2+3x-y$

178. $-3w^2+18w-\frac{861}{64}$

179. $a^2-m^2-9n^2-6mn+4ab+4b^2$

180. $49x^2-77x+30$

181. $125y^3-225y^2+135y-27$

182. $1+6a^3+9a^6$

183. $1-9x^2+24xy-16y^2$

184. $1-2p+2p^3-p^4$

185. q^5-32

186. $4-(x^2+b^2)+2xb$

187. x^3-y^3+x-y

188. $21-y^2-\frac{68}{5}y$

189. $2a^2x-4abx+2b^2x$

190. $-4w^2+12w-8.96$

191. $m^3+3m^2-16m-48$

192. $2b^3-5.5b^2+4.5-3b+2b^4$

193. x^3-x+x^2y-y

194. $u^4-2u^3-5u^2+4u+6$

195. $9(x-y)^3-x+y$

196. $2p^4+5p^3-54p-135$

197. $z^5-3z^3-3z^4+13z^2-12$

198. $ax(t-3)-at+3a+2xt-6x-2t+6$

199. c^6-1

200. $2v^4+6v^3-2v-6$

201. $2b^5-8b^4+3b-12$

202. $60-15t^2-20t+5t^3$

203. $-y^2+\frac{251}{5}y-10$

204. $r^4+5r^3+r^2-21r-18$

205. $8w^4-18w^3-75w^2+46w+120$

206. $x^5+2x^4-15x^3-3x^2-6x+45$

207. $2a^3-\frac{1}{3}a^2-7a+\frac{10}{3}$

208. $t^6-9t^5+13t^4+81t^3-230t^2+288$

209. $18i^5-129i^4+222i^3+156i^2-600i+288$

210. $t^6-8t^5+6t^4+103t^3-344t^2+396t-144$

211. $-9z^2+32.4z+63$

2.5 Fracciones

En una fracción entre dos expresiones algebraicas, como en cualquier fracción, es posible que se pueda simplificar la fracción si su numerador y su denominador comparten algún factor común. Por ejemplo, la fracción numérica $\frac{12}{15}$ puede simplificarse porque 12 y 15 tienen el factor común 3:

$$\frac{12}{15}=\frac{3\times 4}{3\times 5}=\frac{4}{5}.$$

De la misma forma, para simplificar cualquier fracción deben factorizarse el numerador y el denominador de manera que sean evidentes cualesquiera factores que compartan.

Ejemplo 29

Simplificar la fracción racional $\dfrac{4p-pt^2}{2pt^2+pt^3}$.

Empezamos por factorizar el numerador: $4p-pt^2=p(4-t^2)=p(2+t)(2-t)$, y el denominador: $2pt^2+pt^3=pt^2(2+t)$. Entonces

$$\frac{4p-pt^2}{2p+pt}=\frac{p(2+t)(2-t)}{pt^2(2+t)}=\frac{2-t}{t^2}.$$

Así la fracción está simplificada al máximo.

Para sumar o restar fracciones conviene tomar el mínimo común denominador, para lo cual es necesario conocer los factores de cada denominador.

Ejemplo 30

Para calcular la resta

$$\frac{7y}{3y^2-5y-2}-\frac{10}{3y^2-7y+2}$$

primero factorizamos cada denominador: $3y^2-5y-2=(3y+1)(y-2)$ y $3y^2-7y+2=(3y-1)(y-2)$. Entonces el mínimo común denominador es $(3y+1)(y-2)(3y-1)$, y

$$\begin{aligned}
&\frac{7y}{3y^2-5y-2}-\frac{10}{3y^2-7y+2}\\
&\qquad=\frac{7y}{(3y+1)(y-2)}-\frac{10}{(3y-1)(y-2)}\\
&\qquad=\frac{7y(3y-1)-10(3y+1)}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}=\frac{(21y^2-7y)-(30y+10)}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{21y^2-37y-10}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}=\frac{(21y+5)(y-2)}{(3y+1)(y-2)(3y-1)}\\
&\qquad=\frac{21y+5}{(3y+1)(3y-1)}
\end{aligned}$$

Si el denominador contiene raíces, pueden aplicarse los mismos principios que vimos en la Sección 1.3, sobre racionalización.

Ejemplo 31

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{5rw+3w}{w-2\sqrt{w}}$.

Empezamos por multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{5rw+3w}{w-2\sqrt{w}}\cdot\frac{w+2\sqrt{w}}{w+2\sqrt{w}}=\frac{(5rw+3w)(w+2\sqrt{w})}{w^2-4w}.$$

Ahora factorizamos numerador y denominador y cancelamos sus factores comunes:

$$\frac{w(5r+3)(w+2\sqrt{w})}{w(w-4)}=\frac{(5r+3)(w+2\sqrt{w})}{w-4}$$

Simplifique al máximo

212. $\dfrac{v^2-4}{2v^2-v-6}$

213. $\dfrac{5x^3+9x^2-7x+1}{10x^2+13x-3}$

214. $\dfrac{bx^2-b-x^2+1}{b^2x-x+b^2-1}$

215. $\dfrac{p^{-1}+q^{-1}}{p^{-2}+q^{-2}}$

216. $\dfrac{z^2-4}{z^2+2z}\cdot\dfrac{z^2}{z-2}$

217. $\dfrac{3p}{p+2z}\cdot\dfrac{5p+10z}{6}$

218. $\dfrac{4q+12}{q+2}\cdot\dfrac{3q+6}{2q-1}$

219. $\dfrac{v^2+2v}{3v^2-18v+24}\div\dfrac{v^2-v-6}{v^2-4v+4}$

220. $\dfrac{6t^2-5t-6}{6t^2+13t+6}\div\dfrac{6t^2-13t+6}{9t^2-12t+4}$

221. $\dfrac{\dfrac{t+x}{t}}{\dfrac{t-x}{2t}}$

222. $\dfrac{4a/3}{2a}$

223. $\dfrac{-9z^3}{z/3}$

224. $\dfrac{1}{y^2-y-2}+\dfrac{1}{y^2-1}$

225. $\dfrac{wy+rc}{wy-ry}+\dfrac{wc-ry}{rc-wc}$

226. $\dfrac{2t-1}{t+2}-\dfrac{t+3}{t-1}$

227. $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+x}{(x+1)^2}+2x$

228. $\dfrac{2+\dfrac{2}{u}}{u-\dfrac{2}{u}}$

229. $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{a+b}$

230. $(1+p^{-3})^2$

231. $(w-r^{-1})^{-2}$

232. $\dfrac{6}{u^2+u-2}-\dfrac{9}{u^2+2u-3}+\dfrac{3}{u^2+5u+6}$

233. $\dfrac{2b-3}{2b^2+11b-6}-\dfrac{3b+1}{3b^2+16b-12}+\dfrac{1}{3b-2}$

234. $\dfrac{2x+1}{2x^2-x-1}-\dfrac{x+1}{2x^2+3x+1}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}$

Racionalice el denominador y simplifique

235. $\dfrac{1-4t^2}{\sqrt{2t-1}}$

236. $\dfrac{3u^3-1-3u+u^2}{\sqrt{3u+1}}$

237. $\dfrac{u\sqrt{u}}{\sqrt{1+u}}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}$

238. $\dfrac{16a^2-24a}{\sqrt{6a}+2a}$

239. $\dfrac{9bc-15b^2}{\sqrt[3]{12bc^2}}$

240. $\dfrac{2r-r^2-r^3}{\sqrt{5r+4p}+2\sqrt{p}}$

241. $\dfrac{9v^2(x^2+5)-4x^3-20x+4x^2+20}{3v-2\sqrt{x-1}}$

242. $\dfrac{72wy^3-36y^3z}{\sqrt[4]{8y^2}(3\sqrt{ty}-\sqrt{wz})}$

243. $\dfrac{24q+30-6q^2}{2+\sqrt[3]{3q-5}}$

244. $\dfrac{3z^3+8z^2-6z+1}{z+2+\sqrt{z+5}}$

CAPÍTULO 3
Ecuaciones

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones que involucran alguna variable, llamada *incógnita*. La igualdad puede ser cierta o no dependiendo del valor de la incógnita, y una *solución* de la ecuación es un valor de la incógnita que haga cierta la igualdad[1].

Ejemplo 1

La igualdad $3t^2 - 5t + 2 = 4 - 6t$ es una ecuación con incógnita t. Si fuera $t = 2$, la igualdad diría

$$\begin{aligned} 3(2)^2 - 5(2) + 2 &= 4 - 6(2) \\ 12 - 10 + 2 &= 4 - 12 \\ 4 &= -8 \end{aligned}$$

lo cual es falso. Por eso, $t = 2$ no es una solución.

Con $t = -1$,

$$\begin{aligned} 3(-1)^2 - 5(-1) + 2 &= 4 - 6(-1) \\ 3 + 5 + 2 &= 4 + 6 \\ 10 &= 10 \end{aligned}$$

lo que indica que $t = -1$ sí es una solución de la ecuación.

Compruebe que el valor dado de la incógnita es solución de la ecuación planteada

1. $t = 2/3$; $3t^2 - 5t + 2 = 4 - 6t$

2. $y = 1 - \sqrt{2}$; $y^2 + 2 - y = y + 3$

3. $w = -3$; $\sqrt{w^2 - 5} + w = 1 + 6/w$

4. $p = 4$; $\dfrac{p-6}{p-2} = \dfrac{2p-10}{6-p}$

5. $r = 0.1$; $(1+r)^4 - 1 = 4r + 0.0641$

6. $x = -1$; $4^{x+2} = 2^{1-x}$

[1] También hay ecuaciones con varias incógnitas; de ellas nos ocuparemos en el Capítulo 8.

3.1 Ecuaciones lineales, cuadráticas y polinomiales

Una *ecuación lineal* es una en la que la incógnita aparece solamente multiplicada por constantes y sumada a constantes, pero no en denominadores o raíces, ni con exponentes distintos de 1. Para resolver una ecuación lineal debe despejarse la incógnita, lo que significa cancelar todos los términos que la rodean hasta dejarla sola en su lado de la igualdad.

Para resolver una ecuación deben aplicarse operaciones a cada lado de la igualdad, cada vez la misma operación en ambos lados de la igualdad, hasta despejar la incógnita.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $3x-2(1-x)=3(2+x)+8$.

Se empieza por simplificar cada lado de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3x-2+2x &= 6+3x+8 \\ 5x-2 &= 14+3x \end{aligned}$$

Ahora agrupamos todos los términos con incógnita a la izquierda, y los términos sin incógnita a la derecha, cancelando el -2 a la izquierda y el $+3x$ a la derecha. Como dijimos, en cada caso debe aplicarse una misma operación en ambos lados de la igualdad.

Para cancelar el -2 a la izquierda, sumamos 2 en ambos lados:

$$\begin{array}{rcr} 5x-2 & = & 14+3x \\ {\scriptstyle +2} & & {\scriptstyle +2} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{5x=16+3x} \end{array}$$

Para cancelar el $+3x$, restamos $3x$ en ambos lados:

$$\begin{array}{rcr} 5x & = & 16+3x \\ {\scriptstyle -3x} & & {\scriptstyle -3x} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2x=16} \end{array}$$

Por último necesitamos cancelar el 2 que multiplica a x, para lo cual dividimos ambos lados de la igualdad entre 2:

$$\begin{array}{rcr} 2x & = & 16 \\ {\scriptstyle \div 2} & & {\scriptstyle \div 2} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x=8} \end{array}$$

La respuesta puede expresarse en términos del valor de la solución, $x=8$, o en términos del *conjunto solución*, $x \in \{8\}$.

En algunas ecuaciones, que la igualdad sea cierta o falsa no depende del valor de la incógnita. Por ejemplo, la igualdad $5q = 5q$ es siempre cierta, independientemente del valor de q, mientras que la igualdad $2q = 2q + 1$ no puede ser cierta para ningún valor de q. Pero lo más común es que esta situación no sea obvia hasta haber resuelto la ecuación.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $6 - 3(u-1) = u - 2 + 4(1-u)$.

$$\begin{aligned} 6 - 3u + 3 &= u - 2 + 4 - 4u \\ 9 - 3u &= -3u + 2 \\ {\scriptstyle +3u} \quad & \quad {\scriptstyle +3u} \\ \hline 9 &= 2 \end{aligned}$$

Nos quedamos sin incógnita, y la igualdad que queda, $9 = 2$, es falsa para cualquier valor de u. Esto significa que la ecuación no tiene solución: no existe un valor de la incógnita que haga verdadera la igualdad. El conjunto solución es vacío, denotado ϕ.

La razón por la que el conjunto solución es vacío no es que la incógnita se haya cancelado. Vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $6 - 3(u-1) = u + 5 + 4(1-u)$.

$$\begin{aligned} 6 - 3u + 3 &= u + 5 + 4 - 4u \\ 9 - 3u &= -3u + 9 \\ {\scriptstyle +3u} \quad & \quad {\scriptstyle +3u} \\ \hline 9 &= 9 \end{aligned}$$

Otra vez perdimos la incógnita, pero la igualdad que resulta esta vez, $9 = 9$, es verdadera para cualquier valor de u, así que cualquier número u es solución de la ecuación. El conjunto solución es el de todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Si una ecuación tiene fracciones, se recomienda tomar denominador común en cada lado para luego cancelarlos.

Ejemplo 5

Para resolver $y+\frac{1}{2}-\frac{y}{3}=1-\frac{3y}{4}$ empezamos por tomar denominador común en cada lado:

$$\begin{aligned}\frac{6y+3-2y}{6} &= \frac{4-3y}{4}\\ \frac{4y+3}{6} &= \frac{4-3y}{4}\end{aligned}$$

para luego cancelarlos al multiplicar cada lado por 6 y por 4 a la vez:

$$\begin{array}{c} \frac{4y+3}{6}_{\times 6\times 4} = \frac{4-3y}{4}_{\times 6\times 4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}4(4y+3) &= 6(4-3y)\\ 16y+12 &= 24-18y\\ 34y &= 12\\ y &= \frac{12}{34}=\frac{6}{17}\end{aligned}$$

También existe la opción de tomar un solo denominador común para ambos lados. En este caso, como los denominadores inicialmente son 2, 3 y 4, el mínimo común denominador es 12:

$$\begin{aligned}\frac{12y+6-4y}{12} &= \frac{12-9y}{12}\\ \frac{8y+6}{12} &= \frac{12-9y}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \frac{8y+6}{12}_{\times 12} = \frac{12-9y}{12}_{\times 12} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}8y+6 &= 12-9y\\ 17y &= 6\\ y &= \frac{6}{17}\end{aligned}$$

Una *ecuación cuadrática* es una en la que la incógnita aparece solamente elevada al cuadrado, multiplicada por constantes y sumada a constantes, pero no en denominadores, raíces ni con exponentes distintos de 1 o 2. Para resolver una ecuación cuadrática se empieza por reducirla a la forma $ax^2+bx+c=0$, con x la incógnita y a, b y c constantes. Luego se factoriza el lado izquierdo, si es posible, y se resuelven dos ecuaciones lineales.

Ejemplo 6

Para resolver la ecuación del primer ejemplo, $3t^2-5t+2=4-6t$, empezamos por igualar a cero y luego factorizamos el lado izquierdo:

$$\begin{array}{rcl} 3t^2 - 5t + 2 & = & 4 - 6t \\ {\scriptstyle +6t-4} & & {\scriptstyle +6t-4} \\ \hline \end{array}$$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$
$$(t+1)(3t-2) = 0$$

Tenemos un producto de dos factores que es igual a cero. Necesariamente alguno de los factores debe ser igual a cero. Entonces igualamos cada factor a cero y resolvemos las respectivas ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} t+1=0 & \qquad \text{o bien} \qquad & 3t-2=0 \\ t=-1 & & 3t=2 \\ & & t=2/3 \end{array}$$

Entonces puede ser[2] $t=-1$ o $t=2/3$. En otros símbolos, $t \in \{-1, 2/3\}$.

Si el lado izquierdo en una ecuación cuadrática no puede factorizarse fácilmente (digamos, por tanteo), puede usarse la fórmula cuadrática, que dice que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(esas son las soluciones que obtendríamos si primero factorizáramos por fórmula cuadrática y después igualáramos a cero cada factor lineal). Pero si el discriminante, b^2-4ac, es negativo, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 7

En la ecuación $6p^2 - 4p - 4 = 0$, el lado izquierdo no se factoriza fácilmente (más que por factor común, 2, pero eso no ayuda). Tomando $a=6$, $b=-4$ y $c=-4$, con la fórmula cuadrática encontramos las soluciones:

$$p_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(6)(-4)}}{2(6)} = \frac{4+\sqrt{112}}{12} = \frac{4+4\sqrt{7}}{12} = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

y

$$p_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{(-4)^2-4(6)(-4)}}{2(6)} = \frac{4-\sqrt{112}}{12} = \frac{4-4\sqrt{7}}{12} = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$$

[2] Tenga cuidado de no decir que t es igual a -1 y $2/3$: ¡es imposible para t tomar dos valores! Lo correcto es que t es -1 o $2/3$ (“o”, no “y”).

Una *ecuación polinomial* es una de la forma $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es algún polinomio. Para resolverla se usa el mismo principio de las cuadráticas: una vez igualado todo a cero, se factoriza el lado izquierdo y por aparte se iguala cada factor a cero.

Ejemplo 8

Para resolver $4a^2(a+1) = a^2(a^2-5a+6a^3)$, sería un error grave empezar dividiendo ambos lados por a^2. Es cierto que eso simplificaría bastante la ecuación, a $4(a+1) = a^2-5a+6a^3$. Pero esta última ecuación no es equivalente a la original (como se comprueba fácilmente al ver que $a = 0$ es una solución de la ecuación original pero no de la ecuación simplificada). Esto es porque la división es posible solamente si el divisor es distinto de cero, pero al dividir por a^2 no sabemos si el divisor, a^2, es o no es cero.

Lo correcto es simplificar cada lado e igualar a cero:

$$\begin{aligned} 4a^2(a+1) &= a^2(a^2-5a+6a^3) \\ 4a^3+4a^2 &= a^4-5a^3+6a^5 \\ -6a^5-a^4+9a^3+4a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora factorizamos el lado izquierdo, primero por factor común y luego por división sintética:

$$\begin{aligned} -6a^5-a^4+9a^3+4a^2 &= 0 \\ a^2(-6a^3-a^2+9a+4) &= 0 \\ a^2(a+1)(-6a^2+5a+4) &= 0 \end{aligned}$$

En este punto tenemos dos opciones. Podemos separar ya los tres factores para resolverlos por aparte:

$$\begin{array}{ccccc} a^2 = 0 & \text{o} & a+1 = 0 & \text{o} & -6a^2+5a+4 = 0 \\ a = 0 & & a = -1 & & a = -1/2 \text{ o } a = 4/3 \end{array}$$

O bien continuamos factorizando $-6a^2+5a+4$, que es igual a $(2a+1)(4-3a)$, para resolver los cuatro factores por aparte:

$$\begin{array}{ccccccc} a^2 = 0 & \text{o} & a+1 = 0 & \text{o} & 2a+1 = 0 & \text{o} & 4-3a = 0 \\ a = 0 & & a = -1 & & a = -1/2 & & a = 4/3 \end{array}$$

De cualquier manera llegamos a la misma solución: $a \in \{0, -1, -1/2, 4/3\}$.

Algunas ecuaciones complicadas pueden simplificarse haciendo un cambio de variable.

Ejemplo 9

Resolver $(3a-1)^{2/3}+10=7(3a-1)^{1/3}$.

Notando que la expresión $(3a-1)^{1/3}$ aparece dos veces en la ecuación (a la derecha, multiplicada por 7, y a la izquierda, elevada al cuadrado, porque $[(3a-1)^{1/3}]^2=(3a-1)^{2/3}$), definimos una nueva incógnita, $y=(3a-1)^{1/3}$. Entonces la ecuación se convierte en

$$y^2+10=7y$$

que es fácil de resolver escribiéndola como $y^2-7y+10=0$ y factorizando: $(y-5)(y-2)=0$, así que $y=5$ o $y=2$.

En términos de la incógnita original, y recordando que $y=(3a-1)^{1/3}$, la solución $y=5$ significa que

$$\begin{array}{ccc} (3a-1)^{1/3} & = & 5 \\ {\scriptstyle [\cdots]^3} & & {\scriptstyle [\cdots]^3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3a-1 &= 125 \\ a &= 126/3 = 42 \end{aligned}$$

Por su parte, la solución $y=2$ da

$$\begin{array}{ccc} (3a-1)^{1/3} & = & 2 \\ {\scriptstyle [...]^3} & & {\scriptstyle [...]^3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3a-1 &= 8 \\ a &= 9/3 = 3 \end{aligned}$$

Finalmente, $a\in\{42,3\}$.

Resuelva

7. $3.6-0.2a=-1.4a$

8. $-3.6a+1.3=0.2(a-3)$

9. $y-(2-y)=3(y+1)+y$

10. $\dfrac{2v-3}{4}=\dfrac{6v+7}{3}$

11. $\dfrac{z+8}{4}=\dfrac{3z+14}{2}$

12. $12r+\frac{3}{2}=\frac{3}{5}r+3$

13. $\dfrac{c}{5}+\dfrac{2(c-4)}{10}=7$

14. $3t+\dfrac{t}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5t$

15. $\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}=-1$

16. $\frac{1}{3}(z-2)+\frac{4}{3}z=2z+\frac{4}{3}$

17. $(5t-1)(4t+2)=(10t-1)(2t+3)-2(t+13)$

18. $q^2+5=-(10q-q^2)$

19. $w^2+3w+2=0$

20. $4x=1+4x^2$

21. $(y+2)(y-3)=-6$

22. $16w^2+25=40w$

23. $13z=-5-6z^2$

24. $8(5-3b)^2+14(5-3b)=15$

25. $10=u(17-3u)$

26. $3b^2-5=11b-1$

27. $8z^2+15=22z$

28. $2.4+t+0.1t^2=0$

29. $3t^2-12=12t$

30. $4+b^2=2b$

31. $r^2+r=3$

32. $3p(p+3)=p-3$

33. $2c(2c+1)=c(c-3)-3$

34. $5(w-1)^2=4$

35. $10(p^2-p-1)=10p-11$

36. $\frac{1}{2}u^2+u=5$

37. $x^4+5=6x^2$

38. $27c^6+215c^3=8$

39. $24q^3=3q$

40. $a^2+12a-3=3a^3+1$

41. $v^2(v^3-4)=3v^4+2(v^3+v^2+4v)$

42. $12u(u^3+u^2-1)=6u(u-2)$

43. $2c^3+\frac{1}{5}c^2=10c+1$

44. $2(r^2+1)^3+12=14(r^2+1)$

45. $6t(t^3-1)=7t^2(2t-1)-5t$

46. $4c^4+12c^3-c^2-3c=0$

47. $u^4+4u^3+4u=4u^2+5$

48. $2y^4+y^3+y^2-y=0$

3.2 Ecuaciones racionales y radicales

Una *ecuación racional* es una que tiene fracciones con incógnita en su denominador. Algunas ecuaciones racionales tienen soluciones falsas, y tal vez el ejemplo más simple de eso sea

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

que, al restar $1/x$ en cada lado, lleva a la solución aparente $x=0$. Pero x no puede ser cero, porque entonces $1/x$ estaría indefinido. Así, la ecuación planteada no tiene ninguna solución.

En algunas ecuaciones racionales todas las soluciones son válidas; en algunas todas son falsas, y en otras puede haber soluciones válidas y soluciones falsas. El método de solución es, como siempre que hay fracciones, eliminar los denominadores y resolver la ecuación resultante. Pero antes de dar por terminado el proceso deben validarse las soluciones *en la ecuación original* y descartar las soluciones falsas.

Ejemplo 10

Resolver $\dfrac{2}{r-5}-3=\dfrac{6}{r^2-7r+10}$.

Tomemos un solo denominador común para ambos lados: como $r^2 - 7r + 10 = (r - 5)(r-2)$, ese es el denominador común:

$$\begin{aligned}
\frac{2(r-2) - 3(r-5)(r-2)}{(r-5)(r-2)} &= \frac{6}{(r-5)(r-2)} \\
2r - 4 - 3(r^2 - 7r + 10) &= 6 \\
2r - 4 - 3r^2 + 21r - 30 - 6 &= 0 \\
-3r^2 + 23r - 40 &= 0 \\
-3(r-5)(r - \tfrac{8}{3}) &= 0
\end{aligned}$$

y entonces las soluciones *tentativas* son $r = 5$ y $r = 8/3$.

Al ver los denominadores de la ecuación original notamos que $r = 5$ es imposible porque hace cero al menos un denominador (de hecho, ambos). En cambio, $r = 8/3$ no hace cero ningún denominador. En conclusión, la única solución es $r = 8/3$.

Las *ecuaciones radicales* son las que tienen raíces con incógnita dentro. También estas pueden tener soluciones falsas, y posiblemente el ejemplo más simple de eso sea

$$\sqrt{x} = -1.$$

Aquí, para despejar x es necesario elevar ambos lados al cuadrado, lo que lleva a $x = 1$. Pero obviamente esa solución es falsa, porque $\sqrt{1} \neq -1$. De hecho, ningún número real tiene raíz cuadrada igual a -1, así que la ecuación no tiene solución.

En general, para resolver una ecuación radical se debe despejar la raíz para luego elevar ambos lados de la igualdad a la potencia necesaria para cancelar la raíz (por ejemplo, para una raíz cuadrada se eleva al cuadrado; para una raíz quinta se eleva a la 5). Como en las fraccionarias, en las ecuaciones radicales también es necesario validar las posibles soluciones en la ecuación original y eliminar las falsas.

Ejemplo 11

Resolver $y - 2\sqrt{6-y} = 3y - 8$.

Como dijimos, se debe despejar la raíz para luego elevar al cuadrado:

$$\begin{aligned}
y - 2\sqrt{6-y} &= 3y - 8 \\
-2\sqrt{6-y} &= 2y - 8 \\
\underset{[\cdots]^2}{\sqrt{6-y}} &= \underset{[\cdots]^2}{-y+4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 - y &= (-y)^2 + 2(-y)(4) + (4)^2 \\
6 - y &= y^2 - 8y + 16 \\
0 &= y^2 - 7y + 10 \\
0 &= (y-2)(y-5)
\end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones tentativas: $y = 2$ y $y = 5$. Debemos validarlas en la ecuación original:

Para $y = 2$:
$$\begin{aligned}(2) - 2\sqrt{6-(2)} &\stackrel{?}{=} 3(2) - 8\\ 2 - 2\sqrt{4} &\stackrel{?}{=} 6 - 8\\ 2 - 4 &= -2\end{aligned}$$

Para $y = 5$:
$$\begin{aligned}(5) - 2\sqrt{6-(5)} &\stackrel{?}{=} 3(5) - 8\\ 5 - 2\sqrt{1} &\stackrel{?}{=} 15 - 8\\ 3 &\neq 7\end{aligned}$$

Aquí vemos que la segunda solución, $y = 5$, es inválida, pero la primera, $y = 2$, sí funciona. Entonces la única solución es $y = 2$.

Si una ecuación tiene más de una raíz, debe despejarse una para cancelarla, y luego despejar la siguiente para cancelarla, hasta haber cancelado todas las raíces.

Ejemplo 12

Para resolver $5\sqrt{q+10} - 3\sqrt{2+q} = 12$, empezamos por despejar una de las raíces (cualquiera) y cancelarla:

$$\begin{aligned}5\sqrt{q+10} - 3\sqrt{2+q} &= 12\\ \underset{[\cdots]^2}{5\sqrt{q+10}} &= \underset{[\cdots]^2}{3\sqrt{2+q} + 12}\\ \hline 5^2(q+10) &= (3\sqrt{2+q})^2 + 2(3\sqrt{2+q})(12) + (12)^2\\ 25q + 250 &= 9(2+q) + 72\sqrt{2+q} + 144\end{aligned}$$

Todavía hay una $\sqrt{2+q}$, así que la despejamos para cancelarla:

$$\begin{aligned}25q + 250 - 18 - 9q - 144 &= 72\sqrt{2+q}\\ 16q + 88 &= 72\sqrt{2+q}\end{aligned}$$

Antes de elevar al cuadrado podemos dividir todo por 8 para no obtener números tan grandes:

$$\begin{aligned}2q + 11 &= 9\sqrt{2+q}\\ (2q+11)^2 &= 81(2+q)\\ 4q^2 + 44q + 121 &= 162 + 81q\\ 4q^2 - 37q - 41 &= 0\end{aligned}$$

cuyas soluciones son $q=-1$ y $q=41/4$. Comprobemos en la ecuación original:

Para $q=-1$:

$$5\sqrt{(-1)+10}-3\sqrt{2+(-1)} \stackrel{?}{=} 12$$
$$5\sqrt{9}-3\sqrt{1} \stackrel{?}{=} 12$$
$$15-3=12$$

Para $q=41/4$:

$$5\sqrt{\tfrac{41}{4}+10}-3\sqrt{2+\tfrac{41}{4}} \stackrel{?}{=} 12$$
$$5\sqrt{\tfrac{81}{4}}-3\sqrt{\tfrac{49}{4}} \stackrel{?}{=} 12$$
$$5\cdot\tfrac{9}{2}-3\cdot\tfrac{7}{2} \stackrel{?}{=} 12$$
$$12=12$$

Concluimos que ambas soluciones son válidas: $q\in\{-1,41/4\}$. $\square$

Resuelva

49. $\dfrac{v^2+v}{2v+1}=v-3$

50. $2r=\dfrac{4}{r}-3+r$

51. $2w-1=\dfrac{-5(3w+2)}{2w+1}$

52. $a-\dfrac{2a}{a+1}=\dfrac{2}{a+1}$

53. $5\dfrac{t-3}{t-4}=\dfrac{5}{t-4}-t$

54. $3-\dfrac{2u}{u+1}=\dfrac{u^2}{(u+1)^2}$

55. $\dfrac{1}{r-2}=\dfrac{2r+1}{r^2-4}$

56. $1+\dfrac{16}{(z^2+1)^2}=\dfrac{8}{z^2+1}$

57. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$

58. $\dfrac{4}{(t-2)^2}+\dfrac{7}{t-2}+3=0$

59. $\dfrac{y-6}{y}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{y+6}{y-6}$

60. $\dfrac{3}{c-4}+\dfrac{c-3}{c}=2$

61. $1=\dfrac{2z}{3z+1}-\dfrac{3-2z}{2z+5}$

62. $\dfrac{2b^2+5b-3}{b^2+7b+12}=\dfrac{b}{b+4}-\dfrac{2}{b+3}$

63. $\dfrac{a+1}{a-3}+\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2a}{a-3}-\dfrac{a+1}{a^2-4a+3}$

64. $\dfrac{5}{p+5}-\dfrac{2}{p-3}=\dfrac{-6(p+1)}{15-2p-p^2}$

65. $\dfrac{3}{t+1}+\dfrac{4}{t}=\dfrac{7}{t+2}$

66. $\left(\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{w-1}\right)\div\dfrac{2}{w^2-1}=w+5$

67. $\sqrt{3+6c^2}=2$

68. $\sqrt{1+\frac{t}{2}}=\frac{2}{3}$

69. $p+\sqrt{p}=20$

70. $\sqrt{2y+1}=y-7$

71. $w+2\sqrt{w+7}=8$

72. $\sqrt{2z+3}+6=z$

73. $\sqrt{2z+3}+z=6$

74. $1+\sqrt{x+7}=2x$

75. $1-\sqrt{x+7}=2x$

76. $4-3\sqrt{q}=q$

77. $4+3\sqrt{q}=q$

78. $\sqrt{b+1}+b=1$

79. $\sqrt{b+1}-b=1$

80. $r+\sqrt{3r^2+r+1}=2$

81. $t(\sqrt{t+1}-1)=6-t$

82. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

83. $\sqrt[3]{3y-1}+1=y$

84. $\sqrt{2b+2+\sqrt{2b+6}}=4$

85. $\sqrt{2+\sqrt{v}}=\sqrt{2v-4}$

86. $\sqrt{2y}-2\sqrt{y+1}+2=0$

87. $3\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}=8$

88. $\sqrt{2t-3}+\sqrt{t+2}=\sqrt{3t+3}$

89. $\sqrt{3-v}+\sqrt{2+v}=3$

90. $2=\sqrt{1-5p}+\sqrt{1-p}$

91. $\sqrt[3]{u+1}=\sqrt[6]{3u+7}$

3.3 Ecuaciones con valor absoluto

El *valor absoluto* de un número real x, denotado $|x|$, es la distancia desde 0 hasta x en la recta real. Si x es positivo, esa distancia es igual a x, y si x es negativo, es su opuesto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|5|=5$, y $|-3|=-(-3)=3$. El valor absoluto siempre es mayor o igual que cero.

Si a es un número positivo, entonces existen dos valores de x que cumplen la ecuación $|x|=a$, específicamente, $x=a$ o $x=-a$. (Por ejemplo, la ecuación $|x|=2$ tiene dos soluciones: $x=2$ o $x=-2$.) Pero si a es negativo, la ecuación $|x|=a$ no tiene soluciones. (Por ejemplo, no existe solución a la ecuación $|x|=-2$ porque ningún x tiene valor absoluto igual a -2.)

Para resolver una ecuación con valor absoluto debe empezarse por despejar el valor absoluto y luego usar el principio enunciado en el párrafo anterior:

$$|x| = a \quad \Rightarrow \quad x=a \text{ o } x=-a \quad \text{si } a \geq 0.$$

Ejemplo 13

Para resolver $5-3|2q+1|=4$ empezamos por despejar el valor absoluto:

$$\begin{aligned} 5-3|2q+1| &= 4 \\ -3|2q+1| &= -1 \\ |2q+1| &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Según ese principio, la cantidad en valor absoluto debe ser igual a $1/3$ o a $-1/3$:

$$\begin{aligned} 2q+1 &= \tfrac{1}{3} \\ 2q &= -\tfrac{2}{3} \\ q &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2q+1 &= -\tfrac{1}{3} \\ 2q &= -\tfrac{4}{3} \\ q &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces $q=-1/3$ o $q=-2/3$.

Si la cantidad fuera del valor absoluto no es una constante, se aplica el mismo principio, con la salvedad de que las soluciones deben comprobarse porque en el procedimiento podrían introducirse soluciones falsas.

Ejemplo 14

Resolver $|r+2|+2r=3$.

Al despejar el valor absoluto obtenemos $|r+2|=3-2r$, donde el lado derecho, $a=3-2r$, no es constante. De todos modos separamos:

$$\begin{aligned} r+2 &= 3-2r \\ 3r &= 1 \\ r &= 1/3 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} r+2 &= -(3-2r) \\ r+2 &= -3+2r \\ -r &= -5 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

Hay al menos dos formas de comprobar las soluciones tentativas, $r=1/3$ y $r=5$. Una es sustituir cada valor de la incógnita en la ecuación original y ver si la igualdad es verdadera:

$$\begin{aligned} &\text{Para } r=1/3: \\ |(1/3)+2|+2(1/3) &\stackrel{?}{=} 3 \\ |7/3|+2/3 &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Para } r=5: \\ |(5)+2|+2(5) &\stackrel{?}{=} 3 \\ |7|+10 &\stackrel{?}{=} 3 \\ 17 &\neq 3 \end{aligned}$$

Es evidente que la primera solución, $r=1/3$, es verdadera, pero la segunda, $r=5$, es falsa.

Otra forma de comprobar las soluciones es recordar que $|x|=a$ tiene solución solo si $a\geq 0$. Como en este caso $a=3-2r$, basta con ver si $3-2r\geq 0$:

$$\begin{aligned} &\text{Para } r=1/3: \\ 3-2(1/3) &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ 7/3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Para } r=5: \\ 3-2(5) &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ -7 &\ngeq 0 \end{aligned}$$

Así vemos de otra manera que $r=1/3$ cumple el requisito pero $r=5$ no. Este método de comprobación es más eficiente porque solo requiere evaluar, para cada solución posible, el lado derecho de la ecuación y no la ecuación entera.

En definitiva, la única solución de la ecuación es $r=1/3$.

Resuelva

92. $|x-3|=6$

93. $3|1-v|=8$

94. $5+3|2q-7|=38$

95. $5+|4y+3|=y$

96. $3v-|v+5|=2$

97. $2|4z-7|=0$

98. $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{3}{2}c\right|=1$

99. $y=9-|y-7|$

100. $|3-x|+2x+3=0$

101. $|1-q^2|=8$

102. $\dfrac{|4r+3|}{|r-5|}=1$

103. $13=6p+2|p-5|-5$

104. $\sqrt{(7u-6)^2}=u$

105. $5-2|b-2b^2|=7+11b$

106. $\left|\dfrac{t}{1-t}\right|=2$

107. $q^2-|4-5q|=0$

3.4 Aplicaciones de las ecuaciones

Algunos problemas aplicados pueden resolverse con ecuaciones en una incógnita. La variedad de tales problemas es inmensa, pero muchos de los que nos interesan pueden agruparse en grandes categorías, de las cuales presentaremos las de problemas de interés simple, mezclas, movimiento uniforme y trabajo compartido.

Antes de eso, veremos un ejemplo de un problema general para ilustrar un método recomendado al resolver problemas mediante ecuaciones. Los pasos son:

1. Definir la incógnita principal, y escribir cualquier incógnita adicional en términos de la principal.

2. Escribir la igualdad requerida por el problema, en palabras si es necesario.

3. Refinar cada lado de la igualdad hasta escribirlo en términos de la incógnita.

4. Resolver la ecuación resultante del paso anterior.

5. Responder la pregunta que se planteó.

Ejemplo 15

Marco va a la librería por lápices y borradores. Cada lápiz cuesta ₡120, y cada borrador ₡75. Si compró quince artículos y gastó ₡1530, ¿cuántos lápices y cuántos borradores compró?

1. Hay dos incógnitas, explícitas en la pregunta: el número de lápices y el número de borradores. Escojamos una de ellas, digamos el número de lápices, como la incógnita principal, y llamémosla x. La otra incógnita es el número de borradores, que es $15-x$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= \text{número de lápices} \\ 15-x &= \text{número de borradores.} \end{aligned}$$

2. El problema dice que Marco gastó ₡1530, así que planteamos la igualdad

$$\text{gasto total} = 1530.$$

3. El gasto total es [gasto en lápices] + [gasto en borradores]. Por su parte, el gasto en lápices es

$$[\text{precio de un lápiz}] \times [\text{número de lápices}] = 120x$$

y el gasto en borradores es

$$[\text{precio de un borrador}] \times [\text{número de borradores}] = 75(15-x).$$

Entonces la igualdad del punto anterior dice que

$$120x + 75(15-x) = 1530.$$

4. Resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 120x + 1125 - 75x &= 1530 \\ 45x &= 405 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

5. Como x es el número de lápices y $15-x$ el de borradores, y como $x=9$, entonces la respuesta es: 9 lápices y 6 borradores.

En los problemas sobre *utilidad* necesitaremos relacionar costos, ingresos y ganancias. Si para producir un artículo hay un costo fijo CF (el costo inicial, independiente del número de unidades producidas) y un costo unitario c (el costo de producir una unidad), entonces el costo total al producir q unidades será

$$CT = CF + cq.$$

Si, por otra parte, cada unidad de ese artículo se vende a un precio unitario p, entonces el ingreso al vender q unidades será

$$I = pq$$

y la utilidad o ganancia será

$$U = I - CT = pq - (CF + cq).$$

Ejemplo 16

Una fábrica de lápices tiene costos fijos de ₡2 500 000 al mes, y costos unitarios de ₡40 por lápiz. Si cada lápiz se vende por ₡90, ¿cuántos deben producir y vender en un mes para tener utilidades de ₡1 000 000?

1. La incógnita es el número de lápices, que denotaremos q.
2. La igualdad por resolver es $U = 1\,000\,000$.
3. Según la fórmula de la utilidad, la ecuación será
$$90q - (2\,500\,000 + 40q) = 1\,000\,000.$$
4. Simplificamos la ecuación a $50q - 2\,500\,000 = 1\,000\,000$, de donde despejamos
$$q = 3\,500\,000/50 = 70\,000.$$
5. Deben producir y vender setenta mil lápices.

Para problemas de *interés simple* necesitamos saber que si un monto P se invierte a una tasa de interés anual simple r (como decimal, no como porcentaje) durante t años, entonces el interés ganado será
$$I = Prt.$$
Por ejemplo, si ₡2 500 000 se invierten a 18% anual durante tres años ($P = 2\,500\,000$, $r = 0.18$, $t = 3$), al cabo de ese tiempo el interés será
$$I = (2\,500\,000)(0.18)(3) = 1\,350\,000 \text{ colones.}$$

El total acumulado de la inversión (monto invertido más intereses) es
$$A = P + I = P(1 + rt).$$
En el ejemplo, el monto acumulado será
$$A = (2\,500\,000)[1 + (0.18)(3)] = 3\,850\,000 \text{ colones,}$$
que es lo mismo que 2 500 000 (la inversión) más 1 350 000 (el interés).

Ejemplo 17

Si se invierten \$4000 a 12% anual, ¿cuánto más debe invertirse a 8% anual para que el interés total por las dos inversiones sea \$1000 al año?

1. La única incógnita es el monto de la segunda inversión; llamémosla P:
$$P = \text{el monto invertido a } 8\%.$$

2. La igualdad es
$$\text{Interés total} = 1000.$$

3. El interés total es el interés de la primera inversión más el de la segunda. Como $t = 1$, la primera inversión da $I_1 = Prt = (4000)(0.12)(1)$, y la segunda, $I_2 = Prt = P(0.08)(1)$. Entonces
$$(4000)(0.12)(1) + P(0.08)(1) = 1000.$$

4. Resolvemos:
$$\begin{aligned} 480 + 0.08P &= 1000 \\ 0.08P &= 520 \\ P &= 6500 \end{aligned}$$

5. Deben invertirse \$6500 a 8% anual.

Los problemas de mezclas son acerca de mezclar objetos con distintos valores de cierta propiedad (la propiedad puede ser costo, concentración de algún químico, etc) para obtener una mezcla con otro valor de la propiedad. Aunque distintos en apariencia, estos problemas en el fondo son análogos a los de intereses (podemos decir que los problemas de intereses son problemas de mezclas, en los que se mezclan inversiones con distintas tasas de interés).

Ejemplo 18

¿Cuántos galones de una pintura que cuesta ₡20 000 el galón deben mezclarse con ocho galones de otra que cuesta ₡15 000 el galón para obtener una mezcla que cueste ₡18 000 el galón?

1. La incógnita es el número de galones de la primera pintura:
$$x = \text{número de galones de la primera pintura.}$$

2. La mezcla debe costar ₡18 000 por galón, así que su costo total será
$$\text{costo de la mezcla} = 18000 \times (\text{número de galones de mezcla}).$$

3. El lado izquierdo de la igualdad, el costo de la mezcla, será el costo de la primera pintura más el de la segunda:
$$\begin{aligned} \text{costo de la mezcla} &= [\text{costo de la primera}] + [\text{costo de la segunda}] \\ &= [(\text{costo por galón})_1 \times (\text{número de galones})_1] + [\text{ídem}]_2 \\ &= (20000) \times (x) + (15000) \times (8) \end{aligned}$$
El lado derecho de la igualdad en el paso 2 es $(18000) \times (x + 8)$ (porque son x galones de la primera más ocho de la segunda).

4. La ecuación resultante es $20000x + (15000)(8) = 18000(x+8)$, cuya solución es $x = 12$.
5. Son 12 galones de la primera pintura.

Para los problemas de movimiento necesitamos recordar la fórmula de la velocidad promedio de un objeto que recorre cierta distancia en cierto tiempo:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

de la que se derivan otras dos, al despejar respectivamente la distancia o el tiempo:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} \qquad \text{y} \qquad \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Ejemplo 19

Un bote viaja una hora río abajo y regresa en una hora y veinte minutos. Si la velocidad del río es 3 km/h, ¿cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas, y qué distancia recorrió río abajo?

1. Sea $v =$ la velocidad propia del bote, en km/h, y sea $d =$ la distancia río abajo, en km. Luego veremos qué es d en términos de v.
2. Aunque el problema no lo dice, es obvio que

$$\text{distancia río abajo} = \text{distancia río arriba}.$$

   Este será el punto de partida.
3. Como la velocidad río abajo es $v+3$ (porque el río contribuye 3 km/h a la velocidad) y la velocidad río arriba es $v-3$, la fórmula de distancia da que $d = (v+3)(1)$ bajando, y $d = (v-3)(4/3)$ subiendo (una hora y veinte minutos es igual a $4/3$ de hora). Entonces

$$(v+3)(1) = (v-3)(4/3).$$

4. La solución de la ecuación es $v = 21$.
5. Como $v = 21$ y $d = v+3 = 24$, la respuesta es: la velocidad del bote es 21 km/h, y la distancia río abajo fue 24 km.

En los problemas de trabajo compartido hay dos o más agentes que pueden hacer un trabajo, y el problema generalmente relaciona el tiempo que cada agente tarda en hacer el trabajo solo con el tiempo que tardan trabajando juntos. En estos problemas la igualdad debe plantearse en términos de la proporción del trabajo que cada agente realiza en cada unidad de tiempo (por ejemplo, si un agente tarda cuatro horas en hacer un trabajo, la ecuación se plantea en términos de que realiza $1/4$ del trabajo en una hora).

Ejemplo 20

Un pintor puede pintar un techo en seis horas. Si le ayuda su asistente, juntos lo hacen en cuatro horas. ¿Cuánto tardaría el asistente trabajando solo?

1. Sea $t =$ el tiempo que tarda el asistente, en horas.
2. La igualdad se plantea en términos del trabajo que hacen en una unidad de tiempo (horas, en este caso):

$$\begin{bmatrix}\text{trabajo que hacen}\\ \text{juntos en una hora}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{trabajo que hace el}\\ \text{pintor en una hora}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{trabajo que hace el}\\ \text{asistente en una hora}\end{bmatrix}$$

3. Como juntos tardan cuatro horas, en una hora pintan $1/4$ del techo. El pintor, trabajando solo, tarda seis horas, así que en una hora hace $1/6$ del trabajo. El asistente, solo, tarda t horas, así que en una hora hace $1/t$. La ecuación entonces es
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{t}.$$
4. Esta es una ecuación fraccionaria. Empezamos por tomar denominador común, que puede ser $12t$ para toda la ecuación:
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{t} \\ \frac{3t}{12t} &= \frac{2t+12}{12t} \\ 3t &= 2t+12 \\ t &= 12 \end{aligned}$$
Recuerde que en las ecuaciones fraccionarias debe validarse la solución: $t = 12$ no causa problemas con ningún denominador, así que la aceptamos.
5. El asistente, solo, tardaría 12 horas.

Resuelva

108. Encuentre dos números pares consecutivos cuya suma sea 146.

109. Encuentre dos enteros impares consecutivos cuyo producto sea 4355.

110. Dentro de cinco años, Andrea tendrá tres veces la edad que tenía hace siete años. ¿Cuál es su edad?

111. Hay doce monedas de ₡100 y ₡50, mezcladas, que valen en total ₡950. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?

112. Para un concierto hay tiquetes de platea a ₡18 000 y tiquetes de gradería a ₡12 000. El número de tiquetes de gradería es el triple del número de platea, y se vendieron todos para un ingreso total de ₡7 020 000. ¿Cuántos tiquetes de cada tipo se vendieron?

113. El costo de producir n podadoras es $C = 1500 - 60n + 3n^2$, en dólares. ¿Cuántas podadoras pueden producirse con \$1200?

114. Una factura es por un total de ₡46 556, con el 13% de impuesto de ventas ya incluido en ese total. ¿Cuál es el monto del impuesto de ventas?

115. Un edificio tiene 18 apartamentos, que se alquilan a ₡150 000 mensuales. Por cada incremento de ₡10 000 en el precio mensual quedará un apartamento sin alquilar. ¿Qué precio debe cobrar el administrador para recibir en total ₡2 000 000 en alquiler mensual?

116. Un grupo de escolares está recogiendo fondos para una excursión a un parque. El costo es ₡3000 por niño, pero para grupos de 20 a 40 estudiantes, el costo por niño se reduce en ₡100 por cada niño adicional a los primeros 20. Si ya han recogido ₡62 500, ¿cuántos niños pueden ir al parque?

117. Un grupo de personas planea un paseo en yate. El alquiler cuesta ₡180 000, y acuerdan distribuirlo en partes iguales. A última hora, tres de las personas se retiran, lo que eleva la cuota de cada persona restante en ₡250. ¿Cuántas personas había en el grupo original?

118. Doña Rebeca compró hoy unas acciones por \$720. Si las hubiera comprado ayer, cuando cada una costaba \$15 menos, habría podido comprar cuatro acciones más con el mismo dinero. ¿Cuántas acciones compró?

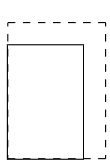
119. Una compañía adquirió un terreno en ₡300 millones. Recuperaron el costo al vender todas excepto tres hectáreas, con una ganancia de ₡5 millones por hectárea. ¿Cuántas hectáreas medía el terreno comprado?

120. Determine todos los valores de a para que la ecuación $3ax^2 - 4ax + a + 1 = 0$ tenga una sola solución.

121. Una bola lanzada hacia arriba tiene una rapidez de $|20 - 9.8t|$ m/s a los t segundos de ser lanzada. ¿En qué momentos alcanza una rapidez de 10 m/s?

122. Un agricultor ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular que tenga un perímetro de 76 m y una área de 360 m^2. Encuentre las dimensiones del huerto.

123. La base de un triángulo mide 3 cm más que la altura, y el área es 119 cm^2. ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo?



124. Un estacionamiento tiene 35 m de largo por 25 m de ancho. Se quiere duplicar el área del estacionamiento añadiendo franjas de igual ancho al fondo y a un lado, como en la figura a la izquierda. ¿De qué ancho deben ser las franjas?

125. Una fábrica produce un artículo con un costo unitario de \$2.20, que venden a \$3 por unidad. Si los costos fijos son de \$75 000, ¿cuántas unidades deben vender para obtener ganancias de \$50 000?

126. Una fábrica produce un artículo con un costo de ₡150 por unidad, más un costo fijo de ₡350 000. Si el producto se vende a ₡200 por unidad, ¿cuántos deben vender para tener una ganancia de ₡82 500?

127. Una línea aérea opera una ruta con un costo fijo de \$8000 (pilotos, combustible, aeromozas) y un costo variable de \$120 por pasajero (seguros, alimentación). Si el tiquete se vende a \$400 por pasajero, ¿cuántos pasajeros necesitan transportar para tener una utilidad de \$15 000 por viaje?

128. Un agricultor produce naranjas con un costo unitario de ₡10. Los costos fijos son de ₡50 000 por semana. Si las naranjas se venden a ₡35 la unidad, ¿cuántas debe vender por semana para no tener pérdidas ni ganancias?

129. El operador de un ferry tiene costos fijos de ₡40 000 por viaje y costos variables de ₡300 por persona. Si la capacidad del ferry es de cien personas, y usualmente viaja lleno, ¿cuánto debe cobrar por persona para tener ₡100 000 de utilidades en cada viaje?

130. Una fábrica de pantalones tiene un costo de \$1.20 por camisa, y costos fijos de \$9000 al mes. Saben que pueden vender 5000 camisas por mes. ¿Qué precio deben fijar para obtener utilidades mensuales de \$15 000?

131. Si un producto se vende a p colones por unidad, el público comprará $200 - 0.1p$ unidades. ¿Qué precio debe fijarse para obtener ingresos de ₡80 000? Dé su respuesta con dos decimales.

132. Una parte de \$14 000 se invierte a 9%, y el resto a 12%. ¿Cuánto debe invertirse en cada tasa para que el interés total sea \$1500?

133. Una persona desea invertir ₡5 000 000 en dos empresas, de modo que sus ingresos totales por intereses sean ₡720 000 al año. Una empresa paga 12% anual, y la otra 15% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una?

134. Se invierten \$5000 a 8% anual. ¿Cuánto más debe invertirse a 10% anual para que el interés total en un año sea \$750?

135. Una empresaria planea invertir un total de ₡7 200 000. Parte de ese dinero se colocará en un certificado de ahorros que paga 9% de interés simple, y el resto en un fondo de inversiones que paga 12% de interés simple. ¿Cuánto debe colocar en cada una de las tasas de interés para obtener una ganancia de 10% del dinero total invertido al cabo de un año?

136. Los Brenes tienen \$30 000 invertidos a 12%, y otra suma a 8.5%. Cada año reciben en intereses, entre las dos inversiones, un 10% del monto total invertido. ¿Cuál es el monto de la segunda inversión?

137. Se dispone de ₡12 000 000 para invertir. Un tercio se colocará en bonos que pagan 12% anual, y el resto en un depósito a plazo. ¿Qué tasa de interés se necesita para el depósito a plazo de modo que el interés total sea 16.5% de la inversión total?

138. Don Jaime tiene tres inversiones por las que recibe un ingreso anual de ₡2 780 000. La primera, ₡3 500 000, recibe una tasa anual de 16%. La segunda, de ₡5 000 000, recibe 18% anual. ¿Qué tasa de interés recibe la tercera inversión, de ₡6 000 000?

139. Se va a invertir un monto al 18% de interés anual simple, y el doble de ese monto a 14%. ¿Cuánto deben ser los dos montos para que el interés total al cabo de dos años sea ₡1 millón?

140. Se ha invertido el triple de dinero en bonos de 8% que en acciones de 14%. Si el ingreso anual total es $24 700, ¿cuánto se ha invertido en cada caso?

141. Si se invierte dinero al 17% anual, ¿cuánto tarda la inversión en duplicarse?

142. ¿Qué tasa de interés anual simple es necesaria para que una inversión se triplique en 20 años?

143. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡2400 el kilo, con pasas, que cuestan ₡5600 el kilo. Desea obtener 25 kilos de una mezcla con un costo de ₡3232 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces y de pasas debe mezclar?

144. Una gasolinera compra gasolina regular a ₡200 el litro, y súper a ₡300 el litro. En una compra de 60 000 litros de gasolina pagan en total ₡15 654 400. ¿Cuántos litros de regular y cuántos de súper compraron?

145. Se busca producir una barra de metal de 40 g que sea 15% plata, mezclando parte de una barra de metal que es 20% plata con otra que es 12% plata. ¿Cuántos gramos de cada una deben usarse?

146. El radiador de un automóvil contiene 2.5 litros de una mezcla compuesta por 80% agua y 20% anticongelante. Se desea aumentar la proporción de anticongelante a 50%, vaciando parte de la mezcla actual y remplazándola por anticongelante puro. ¿Qué cantidad de la mezcla actual debe vaciarse?

147. Una bebida contiene 2.5% de alcohol por volumen, y otra contiene 4%. ¿Cuántos mililitros de cada una deben mezclarse para obtener 235 ml de mezcla con 3% de alcohol?

148. Daniela y Francisco viven a 30 km de distancia, y empiezan al mismo tiempo a viajar cada uno desde su casa hacia la casa del otro, por el mismo camino. Daniela viaja a 50 km/h y Francisco a 55 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse?

149. Un avión tarda el mismo tiempo en viajar 400 km con viento en contra que en viajar 450 km con viento a favor. Si el viento sopla a 20 km/h, ¿cuál es la velocidad propia del avión?

150. Un auto viaja de A a B a 55 km/h y regresa a 50 km/h. Si el viaje de ida y vuelta toma tres horas, ¿cuál es la distancia de A a B?

151. Dos lanchas parten de un muelle al mismo tiempo. Una viaja hacia el norte a 29 km/h, y la otra hacia el oeste a 38 km/h. ¿Qué distancia las separa 90 minutos más tarde?

152. Una bola se lanza hacia arriba, y t segundos después su altura es $15t - 4.9t^2$ metros. ¿Cuánto tarda la bola en alcanzar una altura de 10 m? ¿Cuánto tarda en caer al suelo?

153. Mariana tarda seis horas en limpiar la casa, su hermano Carlos tarda diez horas, y su hermana menor doce horas. ¿Cuánto tardarían los tres trabajando juntos?

154. Don Evelio puede arreglar un jardín en 50 minutos. Si su hijo le ayuda, tardan 30 minutos. ¿Cuánto tardaría el hijo trabajando solo?

155. Una manguera normalmente llena un tanque en diez horas. Pero ahora el tanque tiene un derrame y se tarda doce horas en llenarlo con esa manguera. Si el tanque se deja lleno, ¿cuántas horas tarda en vaciarse su contenido?

156. En el ejercicio anterior, si otra manguera más delgada normalmente tardaba quince horas en llenar el tanque, ¿cuánto tiempo tardarán las dos mangueras juntas ahora que el tanque tiene un derrame?

157. Para inflar un bote se necesitaban 120 “tiros” con un inflador manual. Una vez se empezó a inflar el bote, pero el inflador se dañó a los 45 tiros. Se sustituyó el inflador dañado por otro nuevo, y con ese se terminó de inflar el bote en 60 tiros más. ¿En adelante, cuántos tiros se necesitarán para inflar todo el bote con el inflador nuevo?

CAPÍTULO 4

Inecuaciones

Una *inecuación* es una relación de desigualdad entre dos expresiones que involucran alguna variable, llamada incógnita. La desigualdad puede ser cierta o no dependiendo del valor de la incógnita, y una solución de la inecuación es un valor de la incógnita que haga cierta la desigualdad. Las inecuaciones tienen usualmente un conjunto infinito de soluciones.

4.1 Inecuaciones lineales

Una *inecuación lineal* es una en la que la incógnita aparece solamente multiplicada por constantes y sumada a constantes, pero no en denominadores o raíces, ni con exponentes distintos de 1. Para resolver una inecuación lineal debe despejarse la incógnita. Pero a diferencia de lo que sucede en las ecuaciones, donde cualquier operación que se aplique a ambos lados conserva la igualdad, algunas operaciones pueden cambiar la dirección de una desigualdad. Específicamente:

- Sumar o restar una misma cantidad no altera la desigualdad.
- Multiplicar o dividir por una misma cantidad *positiva* no altera la desigualdad.
- Multiplicar o dividir por una misma cantidad *negativa* invierte la desigualdad.

Algunas otras operaciones que podrían aplicarse a igualdades, como elevar al cuadrado o invertir una fracción, no tienen reglas sencillas en desigualdades. Por ejemplo, ¿qué sucede al elevar al cuadrado una desigualdad? La desigualdad $3 < 5$ es cierta, y al elevar ambos lados al cuadrado la desigualdad se mantiene: $(3)^2 = 9 < (5)^2 = 25$. Pero por otra parte $-3 \leq 2$ también es cierta, pero al elevar al cuadrado la desigualdad se invierte: $(-3)^2 = 9 \geq (2)^2 = 4$. Por regla general, no deben usarse más que las operaciones recién mencionadas (sumar, restar, multiplicar o dividir) para despejar una incógnita en una inecuación.

Ejemplo 1

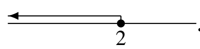
Resolver la inecuación $3(2-r)+5 \geq 7-r$.

Primero desarrollamos el paréntesis al lado izquierdo, y luego efectuamos las operaciones necesarias para despejar r, teniendo cuidado de mantener o invertir la desigualdad en cada paso:

$$
\begin{array}{rcl}
6-3r+5 & \geq & 7-r \\
-3r+11 & \geq & 7-r \\
{\scriptstyle -11} & & {\scriptstyle -11} \\
\hline
-3r & \geq & -4-r \\
{\scriptstyle +r} & & {\scriptstyle +r} \\
\hline
-2r & \geq & -4 \\
{\scriptstyle \div(-2)} & & {\scriptstyle \div(-2)} \\
\hline
r & \leq & 2
\end{array}
$$

La desigualdad se conserva al restar 11 y al sumar r, pero se invierte al dividir por -2.

Ahora r está despejado, y la solución es $r \leq 2$: cualquier número menor o igual que 2 es solución de la inecuación. La respuesta puede darse en cualquiera de tres formas distintas:

- En notación de desigualdad: $r \leq 2$.
- En notación de intervalo: $r \in \,]-\infty, 2]$.
- En notación gráfica: 

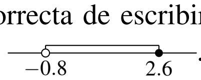
.

A veces se dan inecuaciones "dobles", de la forma $a < b < c$ donde a y c son constantes y b es una expresión que incluye la incógnita. Estas inecuaciones pueden resolverse despejando la incógnita en la expresión central.

Ejemplo 2

La inecuación $-6 \leq 7-5u < 11$ es equivalente a las dos inecuaciones $-6 \leq 7-5u$ y $7-5u < 11$. Cualquiera de ellas se resolvería restando 7 y dividiendo por -5. Al aplicar esas dos operaciones a lo largo de la inecuación doble (es decir, en cada uno de los tres componentes de la inecuación) obtenemos:

$$
\begin{array}{rcccl}
-6 & \leq & 7-5u & < & 11 \\
{\scriptstyle -7} & & {\scriptstyle -7} & & {\scriptstyle -7} \\
\hline
-13 & \leq & -5u & < & 4 \\
{\scriptstyle \div(-5)} & & {\scriptstyle \div(-5)} & & {\scriptstyle \div(-5)} \\
\hline
2.6 & \geq & u & > & -0.8
\end{array}
$$

La solución es entonces $2.6 \geq u > -0.8$, o equivalentemente $-0.8 < u \leq 2.6$; en notación de desigualdad existen esas dos opciones. En notación de intervalo, la única forma correcta de escribir la solución es $u \in \,]-0.8, 2.6]$. Y en notación gráfica, la forma es 

.

Resuelva y dé la respuesta en las tres formas

1. $4c-13 \geq 7$

2. $2q-3 < 4+7q$

3. $-(1-x) \leq 2x-1$

4. $2+5(3-b) > 4(b+1)$

5. $17+5(z+2) \leq z-3(z-2)$

6. $3-2(a-1) < 2(4+a)$

7. $\dfrac{3-t}{4} < \dfrac{2}{3}$

8. $-3p+2\sqrt{2} \geq p-2\sqrt{2}$

9. $9-0.1v > \dfrac{2-0.01v}{0.2}$

10. $\dfrac{4z+5}{2} \leq \dfrac{3-3z}{-4}$

11. $w^2 > (w-1)^2+5$

12. $(v-1)(v+2) < (v+1)(v-2)$

13. $(x+3)^2-3x \geq (x-1)^2+5$

14. $-4 < 6q-1 \leq 5$

15. $-9 < 3c-7 < 1$

16. $6 \geq 2(4-t) \geq 0$

17. $7 < u-4(2+u) \leq -1$

18. $3 \geq \dfrac{x-1}{3} > -4$

19. $\dfrac{8}{3} > \dfrac{3-2p}{-6} \geq \dfrac{1}{2}$

20. $-3 \geq \dfrac{2-t}{-3} > -5$

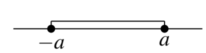
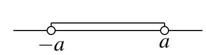
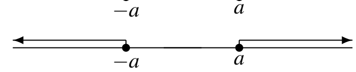
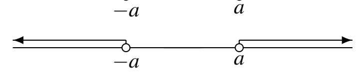
21. $a+3 \leq 3a+1 \leq a+7$

4.2 Inecuaciones con valor absoluto

Una inecuación de la forma $|x| \leq a$, donde x es la incógnita y $a \geq 0$ es una constante, tiene por solución el intervalo $[-a,a]$. Si fuera $a<0$ no habría solución, porque ningún valor absoluto puede ser menor o igual a un número negativo. Entonces, por ejemplo, $|x| \leq 3$ tiene por solución el intervalo $[-3,3]$, y $|x| \leq -1$ no tiene solución.

Una inecuación $|x| \geq a$, con $a \geq 0$, tiene por solución la unión $]-\infty,-a] \cup [a,\infty[$. Y si fuera $a<0$ la solución sería todo $\mathbb{R}$, porque cualquier número tiene valor absoluto mayor que un número negativo. Por ejemplo, la solución de $|x| \geq 3$ es $]-\infty,-3] \cup [3,\infty[$, y la de $|x| \geq -1$ es todo $\mathbb{R}$.

Para inecuaciones estrictas, como $|x| < a$ y $|x| > a$, los intervalos son abiertos. En resumen, para $a > 0$:

Tipo de inecuación	**Solución como desigualdad**	**Solución en intervalos**	**Solución gráfica**
$\lvert x\rvert \leq a$	$-a \leq x \leq a$	$[-a,a]$	
$\lvert x\rvert < a$	$-a < x < a$	$]-a,a[$	
$\lvert x\rvert \geq a$	$x \leq -a$ o $x \geq a$	$]-\infty,-a] \cup [a,\infty[$	
$\lvert x\rvert > a$	$x < -a$ o $x > a$	$]-\infty,-a[\cup]a,\infty[$	

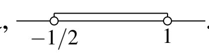
Ejemplo 3

Para resolver $6+3|1-4r| < 15$ se empieza, como en las ecuaciones con valor absoluto, por despejar el valor absoluto:

$$\begin{aligned} 6+3|1-4r| &< 15 \\ 3|1-4r| &< 9 \\ |1-4r| &< 3 \end{aligned}$$

Estamos en el segundo caso de la tabla arriba, con un valor absoluto estrictamente menor que una constante positiva. Pasamos entonces a la forma $-3 < 1-4r < 3$, pero esa no es todavía la solución final en términos de r. Falta resolver la inecuación doble:

$$\begin{aligned} -3 < 1-4r &< 3 \\ -4 < -4r &< 2 \\ 1 > r &> -1/2 \end{aligned}$$

En notación de intervalo, $r \in \,]-1/2, 1[$. En forma gráfica, 

.

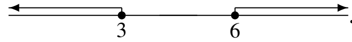
Ejemplo 4

Al resolver $w-|2w-9| \leq w-3$, no podemos suponer todavía que estamos en el primer caso de la tabla, hasta haber despejado el valor absoluto:

$$\begin{aligned} w-|2w-9| &\leq w-3 \\ -|2w-9| &\leq -3 \\ |2w-9| &\geq 3 \end{aligned}$$

Estamos realmente en el tercer caso, con un valor absoluto mayor o igual que una constante positiva. Pasamos entonces a dos inecuaciones:

$$\begin{aligned} 2w-9 &\leq -3 \\ 2w &\leq 6 \\ w &\leq 3 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2w-9 &\geq 3 \\ 2w &\geq 12 \\ w &\geq 6 \end{aligned}$$

La solución puede darse en desigualdades, $w \leq 3$ o $w \geq 6$; en intervalos, $]-\infty, 3] \cup [6, \infty[$; o en forma gráfica, 

.

Resuelva

22. $2|4p-3|-6 \leq 0$

23. $\frac{3}{5}|4v-4|-6 \leq 18$

24. $8-|4-z| > 5$

25. $1-|5-t| < -\frac{2}{5}$

26. $8-2|1-4r| \geq 2$

27. $\frac{3}{2} > \frac{5}{3}|6z-1|$

28. $0 \geq 4|x-6|+2$

29. $1-\frac{2}{5}|3-4u| \leq \frac{5}{4}$

30. $\frac{4}{3} > -5\left|\frac{5}{6}y+5\right|+\frac{3}{2}$

31. $-3\left|5b-\frac{1}{4}\right| \geq 2$

32. $4 \leq \left|\dfrac{6c+4}{5}\right|-10$

33. $\frac{3}{4} < \frac{1}{2}|a+5|+3$

34. $3+12q < 6(2q-\frac{3}{2}|2q+3|+1)$

35. $1 \leq \frac{4}{5}\left|\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right|-6$

36. $7(2-|3v+1|) \geq 14$

37. $2\sqrt{(z-4)^2} \leq 8$

38. $5-\sqrt{(2c-1)^2} \leq 0$

39. $2\sqrt{2}+3\sqrt[6]{\dfrac{(1-y)^6}{8}} > 5\sqrt{2}$

40. $6-3x > 3(\sqrt{25-30x+9x^2}-x)$

41. $2 \leq |u+4| < 6$

42. $5 < |1-3p| \leq 11$

4.3 Inecuaciones no lineales

Las inecuaciones no lineales, así como las ecuaciones no lineales, no se resuelven despejando la incógnita. Más bien se agrupan todos los términos en un lado de la desigualdad, dejando cero en el lado opuesto, para después factorizar el lado con los términos y analizar su signo según los signos de sus factores.

Estos son los pasos, que ilustramos en los ejemplos que siguen:

1. Agrupar todos los términos en un lado de la desigualdad ("desigualar" a cero).
2. Factorizar y simplificar el lado que no es cero.
3. Hacer un mapa de signos.
4. Leer la solución a partir del mapa.

Ejemplo 5

Para la inecuación $7x-2x^2 \leq 5$, agrupamos todos los términos a la izquierda y luego factorizamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} 7x-2x^2-5 &\leq 0 \\ (1-x)(2x-5) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ahora buscamos los *puntos críticos* del lado izquierdo, que son los puntos donde el signo del producto puede cambiar. Esos son precisamente los valores de la incógnita que hacen que alguno de los factores sea cero:

$$\begin{aligned} (1-x) = 0 &\quad \Rightarrow \quad x = 1 \\ (2x-5) = 0 &\quad \Rightarrow \quad x = 5/2 \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la inecuación, $(1-x)(2x-5)$, puede cambiar de signo solamente en los puntos críticos, y tendrá signo constante a cada lado de ellos. Para averiguar el signo a cada lado podemos hacer un *mapa de signos*, con base en el signo de cada factor en cada intervalo.

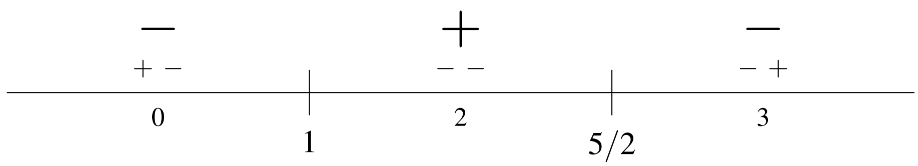
Empezamos por representar la recta real indicando los puntos críticos:

Luego buscamos un *punto de prueba* en cada uno de los tres intervalos: a la izquierda de 1, entre 1 y $5/2$, y a la derecha de $5/2$. Un punto de prueba es cualquier número en el intervalo. En cada punto de prueba buscamos el signo de cada uno de los factores.

Para empezar, a la izquierda de 1 podemos escoger el punto de prueba $x = 0$. Buscamos los signos de los factores para $x = 0$ y encontramos que $(1-x) = 1$ es positivo y que $(2x-5) = -5$ es negativo. Entonces el producto tiene signo negativo. Eso lo indicamos así:

Similarmente, para el segundo intervalo tomamos el punto de prueba $x = 2$ y encontramos que ahora $(1-x)$ es negativo y $(2x-5)$ también, por lo que su producto es positivo.

Por último, en el tercer intervalo podemos tomar $x = 3$, donde $(1-x)$ es negativo y $(2x-5)$ positivo, y entonces su producto es negativo. El cuadro de signos ahora luce así:



El último paso es indicar qué sucede en cada uno de los puntos críticos: sucede que el producto es cero porque alguno de los factores es cero (pero vea el siguiente ejemplo, en el que la expresión podría estar indefinida en un punto crítico). Esto lo indicamos con un cero sobre cada punto crítico:

$-$	0	$+$	0	$-$
$+\ -$		$-\ -$		$-\ +$
0	1	2	$5/2$	3

Ahora que el mapa de signos está completo, es momento de recordar la inecuación. Estamos resolviendo

$$(1-x)(2x-5) \leq 0,$$

lo que significa que estamos buscando los intervalos donde el producto sea menor o igual que cero. En nuestro mapa, menor que cero se indica con el signo $-$, e igual a cero se indica con 0. Entonces la solución es fácilmente visible: a la izquierda de 1 y a la derecha de $5/2$, incluyendo a ambos. En notación de intervalos, el conjunto solución es $]-\infty, 1] \cup [5/2, \infty[$.

Ejemplo 6

Resolver $\dfrac{z(z^2+3)}{-6(4-z)} \leq 0$.

Ya tenemos una expresión completamente factorizada a la izquierda de la desigualdad, y cero a la derecha. Podemos despachar la constante -6 en el denominador multiplicando ambos lados de la desigualdad por -6:

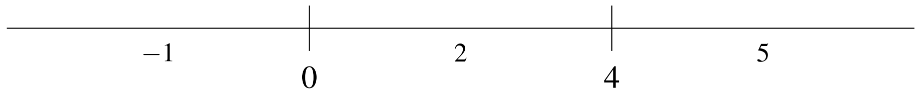
$$\frac{z(z^2+3)}{4-z} \geq 0$$

Note que la desigualdad se invierte porque el multiplicador es negativo, y que el lado derecho sigue siendo $0(-6) = 0$. Note también que sería un error grave querer cancelar el denominador completo multiplicando ambos lados por $-6(4-z)$, porque no sabemos si la desigualdad se mantendrá o se invertirá: el signo de $-6(4-z)$ es desconocido.

Buscamos los puntos críticos igualando cada factor a cero:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = 0 \\ z^2+3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{(no hay solución)} \\ 4-z = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = 4 \end{aligned}$$

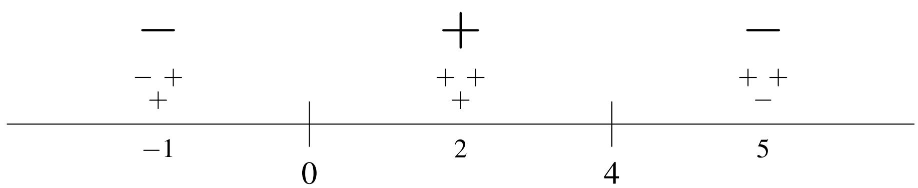
Tenemos tres factores pero solamente dos puntos críticos, 0 y 4. Para hacer el mapa de signos buscamos un punto de prueba a la izquierda de 0, uno entre 0 y 4 y otro a la derecha de 4. Tomemos $z = -1$, $z = 2$ y $z = 5$ respectivamente:



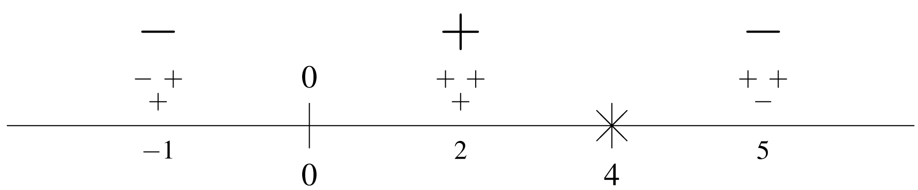
Para cada intervalo debemos encontrar los signos de los tres factores en el punto de prueba respectivo:

$$\begin{aligned} z=-1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{(z)(z^2+3)}{(4-z)} = \frac{(-)(+)}{(+)} \\ z=2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{(z)(z^2+3)}{(4-z)} = \frac{(+)(+)}{(+)} \\ z=5 \quad &\Rightarrow \quad \frac{(z)(z^2+3)}{(4-z)} = \frac{(+)(+)}{(-)} \end{aligned}$$

y el mapa de signos va así:



Lo último es indicar qué sucede en cada punto crítico. En $z=0$ la fracción vale 0 porque tiene un cero en su numerador. Pero en $z=4$ la fracción está indefinida porque tiene un cero en su denominador. Eso se indica así:



Por último, como la inecuación es $\dfrac{z(z^2+3)}{4-z} \geq 0$, buscamos los intervalos donde la fracción sea mayor o igual a cero: eso sucede entre 0 y 4, incluyendo a 0 pero no a 4. El conjunto solución es entonces el intervalo $[0,4[$.

Ejemplo 7

Para resolver $|c^2+6c| < 5$ empezamos por usar las reglas para desigualdades con valor absoluto, y convertir en una inecuación doble:

$$-5 < c^2+6c < 5$$

Como no se puede despejar la incógnita, cada inecuación debe resolverse por separado. La primera,

$$\begin{aligned} -5 &< c^2+6c \\ 0 &< c^2+6c+5 \\ 0 &< (c+5)(c+1) \end{aligned}$$

tiene solución (no mostramos el procedimiento) $]-\infty,-5[\cup]-1,\infty[$. Y la segunda,

$$\begin{aligned} c^2+6c &< 5 \\ c^2+6c-5 &< 0 \\ (c+3-\sqrt{14})(c+3+\sqrt{14}) &< 0 \\ (c-0.7417)(c+6.7417) &< 0 \quad \text{(aproximadamente)} \end{aligned}$$

tiene solución aproximada $]-6.7417,0.7417[$.

Como deben cumplirse la primera y la segunda desigualdades, la solución final será la intersección de las dos soluciones:

$$\big(]-\infty,-5[\cup]-1,\infty[\big)\cap]-6.7417,0.7417[=]-6.7417,-5[\cup]-1,0.7417[$$

Resuelva

43. $a^2 > a$

44. $r^3 > r^2$

45. $4x-x^2 > 3$

46. $2y^2 < 5$

47. $4c^2+3c < 1$

48. $(4q-6)^2(q^2+5) \le 0$

49. $(v-1)(v+2) \le (v+1)(v-3)$

50. $3t^2 \ge \frac{2}{3}t^3-6t$

51. $w^3-2w^2-4w+8 > 0$

52. $8p^2+11p \le 4p^3-3$

53. $(u-2)^2(u+5/3)^2 < 0$

54. $8a^4-8a^5-8a^3 > 27a-27a^2-27$

55. $\dfrac{1}{z-3} \le \dfrac{3}{z+1}$

56. $\dfrac{2t}{1-2t} \le \dfrac{3-t}{t}$

57. $\dfrac{2}{2-r}+\dfrac{1}{r} \le 3$

58. $\dfrac{q^2-q}{(q+1)(2-q)} \ge 0$

59. $\dfrac{9}{b+2}-\dfrac{21}{b+4} > -2$

60. $\dfrac{3t+2}{t-5} < \dfrac{4t-7}{t-5}$

61. $\dfrac{3}{p} \ge \dfrac{7}{p+2}$

62. $\dfrac{x-2}{x+2} \le \dfrac{x+1}{x-1}$

63. $\dfrac{-2}{v} \geq \dfrac{-5v}{v^2+6}$

64. $\dfrac{t^2-2t+3}{t+1} \geq 1$

65. $\dfrac{u}{u-2} - \dfrac{u+2}{u-1} \geq \dfrac{3u}{u^2-3u+2}$

66. $\dfrac{-2a^2+2a-1}{(a-1)(a+3)} \leq 0$

67. $\dfrac{r+4}{3r-6} - \dfrac{r-6}{4r-8} < \dfrac{r+1}{r-2}$

68. $\dfrac{1}{q} - \dfrac{q}{2q-1} \geq 1$

69. $|w^2-16| < 4$

70. $\left|3-\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$

71. $|t^3-3t| \geq 2$

72. $\left|\dfrac{5b+3}{2b}\right| \geq 3$

73. $\dfrac{6}{y} \leq 3y-7 \leq 2y^2-6y-12$

74. $2-x < \dfrac{x}{x-1} \leq 3x-4$

4.4 Aplicaciones de las inecuaciones

Resuelva

75. Un estudiante tiene notas de 82 y 90 en los dos primeros exámenes parciales. ¿Qué nota necesita en el tercero para que el promedio de los tres sea por lo menos 85?

76. Se invierten \$5000 a 8% anual. ¿Cuánto más debe invertirse a 10% anual para que el interés total en un año sea mayor que \$1000?

77. Una fábrica de lápices tiene costos fijos de ₡2 500 000 al mes, y costos unitarios de ₡40 por lápiz. Si cada lápiz se vende por ₡90, ¿cuántos deben producir y vender en un mes para tener utilidades de al menos ₡2 000 000?

78. Una línea aérea opera una ruta con un costo fijo de \$12 000 y un costo variable de \$125 por pasajero. Si el tiquete se vende a \$400 por pasajero, ¿cuántos pasajeros necesitan transportar para no tener pérdidas?

79. ¿Cuántos galones de una pintura que cuesta ₡22 000 el galón deben mezclarse con ocho galones de otra que cuesta ₡15 000 el galón para obtener una mezcla que cueste menos de ₡20 000 el galón?

80. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡2400 el kilo, con pasas, que cuestan ₡5600 el kilo. Desea obtener 25 kilos de una mezcla que no cueste más de ₡4000 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces deberá contener la mezcla?

81. Un vendedor normalmente permanece en su oficina entre cinco y quince horas de las cuarenta horas semanales de trabajo. ¿Cuánto tiempo trabaja fuera de la oficina semanalmente?

82. Se dispone de ₡800 000 para invertir. Una cuenta paga el 18% de interés anual, y otra paga el 21%. ¿Cuánto debe invertirse en cada cuenta para ganar más de ₡150 000 en intereses en un año?

83. Un hotel con cien habitaciones se llena si la tarifa es de \$36 la noche. Por cada \$1 (o fracción) que aumente la tarifa, dos habitaciones quedarán sin alquilar. ¿Qué tarifa deben cobrar para alquilar más de 85 habitaciones?

84. Cuando un fontanero va a trabajar a una casa, cobra ₡5000 por la visita más ₡2000 por cada hora de trabajo. ¿Cuántas horas puede durar una visita para que el costo no exceda los ₡15 000?

85. Un taxista debe invertir ₡4 000 000 en comprar su taxi, más ₡150 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer para que el costo total sea menor que ₡5 000 000?

86. Un tractor cuesta \$16 000 nuevo, y se deprecia a razón de \$2500 por año. ¿En qué intervalo de tiempo tendrá un valor entre \$5000 y \$6000?

87. Una compañía fabrica un producto con un costo unitario de ₡7500 y un precio de venta de ₡10 000. Si los costos fijos son ₡300 000 000, ¿cuántas unidades deben producir y vender para tener utilidades?

88. En una compañía, los vendedores en un plan reciben mensualmente ₡400 000 más un 3% de las ventas, mientras que los vendedores en el otro plan reciben solo una comisión de 8% sobre las ventas mensuales. ¿Para qué nivel de ventas mensuales conviene más estar en el segundo plan?

89. Un vendedor gana una comisión de 4% sobre sus primeros ₡4 000 000 de ventas, más un 10% por sus ventas adicionales (por ejemplo, si vende ₡6 500 000 recibe un 4% de ₡4 000 000 más un 10% de ₡2 500 000). ¿Cuánto debe vender para recibir una comisión mayor que ₡500 000?

90. Si un producto se vende a p colones por unidad, el público comprará $200 - 0.1p$ unidades. ¿Qué precio debe fijarse para obtener ingresos superiores a ₡96 000?

91. Al sumar los números enteros desde 1 hasta n, la suma será $S = \frac{1}{2}n(n+1)$. Por ejemplo, al sumar desde 1 hasta 5, la suma $1+2+3+4+5$ será igual a $\frac{1}{2}(5)(6) = 15$. ¿Cuántos enteros deben sumarse, a partir de 1, para que la suma sea al menos 1000?

92. El número de diagonales en un polígono con n lados es $D = \frac{1}{2}n(n-1) - n$. ¿Cuáles polígonos tienen menos de veinte diagonales?

93. Un automóvil parte a las 2 pm en un viaje de 100 km. Durante los primeros 50 km su velocidad promedio es de 60 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer el resto de la distancia para llegar a su destino antes de las 3:30 pm? (Recuerde: $v = d/t$.)

94. Se va a construir una caja sin tapa a partir de una hoja de lata cuadrada, de 40 cm de lado, recortándole un pequeño cuadrado de cada esquina y levantando las pestañas que quedan en cada lado. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se recortan para que la caja resultante tenga un volumen de al menos 4000 cm cúbicos?

95. El largo de un terreno rectangular es el doble de su ancho. ¿Cuáles dimensiones darán una área mayor que 300 m^2?

96. Una bola se lanza hacia arriba, y t segundos después su altura es $15t - 4.9t^2$ metros. ¿Durante qué intervalo de tiempo su altura será mayor que 8 m?

97. Un rectángulo tiene un lado de 25 cm y un perímetro que se estima en 75 cm más/menos 5 cm (es decir, $|P - 75| \leq 5$ donde P es el perímetro). ¿Cuál es el intervalo de valores posibles para el segundo lado del rectángulo?

98. Un vendedor recibe un 5% de comisión por sus ventas. Si un mes estima que ha vendido unos ₡2 350 000 con un margen de error de ₡10 000 (es decir, $|V - 2350000| \leq 10000$ donde V son las ventas), ¿cuál es el intervalo de valores posibles para su comisión?

99. Se han invertido ₡4 000 000 a una cierta tasa de interés simple, y el interés ganado a los tres años es ₡2 000 000 más/menos ₡50 000 (es decir, $|I - 2000000| \leq 50000$ donde I es el interés). ¿Cuál es el intervalo de valores posibles para la tasa de interés?

CAPÍTULO 5
Funciones

5.1 Funciones

Una *función real de variable real*, digamos f, es una regla que a cada número real x le asigna algún número real y dado por una fórmula $y = f(x)$. La variable x podría tener restricciones y no referirse a cualquier número real. El *dominio* de f es el conjunto de valores x para los cuales $f(x)$ está definido.

Ejemplo 1

Sea f la función definida por la regla $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$.

Algunos valores de esta función son los siguientes:

- $f(-1)$ es el resultado de sustituir $x = -1$ en la fórmula de $f(x)$:
$$f(-1) = \frac{3(-1)-4}{(-1)+2} = \frac{-7}{1} = -7.$$
- $f(2/3) = \dfrac{3(2/3)-4}{(2/3)+2} = \dfrac{-2}{8/3} = \dfrac{-3}{4}$.
- $f(\sqrt{5}-2) = \dfrac{3(\sqrt{5}-2)-4}{(\sqrt{5}-2)+2} = \dfrac{3\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{15-10\sqrt{5}}{5} = 3-2\sqrt{5}$.
- $f(-2) = \dfrac{3(-2)-4}{(-2)+2} = \dfrac{-10}{0}$, que no existe: $f(-2)$ está indefinido, o en otras palabras, -2 no está en el dominio de f.
- $f(a-1)$ no puede evaluarse numéricamente, pero sí puede sustituirse $x = a-1$ en la fórmula:
$$f(a-1) = \frac{3(a-1)-4}{(a-1)+2} = \frac{3a-7}{a+1}.$$

El dominio de f está formado por todos los números reales para los cuales $f(x)$ está definido. La única restricción la da el denominador $x+2$ (un denominador nunca puede ser cero), que causa que $f(x)$ no esté definido para $x = -2$. El dominio, entonces, es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Ejemplo 2

Sea p la función dada por $p(t) = \begin{cases} 2t+5 & \text{si } t < -1 \\ 3-t^2 & \text{si } -1 < t \leq 5 \\ 1/t & \text{si } t > 5 \end{cases}$.

El valor de $p(t)$ se calcula en alguna de las tres líneas de la definición, dependiendo de si $t < -1$, $-1 < t \leq 5$ o $t > 5$. Por ejemplo:

- $p(-2)$ tiene $t = -2$, que cumple $t < -1$. Entonces usamos la primera línea y calculamos $p(-2) = 2(-2)+5 = 1$.
- $p(0)$ tiene $t = 0$, que se ajusta al caso $-1 < t \leq 5$; de acuerdo con la segunda línea encontramos $p(0) = 3-(0)^2 = 3$.
- $p(8)$ tiene $t = 8$, con $t > 5$, así que usamos la tercera línea: $p(8) = 1/8$.
- $p(-1)$ tiene $t = -1$, que no se ajusta a ninguno de los tres casos. Entonces $p(-1)$ está indefinido.

El dominio de p está formado por todos los números para los cuales $p(t)$ está definido, lo cual es todos los números reales excepto -1, ya que $t = -1$ no está incluido en ninguno de los tres casos. Note que la fracción $1/t$ en el tercer caso no excluye a $t = 0$ del dominio, porque esa fracción se aplica solo si $t > 5$; $p(0)$ no es $1/0$, sino 3 por el segundo caso. En suma, el dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Ejemplo 3

Encontrar el dominio de h, dada por $h(w) = \sqrt{25-w^2}$.

Como las raíces cuadradas reales existen solo para números mayores o iguales a cero, entonces el dominio de h está formado por los valores de w para los cuales $25-w^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación es el intervalo $[-5,5]$: ese es el dominio de h.

Ejemplo 4

Encontrar el dominio de $q(v) = \sqrt{v-5} - \dfrac{2v-4}{v^2-7v}$.

Hay una restricción por la raíz cuadrada: el subradical $v-5$ debe ser mayor o igual que cero; en símbolos, $v-5 \geq 0$. Y hay otra restricción por la fracción: el denominador v^2-7v debe ser distinto de cero; $v^2-7v \neq 0$.

La primera restricción implica que $v \geq 5$. La segunda, al factorizar $v^2-7v = v(v-7) \neq 0$, lleva a que $v \neq 0$ y $v \neq 7$. Entonces el dominio está formado por todos los valores de v en $[5,\infty[$, excepto 0 y 7. Ya que 0 no está en $[5,\infty[$, podemos escribir el dominio como $[5,\infty[-\{7\}$.

La *composición* de dos funciones f y g, denotada $f \circ g$, consiste en evaluar una de ellas en el resultado de la otra. Específicamente, $\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big)$. La composición no es conmutativa: $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$, que en general no es igual a $\big(f \circ g\big)(x)$.

Usualmente vamos a escribir $f \circ g(x)$ para denotar $\big(f \circ g\big)(x)$.

Ejemplo 5

Sean $f(w) = \dfrac{4-w}{1+2w}$, $g(x) = 6 - x^2$ y $h(u) = \sqrt{6-u}$. Entonces

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(6-x^2) = \dfrac{4-(6-x^2)}{1+2(6-x^2)} = \dfrac{x^2-2}{13-2x^2}$
- $g \circ f(w) = g(f(w)) = g\big(\frac{4-w}{1+2w}\big) = 6 - \big(\frac{4-w}{1+2w}\big)^2$
- $g \circ h(t) = g(h(t)) = g(\sqrt{6-t}) = 6 - \big(\sqrt{6-t}\big)^2 = 6-(6-t) = t$
- $h \circ g(r) = h(g(r)) = h(6-r^2) = \sqrt{6-(6-r^2)} = \sqrt{r^2} = |r|$

Encuentre los valores indicados

1. $f(4)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{6})$ y $f(1-\sqrt{2})$, para $f(r) = 3r^2 - 5r$

2. $p(0)$, $p(-3)$ y $p(a-2)$, para $p(t) = \frac{7}{4} \cdot 2^{-t}$

3. $c(\sqrt{5})$, $c(4-\sqrt{3})$, $c(2v+1)$ y $c(t+2)$, para $c(v) = v^3 - 5v + 1$

4. $c(f(2))$, $p(f(1))$, $f(p(-2))$, $c(f(x))$ y $f(p(y))$, para las funciones f, p y c de los ejercicios anteriores.

5. $g(-4)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(3)$, $g(5)$ y $g(9)$, para $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq -1 \\ (x+1)^{-1/2} & \text{si } -1 < x < 5 \\ 3x^2 - 8 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

6. $h(-5)$, $h(-3)$, $h(0)$, $h(2)$, $h(3)$ y $h(8)$, para $h(w) = \begin{cases} \sqrt{w^2-9} & \text{si } |w| \geq 3 \\ \dfrac{w+1}{w-2} & \text{si } |w| < 3 \end{cases}$

Encuentre el dominio

7. $h(u) = 3u^2 - 5u + 1$

8. $f(t) = \dfrac{2t^2-1}{4t-3t^2+4}$

9. $p(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+x^3+2x^2}$

10. $g(w) = \dfrac{w^3-w^2}{3w+1-3w^2-w^3}$

11. $f(z) = \dfrac{2-z}{1-z} \div \dfrac{1+z}{2+z}$

12. $r(x) = \sqrt[5]{x^2-5x}$

13. $p(v) = 2v - \sqrt{5v^2 + 15 - v^3 - 3v}$

14. $g(w) = \sqrt[3]{2w+5} - \sqrt{20w - 4w^2 - 25}$

15. $r(u) = 3\sqrt{2-8u} - 2\sqrt{3+u}$

16. $q(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t-1}{4-t^2}}$

17. $r(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}} - \dfrac{1}{z^2-9}$

18. $f(x) = \dfrac{5}{x\sqrt{x+4}}$

19. $h(t) = \dfrac{\sqrt{10-4t}}{(t-1)\sqrt{t-2}}$

20. $q(t) = \dfrac{\sqrt[4]{t-1}}{\sqrt[4]{4-t^2}}$

21. $g(r) = \begin{cases} \sqrt{r-1} & \text{si } r > 3 \\ \dfrac{r+1}{r-2} & \text{si } r < 3 \end{cases}$

22. $c(v) = \begin{cases} \sqrt[3]{v+1} & \text{si } v < 5 \\ \dfrac{13}{v^2-8v} & \text{si } v \geq 5 \end{cases}$

Encuentre la fórmula que se pide

23. $g \circ f(x)$ y $f \circ g(v)$, dadas $g(v) = 1 - 3v$ y $f(x) = 2x^2 - x + 1$

24. $h \circ p(t)$ y $p \circ h(z)$, dadas $h(z) = \dfrac{2z}{2z+5}$ y $p(t) = 5t - 16$

25. $r \circ q(u)$ y $q \circ r(x)$, dadas $r(x) = \sqrt{x-3}$ y $q(u) = 4u^2 + 3$

26. $c \circ g(r)$ y $g \circ c(r)$, dadas $c(r) = r^{3/2} + 1$ y $g(r) = 3r - 2r^2$

27. $p \circ h(z)$ y $h \circ p(v)$, dadas $p(t) = \dfrac{3+t}{1-t}$ y $h(z) = \dfrac{2}{1-z}$

28. $f \circ q(x)$ y $q \circ f(w)$, dadas $f(u) = \dfrac{5u}{2-2u}$ y $q(v) = \dfrac{2v}{2v+5}$

29. $p \circ h(t)$ y $h \circ p(v)$, dadas $p(w) = \dfrac{w-2}{w+3}$ y $h(y) = \dfrac{3y+2}{1-y}$

30. $h \circ c(w)$ y $c \circ h(u)$, dadas $h(v) = 2v^2 - 4v + 2$ y $c(x) = 1 - \sqrt{x/2}$

31. $q \circ f(v)$ y $f \circ q(t)$, dadas $q(z) = \sqrt[3]{5z-1}$ y $f(t) = \dfrac{1+t^3}{5}$

Resuelva

32. Una fábrica de juguetes tiene costos fijos de ₡80 000 al día. El costo de producir una caja de juguetes es ₡1600.

(a) Calcule el costo total de producir q cajas al día.

(b) ¿Cuánto cuesta producir 20 000 cajas en un mes? (Tome 1 mes = 30 días.)

(c) Si cada caja de juguetes se vende a ₡3000, exprese el ingreso diario I como función de q.

(d) Exprese la ganancia diaria G como función de q.

(e) ¿Cuál es el dominio de las funciones I y G?

33. A un editor le cuesta ₡180 000 preparar un libro para su publicación (ilustración, clisés, corrección, etc.). La impresión cuesta ₡4000 por ejemplar. Si el libro se vende a ₡7000, exprese la utilidad como función del número de copias. ¿Cuántas copias deben venderse para recaudar la inversión?

34. El costo de producción de muñecas para la compañía Cupido es de $C = 0.1x^2 - 0.2x + 600$ (en colones) para una producción diaria de x muñecas. El número de muñecas producidas en una jornada diaria de t horas es $x = 50t - 50$. Exprese el costo de producción C como una función de t, y calcule el costo de producción de una jornada de ocho horas.

35. La ecuación $D = \dfrac{90000 + 6000t}{p + 50}$ da la demanda diaria D de cierta marca de tostadores, donde p es el precio unitario y t el número de meses desde su introducción. Se estima que el precio en t meses será $p = 7500 + 350t$. Exprese la demanda diaria como función de t. ¿Cuántos tostadores al día se venderán un año después de la introducción?

36. Una compañía estima que el costo C de producir x tenedores es $C = 3\sqrt{x} + 5x + 1500$. El número de tenedores producidos depende, a su vez, del número n de empleados, según la ecuación $x = 370n - 225$. Exprese el costo como función del número de empleados. Si la compañía contrata a 25 trabajadores, ¿cuántos tenedores producen, y a qué costo?

37. Se quiere cercar un terreno rectangular con una área de $400\,\mathrm{m}^2$. El alambre cuesta ₡25 el metro. Exprese el costo total de cercar el terreno como función de la longitud de un lado.

38. Se cuenta con 250 m de alambre para cercar un terreno rectangular. Exprese el área del terreno como función de la medida de uno de sus lados.

39. Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con volumen de $25\,\mathrm{m}^3$. El fondo será hecho de un metal que cuesta ₡320 el m^2, y los lados serán de madera, que cuesta ₡60 el m^2. Exprese el costo de los materiales como una función de la longitud de uno de los lados del fondo.

5.2 Gráficos

El *gráfico* de una función f es el conjunto de pares (x, y) que satisfacen la ecuación $y = f(x)$. Se acostumbra representar estos pares ordenados en un plano cartesiano.

El gráfico de $y = f(x)$ interseca al eje Y (vertical) cuando $x = 0$. Interseca al eje X (horizontal) cuando $y = 0$. Los gráficos de dos funciones f y g se intersecan en los puntos donde $f(x) = g(x)$.

La *distancia* entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

El *punto medio* entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la fórmula

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Ejemplo 6

Graficar $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{9 - x^2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Notemos en primer lugar el dominio: aunque cualquier $x \in \mathbb{R}$ está incluido en alguno de los dos casos ($x \leq 2$ o $x > 2$), el denominador en la segunda fórmula, $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$ excluye en principio a $x = -3$ y a $x = 3$. Pero $f(-3)$ está definido por la primera fórmula; es solamente $f(3)$ que está indefinido. Entonces el dominio es $\mathbb{R} - \{3\}$.

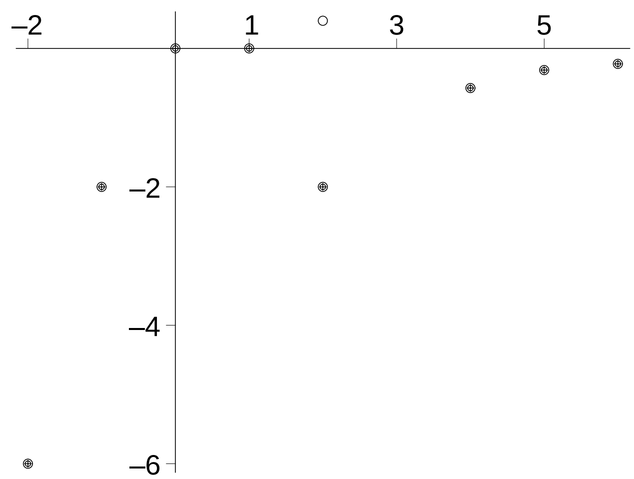
Aunque el gráfico está compuesto por infinitos puntos, podemos darnos una buena idea graficando algunos de ellos y conectándolos. Como la fórmula de $f(x)$ está dividida alrededor de $x = 2$, tomaremos algunos puntos a la izquierda y algunos a la derecha de 2. Cada punto estará compuesto por un valor de x, que escogeremos entero, y el valor de y que calcularemos como $f(x)$. La siguiente tabla incluye algunos puntos a la izquierda de 2:

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-2	0	0	-2

La parte del gráfico a la derecha de 2 debe estar estrictamente a la derecha de 2 (con $x > 2$, no $x \geq 2$). Aún así, calculemos lo que sería $f(2)$ si viniera de la fórmula en la segunda línea, e incluyámoslo en la tabla entre paréntesis para indicar que ese es solamente un punto guía pero no está en el gráfico:

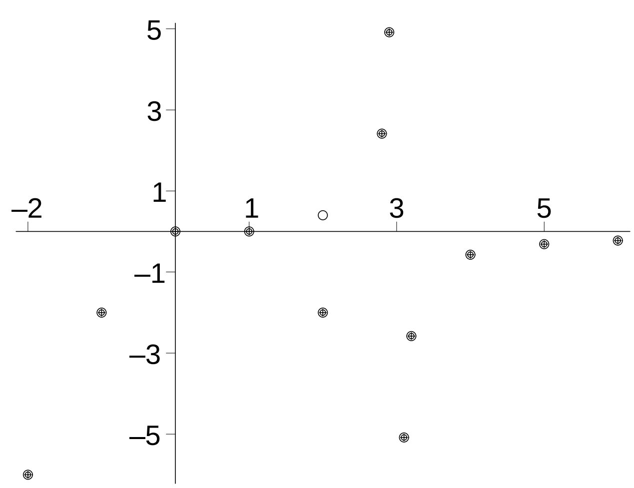
x	(2)	3	4	5	6
y	(0.4)	$\nexists$	-0.5714	-0.3125	$-0.\bar{2}$

Al indicar esos puntos en el plano, incluyendo $(2, 0.4)$ como un círculo sin rellenar, obtenemos

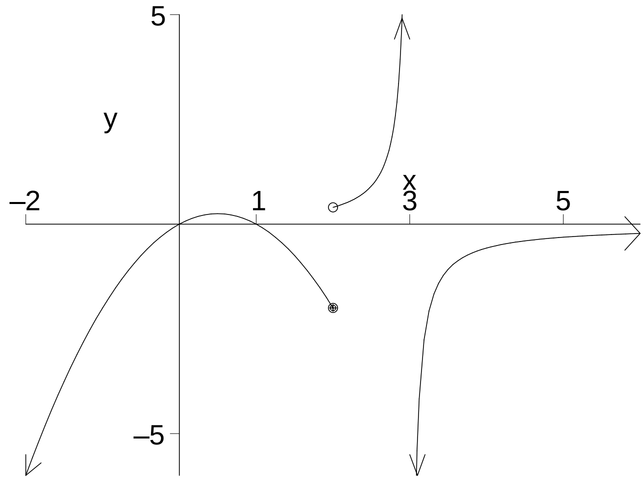


Es fácil imaginar cómo conectar los primeros cinco puntos. Para conectar los siguientes cuatro, empezando por el punto sin rellenar en $(2, 0.4)$, necesitamos más información, sobre todo sabiendo que no deben conectarse los puntos $(2, f(2)$ y $(4, f(4))$ porque el gráfico tiene un vacío en $x = 3$. Podemos evaluar f en valores cercanos a 3 para ver qué sucede a su alrededor:

x	2.8	2.9	3	3.1	3.2
y	2.4138	4.9153	$\nexists$	-5.0820	-2.5806



Ahora vemos cómo deben conectarse los ocho puntos a la derecha de 2 (incluyendo el círculo sin rellenar):



Ejemplo 7

Si $p(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $q(x) = 2x + 4$, entonces los puntos de intersección del gráfico de p con los ejes son:

- Con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = p(0) = -2$, así que el punto es $(0, -2)$.
- Con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = p(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$, cuyas soluciones son $x = -1/3$ y $x = 2$. Los puntos son $(-1/3, 0)$ y $(2, 0)$.

Para encontrar las intersecciones entre los gráficos de p y q resolvemos la ecuación $p(x) = q(x)$: $3x^2 - 5x - 2 = 2x + 4$, con soluciones $x = -2/3$ y $x = 3$. Los valores de y están dados por $p(x)$ o, equivalentemente, $q(x)$: para $x = -2/3$, $y = p(-2/3) = q(-2/3) = 8/3$, y para $x = 3$, $y = p(3) = q(3) = 10$. Entonces los dos puntos son $(-2/3, 8/3)$ y $(3, 10)$.

Ejemplo 8

Entre los dos puntos $(-1, -3)$ y $(4, -5)$, la distancia es

$$d = \sqrt{[(-1) - (4)]^2 + [(-3) - (-5)]^2} = \sqrt{[-5]^2 + [2]^2} = \sqrt{29}$$

y el punto medio es

$$PM = \left(\frac{(-1) + (4)}{2}, \frac{(-3) + (-5)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -4 \right)$$

Trace el gráfico

40. $y = 2x - 5$ para $x \in [-5,5]$

41. $y = 2t - t^2$ para $t \in [-2,4]$

42. $y = w^2 - \frac{1}{4}w^3$ para $w \in [-2,4]$

43. $y = \dfrac{3u-5}{u^2+2}$ para $u \in [-5,5]$

44. $y = 6 - 3\sqrt{4-r}$ para $r \in [-10,4]$

45. $y = 2\left|3 - \frac{1}{2}v\right| - 1$ para $v \in [0,10]$

46. $y = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \leq 1 \\ 3-z & \text{si } z > 1 \end{cases}$ para $z \in [-2,5]$

Encuentre los puntos de intersección con cada eje

47. $y = \frac{3}{7}t - \frac{1}{5}$

48. $y = \dfrac{4z+6}{9}$

49. $y = 2w^2 - 3w - 5$

50. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 + x - 1$

51. $y = \dfrac{3v+8}{1-v} + \dfrac{10v+8}{v}$

52. $y = \dfrac{1}{t^2+1} - \dfrac{t}{t+2}$

53. $y = u + 3 - \sqrt{u^2+3}$

54. $y = \sqrt{1+w} + \sqrt{4+w} - 3$

55. $y = 5 - |4 - 5t|$

56. $y = |2x+12| + x$

Encuentre los puntos de intersección entre los gráficos de...

57. $y_1 = 2x^2 + 3x - 1$ y $y_2 = -4x - 4$

58. $y_1 = 2x^2 - 2x + 4$ y $y_2 = x^2 + x + 2$

59. $y_1 = 5z^2 - 10z + 20$ y $y_2 = -z^2 + 9z + 5$

60. $y_1 = 2u^2 + u$ y $y_2 = 4 - u$

61. $y_1 = 2v^3 - 5v + 1$ y $y_2 = v^2 - 2$

62. $y_1 = w^2 - w + 3$ y $y_2 = 1 - w$

63. $y_1 = \sqrt[3]{z}$ y $y_2 = z^3$

64. $y_1 = \dfrac{5}{r} - 1$ y $y_2 = \dfrac{6}{2r+1}$

65. $y_1 = \dfrac{1-t^2}{1+t}$ y $y_2 = \dfrac{3+t}{2+t}$

66. $y_1 = \sqrt[3]{x}$ y $y_2 = x\sqrt{2}$

67. $y_1 = 2u - 1$ y $y_2 = 3u - \sqrt{u+3}$

68. $y_1 = 10 - \sqrt{7+3r}$ y $y_2 = 3\sqrt{r+1}$

69. $y_1 = |3t+2| - 4$ y $y_2 = 4t - 7$

70. $y_1 = \begin{cases} 1-2u & \text{si } u < 1 \\ u^2-3 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$ y $y_2 = u - 1$

Calcule la distancia y el punto medio entre...

71. Los puntos $(2,-1)$ y $(0,1)$

72. El punto $(-3,8)$ y el origen

73. Los puntos de intersección del gráfico de $y = 5 - 4x$ con los dos ejes

74. El origen y el punto de intersección entre los gráficos de $y = 3 - 2t$ y $y = t + 2$

75. Los dos puntos de intersección entre los gráficos de $y = x - 1$ y $y = 2\sqrt{x-1}$

5.3 Inversas

Dos funciones f y g son *inversas* si $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ para todo x. En ese caso se escribe $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$.

Según esa definición, si f tiene una inversa f^{-1}, entonces la ecuación $y = f(x)$ implica que $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. De aquí que las inversas estén caracterizadas por la relación

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Dada una función f, para encontrar su inversa, f^{-1}, se puede plantear la ecuación $y = f(x)$ y despejar x en términos de y. Por el párrafo anterior, este y será $y = f^{-1}(x)$.

Si f y g son inversas, entonces el domino de g es igual al ámbito o rango[1] de f, y viceversa.

Ejemplo 9

Sean $g(z) = 4 - 8z^3$ y $h(v) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}$. Entonces g y h son inversas, porque

- $h(g(z)) = h(4-8z^3) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4-(4-8z^3)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8z^3} = \frac{1}{2}(2z) = z$, y
- $g(h(v)) = g(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}) = 4 - 8\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4-v}\right)^3 = 4 - 8 \cdot \frac{1}{8}(4-v) = 4 - (4-v) = v.$

Ejemplo 10

Para encontrar la inversa de $c(u) = \dfrac{3u-1}{u+5}$, planteamos la ecuación $y = c(u)$ (cualquier letra puede servir en vez de y, excepto, por supuesto, u y c) y despejamos la incógnita u:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3u-1}{u+5} \\
y(u+5) &= 3u-1 \\
uy+5y &= 3u-1 \\
uy-3u &= -1-5y \\
u(y-3) &= -1-5y \\
u &= \frac{-1-5y}{y-3} = \frac{1+5y}{3-y}
\end{aligned}$$

[1] Así como el dominio de una función es el conjunto de valores (usualmente x) en los que la función está definida, el *ámbito* o *rango* es el conjunto de valores (usualmente y) que la función toma como resultados. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = x^2$ es $\mathbb{R}$, pero su rango es $[0, \infty[$ porque ese es el conjunto de todos los valores de x^2.

Entonces la inversa de c está dada por $c^{-1}(y) = \dfrac{1+5y}{3-y}$.

El dominio de c es $\mathbb{R} - \{-5\}$ (por el denominador $u+5$), y su ámbito es el dominio de c^{-1}: $\mathbb{R} - \{3\}$ (por el denominador $3-y$). Recíprocamente, el ámbito de c^{-1} es el dominio de c: $\mathbb{R} - \{-5\}$.

Algunas funciones no tienen una inversa en todo su dominio, lo cual se detecta cuando es imposible despejar x en la ecuación $y = f(x)$.

Ejemplo 11

La función f dada por $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ no tiene inversa en $\mathbb{R}$, porque al intentar despejar x en la ecuación $y = f(x)$ nos encontramos con este problema: $y = 3x^2 - 6x + 1$ lleva a $3x^2 - 6x + 1 - y = 0$, una ecuación cuadrática con coeficientes $a = 3$, $b = -6$ y $c = 1 - y$. Por la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(3)(1-y)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24 + 12y}}{6} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{6+3y}}{3} = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}. \end{aligned}$$

No podemos acabar de despejar x porque no sabemos si la solución tendrá $+\sqrt{6+3y}$ o $-\sqrt{6+3y}$. Hay dos soluciones posibles, y en una función inversa la solución debe ser única. Concluimos que f no tiene inversa.

Cuando una función no tiene inversa en todo su dominio, es posible que sí la tenga en algún dominio restringido (algún subconjunto del dominio).

Ejemplo 12

La función f, definida como en el ejemplo anterior pero con el dominio restringido a $x \leq 1$, sí tiene una inversa porque una vez que planteamos la ecuación $y = f(x)$, que ya vimos que nos lleva a

$$x = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y},$$

podemos observar que como $x \leq 1$ (porque x pertenece al dominio, $]-\infty, 1]$), entonces debe aplicarse el signo $-$ a la raíz:

$$x = 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}.$$

Así es que $f^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{6+3y}$. En efecto, por un lado

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= f(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}) = 3(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y})^2 - 6(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{6+3y}) + 1 \\ &= 3[1 - \tfrac{2}{3}\sqrt{6+3y} + \tfrac{1}{9}(6+3y)] - 6 + 2\sqrt{6+3y} + 1 \\ &= 3 - 2\sqrt{6+3y} + \tfrac{1}{3}(6+3y) - 5 + 2\sqrt{6+3y} = -2 + 2 + y = y. \end{aligned}$$

Y por el otro lado,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x^2-6x+1) = 1-\tfrac{1}{3}\sqrt{6+3(3x^2-6x+1)} \\ &= 1-\tfrac{1}{3}\sqrt{6+9x^2-18x+3} = 1-\tfrac{1}{3}\sqrt{9(x-1)^2} \\ &= 1-\tfrac{1}{3}\cdot 3|x-1| \end{aligned}$$

donde $x \leq 1$ por estar en el dominio restringido, así que $x-1 \leq 0$ y de ahí que $|x-1| = 1-x$. Entonces

$$f^{-1}(f(x)) = 1-\tfrac{1}{3}\cdot 3(1-x) = 1-(1-x) = x.$$

En resumen, $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f^{-1}(f(x)) = x$, como debía ser. $\square$

Determine los valores que se piden sin encontrar la fórmula de la función inversa

76. Para $g(r) = r^3+5r$, calcule $g(-1)$, $g(2)$ y $g(3)$, y use esos valores para determinar $g^{-1}(42)$, $g^{-1}(-6)$ y $g^{-1}(18)$

77. Para $f(t) = \dfrac{t-1}{t+2}$, calcule $f(-4)$, $f(1)$ y $f(8)$, y determine $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(0.7)$ y $f^{-1}(2.5)$

78. Para $p(v) = 2^v$, calcule $p(0)$, $p(2)$ y $p(5)$, y determine $p^{-1}(1)$, $p^{-1}(32)$ y $p^{-1}(4)$

Determine si son inversas o no

79. $q(u) = \frac{1}{4}u+2$ y $f(x) = 4x-8$

80. $f(r) = -\frac{3}{5}r+3$ y $p(v) = -\frac{5}{3}v+5$

81. $c(t) = t^7-11$ y $h(x) = \sqrt[7]{x-11}$

82. $p(v) = \dfrac{v}{v+3}$ y $c(z) = \dfrac{3z}{z-1}$

83. $h(z) = \dfrac{2z}{z+1}$ y $g(r) = \dfrac{r+1}{r-2}$

84. $q(u) = \sqrt{u-1}$ y $g(w) = w^2+1$

85. $q(u) = \sqrt{u-1}$ y $g(w) = w^2+1$ para $w \geq 0$

Encuentre la inversa

86. $w = 3x+5$

87. $y = 6-2p$

88. $t = \dfrac{4y-1}{7}$

89. $v = \frac{1}{3}u+\frac{1}{2}$

90. $z = w^3-6$

91. $q = \sqrt[3]{4-8u}$

92. $u = \sqrt[5]{2x^3+1}-2$

93. $p = \sqrt[11]{\frac{1}{4}t^5-2}+6$

94. $x = \dfrac{1}{r-3}$

95. $v = \dfrac{2p+1}{p}$

96. $r = \dfrac{3q}{1-2q}$

97. $t = \dfrac{y^3}{1+y^3}$

98. $z = v^2 + 3$ para $v \geq 0$

99. $r = y^2 + 4y$ para $y \geq -2$

100. $w = 16 - 10z + z^2$ para $z \leq 5$

Encuentre el dominio, la inversa y el ámbito

101. $q(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

102. $g(y) = \dfrac{y+5}{2y-4}$ para $y \neq 2$

103. $h(t) = \dfrac{2}{5t+8}$ para $t \neq -8/5$

104. $p(r) = \dfrac{r-2}{r+3}$ para $r \neq -3$

105. $h(w) = \dfrac{3w+2}{1-w}$ para $w \neq 1$

106. $f(u) = \sqrt[3]{-2u-2}$

107. $q(v) = 1 - \sqrt[5]{v+6}$

108. $p(z) = \sqrt{1-z}$ para $z \leq 1$

109. $g(x) = x^2 - 2$ para $x \geq 0$

110. $f(t) = -t^2 + 8t - 7$ para $t \leq 4$

111. $r(t) = 6 - 2\sqrt{t}$

112. $p(u) = u^2 + 4u + 4$ para $u \geq -2$

CAPÍTULO 6

Funciones lineales y cuadráticas

Dos tipos importantes de funciones son:

- Las *funciones lineales*, de la forma $f(x) = mx + b$ con m y b constantes.
- Las *funciones cuadráticas*, con fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

El gráfico de una función lineal es una recta; el de una función cuadrática es una parábola.

6.1 Rectas

Una recta en el plano cartesiano está caracterizada por un punto y una pendiente. La *pendiente* es una medida de la inclinación de la recta: una pendiente positiva corresponde a una recta creciente (de izquierda a derecha); una pendiente negativa corresponde a una recta decreciente, y una pendiente cero a una recta horizontal.

Para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m, la ecuación es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{(forma punto-pendiente).}$$

Una forma alterna de describir una recta es a partir de su pendiente y el punto de intersección con el eje Y: la recta con pendiente m que interseca el eje Y en el punto $(0, b)$ tiene ecuación

$$y = mx + b \quad \text{(forma pendiente-intersección).}$$

Todavía otra forma de describir una recta es con una ecuación como

$$ax + by = c \quad \text{con } a,\ b \text{ y } c \text{ constantes (forma general).}$$

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{si } x_1 \neq x_2.$$

Si $y_1 = y_2$ (ninguno de los puntos está más arriba que el otro), la recta es horizontal y su pendiente es cero. La ecuación de una recta horizontal es $y = b$, con b constante. En particular, el eje X tiene ecuación $y = 0$.

Si $x_1 = x_2$ (ninguno de los puntos está más a la derecha que el otro), la recta es vertical y su pendiente está indefinida. La ecuación de una recta vertical es $x = a$, con a constante. El eje Y tiene ecuación $x = 0$.

Si dos rectas tienen pendientes respectivas m_1 y m_2, entonces ellas son *paralelas* si $m_1 = m_2$, y son *perpendiculares* (también llamadas *ortogonales* o *normales*) si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Ejemplo 1

La recta que pasa por los puntos $(-3,5)$ y $(0,-1)$ tiene pendiente

$$m = \frac{(5)-(-1)}{(-3)-(0)} = \frac{6}{-3} = -2.$$

Como la recta pasa por el punto $(x_1, y_1) = (-3,5)$, su ecuación punto-pendiente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 5 = -2(x+3).$$

Si se quisiera encontrar la ecuación pendiente-intersección, se puede despejar y en la ecuación anterior: $y = -2(x+3)+5 = -2x-1$.

También pudimos haber tomado $(x_1, y_1) = (0,-1)$, que también está en la recta. Entonces la ecuación punto-pendiente resulta ser $y+1 = -2(x-0)$. La forma pendiente-intersección, con y despejado, es $y = -2x-1$ como antes.

Del ejemplo anterior podemos inferir que cada recta tiene muchas ecuaciones punto-pendiente (una para cada punto) pero solamente una ecuación pendiente-intersección (o ninguna, en el caso de las rectas verticales).

Ejemplo 2

Encontrar la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $(4,-3)$ y que es paralela a la recta L_2 de ecuación $4x+5y=15$.

Siempre que necesitemos la ecuación de una recta debemos empezar por buscar un punto y una pendiente. En este caso tenemos:

- Punto: $(4,-3)$, dado en el planteo.
- Pendiente: como L_1 y L_2 son paralelas, tienen la misma pendiente. Empezamos por encontrar la pendiente de L_2 despejando y en su ecuación:

  $$4x+5y=15 \quad \Rightarrow \quad y = -\tfrac{4}{5}x+3$$

  donde vemos que la pendiente es $m_2 = -\frac{4}{5}$. Entonces la pendiente de L_1 es la misma: $m_1 = -\frac{4}{5}$.

Sabiendo ya que L_1 pasa por $(4,-3)$ y tiene pendiente $m_1 = -\frac{4}{5}$, podemos inmediatamente escribir su ecuación: $y+3 = -\frac{4}{5}(x-4)$.

Ejemplo 3

Dada la recta L_1 con ecuación $9x-3y=2$, encontrar la ecuación de la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y que pasa por el punto de intersección de L_1 con el eje X.

Busquemos punto y pendiente:

- Punto: L_2 pasa por el punto de intersección de L_1 y el eje X. Este se encuentra sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de L_1: $9x - 3(0) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$, así que el punto es $(\frac{2}{9}, 0)$.
- Pendiente: L_1 y L_2 son perpendiculares, así que el producto de sus pendientes es $m_1 \cdot m_2 = -1$. Como en el ejemplo anterior, despejamos y en la ecuación de L_1 para encontrar m_1: $9x - 3y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2/3$, así que $m_1 = 3$. Entonces

$$(3) \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

Teniendo el punto $(\frac{2}{9}, 0)$ y la pendiente $m_2 = -\frac{1}{3}$, obtenemos la ecuación de L_2: $y - 0 = -\frac{1}{3}(x - \frac{2}{9})$. ◻

Encuentre las ecuaciones punto-pendiente y pendiente-intersección de la recta…

1. … que pasa por $(-1, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$

2. … que pasa por $(12, 0)$ y tiene pendiente $m = 4/3$

3. … horizontal que pasa por $(2, -3)$

4. … horizontal que pasa por $(-6, 1/2)$

5. … vertical que pasa por $(-4/5, 2/5)$

6. … vertical que pasa por $(1, -5/3)$

7. … que pasa por $(-6, -4)$ y $(-2, 4)$

8. … que pasa por $(2, 0)$ y $(-7, -1)$

9. … que pasa por $(1, 6)$ y $(-4, 6)$

10. … que pasa por $(5, 4)$ y $(5, -1)$

11. … que pasa por $(-1, 8)$ y es paralela a $y = 8x - 5$

12. … que pasa por $(-6, 9)$ y es paralela a $y + 3 = 2(x - 6)$

13. … que pasa por $(2, -8)$ y es paralela a $x + 2y + 3 = 0$

14. … que pasa por $(-7, 9)$ y es paralela a $y = 2$

15. … que pasa por $(6, 7)$ y es paralela a $x = 4$

16. … que pasa por $(-5, -2)$ y es paralela al eje X

17. … que pasa por $(-4, 5)$ y es paralela al eje Y

18. … que pasa por $(4, -5)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, 6)$ y $(-3, -7)$

19. ... que pasa por el punto de intersección de $y = 2x+1$ con $y-x = 4$ y es paralela a $2x+3y = 6$

20. ... que pasa por $(10,4)$ y es perpendicular a $2x+5y = 1$

21. ... que pasa por $(3,0)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-7,0)$ y $(5,-9)$

22. ... que pasa por $(5,0)$ y es perpendicular a $x = 8$

23. ... que pasa por $(4,-9)$ y es perpendicular a $y = -1$

24. ... que pasa por $(-4,6)$ y es perpendicular al eje X

25. ... que pasa por $(2,7)$ y es perpendicular al eje Y

26. ... que pasa por el punto de intersección de $7x-7y+10 = 0$ con $9x+y = 10$ y es perpendicular a $8x-4y = 0$

27. ... que pasa por el punto de intersección de $6x-3y = 21$ con $4x-9y = 7$ y es perpendicular a la recta por $(-10,-2)$ y $(6,-6)$

6.2 Aplicaciones de las funciones lineales

Ejemplo 4

El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₡650 asistirán 200 personas. Expresar el número de asistentes como función del precio de entrada. ¿Cuántas personas asistirían si se cobrara ₡680? (Compare con el Ejercicio 1 del Capítulo 15, página 243.)

Ya que se pide la asistencia como función del precio, denotemos con y el número de asistentes, y con x el precio de entrada. Sabemos que y es función lineal de x y que su gráfico pasa por los puntos $(600,300)$ y $(650,200)$. Tenemos entonces:

- Punto: tomemos $(600,300)$ (aunque podríamos usar $(650,200)$ y llegar al mismo resultado).
- Pendiente: $m = \dfrac{300-200}{600-650} = -2.$

De aquí obtenemos la ecuación $y-300 = -2(x-600)$. Como se pide expresar y en función de x, despejamos: $y = -2(x-600)+300 = 1500-2x$.

Si se cobrara ₡680, tendríamos el precio $x = 680$ y la asistencia $y = 1500-2(680) = 140$ personas.

La pendiente de una recta es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x; es decir, si x aumenta en una unidad, y aumentará en m unidades. En el ejemplo anterior, la interpretación de $m = -2$ es que por cada unidad que aumente x, el precio, habrá una disminución de dos unidades en y, la asistencia. En otras palabras, por cada colón que aumente el precio, asistirán dos personas menos.

Resuelva

28. Una función $N(p)$ que expresa el número de artículos que pueden venderse a un precio unitario p se llama función de demanda. Una compañía puede vender 500 pelucas a ₡19 000 cada una, y 300 a ₡24 000 cada una. Suponiendo que es lineal, encuentre la función de demanda. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

29. Una fotocopiadora se compró nueva por \$2500, y a los cuatro años se vendió por la mitad de ese precio. Si el valor decrece linealmente con el tiempo, escriba una ecuación que dé el valor V como función del tiempo t desde que se compró. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

30. Experiencias pasadas indican que la producción de huevos en una granja crece linealmente con el tiempo. En 1990 fue de 70 000 cajas, y en el 2000 fue de 82 000 cajas. Escriba una fórmula que dé el número N de cajas producidas t años después de 1990, y úsela para predecir la producción del año actual. ¿Cómo se interpreta la pendiente? (Compare con el Ejercicio 2 del Capítulo 15, página 243.)

31. El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₡600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₡700 asistirán 240 personas.

(a) Exprese el precio de entrada como función del número de asistentes. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

(b) ¿Qué precio debe cobrarse para que asistan 450 personas?

(c) ¿Cuántas personas asistirán si el precio es ₡900?

32. Un tractor nuevo cuesta \$16 000, y cada año se devalúa en un 8% de su valor original. Encuentre una fórmula para el valor V del tractor después de t años.

33. La demanda de un artículo varía linealmente con el precio. Se sabe que si el precio es $p = 40$, la demanda será $q = 3700$, y que si el precio se aumenta a $p = 50$, la demanda disminuirá a $q = 2900$.

(a) Exprese la demanda como función del precio.

(b) ¿Qué precio deben fijar para obtener un ingreso de 140 000?

34. Una pieza de equipo comprada hoy en ₡480 000 se devalúa linealmente hacia un valor de desecho de ₡30 000 después de 20 años.

(a) Escriba una fórmula para su valor V después de n años.

(b) Calcule el valor de la pieza dentro de 15 años.

(c) ¿Cuál es el dominio de la función V?

35. Un transportista cobra un monto base fijo, más un monto por kilómetro. Si cobra ₡17 000 por un viaje de 8 km, y ₡22 250 por uno de 11.5 km, ¿cuál es el monto base y cuánto el monto por kilómetro?

36. Hubo 9473 estudiantes que se presentaron al examen de admisión para entrar al ITCR en el 2003, y 10341 para entrar en el 2006. Suponiendo que el número de estudiantes aumenta linealmente con el tiempo, escriba el número de estudiantes como función del año. ¿Cuántos estudiantes más se presentan cada año?

37. La medida de temperatura en grados centígrados está relacionada linealmente con la medida en grados Farenheit. Sabiendo que la temperatura de congelación del agua es 0° C ó 32° F, y que la de ebullición es 100° C ó 212° F, exprese la medida en grados centígrados como función de la medida en grados Farenheit.

38. La estatura de una niña aumentó linealmente con su edad desde los cuatro hasta los trece años. Ella midió 112.8 cm al cumplir seis años, y 136.7 cm al cumplir diez. (Compare con el Ejemplo 1 del Capítulo 15, página 241.)

(a) Exprese la estatura y como función de la edad x.

(b) ¿Cuándo medía al cumplir cuatro, ocho y trece años?

(c) Aproximadamente a qué edad alcanzó 1.5 m de estatura?

(d) ¿Cuántos centímetros por año aumentó su estatura?

39. En un experimento para probar la eficacia de un medicamento en el tiempo de recuperación de los pacientes sometidos a una operación se encontró que un paciente a quien se le aplicó una dosis de 0.9 gramos tardó 27 horas en recuperarse, y otro con una dosis de 1.6 gramos tardó 13 horas. Suponga que el tiempo de recuperación depende linealmente de la dosis. (Compare con el Ejercicio 3 del Capítulo 15, página 243.)

(a) Encuentre la ecuación que expresa el tiempo en términos de la dosis. ¿Cómo se interpreta la pendiente?

(b) ¿Cuál es el tiempo de recuperación si no se aplica el medicamento?

(c) ¿Cuál debe ser la dosis para que el tiempo esperado de recuperación sea menor que 18 horas?

40. Un vendedor gana un sueldo fijo más un porcentaje de comisión por sus ventas mensuales. En un mes en que sus ventas fueron de ₡480 000, recibió un pago total de ₡474 000. Al mes siguiente sus ventas fueron de ₡640 000, y recibió un pago de ₡482 000. Encuentre una ecuación que dé su pago total P como función de las ventas v. ¿Cuál es su sueldo fijo y cuál es el porcentaje de comisión? (Compare con el Ejercicio 6 del Capítulo 15, página 244.)

41. A mediados del 2002 el tipo de cambio del colón con respecto al dólar era de ₡357.99 por dólar, y a mediados del 2005 era ₡476.49. Suponga que el crecimiento ha sido lineal. (Compare con el Ejercicio 4 del Capítulo 15, página 243.)

(a) Encuentre una ecuación que dé el tipo de cambio como función del número de año.

(b) ¿En cuántos colones por dólar aumenta el tipo de cambio cada año?

(c) ¿Aproximadamente cuál fue el tipo de cambio a mediados del año 2004?

(d) Si se mantiene esa tendencia, ¿en qué año se alcanzará una tasa de ₡600 por dólar?

6.3 Parábolas

El gráfico de una ecuación cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c constantes y $a \neq 0$, es una *parábola*.

La parábola es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y cóncava hacia abajo si $a < 0$ (si fuera $a = 0$, la ecuación sería $y = bx + c$, lineal, y el gráfico sería una recta).

El punto más bajo en una parábola cóncava hacia arriba, o el más alto en una cóncava hacia abajo, se llama *vértice*. Las coordenadas (x_v, y_v) del vértice están dadas por las fórmulas[1]

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{y} \quad y_v = ax_v^2 + bx_v + c.$$

La parábola interseca el eje Y cuando $x = 0$, lo que resulta en $y = c$. El eje X se interseca cuando $y = 0$, lo que sucede cuando $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$, pero solamente si $b^2 - 4ac \geq 0$. En resumen, los puntos de intersección con los ejes son[2]

$$(0, c), \quad (x_1, 0) \quad \text{y} \quad (x_2, 0)$$

donde x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, si existen.

Ejemplo 5

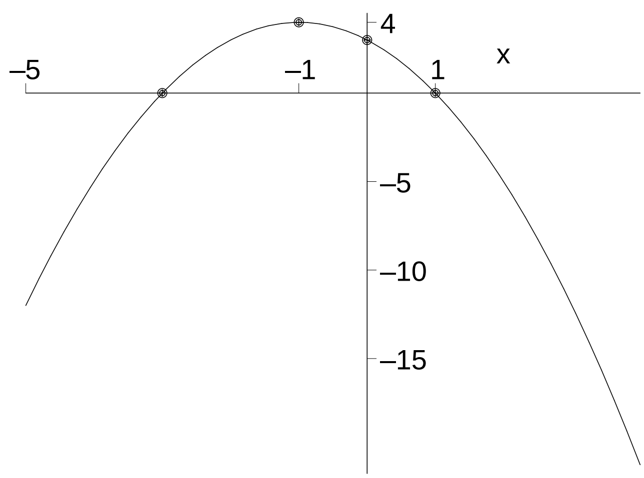
Sea $y = 3 - x^2 - 2x$. Esta es una ecuación cuadrática con $a = -1$, $b = -2$ y $c = 3$. De aquí obtenemos la siguiente información sobre su gráfico:

- $a = -1$ es negativo, así que la parábola es cóncava hacia abajo.
- Intersección con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 3$, así que el punto es $(0, 3)$.
- Intersecciones con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 3 - x^2 - 2x = 0$, que lleva a $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$. Entonces los puntos son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.
- Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$, de donde calculamos $y_v = 3 - (-1)^2 - 2(-1) = 4$: el vértice es $(-1, 4)$.

[1] Alternativamente, la coordenada y del vértice también puede calcularse como $y_v = -\Delta/(4a)$, donde $\Delta = b^2 - 4ac$, o bien como $y_v = c - b^2/(4a)$.

[2] El punto $(0, c)$ siempre existe, pero los otros dos necesitan que $b^2 - 4ac \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no interseca el eje X; si $b^2 - 4ac = 0$, lo interseca en un solo punto.

De lo anterior resulta el siguiente gráfico:



El rango, como vemos en el gráfico, es el intervalo $]-\infty, 4]$ (la parte del eje Y "cubierta" por el gráfico).

Grafique indicando el vértice, las intersecciones con los ejes y el rango

42. $y = 9 + 8u - u^2$

43. $y = 12r^2 - 36r + 6$

44. $y = 36x + 15 - 3x^2$

45. $y = v^2 - 4v$

46. $y = 6z + z^2$

47. $y = t^2 - 12t + 40$

48. $y = 4.41w^2 - 2.94w + 0.49$

49. $y = 6u - 9 - u^2$

50. $y = 0.5z^2 + 3$

51. $y = 5t - (t + 2)(t + 3)$

6.4 Aplicaciones de las funciones cuadráticas

El hecho de que una función cuadrática alcance su máximo o su mínimo en el vértice puede usarse para resolver problemas como encontrar una utilidad máxima o un costo mínimo, si es que la utilidad o el costo pueden escribirse como una función cuadrática.

Ejemplo 6

El dueño de un teatro ha notado que la asistencia disminuye linealmente con el precio. Sabe que si cobra ₵600 asistirán 300 personas, y que si cobra ₵650 asistirán 200 personas. ¿Qué precio debe cobrar para maximizar el ingreso?

En el Ejemplo 4 (página 90) encontramos que la asistencia q podía expresarse en función del precio p según la ecuación $q = 1500 - 2p$ (allá usamos x, y en vez de p, q, con los mismos significados). Ahora podemos escribir el ingreso I como función del precio:

$$I = pq = p(1500 - 2p) = 1500p - 2p^2.$$

Esta es una función cuadrática con $a = -2$, $b = 1500$ y $c = 0$. Entonces el gráfico es cóncavo hacia abajo y alcanza un máximo en su vértice:

$$p_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2(-2)} = 375.$$

Concluimos que si se cobra ₡375 se obtendrá un ingreso máximo, dado por

$$I = 1500(375) - 2(375)^2 = 281\,250 \text{ colones.}$$

En situaciones en las que un precio aumenta y la cantidad vendida disminuye, o viceversa, comúnmente es posible plantear el ingreso en términos de una tercera variable que controla tanto al precio como a la cantidad vendida, de manera que el ingreso sea una función cuadrática de esa tercera variable.

Ejemplo 7

La edición dominical de un periódico vende 150 000 ejemplares a ₡500 cada uno. Se ha determinado que por cada incremento de ₡10 en el precio, las ventas se reducirán en 2500 ejemplares. ¿Cuál precio maximizará el ingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

Aunque la incógnita principal es el precio, podemos reconocer que tanto el precio como la cantidad vendida están controlados por una tercera variable: el número de incrementos de ₡10 sobre el precio actual de ₡500. Denotando con n esta variable, podemos escribir el precio como $p = 500 + 10n$ y el número de ejemplares como $q = 150000 - 2500n$. Entonces el ingreso es

$$I = pq = (500 + 10n)(150000 - 2500n) = 75\,000\,000 + 250\,000n - 25\,000n^2.$$

Esta función cuadrática alcanza un máximo (porque $a = -25000 < 0$) en el vértice: $n_v = \frac{-250\,000}{2(-25\,000)} = 5$, lo cual resulta en $p = 500 + 10(5) = 550$. Entonces el precio que maximiza el ingreso es ₡550.

El ingreso máximo puede calcularse sustituyendo n en la fórmula:

$$I = 75\,000\,000 + 250\,000(5) - 25\,000(5)^2 = 75\,625\,000 \text{ colones,}$$

o bien calculando primero $q = 150000 - 2500n = 137\,500$ y recordando que

$$I = pq = (550)(137500) = 75\,625\,000 \text{ colones.}$$

Resuelva

52. Encuentre dos números cuya suma sea 200 y cuyo producto sea máximo.

53. Encuentre dos números cuya diferencia sea 50 y su producto sea mínimo

54. El costo C en dólares de producir q unidades de cierto producto es $C = 0.003q^2 - 1.5q + 2400$. Encuentre el nivel de producción q que minimiza el costo.

55. El dueño de una fábrica de refrescos sabe que su ganancia en miles de colones semanales, como función del número x de cajas de refrescos vendidas, está dada por la ecuación $U = -0.01x^2 + 9x - 1296$. ¿Cuántas cajas se deben vender semanalmente para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima?

56. El dueño de un automóvil determina que el costo en colones por kilómetro al conducir su vehículo a una velocidad de v km/h es $C = 0.015v^2 - 2.5v + 120$. Encuentre la velocidad más económica.

57. Para cierta compañía, las utilidades mensuales obtenidas al invertir x dólares al mes en publicidad están dadas por $U = -0.12x^2 + 510x - 25000$. ¿Cuánto deberían invertir en publicidad para maximizar sus utilidades?

58. En el Ejercicio 28, ¿qué precio debe fijarse para obtener un ingreso máximo?

59. En el Ejercicio 31, ¿qué precio debe fijarse para obtener un ingreso máximo?

60. En el Ejercicio 33, ¿qué precio debe fijarse para obtener un ingreso máximo?

61. La ecuación de demanda para cierto producto es $3q + 100p - 1800 = 0$, donde p es el precio unitario y q el número de unidades vendidas. Determine el nivel de producción que maximiza los ingresos del fabricante para este producto.

62. Una fábrica de computadoras ha estado vendiendo mil unidades de cierto modelo por semana a \$600 cada una. Un estudio de mercado indica que podrían vender veinte unidades más por semana por cada \$10 de descuento en el precio. ¿Qué precio deben fijar para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

63. Una compañía de televisión por cable da servicio actualmente a 5000 usuarios y cobra ₡12000 mensuales a cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada disminución de ₡150 en la tarifa mensual se suscribirán 85 nuevos clientes. Determine la cuota mensual y el número de usuarios que resultan en un ingreso mensual máximo. ¿Cuál es el ingreso mensual máximo?

64. Una revista vende diez mil ejemplares a ₡1500 cada uno. Puede vender cien más por cada ₡10 que disminuya el precio. Determine a qué precio se maximizará el ingreso. ¿Cuál es el ingreso máximo?

65. Un edificio tiene 21 apartamentos, que se alquilan a ₡150 000 mensuales. Por cada incremento de ₡10 000 en el precio mensual quedará un apartamento sin alquilar. ¿Qué precio debe cobrarse para maximizar el ingreso total en alquileres?

66. Un hotel con 100 habitaciones se llena si la tarifa es de \$36 la noche. Por cada dólar que aumente la tarifa, dos habitaciones quedarán sin alquilar. ¿Qué tarifa deben cobrar para obtener el máximo ingreso?

67. Un agricultor estima que si cosecha papas ahora, obtendrá 180 kg con valor de ₡450 el kilo. Si espera, la cosecha se incrementará en 30 kg por semana, pero el precio disminuirá en ₡30 por semana. ¿Cuándo debe cosechar para obtener el máximo ingreso?

68. Un agricultor calcula que si siembra 120 árboles por hectárea, entonces cada árbol adulto dará 600 naranjas al año. Por cada árbol más que plante por hectárea, la producción de cada árbol disminuye en tres naranjas al año. ¿Cuántos árboles debe plantar por hectárea para obtener el mayor número posible de naranjas al año, por hectárea? ¿Cuál es el mayor número posible de naranjas?

69. Un distribuidor tiene 500 cajas de mangos para vender. Puede venderlas hoy a ₡1000 la caja. Cada día que pasa el precio aumenta en ₡50, pero también se pierden ocho cajas por descomposición. Sea n el número de días que espera para vender (a partir de hoy).

(a) Exprese el precio de venta, el número de cajas que puede vender y el ingreso como funciones de n.

(b) ¿Cuál es el dominio del ingreso como función de n?

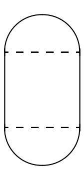
(c) ¿Cuántos días debe esperar para obtener el ingreso máximo? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

70. Un objeto es arrojado al aire de manera que su altura h (en metros) sobre el terreno, t segundos después de lanzado, es $h(t) = 14t - 5t^2$.

(a) Calcule la altura máxima alcanzada.

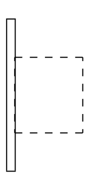
(b) Calcule el tiempo que el objeto dura en el aire.

(c) Encuentre el dominio de la función $h(t)$.



71. El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (vea la figura a la izquierda). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.

72. Un pedazo de alambre de 60 cm se dobla formando un rectángulo. ¿Qué dimensiones del rectángulo (base y altura) dan el área máxima? ¿Cuál es el área máxima?



73. Un hombre dispone de 120 m de cerca para rodear un terreno rectangular. Se usará un muro existente en uno de los lados del terreno, y se cercarán los otros tres lados (vea la figura a la izquierda). Calcule las dimensiones que encierran una área máxima.

CAPÍTULO 7

Funciones exponenciales y logarítmicas

7.1 Funciones exponenciales

La *función exponencial* con base b es la definida por la fórmula $f(x) = b^x$, donde $b > 0$, $b \neq 1$. Todas las funciones exponenciales tienen por dominio a $\mathbb{R}$ y por rango a $]0, \infty[$. Relacionadas con las funciones exponenciales están las funciones con fórmula $g(x) = ab^x + c$, con a, b y c constantes, $b > 0$ y $b \neq 1$; su dominio es $\mathbb{R}$ pero su rango depende de los valores de a y c.

La función exponencial *natural* es la que tiene base e: $f(x) = \mathrm{e}^x$, donde la constante e vale aproximadamente 2.718281828459. Aunque el número e no parece tener nada “natural” en su expansión decimal, la función exponencial natural resulta tener muchas aplicaciones en finanzas, estadística y las ingenierías.

Recuerde las principales propiedades de los exponentes, mencionadas ya en la página 4 (por ejemplo, que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, entre otras). A estas añadimos una nueva:

$$b^x = b^y \Rightarrow x = y \quad \text{si } b > 0,\ b \neq 1.$$

Ejemplo 1

Encontrar una función de la forma $p(x) = ab^x$ cuyo gráfico pase por los puntos $(-1, 48)$ y $(2, 6)$.

Para el punto $(-1, 48)$ se requiere que $p(-1) = ab^{-1} = 48$, y para $(2, 6)$ se necesita $p(2) = ab^2 = 6$. Obtenemos entonces este sistema de ecuaciones con incógnitas a y b:

$$\begin{cases} ab^{-1} = 48 \\ ab^2 = 6 \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda ecuación, específicamente dividiendo el lado izquierdo de la primera por el lado izquierdo de la segunda, y el lado derecho de la primera por el derecho de la segunda[1], obtenemos

[1]Esto es análogo al método de restar las ecuaciones para resolver algunos sistemas lineales: al restar las ecuaciones se cancela una de las incógnitas. Aquí dividimos para cancelar la incógnita a.

$$
\begin{aligned}
\frac{ab^{-1}}{ab^2} &= \frac{48}{6} \\
b^{-3} &= 8 \\
{\scriptstyle [...]^{-1/3}} & \quad {\scriptstyle [...]^{-1/3}}
\end{aligned}
$$

$$b = 1/2$$

Ahora que tenemos $b = 1/2$ podemos sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones del sistema, digamos en la primera, para despejar a:

$$
\begin{aligned}
ab^{-1} &= 48 \\
a(1/2)^{-1} &= 48 \\
a \cdot 2 &= 48 \\
a &= 24
\end{aligned}
$$

Teniendo ya $a = 24$ y $b = 1/2$, concluimos que $p(x) = 24(1/2)^x$. En efecto, así se cumple $p(-1) = 24(1/2)^{-1} = 24 \cdot 2 = 48$, y $p(2) = 24(1/2)^2 = 24(1/4) = 6$, como queríamos.

El sistema en el ejemplo anterior también pudo resolverse despejando y sustituyendo: de la primera ecuación despejamos $a = 48b$, y al sustituirlo en la segunda llegamos a $48b^3 = 6$. De aquí encontramos $b = 1/2$, y entonces $a = 48(1/2) = 24$.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $8^{p+5} = 4 \cdot 2^{1-p}$.

Empezamos por escribir todas las bases en términos de 2 para luego usar las propiedades de las potencias y simplificar:

$$
\begin{aligned}
(2^3)^{p+5} &= 2^2 \cdot 2^{1-p} \\
2^{3(p+5)} &= 2^{2+1-p} \\
2^{3p+15} &= 2^{3-p}
\end{aligned}
$$

En este punto, teniendo dos potencias iguales y con igual base, podemos igualar los exponentes: $3p + 15 = 3 - p$. Esta ecuación lineal tiene por solución $p = -3$, y esta es entonces la solución de la ecuación original.

Comprobemos: el lado izquierdo de la ecuación es $8^{-3+5} = 8^2 = 64$, y el lado derecho es $4 \cdot 2^{1+3} = 4 \cdot 2^4 = 4 \cdot 16 = 64$.

Ejemplo 3

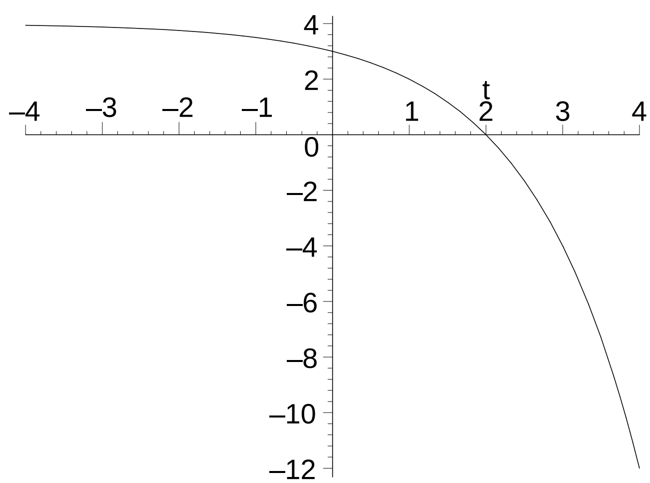
La función $h(t) = 4 - 2^t$ tiene por dominio $\mathbb{R}$. Su gráfico interseca a los ejes en los siguientes puntos:

- Eje Y: $t = 0 \Rightarrow y = h(0) = 4 - 2^0 = 3$, así que el punto es $(0,3)$.
- Eje T: $y = 0 \Rightarrow 0 = h(t) = 4 - 2^t \Rightarrow 2^t = 4 \Rightarrow 2^t = 2^2$, de donde deducimos que $t = 2$. El punto entonces es $(2,0)$.

Podemos graficar basándonos en lo anterior y en la siguiente tabla de valores:

t	-2	-1	0	1	2
$h(t)$	$15/4$	$7/2$	3	2	0

El gráfico es entonces



Se puede notar en el gráfico que el rango de h es $]-\infty, 4[$.

Encuentre una función de la forma ab^x con las propiedades dadas

1. $f(0) = 3$, $f(1) = 15$
2. $q(1) = 4$, $q(2) = 40$
3. $h(-1) = 8$, $h(1) = 2$
4. $g(-2) = -2$, $g(4) = -250$
5. $r(-1) = 8/3$, $r(3) = 27/2$
6. $p(1/3) = -4$, $p(0) = -1$

Resuelva

7. $e^{-y} = 1$

8. $3^{2u+1} = 9$

9. $3^t = -9$

10. $5^{1-4r} = 5^4$

11. $8^w = \left(\frac{1}{32}\right)^{2-w}$

12. $27^t = 1/9$

13. $32^{3v-2} = 1/4$

14. $7^{x-x^2} = \frac{1}{49^x}$

15. $\left(\frac{3}{2}\right)^z = \frac{8}{27}$

16. $\frac{100^q}{10} = 1000 \cdot 10^q$

17. $8 \cdot 5^y = 3 \cdot 5^y + 25$

18. $3 \cdot 2^{2x} = 8 - 4^x$

Grafique, indicando el rango y las intersecciones con los ejes

19. $g(t) = 3 \cdot 2^t$

20. $h(x) = -5\left(\frac{2}{3}\right)^x$

21. $r(u) = 4 + 2^u$

22. $y(r) = 3 + e^{r+2}$

23. $q(w) = 1 - 4 \cdot 8^{3-2w}$

24. $z(x) = 18 - 2 \cdot 3^{1-x}$

25. $p(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t+3} - 20$

26. $w(x) = \frac{1}{3} - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$

7.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales

Cuando un monto P se invierte a una tasa anual de *interés compuesto*[2] r (como decimal, no como porcentaje) durante t años, entonces el monto acumulado es

$$A = P(1+r)^t.$$

De este monto, P es la *inversión inicial*, y la diferencia $I = A - P$ es el *interés* ganado.

De manera más general, si el interés se paga n veces al año (por ejemplo, interés compuesto mensualmente se refiere a que se paga cada mes, o $n = 12$ veces al año; el interés compuesto semestralmente se paga cada semestre: $n = 2$ veces al año), entonces la fórmula es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

[2] El interés es compuesto cuando cada vez que se paga, el interés se añade al monto invertido. De esta manera los intereses mismos empiezan a ganar interés.

Ejemplo 4

Si un banco ofrece una tasa de interés de 6% anual, compuesta trimestralmente, ¿cuánto debe invertirse hoy para tener acumulado \$2500 dentro de tres años?

De las cinco variables en la ecuación $A = P(1+r/n)^{nt}$, conocemos $r = 0.06$ (la tasa es 6%), $n = 4$ (se compone trimestralmente), $A = 2500$ (se desea acumular \$2500) y $t = 3$ (el plazo de la inversión es tres años). Entonces tenemos la siguiente ecuación, donde la incógnita es P, el monto por invertir:

$$\begin{aligned}
2500 &= P(1+0.06/4)^{4\times 3}\\
2500 &= P(1+0.015)^{12}\\
2500 &= P\cdot 1.015^{12}\\
2500 &= P\cdot 1.195618171\\
P &= 2500/1.195618171 \approx 2090.97
\end{aligned}$$

Entonces debe invertirse \$2090.97 hoy.

Si una cantidad crece exponencialmente con una tasa de incremento r por unidad de tiempo (por año, por mes, etc), entonces su valor dentro de t unidades de tiempo será

$$V(t) = V_{\mathrm{i}}(1+r)^t$$

donde V_{i} es el valor inicial. Esto incluye el caso del interés compuesto anualmente, donde $V_{\mathrm{i}} = P$, el monto de la inversión, pero también puede aplicarse a muchas otras situaciones.

Ejemplo 5

Un cultivo de bacterias crece a una tasa de 4% al día. Si inicialmente había 15 000 bacterias, ¿qué cantidad habrá dentro de una semana?

El valor inicial es $V_{\mathrm{i}} = 15\,000$, la tasa de crecimiento es $r = 0.04$ (la unidad de tiempo es un día) y el número de unidades de tiempo es $t = 7$ (siete días en una semana). Entonces al cabo de ese período se tendrá

$$V(7) = V_{\mathrm{i}}(1+r)^t = 15\,000(1+0.04)^7 = 15\,000\cdot 1.04^7 \approx 19\,739.$$

Ese será el número de bacterias dentro de una semana.

Note en el ejemplo anterior que el número de bacterias como función del tiempo es $V(t) = ab^t$, donde $a = 15000$ es la población inicial, y $b = 1.04 = 1+r$. En general, en una función de la forma $f(x) = ab^x$, a es el valor inicial y b es uno más la tasa de crecimiento: $b = 1+r$. De esto último deducimos que la tasa de crecimiento es $r = b-1$.

Ejemplo 6

La población de cierto país ha crecido, desde el año 2000, según la fórmula $P(t) = 21.4 \cdot 1.0182^t$ en millones, donde t es el número de años desde el 2000. Aquí vemos que la población al inicio del siglo fue $a = 21.4$ millones, el valor inicial, y que la tasa de crecimiento fue $r = b - 1 = 0.0182$, o 1.82% anual.

Ejemplo 7

Una máquina industrial se compró hace cinco años, y su valor decrece exponencialmente con el tiempo. Hace dos años su valor se estimaba en \$3400, y hoy se estima en \$2800. ¿Cómo se expresa su valor como función de su edad? ¿Cuál fue el precio de compra? ¿Cuál es la tasa de depreciación anual?

Denotemos con $V(t)$ el valor de la máquina t años después de comprada. Según los datos, $V(t) = ab^t$, con $V(3) = 3400$ (hace dos años) y $V(5) = 2800$ (hoy). Tenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ab^3 = 3400 \\ ab^5 = 2800 \end{cases}$$

que, al resolver como en el Ejemplo 1, nos lleva a $a \approx 4549.46$ y $b \approx 0.907485$.

Entonces el valor de la máquina como función de su edad es

$$V(t) = 4549.46 \cdot 0.907485^t,$$

donde t es la edad, en años. El valor inicial es $V_{\mathrm{i}} = a \approx 4549.46$, de modo que el precio de compra fue \$4549.46. La tasa de "crecimiento" es $r = b - 1 \approx -0.092515$, que por ser negativa indica más bien una depreciación de 9.2515% por año.

Resuelva

27. Si se invierte \$1000 a una tasa de 10% compuesta anualmente, ¿cuál será el valor de la inversión dentro de 5 años?

28. ¿Cuánto debe invertirse hoy, a una tasa de 16% compuesta mensualmente, para disponer de ₡10 millones dentro de cuatro años?

29. Un litro de leche costaba ₡200 por litro hace un tiempo, y su precio ha aumentado en 12% al año. ¿Cuánto costaba cinco años más tarde? ¿Cuánto había costado dos años antes de costar ₡200?

30. En 1976 se reportó que la población mundial era de 4000 millones de habitantes, y se estimó que aumentaba a 1.8% por año. Escriba una fórmula para la población $P(t)$, en millones de habitantes, t años después de 1976. ¿Cuál sería la población en el año 2000?

31. Una computadora, adquirida por \$1800, se devalúa un 25% anualmente. Exprese su valor V como función del tiempo t en años desde que fue comprada. ¿Cuál es su valor a los cinco años?

32. Un terreno aumenta su valor de acuerdo con la fórmula $V(t) = 15 \cdot 1.23^t$ en millones de colones, donde t es el número de años desde que fue comprado. ¿Cuál fue el precio de compra? ¿Cuál es la tasa anual de plusvalía (el incremento en el valor)?

33. El valor de un automóvil t años después de comprado es $V(t) = 12.4 \cdot 0.87^t$, en millones de colones. ¿Cuál es el valor inicial? ¿Cuál es el valor a los seis años? ¿Cuál es la tasa de depreciación anual?

34. Hace tres años se invirtió una suma de dinero en una cuenta que paga interés compuesto trimestralmente. Hace dos años el valor de la inversión era ₡6.5 millones, y hoy es ₡7.4 millones. ¿Cuánto fue el monto invertido originalmente, y cuál es la tasa de interés anual?

35. El valor de un terreno aumenta exponencialmente con el tiempo. Hace cinco años se compró en ₡20 millones, y hoy está valorado en ₡36 millones. Encuentre una fórmula que dé su valor, en millones de colones, en función del número de años desde que se compró. ¿Cuál ha sido la tasa de incremento anual?

36. Una máquina se compró nueva hace ocho años, y ha venido depreciándose exponencialmente. Al año de comprada valía \$43 800, y hace dos años se valoró en \$37 250. Encuentre una fórmula que dé su valor, en miles de dólares, como función de su edad en años. ¿Cuánto costó nueva? ¿Cuál ha sido la tasa de depreciación anual? ¿Cuánto vale ahora?

37. Durante los años 1986 a 1999, el tipo de cambio del colón con respecto al dólar se incrementó en forma aproximadamente exponencial. En junio de 1988 era ₡74.75 por dólar y en junio de 1995 era ₡178.40 por dólar. Encuentre una fórmula para $TC(t)$, el tipo de cambio t años después de 1986 (en junio). ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual durante ese período? (Compare con el Ejercicio 16 del Capítulo 15, página 249.)

38. Durante el siglo 20, la población de Costa Rica creció en forma aproximadamente exponencial. Era 511 009 habitantes en 1931 y 2 559 845 en 1986. Encuentre una fórmula para $P(t)$, la población t años después del año 1900. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento anual en la población durante ese siglo? (Compare con el Ejercicio 15 del Capítulo 15, página 249.)

39. La población de un país se duplica aproximadamente cada treinta años. Si era cinco millones en el año 2000, encuentre una fórmula para $P(t)$, la población t años después del 2000. ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual?

40. La combustión de la madera puede darse a temperaturas bajas, pero es extremadamente lenta. El tiempo que tarda la combustión de un gramo de madera es una función exponencial de la temperatura. Suponga que un gramo de cierto tipo de madera se consume en un segundo a $600°$, y en 17 minutos a $500°$. Encuentre el tiempo de combustión de esta madera como función de la temperatura. ¿Cuánto tiempo tardará en quemarse un gramo de esta madera a $100°$?

7.3 Funciones logarítmicas

Para un número $b > 0$, $b \neq 1$, la *función logarítmica* con base b, $f(x) = \log_b x$ (la expresión a la derecha se lee "logaritmo en base b de x"), es la inversa de la función exponencial con base b, $g(y) = b^y$. Esto significa que

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x.$$

Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8,$$

y

$$\log_{4/9}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo que sabemos de funciones inversas, y dado que el dominio y el rango de cualquier función exponencial son $\mathbb{R}$ y $]0,\infty[$ respectivamente, tenemos también que

- El dominio de cualquier función logarítmica es $]0,\infty[$, así que $\log_b x$ existe solamente para $x > 0$.
- El rango de cualquier función logarítmica es $\mathbb{R}$.

El *logaritmo natural* de x, denotado $\ln x$, es el logaritmo con base $b = \mathrm{e}$, donde e es la base de la función exponencial natural ($\mathrm{e} \approx 2.718281828$):

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = x.$$

El *logaritmo común* de x, denotado $\log x$, es el logaritmo con base $b = 10$:

$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x.$$

Ejemplo 8

Resolver las tres ecuaciones (a) $\log_5(3x+7) = 2$, (b) $\log_b(8/729) = -3$ y (c) $\ln(1-y) = 2$.

(a) $\log_5(3x+7) = 2$ significa que $3x+7 = 5^2$, de donde se despeja $x = 6$.

(b) $\log_b(8/729) = -3$ significa que $8/729 = b^{-3}$. Elevando ambos lados a la $-1/3$ obtenemos

$$b = \left(\frac{8}{729}\right)^{-1/3} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{9}{2}.$$

(c) $\ln(1-y) = 2$ implica que $1 - y = \mathrm{e}^2$; de aquí que $y = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6.389$.

Las principales propiedades de los logaritmos son las cuatro siguientes, para a, b, x y y mayores que cero, y $a,b \neq 1$:

- $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b(x^p) = p\log_b x$
- $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Otras propiedades, que pueden deducirse de las anteriores y de la definición de logaritmo, son (para $b > 0$, $b \neq 1$):

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b x} = x$ para cualquier $x > 0$

Ejemplo 9

La expresión $\log_2 \dfrac{\sqrt{3c^2+5c+2}}{40(3-c)^3}$ puede descomponerse así:

$$\begin{aligned}
\log_2 \frac{\sqrt{3c^2+5c+2}}{40(3-c)^3} &= \log_2 \sqrt{3c^2+5c+2} - \log_2[8\cdot 5(3-c)^3] \\
&= \log_2(3c^2+5c+2)^{1/2} - [\log_2 8 + \log_2 5 + \log_2(3-c)^3] \\
&= \tfrac{1}{2}\log_2(3c^2+5c+2) - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c) \\
&= \tfrac{1}{2}\log_2[(3c+2)(c+1)] - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c) \\
&= \tfrac{1}{2}\log_2(3c+2) + \tfrac{1}{2}\log_2(c+1) - 3 - \log_2 5 - 3\log_2(3-c)
\end{aligned}$$

Ejemplo 10

La expresión $\log(a^2-b^2) - 2\log(a+b) + 1$ puede escribirse como un solo logaritmo así:

$$\begin{aligned}
\log(a^2-b^2) - 2\log(a+b) + 1 &= \log(a^2-b^2) - \log(a+b)^2 + \log 10^1 \\
&= \log 10 + \log(a^2-b^2) - \log(a+b)^2 \\
&= \log[10(a^2-b^2)] - \log(a+b)^2 \\
&= \log \frac{10(a^2-b^2)}{(a+b)^2} \\
&= \log \frac{10(a-b)}{a+b}
\end{aligned}$$

Ejemplo 11

El valor de $\log_3 35$ puede aproximarse con ayuda de una calculadora escribiéndolo como

$$\log_3 35 = \frac{\ln 35}{\ln 3} \approx \frac{3.555348}{1.0986123} \approx 3.2362173.$$

En efecto, $3^{3.2362173} \approx 35$ (cualquier diferencia se debe a que 3.2362173 no es el logaritmo exacto sino solo una aproximación).

También pudo usarse logaritmo común en vez de logaritmo natural:

$$\log_3 35 = \frac{\log 35}{\log 3} \approx \frac{1.544068}{0.4771213}$$

con exactamente el mismo resultado.

Ejemplo 12

Graficar $g(v) = \ln(2v+4)$.

Empecemos por encontrar el dominio de g: como el dominio de la función ln es $]0,\infty[$, entonces es necesario que $2v+4>0$ para que $g(v)$ esté definido. La inecuación $2v+4>0$ tiene solución $v>-2$, así que el dominio de g es $]-2,\infty[$.

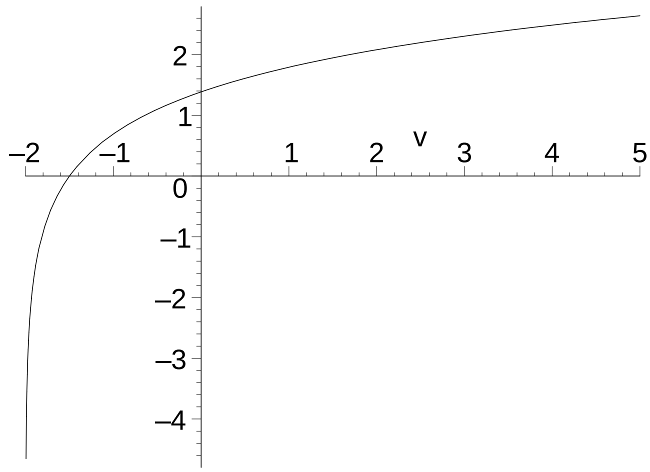
Veamos las intersecciones con los ejes:

- Con el eje Y: $v=0 \Rightarrow y=g(0)=\ln 4 \approx 1.386$, así que el punto es $(0,1.386)$.
- Con el eje V: $y=0 \Rightarrow 0=g(v)=\ln(2v+4)$, que en forma exponencial significa $e^0=2v+4$. Como $e^0=1$, la solución es $v=-3/2$, y el punto de intersección es $(-3/2,0)$.

Ahora usamos esta tabla de valores para graficar:

v	-1.9	-1.5	-1	0	2	5
y	-1.609	0	0.6931	1.3863	2.0794	2.6391

Conectando los puntos, obtenemos



Ejemplo 13

Encontrar el dominio, la inversa y el rango de $h(r) = 2 - 5\log(2-3r)$.

Para el dominio necesitamos que $2-3r > 0$, lo cual se cumple en $]-\infty, 2/3[$; ese es el dominio de h.

Para la inversa, planteamos la ecuación $y = h(r)$ y despejamos r:

$$\begin{aligned} y &= 2 - 5\log(2-3r) \\ 5\log(2-3r) &= 2 - y \\ \log(2-3r) &= (2-y)/5 \\ 2 - 3r &= 10^{(2-y)/5} \\ -3r &= 10^{(2-y)/5} - 2 \\ r &= \tfrac{1}{3}\left[2 - 10^{(2-y)/5}\right] \end{aligned}$$

Entonces la inversa está dada por $h^{-1}(y) = \frac{1}{3}\left[2 - 10^{(2-y)/5}\right]$.

Finalmente, el rango de h es igual al dominio de su inversa. Como h^{-1} no tiene ninguna restricción, su dominio, y por lo tanto el rango de h, es $\mathbb{R}$.

Convierta de forma exponencial a logarítmica o viceversa

41. $2^3 = 8$

42. $25^{3/2} = 125$

43. $5^{-2} = 1/25$

44. $16^{1/4} = 2$

45. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$

46. $\left(\frac{27}{8}\right)^{-1/3} = \frac{2}{3}$

47. $\log_5(1/5) = -1$

48. $\log_3 1 = 0$

49. $\log_{1/2} 8 = -3$

50. $\log_{10} 10\,000 = 4$

51. $\log 0.01 = -2$

52. $\log_6 6 = 1$

53. $\ln \mathrm{e}^{-2} = -2$

Resuelva

54. $\log_3 u = -2$

55. $\log_8 16 = w$

56. $\log_r 32 = 5$

57. $\ln v = -2$

58. $\ln(-x) = 1$

59. $\log_{25}(1/5) = t$

60. $\log_y(1/4) = -2/3$

61. $\log_{4/9} z = -0.5$

62. $\log_{1/3} c = -2$

63. $\log_x \sqrt{1000} = 3$

Descomponga en una expresión con los logaritmos más simples que sea posible

64. $\log_6 x(x-1)^2$

65. $\log_3 9(a+b)^2\sqrt{a-b}$

66. $\ln w^3(3y+5)$

67. $\ln[y(3w+5)]^3$

68. $\log_3 \left(\frac{n^2h}{5^{2h}}\right)^{3/4}$

69. $\log \frac{r^4(s+1)^2}{\sqrt[3]{r-2}\cdot 100^r}$

70. $\log_2 \left[\frac{p^4(2q+5r)^{-1}}{(q+2)^3(1-p)}\sqrt[4]{\frac{2^r}{(2-p)q^4}}\right]$

Escriba como un solo logaritmo y simplifique

71. $\log_2 3 + \log_2 5$

72. $\ln 6 + 2\ln 5$

73. $\log 15 - \log 6$

74. $\frac{1}{2}\log 25 - \log 4 + 3\log 2$

75. $\ln(x^2 - y^2) - 2\ln(ax + ay) + \ln a$

76. $\log_3(x/y)^2 - 5\log_3\sqrt{x} - \log_3 y^{-1}$

77. $3\log_7 6ax^2 - \frac{1}{2}\log_7 49a^4 - 2\log_7 3x$

78. $2\ln 2r - \ln 2 + \ln 3 - \ln 3r^2$

79. $\ln(ac - 3xy - ay + 3cx) - 2\ln(y - c) + \ln(3x + a)^2$

80. $\log_6(2/3)^p + \log_6 12 + p\log_6 4 - \log_6 2 + 2\log_6 9^p$

Grafique, indicando el dominio y las intersecciones con los ejes

81. $p(x) = \log_{1.1} x$

82. $q(x) = \log_{0.9} x$

83. $h(s) = \log_2(s + 4)$

84. $f(t) = 3\ln(t + 2)$

85. $r(z) = 1 + \log_3(5 - z)$

86. $q(u) = 1 + \log_{1/2}(3u - 1)$

87. $g(t) = \ln(1 - t^2)$

88. $p(v) = \log_2(3v^2 + 7v - 6) - 2$

Encuentre el dominio, la inversa y el ámbito

89. $g(x) = 4 + 2^{1-2x}$

90. $p(w) = 4^{w-3} + 2$

91. $p(z) = 6 - 3 \cdot 5^{z+1}$

92. $g(y) = 5 - \frac{1}{4} \cdot 3^{2-y}$

93. $f(t) = \frac{1}{2} 10^{t^3-3} - 1$

94. $h(x) = 3 + \log_2 x$

95. $g(t) = 4 - \log_2(1 - t)$

96. $q(v) = 5 - (\log v)^{-1}$

97. $h(y) = \ln(1 - e^y)$

98. $r(u) = 8 - \log_2(1 - \sqrt{u})$

7.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una *ecuación exponencial* es una que tiene potencias con alguna incógnita en su exponente. Y una *ecuación logarítmica* es una con alguna incógnita dentro de un logaritmo.

Al resolver una ecuación exponencial debemos primero llevarla a la forma $b^x = y$, para entonces pasarla a forma logarítmica, $x = \log_b y$.

Ejemplo 14

Resolver $3 \cdot 2^{p^2+1} = 5 \cdot 2^{1-p}$.

Recojamos todas las potencias de 2 en el lado izquierdo, y el resto en el lado derecho:

$$\frac{2^{p^2+1}}{2^{1-p}} = \frac{5}{3}$$

$$2^{(p^2+1)-(1-p)} = \frac{5}{3}$$

$$2^{p^2+p} = \frac{5}{3}$$

Ahora pasamos a la forma logarítmica, $2^x = y \Rightarrow x = \log_2 y$:

$$p^2 + p = \log_2(5/3)$$

y resolvemos la ecuación cuadrática resultante,

$$p^2 + p - \log_2(5/3) = 0$$

cuyas soluciones son $p_1 \approx -1.4934614$ y $p_2 \approx 0.49346142$.

Para resolver una ecuación logarítmica la llevamos primero a la forma $\log_b x = y$, y la transformamos en forma exponencial, $x = b^y$. En las ecuaciones logarítmicas, como en las radicales y otras, pueden aparecer soluciones falsas. Por eso es necesario comprobar las soluciones antes de dar por concluido el proceso.

Ejemplo 15

Resolver $2\log_3(w-1) = 2 + \log_3(19-w)$.

Empezamos por agrupar todos los logaritmos en uno solo:

$$\begin{aligned} \log_3(w-1)^2 - \log_3(19-w) &= 2 \\ \log_3 \frac{(w-1)^2}{19-w} &= 2 \end{aligned}$$

Entonces pasamos de forma logarítmica a forma exponencial, según la regla $\log_3 x = y \Rightarrow x = 3^y$, y continuamos:

$$\begin{aligned} \frac{(w-1)^2}{19-w} &= 3^2 = 9 \\ (w-1)^2 &= 9(19-w) \\ w^2 - 2w + 1 &= 171 - 9w \\ w^2 + 7w - 170 &= 0 \end{aligned}$$

de donde llegamos a que $w = -17$ o $w = 10$.

Pero no hemos acabado: hay que comprobar cada una de las posibles soluciones.

Para $w = -17$:

$$\begin{aligned} 2\log_3(-17-1) &= 2 + \log_3(19-(-17)) \\ 2\log_3(-18) &= 2 + \log_3(36) \end{aligned}$$

Para $w = 10$:

$$\begin{aligned} 2\log_3(10-1) &= 2 + \log_3(19-10) \\ 2\log_3 9 &= 2 + \log_3 9 \\ 2 \cdot 2 &= 2 + 2 \end{aligned}$$

Para $w = -17$ vemos que la ecuación está indefinida, ya que $\log_3(-18)$ no es un número real. Para $w = 10$, ambos lados de la ecuación tienen el mismo valor. Concluimos entonces que la única solución es $w = 10$.

Resuelva

99. $3^p = 21$

100. $2^{-q} = 8$

101. $2^{w^2+1} = 32$

102. $e^{5r-2} = 30$

103. $5^{3x} = 3$

104. $6^{t+3} = 2 \cdot 6^{2t+5}$

105. $27^v = \dfrac{9^{4v-1}}{3^v}$

106. $(2^x)^{2-3x} = \frac{1}{2}4^{x-1}$

107. $1.9^u = 2.4^{2u}$

108. $3^y = 4^{y+1}$

109. $5^{2s+1} = 6^{s-2}$

110. $5^{|u|-1} = 25$

111. $10^{c^2+2c} = 2 \cdot 100^c$

112. $\sqrt{2^y} = 3 \cdot 2^{1-y}$

113. $3 \cdot 4^{2r} = 5 \cdot 4^r + 2$

114. $18 \cdot 2^s - 32 = 4^s$

115. $\log_5 w = 2$

116. $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

117. $\log(5y-1) - \log(y-3) = 2$

118. $\log_5(z+1) = 1 - \log_5(z-3)$

119. $\log(p-3) + \log(p+2) = \log(5p-14)$

120. $\log_2(q+1) = 1 - \log_2 q$

121. $\log_5(3r-1) + \log_5(2r+1) = 2$

122. $\log_{6s-17}(s^2-9) = 1$

123. $\log_{v+2}(2v^2+7v) = 2$

124. $\ln\sqrt{t+1} + \ln\sqrt{5t} = 1$

125. $\ln(2-u) + \ln(1-u) = \ln 6$

126. $\log v + \log(v-15) = 2$

127. $\log_2(1-w) + \log_2(3-w) = 3$

128. $\log_2(1-x) + \log_2(2-x) = 1$

129. $\log_2(y^2-12) - \log_2(3-y^2) = 3$

130. $\log_5(4^z+61) = 3$

131. $\log t = 1 - \log(t-3)$

132. $\log(4-v^2) - \log(1+v) = 1 + \log(2-v)$

133. $\log(\log w) = 2$

134. $\log_3 2x + \log_3(x+1) = \log_3(1-x) + 1$

135. $\ln(5-y) = 2\ln 3 - \ln(5+y)$

136. $\ln(z+3) = \ln 3 - \ln(z+1)$

137. $\sqrt{\ln z} = \ln\sqrt{z}$

138. $\sqrt{\log_3 x} = \log_3(9/x)$

139. $(\ln q)^2 + \ln q = 2$

140. $(e^p - 2)(3 - \log p)(2^p - 5^p) = 0$

Resuelva

141. Si se invierte \$1000 a una tasa de 10% compuesta anualmente, ¿en cuánto tiempo valdrá \$2500?

142. Si ₡250 000 se invierten al 18% anual, ¿aproximadamente cuántos años tardará la inversión en alcanzar un valor de ₡400 000?

143. Si un banco ofrece una tasa de interés de 6% anual, compuesta trimestralmente, ¿cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicarse?

144. ¿Cuántos años tardará en triplicarse un monto invertido al 15% compuesto mensualmente?

145. Un cultivo de bacterias crece a una tasa de 4% al día. Si inicialmente había 15 000 bacterias, ¿en cuánto tiempo habrá 50 000 bacterias?

146. La población de cierto país ha crecido, desde inicios del año 2000, según la fórmula $P(t) = 21.4 \cdot 1.0182^t$ en millones, donde t es el número de años desde el 2000. ¿En qué año llegará la población a los veinticinco millones?

147. Durante el siglo 20, la población de Costa Rica creció en forma aproximadamente exponencial con fórmula $P(n) = 206065 \cdot 1.02973^n$, donde n es el número de años desde el inicio del 1900. ¿En qué años se alcanzaron el primero, el segundo y el tercer millón de habitantes?

148. Si la población mundial es $P(n) = 4000 \cdot 1.018^n$ millones, donde n es el número de años desde el inicio de 1976, ¿en qué año llegó la población a los cinco mil millones?

149. Una computadora, adquirida por \$1800, se devalúa según la fórmula $V(n) = 1800 \cdot 0.75^n$, donde n es el número de años desde que se compró y $V(n)$ es su valor. ¿En cuánto tiempo alcanzará un valor de \$1000?

150. Un terreno aumenta su valor de acuerdo con la fórmula $V(n) = 15 \cdot 1.23^n$ en millones de colones, donde n es el número de años desde que se compró. ¿En cuántos años alcanzará un valor de veinte millones de colones? ¿Cuántos años atrás valía 13 millones de colones?

151. Una máquina industrial se compró hace cinco años, y su valor decrece exponencialmente con el tiempo según la fórmula $V(t) = 4549.46 \cdot 0.907485^t$, donde t es el número de años de uso. ¿Dentro de cuántos años se habrá reducido su valor a la mitad del valor original?

152. El valor de un automóvil t años después de comprado es $V(t) = 12.4 \cdot 0.87^t$. ¿Cuánto tardará su valor en reducirse a la mitad del valor original?

153. Durante los años 1986 a 1999, el tipo de cambio del colón con respecto al dólar se incrementó en forma aproximadamente exponencial según la fórmula $C(t) = 58.30 \cdot 1.1323^t$ en colones por dólar, donde t es el número de años desde el 15 de junio de 1986. ¿Aproximadamente en qué fechas se alcanzaron los ₡100 por dólar y los ₡250 por dólar?

154. La presión atmosférica P en milímetros de mercurio, a una altura h en metros sobre el nivel del mar, es $P = 760\mathrm{e}^{-0.000123h}$. ¿Cuál es la altura si la presión es de 600 mm?

155. Después de pasar por un material con x centímetros de espesor, la intensidad de un rayo de luz será $I(x) = I_0 4^{-cx}$, donde I_0 es la intensidad inicial y c es una constante llamada factor de absorción ($c \approx 0$ para materiales transparentes). Si el agua del mar absorbe 20% de la intensidad de la luz a una profundidad de 16 cm, ¿cuál es el factor de absorción del agua del mar? ¿A qué profundidad habrá absorbido el agua de mar un 50% de la luz?

156. Con respecto al Ejercicio 40 (página 105), ¿a qué temperatura debe estar la madera para que un gramo se consuma en un minuto?

7.5 Inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las inecuaciones exponenciales y las logarítmicas son inecuaciones que involucran incógnitas dentro de algún exponente o logaritmo, respectivamente. Como son inecuaciones no lineales, el método general para resolverlas será (cf. página 65):

1. Agrupar todos los términos en un lado de la desigualdad ("desigualar" a cero).
2. Factorizar, simplificar el lado que no es cero.
3. Hacer un mapa de signos.
4. Leer la solución a partir del mapa.

En las inecuaciones logarítmicas hay un paso adicional (análogo a la verificación de las soluciones en una ecuación logarítmica): la solución en el mapa de signos debe intersecarse con el dominio de la inecuación, que es el conjunto de valores de la incógnita para los cuales la inecuación está definida. O bien el mapa de signos puede limitarse desde el principio al dominio de la inecuación.

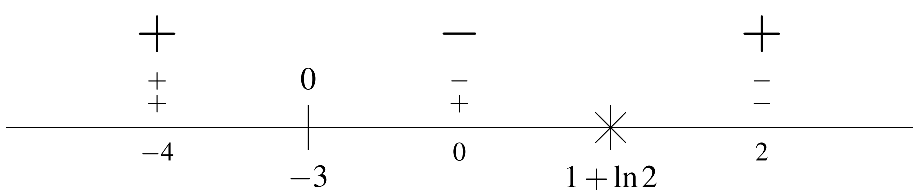
Ejemplo 16

Resolver la inecuación $\dfrac{0.5^t - 8}{2 - \mathrm{e}^{t-1}} \leq 0$.

Los pasos 1 y 2 de arriba ya están listos, así que pasamos al mapa de signos. Para esto necesitamos los puntos críticos, que son los valores de t que hacen cero alguno de los factores:

- $0.5^t - 8 = 0 \;\Rightarrow\; 0.5^t = 8 \;\Rightarrow\; t = \log_{0.5} 8 = -3$
- $2 - \mathrm{e}^{t-1} = 0 \;\Rightarrow\; 2 = \mathrm{e}^{t-1} \;\Rightarrow\; \ln 2 = t - 1 \;\Rightarrow\; t = 1 + \ln 2 \approx 1.693$

El mapa de signos completo luce así:



Entonces el conjunto solución es $[-3, 1+\ln 2[$.

Ejemplo 17

Resolver la inecuación[3] $\log_2(2+v)^8 - 15 < \log_2^2(2+v)$.

[3]Note la importante diferencia entre las expresiones $\log_b^p x$ y $\log_b x^p$. En la primera, el logaritmo está elevado a la p; en la segunda es solamente x lo que está elevado a la p. Usando paréntesis para hacer inequívoco el significado, podemos escribir $\log_b^p x = (\log_b x)^p$ y $\log_b x^p = \log_b(x^p)$.

Empecemos por notar el dominio: $2+v$, por estar dentro de los logaritmos, debe ser mayor que cero. El dominio entonces es $]-2,\infty[$.

Ahora recolectemos todos los términos a la derecha de la inecuación:

$$0 < \log_2^2(2+v) - \log_2(2+v)^8 + 15$$

Como $\log_2(2+v)^8 = 8\log_2(2+v)$ (pero no hay una fórmula análoga para $\log_2^2(2+v)$), podemos hacer la sustitución $x = \log_2(2+v)$, de modo que la inecuación se convierte en

$$0 < x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x+5)$$

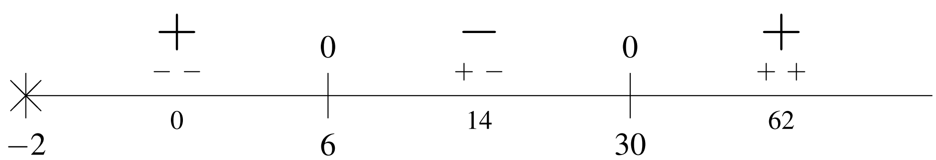
o, regresando a v,

$$0 < [\log_2(2+v) - 3][\log_2(2+v) - 5]$$

Para los puntos críticos resolvemos:

- $\log_2(2+v) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \log_2(2+v) = 3 \;\Rightarrow\; 2+v = 2^3 \;\Rightarrow\; v = 6$
- $\log_2(2+v) - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \log_2(2+v) = 5 \;\Rightarrow\; 2+v = 2^5 \;\Rightarrow\; v = 30$

Como la inecuación está definida solamente en $]-2,\infty[$, restringimos el mapa de signos a ese intervalo. Note que los puntos de prueba en el mapa están elegidos de modo que los logaritmos sean enteros; esto no es necesario y no siempre será posible, pero simplifica los cálculos.



La solución es entonces $]-2,6[\,\cup\,]30,\infty[$. ∎

Resuelva

157. $(2/3)^{5-y} > 1$

158. $\dfrac{e^{w^2-5w}-1}{e^w+1} \geq 0$

159. $2^{q-1} + 12q \leq 3q \cdot 2^{q-1} + 4$

160. $100^v + 5 < 6 \cdot 10^v$

161. $9(0.5)^x > 8 + (0.5)^{2x}$

162. $3 \geq \log_2(1-4t)$

163. $(z+2)(2 - \log(5-19z)) > 0$

164. $(\ln t)^2 \geq 4$

165. $\log_{4/5}(5-p) \geq 2\log_{4/5} 4 - \log_{4/5}(5+p)$

166. $\log_{0.1}(9x+7) + 2 + \log_{0.1}(3x-2) \leq 0$

CAPÍTULO 8

Matrices y sistemas de ecuaciones

8.1 Operaciones con matrices

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. Los elementos de una matriz se organizan en *filas* (horizontales) y *columnas* (verticales). Las matrices se denotan con un par de paréntesis alrededor de sus elementos. Al darle nombre a una matriz se acostumbra usar una letra mayúscula. También se acostumbra denotar con la letra m al número de filas de una matriz, y con la letra n al número de columnas. La *dimensión* o tamaño de una matriz con m filas y n columnas es la expresión $m \times n$.

Ejemplo 1

La información en la tabla

Región	Ventas en \$1000's			
	2002	2003	2004	2005
Central	9	12	13	13
Pacífica	8	9	9	10
Atlántica	4	5	5	7

puede resumirse, si los encabezados se sobreentienden, con la matriz de ventas

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matriz V tiene tamaño 3×4. Note que ese tamaño no es igual a 12 (por ejemplo, una matriz de tamaño 4×3 y una 2×6 serían muy distintas de una 3×4). A veces se escribe el tamaño de una matriz como un subíndice de su nombre, como $V_{3\times 4}$.

Los elementos de una matriz se denotan con el nombre de la matriz pero en minúscula y con dos subíndices: el primero indica el número de fila y el segundo el número de columna, numerando las filas de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha. Para nuestra matriz de ventas, $v_{2,4}$ (o simplemente v_{24}), por ejemplo, es el número 10: el elemento que se encuentra en la fila 2, columna 4.

Ejemplo 2

Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. La dimensión de A es 2×3. Algunos de sus elementos son: $a_{11} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{22} = -3$. El elemento a_{32} no existe.

Ejemplo 3

Sea B la matriz de tamaño 10×10 definida por $b_{ij} = 5i - j$. Esta es una forma concisa de describir la matriz B sin necesidad de enumerar sus cien elementos. De la fórmula calculamos, por ejemplo, que $b_{62} = 5(6) - (2) = 28$ y que $b_{38} = 5(3) - (8) = 7$.

Algunos de los elementos de B son los siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & -5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 49 & 48 & 47 & 46 & \cdots & 40 \end{pmatrix}$$

Otras definiciones:

- La *transpuesta* de una matriz $A_{m \times n}$, denotada A^{T}, es la matriz de tamaño $n \times m$ que resulta de convertir las filas de A en columnas, y las columnas de A en filas.
- Una matriz *fila* es una que solo tiene una fila: $m = 1$.
- Una matriz *columna* es una que tiene una sola columna: $n = 1$.
- Una matriz *cuadrada* es una que tiene igual número de filas y columnas: $m = n$.
- Una matriz cuadrada es *simétrica* si es igual a su transpuesta.
- La *diagonal* de una matriz cuadrada A es la sucesión $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
- La *matriz identidad* de orden n (o tamaño $n \times n$), denotada I_n, es la matriz $n \times n$ con unos en su diagonal y ceros en las demás posiciones.

Ejemplo 4

La matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz fila, de tamaño 1×4.

La matriz $B = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ es una matriz columna, de tamaño 3×1.

La matriz $C = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 26 \\ 0 & 7 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ es una matriz cuadrada, con $m = n = 3$. Su transpuesta es $C^{\mathsf{T}} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & 26 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. La matriz C no es simétrica.

La diagonal de C es la sucesión $5, 4, -2$. Esta es también la diagonal de C^{T}.

La matriz $D = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ sí es simétrica.

La identidad de orden 3 es $I_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Si A y B son dos matrices de igual tamaño, y c es un número, entonces:

- $A+B$ es la matriz que resulta de sumar cada $a_{ij}+b_{ij}$.
- cA es la matriz que resulta de multiplicar cada a_{ij} por c.

Ejemplo 5

Recuerde la matriz de ventas del Ejemplo 1. Suponga que esas son las ventas del producto principal de cierta compañía, que también distribuye otro producto secundario cuyas ventas están dadas en la siguiente tabla:

	Ventas en \$1000's			
Región	2002	2003	2004	2005
Central	6	7	8	9
Pacífica	5	7	6	7
Atlántica	2	3	3	4

Esta nueva tabla puede representarse con la matriz

$$W = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces las matrices V, con las ventas del primer producto, y W, con las ventas del segundo, para las mismas regiones y los mismos períodos. Suponiendo que estos dos son los únicos productos que la compañía distribuye, las ventas totales pueden calcularse sumando cada elemento de V con el elemento correspondiente (en la misma posición) de W. Esa es la suma de las matrices V y W:

$$V+W = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{A} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} '02 & '03 & '04 & '05 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 19 & 21 & 22 \\ 13 & 16 & 15 & 17 \\ 6 & 8 & 8 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, el 15 en la posición $2,3$ indica que la región Pacífica tuvo en el 2004 ventas totales por \$15 000 (\$9000 del primer producto y \$6000 del segundo).

Por otra parte, si quisiéramos convertir las ventas del segundo producto a dólares (recuerde que la tabla arriba da las ventas en miles de dólares), debe multiplicarse cada elemento de la matriz por 1000, o equivalentemente, multiplicar la matriz por 1000:

$$1000W = 1000 \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 & 7000 & 8000 & 9000 \\ 5000 & 7000 & 6000 & 7000 \\ 2000 & 3000 & 3000 & 4000 \end{pmatrix}$$

El producto de dos matrices se define a partir del producto de una fila por una columna. En general, si $F_{1\times n}$ es una matriz fila y $C_{n\times 1}$ una matriz columna, ambas con el mismo número de elementos, su producto es

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} = f_{11}c_{11} + f_{12}c_{21} + \cdots + f_{1n}c_{n1}.$$

Ejemplo 6

Si $P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $Q = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$, entonces su producto es

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = (-4)(2) + (1)(3) + (6)(-5) = -8 + 3 - 30 = -35.$$

En general, el producto de una fila por una columna es un número.

El producto de una matriz $A_{m\times n}$ y una matriz $B_{n\times p}$ es la matriz de tamaño $m \times p$ cuyo elemento i, j es el producto de la fila i de A con la columna j de B. Si el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, el producto está indefinido.

Ejemplo 7

Sean $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Los tamaños son 2×2 y 2×3, de modo que su producto está definido y tiene tamaño 2×3. Los cálculos son así:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c:c:c} \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \hdashline \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 11 \\ -10 & -29 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resuelva

1. Escriba los números 6, -2, 4, 0:

(a) en una matriz fila.

(b) en una matriz columna.

2. Para cuatro niños se registran sus edades en años: 10.4, 5, 6.8 y 9.9; sus estaturas en centímetros: 147, 110, 120 y 140; las estaturas de sus padres, en centímetros: 176, 172, 167 y 170; y las estaturas de sus madres, en centímetros: 170, 159, 166 y 161.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada niño en el orden presentado.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz?

(c) Escriba la transpuesta.

(d) ¿Cuáles son los elementos de la diagonal?

3. En una encuesta hecha entre estudiantes del Tec se encontró que había 57 mujeres y 72 hombres de la provincia de Cartago, 61 mujeres y 92 hombres de San José, y 48 mujeres y 79 hombres de otras provincias.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada sexo y una columna para cada provincia, en el orden presentado.

(b) Represente la misma información usando columnas para los sexos y filas para las provincias, en el orden presentado.

(c) ¿Cuáles son los tamaños de las matrices en las partes (a) y (b)?

4. Un banco tiene 2820 cuentas corrientes y 1470 cuentas de ahorro en su oficina central. En su sucursal del Pacífico tienen 1240 cuentas corrientes y 980 cuentas de ahorro, y en su sucursal del Atlántico tienen 830 cuentas corrientes y 560 cuentas de ahorro.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una fila para cada oficina y una columna para cada tipo de cuenta.

(b) Represente la misma información en una matriz, usando filas para los tipos de cuenta y columnas para las oficinas.

(c) ¿Cuáles son los valores en las posiciones $1,2$ y $3,1$ de la matriz en la parte (a)?

(d) ¿Cuál es la posición, en la matriz de la parte (b), del número de cuentas de ahorro en el Atlántico?

5. Un modelo de automóviles tiene un peso de 1564 kg, una potencia de 175 HP y un rendimiento de 7.9 km/l. Las características de un segundo modelo son 834 kg, 65 HP y 14.4 km/l. Un tercer modelo tiene 1000 kg, 66 HP y 13.7 km/l, y un cuarto modelo tiene 2430 kg, 230 HP y 6.2 km/l.

(a) Represente esta información en una matriz, usando una columna para cada modelo.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz?

(c) ¿Cuáles son los valores en las posiciones $2,4$ y $3,1$ de la matriz?

(d) ¿Cuál es la posición en la matriz de la potencia del tercer modelo?

(e) Escriba la transpuesta de la matriz.

6. Escriba la matriz $M_{3\times 5}$ dada por la fórmula $m_{ij} = 3j - i^2$.

7. Escriba la matriz Q de tamaño 3×3 dada por $q_{ij} = i^2 - j^2$. ¿Es simétrica?

Calcule, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $2A + B$

9. $A - 3B$

10. $A^{\mathsf{T}} - 3C$

11. $5B - 2C^{\mathsf{T}}$

12. $2C^{\mathsf{T}} - A + 5B$

13. $B^{\mathsf{T}} + 6C - 2A^{\mathsf{T}}$

14. $\left[(A-B)^{\mathsf{T}} - C\right]^{\mathsf{T}}$

15. M tal que $A + 2B + M = 0$

Calcule la matriz indicada

16. Con respecto al Ejercicio 4 (página 121), un segundo banco tiene cuentas según la siguiente tabla:

Tipo de cuenta	Oficina		
	Central	Pacífica	Atlántica
Corriente	240	120	90
De ahorros	190	90	60

Suponga que los dos bancos se unen. Sume dos matrices para encontrar el total de cuentas de cada tipo en cada oficina.

17. Una familia resume sus gastos semestrales durante los años 2004 y 2005 de la siguiente manera, en miles de colones:

Categoría	2004	
	1er semestre	2do semestre
Comida	507	525
Vivienda	480	510
Otros	477	462

2005	
1er semestre	2do semestre
555	595
540	570
545	520

Denote con G_1 y G_2 las matrices 3×2 de gastos para 2004 y 2005 respectivamente.

(a) Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos promedio entre ambos años (por ejemplo, el gasto promedio en comida durante los dos primeros semestres fue $(507 + 555)/2 = 531$ mil colones).

(b) Efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los incrementos en gastos de 2004 a 2005 (por ejemplo, el incremento en comida en los primeros semestres fue $555 - 507 = 48$ mil colones).

(c) Suponiendo que los tipos de cambio promedio fueron ₡480/$ durante 2004 y ₡500/$ durante 2005, efectúe una operación entre G_1 y G_2 cuyo resultado sea una matriz con los gastos totales en dólares, redondeados al dólar más cercano (por ejemplo, el gasto total en comida para los primeros semestres fue $(507000/480 + 555000/500 \approx 2166$ dólares).

Calcule, para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

18. $A \cdot C$

19. $B \cdot D$

20. $(3A - 2B) \cdot C$

21. $A^{\mathsf{T}} \cdot B$

22. $A \cdot B^{\mathsf{T}}$

23. $B^{\mathsf{T}} \cdot A$

24. $\left(D \cdot D^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$

25. $D^{\mathsf{T}} \cdot D$

26. $D^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$

27. $C^{\mathsf{T}} \cdot (B - 5A)^{\mathsf{T}}$

Resuelva

28. La siguiente tabla muestra parte de la lista de ingredientes necesarios para tres tipos de postres que vende una pastelería:

	Azúcar (tazas)	Huevos (unid)	Leche (litros)
Postre 1	1	2	1
Postre 2	2	5	2
Postre 3	2	3	3

La siguiente representa los costos unitarios de cada ingrediente:

Azúcar	₡100
Huevos	₡70
Leche	₡350

(a) Escriba una matriz A que represente los ingredientes, con una fila por postre, y una matriz B que represente los costos, con una fila por ingrediente.

(b) Multiplique $A \cdot B$ o $B \cdot A$, el que esté definido. ¿Qué representa este producto?

(c) ¿Cuánto es el costo de los ingredientes del postre 2?

29. Suponga que una fábrica de ropa produce maletines y pantalones, para lo cual usa como materia prima tela, broches y cremalleras. La siguiente tabla indica los materiales requeridos para cada producto:

	Tela (m)	Broches (unid)	Cremalleras (unid)
Maletín	1.5	8	3
Pantalón	2	2	1

La fábrica recibe pedidos de tres clientes, según esta tabla:

	Maletines	Pantalones
Cliente 1	20	10
Cliente 2	50	30
Cliente 3	40	40

(a) Escriba una matriz M para representar los materiales, con una fila para cada producto, y una matriz P para representar los pedidos, con una fila para cada cliente.

(b) Multiplique las matrices M y P en el orden apropiado. ¿Qué representa este producto?

(c) ¿Cuántas cremalleras se necesitarán para el primer cliente? ¿Cuántos metros de tela para el segundo? ¿Cuántos broches para el tercero?

30. Con respecto al Ejercicio 28, la siguiente tabla representa las cantidades de postres para dos encargos recibidos por la pastelería (P_1 se refiere al postre 1, etc):

	P_1	P_2	P_3
Encargo 1	4	6	3
Encargo 2	8	2	0

(a) Represente esta información en una matriz C.

(b) Multiplique dos de las matrices A, B, C, en el orden apropiado, para calcular las cantidades de ingredientes necesarias para cada encargo.

(c) Calcule $C \cdot A \cdot B$. ¿Qué representa este producto?

(d) ¿Cuánta leche requiere el primer encargo?

(e) ¿Cuál es el costo de los materiales para el segundo encargo?

31. En el Ejercicio 29, suponga que cada metro de tela cuesta \$4, cada broche \$1 y cada cremallera \$2.

(a) Represente los costos en una matriz columna C.

(b) Multiplique las matrices C y M en el orden apropiado. ¿Qué representa este producto?

(c) Calcule el producto $P \cdot M \cdot C$. ¿Qué representa este producto?

(d) ¿Cuál es el costo de los materiales para un maletín?

(e) ¿Cuál es el costo de los materiales para el pedido del segundo cliente?

32. Calcule $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$.

33. Se dice que una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Demuestre que las siguientes matrices son idempotentes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

34. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, demuestre que $A^3 = 5I_3$.

35. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. ¿Para cuáles valores de $a \geq 0$ se tiene $A^2 = I_2$?

36. Sea M una matriz tal que $M \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determine el tamaño de M.

(b) Encuentre la matriz M.

37. Encuentre las raíces cuadradas de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (es decir, las matrices B tales que $B^2 = M$).

8.2 Sistemas de ecuaciones

La *matriz de coeficientes* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas en el sistema, con una fila para cada ecuación y una columna para cada incógnita.

La *matriz aumentada* de un sistema de ecuaciones lineales es la matriz que contiene a la matriz de coeficientes del sistema, aumentada con una columna adicional con las constantes al lado derecho del signo "=" en cada ecuación. Debe entenderse que las ecuaciones están escritas de modo que todas las incógnitas están a la izquierda y que las constantes sin incógnita están a la derecha.

Ejemplo 8

La matriz de coeficientes del sistema $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y la matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para el sistema $\begin{cases} a-3b+c=-1 \\ c-2a-6=0 \\ a=2b \end{cases}$, conviene empezar por reescribirlo con las incógnitas alineadas en columnas a la izquierda de cada igualdad:

$$\begin{cases} a-3b+c=-1 \\ -2a+0b+c=6 \\ a-2b+0c=0 \end{cases}$$

Entonces las matrices de coeficientes y aumentada son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un método para resolver sistemas de ecuaciones es el de *Gauss-Jordan* (GJ). Este consiste en tomar la matriz aumentada del sistema y reducir su parte de coeficientes a la identidad. Al terminar, la última columna contendrá la solución del sistema.

Gráficamente, el método puede describirse de la siguiente forma (donde los asteriscos representan números cualesquiera):

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix}$$

La primera etapa es convertir la columna 1 en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; la segunda etapa, convertir la columna 2 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, y así sucesivamente, columna por columna.

En el método de GJ hay tres operaciones entre filas que se usan para conseguir los unos y los ceros:

1. Multiplicar o dividir una fila por un escalar distinto de cero.
2. Sumar o restar un múltiplo de una fila a otra fila.
3. Intercambiar dos filas.

En un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, la matriz de coeficientes del sistema se reduce a la identidad en n etapas, en las que cada etapa j-ésima (para $j=1,2,\dots,n$) consiste en los dos siguientes pasos:

a. Convertir el elemento en la posición j, j en 1 (usualmente con la primera operación).

b. Convertir el resto de la columna j en ceros (usualmente con la segunda operación).

Ejemplo 9

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 4z = 5 \\ z - 4x - 7y = 11 \\ 3y + z = -7 \end{cases}$.

Lo primero es escribir la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 5 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Como $n = 3$ (tres ecuaciones y tres incógnitas), el proceso consistirá en tres etapas, una para cada columna.

Etapa 1: Convertir la primera columna en $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Los dos pasos en esta etapa son (1) obtener el uno en la posición $1,1$ y (2) obtener los ceros en el resto de la columna.

Paso a: Convertir el 2 de la posición $1,1$ en un 1. Como dijimos, lo usual para el paso 1 es usar la primera operación, multiplicar o dividir la fila por un escalar. Como tenemos un 2 y queremos convertirlo en 1, lo más natural es dividir su fila por 2:

$$F_1 \div 2 \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 5/2 \\ -4 & -7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la primera columna en ceros. Para esto se usa la segunda operación, sumar o restar a una fila un múltiplo de otra. F_3 ya tiene un cero en la columna 1; lo que falta es convertir el -4 de F_2 en un 0. Bastará con sumar 4, pero no la constante 4 sino el producto de 4 por F_1 (se puede sumar a una fila un múltiplo de otra, no un número solo):

$$F_2 + 4F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ \mathbf{0} & -7 & -7 & 21 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Lista la primera columna, terminamos con la Etapa 1.

Etapa 2: Convertir la segunda columna en $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Paso a: Convertir el -7 de la posición $2,2$ en un 1. Para eso se divide F_2 entre -7:

$$F_2 \div (-7) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la segunda columna en ceros. Ya hay un 0 en $1,2$; falta convertir en cero el 3 en $3,2$. Para convertir un 3 en 0 se le debe restar 3; más formalmente, a F_3 se le resta $3F_2$:

$$\begin{matrix} \\ \\ F_3 - 3F_2 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lista la segunda columna.

Etapa 3: Convertir la tercera columna en $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Paso a: Convertir el -2 de $3,3$ en un 1, dividiendo F_3 entre -2:

$$\begin{matrix} \\ \\ F_3 \div -2 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Paso b: Convertir el resto de la tercera columna en ceros. Para cancelar el -2 de la posición $1,3$ debe sumársele 2; esto es, a F_1 debe sumársele $2F_3$. Y para cancelar el 1 de $2,3$, a F_2 debe restársele F_3:

$$\begin{matrix} F_1 + 2F_3 \rightarrow \\ F_2 - F_3 \rightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1/2 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y con eso acabamos: la matriz de coeficientes ya es la identidad, y entonces la solución del sistema está en la última columna: $x = 1/2$, $y = -2$ y $z = -1$.

Si durante el proceso de GJ se encuentra un cero en la posición en la que necesitamos un uno, debe intercambiarse la fila en cuestión por alguna fila inferior para obtener un número distinto de cero en esa posición, si acaso es posible.

Ejemplo 10

Para resolver $\begin{cases} b + 1 = 0 \\ 3b + 2c - 2 = 0 \\ 3a + 2c + 9 = 0 \end{cases}$ tenemos un problema con la posición $1,1$ de la matriz aumentada, que es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Lo que hicimos en el ejemplo anterior fue, cada vez que necesitábamos un uno, dividir la fila en cuestión por el elemento en la posición deseada. Pero ahora no podemos dividir por cero. Por eso recurrimos a la tercera operación: intercambiar filas. Al intercambiar las filas 1 y 3 obtenemos

$$F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir de este punto, el método procede como en el ejemplo anterior.

Si el número de incógnitas no es igual al número de ecuaciones, o si por alguna razón el método de GJ no puede llevarse a su término, es posible que el sistema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones.

Ejemplo 11

Al resolver el sistema $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$, empezamos por notar que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. En esos casos lo más común es que el sistema tenga infinitas soluciones. El método de GJ va así:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ F_2 - F_1 \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ F_1 + 2F_2 \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hasta aquí terminamos con las dos primeras columnas. Pero ahora no podemos trabajar la tercera columna porque no hay dónde poner el uno para luego conseguir los ceros. Aquí se detiene GJ, y debemos regresar de la matriz al sistema.

La última matriz que obtuvimos representa el sistema $\begin{cases} x+5z=7 \\ y+3z=2 \end{cases}$, del cual fácilmente podemos despejar x en la primera ecuación y y en la segunda:

$$\begin{cases} x = 7-5z \\ y = 2-3z. \end{cases}$$

No hay una tercera fila de la cual pueda despejarse z. Esto es normal: de dos ecuaciones podemos esperar despejar a lo sumo dos incógnitas. Y la tercera, z en este caso, queda indeterminada. No es que no exista, sino solamente que no se sabe cuánto es. En realidad z podría ser cualquier número real, y cada valor de z da una solución distinta para x y y según las ecuaciones de arriba, $x = 7 - 5z$ y $y = 2 - 3z$.

Por ejemplo, si $z = 0$ deben ser $x = 7$ y $y = 2$. En efecto, $x = 7$, $y = 2$ y $z = 0$ es una solución del sistema original, como puede comprobarse fácilmente sustituyendo.

Y si fuera $z = -8$, los valores de x y y serían $x = 7-5(-8) = 47$ y $y = 2-3(-8) = 26$. La solución completa es $x = 47$, $y = 26$, $z = -8$.

Los valores que usamos para z son solo dos posibilidades. Pero como vemos, hay infinitas soluciones: una para cada valor de z (una solución es un valor para cada incógnita; por ejemplo, $x = 47$, $y = 26$ y $z = -8$ es *una* solución, no tres). La solución general se expresa como ya hicimos, dando x y y en términos de z:

$$\begin{cases} x = 7 - 5z \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

con cualquier $z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 12

Para resolver $\begin{cases} 12y - 3x = 1 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ el método GJ empieza así:

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} -3 & 12 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \\ F_1 \leftrightarrow F_2 & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -4 & 5 \\ -3 & 12 & 1 \end{pmatrix} \\ F_2 + 3F_1 \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora es imposible poner el 1 necesario en la posición 2,2, y tampoco es posible intercambiar F_2 con alguna fila inferior. Entonces regresamos al sistema: la última matriz representa a $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 0 = 16. \end{cases}$

Note la segunda ecuación, $0 = 16$. Esta es una igualdad falsa, independientemente de los valores de x y y. No es posible encontrar valores de las incógnitas que hagan ciertas todas las ecuaciones en el sistema (siempre fallará la segunda). La conclusión es que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 13

Para resolver $\begin{cases} 12y - 3x = -15 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ procedemos así:

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 & -15 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -4 & 5 \\ -3 & 12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema ahora es $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$ y la última ecuación no causa ningún problema: $0 = 0$ siempre, independientemente de los valores de x y y. Eso significa que esta ecuación no aporta ninguna información sobre las incógnitas, y podemos descartarla y quedarnos con el resto del sistema (una ecuación con dos incógnitas): $x - 4y = 5$. Como hemos visto, de aquí puede despejarse $x = 5 + 4y$, y y es una incógnita “libre”. Hay entonces infinitas soluciones, una para cada valor de y. La solución general es

$$x = 5 + 4y \qquad \text{con } y \in \mathbb{R}.$$

Algunas soluciones particulares son $x = 5$, $y = 0$, o bien $x = 1$, $y = -1$, etc.

Ejemplo 14

Suponga que la fábrica del Ejercicio 29 (página 123) tiene un sobrante de 150 broches y 70 cremalleras que desean gastar. ¿Cuántos maletines y cuántos pantalones pueden hacer con ellos, y cuántos metros de tela necesitarán?

Las incógnitas principales son el número de maletines y el número de pantalones; las denotaremos m y p respectivamente. Recordando la matriz de materiales,

$$M = \begin{array}{c} \\ \text{m} \\ \text{p} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{t} & \text{b} & \text{c} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

vemos que el número de broches necesarios para m maletines y p pantalones es $8m + 2p$, y que el número de cremalleras necesarias es $3m + p$. Para gastar las existencias, el primer número debe ser 150 y el segundo 70:

$$\begin{cases} 8m + 2p = 150 \\ 3m + p = 70. \end{cases}$$

La solución procede así:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 8 & 2 & 150 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix} \\
F_1 \div 8 \rightarrow &\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1/4 & 75/4 \\ 3 & 1 & 70 \end{pmatrix} \\
F_2 - 3F_1 \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ \mathbf{0} & 1/4 & 55/4 \end{pmatrix} \\
F_2 \times 4 \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 75/4 \\ 0 & \mathbf{1} & 55 \end{pmatrix} \\
F_1 - \tfrac{1}{4}F_2 \rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & 1 & 55 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solución es entonces $m = 5$ maletines y $p = 55$ pantalones. La cantidad de tela necesaria será $1.5m + 2p = 117.5$ metros.

En el modelo económico de insumo/producción de Leontief se parte del supuesto de que una economía está basada en cierto número de industrias. Para producir, cada industria necesita consumir de sí misma y de las otras industrias. Por supuesto, cada industria debe proveer no solo a las otras sino también a la población, que presenta una demanda externa. Se quiere determinar cuánto debe producir cada industria de modo que se satisfagan las demandas de consumo entre ellas y también se satisfaga la demanda externa.

Ejemplo 15

Una economía está basada en las industrias de petróleo, textiles y transporte. Es claro que la industria del transporte necesita petróleo, que la industria textil necesita transporte y que en general cada industria necesita de las demás. La siguiente tabla muestra cuánto requiere cada industria de sí misma y de las otras dos:

		Para producir \$1 de		
		Petróleo	Textiles	Transporte
Se necesitan \$1s de...	Petróleo	0.10	0.40	0.60
	Textiles	0.05	0.10	0.00
	Transporte	0.20	0.15	0.10

Por ejemplo, la primera columna indica que para producir un dólar de petróleo se requiere consumir \$0.10 de petróleo, \$0.05 de textiles y \$0.20 de transporte.

Debe satisfacerse una demanda externa por \$650 mil en petróleo, \$150 mil en textiles y \$400 mil en transporte. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer esta demanda, teniendo en cuenta las cantidades consumidas en la producción misma?

Denotemos con x la producción de la industria de petróleo, con y la producción de textiles y con z la producción de transporte, todas en miles de dólares.

La industria de petróleo consumirá 0.1 dólares por cada dólar de petróleo producido, así que para producir x miles de dólares de petróleo se consumirán $0.1x$ miles de dólares de petróleo. Luego, la industria de textiles consumirá 0.4 dólares por cada dólar de textiles producido; entonces para producir y miles de dólares de textiles se consumirán $0.4y$ miles de dólares de petróleo. Similarmente, la industria de transporte consumirá $0.6z$ miles de dólares de petróleo. En total, las tres industrias consumirán $0.1x+0.4y+0.6z$ miles de dólares de petróleo. Por tanto, la producción total de petróleo, x, se descompone como la suma de $0.1x+0.4y+0.6z$ más la demanda externa de petróleo, que es 650 (todo en miles de dólares). En símbolos:

$$x = 0.1x+0.4y+0.6z+650$$

Similarmente, la producción de textiles se descompondrá en la parte consumida por las industrias mismas, $0.05x+0.1y+0z$, y la demanda externa, 150:

$$y = 0.05x+0.1y+0z+150$$

Por último, la producción de transporte se descompondrá así:

$$z = 0.2x+0.15y+0.1z+400$$

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que en forma estándar se convierte en

$$\begin{cases} 0.9x-0.4y-0.6z = 650 \\ -0.05x+0.9y = 150 \\ -0.2x-0.15y+0.9z = 400 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x \approx 1353.383$, $y \approx 241.855$, $z \approx 785.505$. Entonces la industria de petróleo debe producir \$1 353 383, la de textiles \$241 855 y la de transportes \$785 505. ∎

Resuelva, dando dos soluciones particulares cuando haya infinitas

38. $\begin{cases} 3p+6q = 5 \\ 8p+15q = 6 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 5a+7b = 33 \\ 7a-7b = -21 \end{cases}$

40. $\begin{cases} -10x+4y = -41 \\ 4x-2y = 13 \end{cases}$

41. $\begin{cases} r+ct = 3 \\ 3r+4ct = 8 \end{cases}$ con c constante

42. $\begin{cases} -3a+c = 0 \\ 4a-6b = c-2 \\ a-2 = 5b \end{cases}$

43. $\begin{cases} s-2t=3+3r \\ 4r-s+t=3 \\ 6r-2s+3t+1=0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=-1 \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2a-b+c=3 \\ 3a+2b-2c=1 \\ a-3b+c=-2 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2p+q-3r=5 \\ 3p+2q-2r=5 \\ 5p-3q-r=16 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3t-u+3v+w=2 \\ 2t+3u+2v+w=2 \\ -3t-u-4v+w=1 \\ -4t+14u-4v=-5 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x-3y+z+5w=-1 \\ x-y-z+2w=-4 \\ -3x+2z-3w=3 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2a+b-3c+d=-5 \\ 3a-b+11c-18d=-8 \\ a+3c-4d=3 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ 4x+y+2z=-1 \\ 10x+2y+5z=-7 \end{cases}$

53. $\begin{cases} p-2q=10 \\ p+2r=4 \quad \text{con } k \text{ constante} \\ q+kr=2 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-3y+6z+2w=3 \\ y-4z+v=1 \\ v-w=2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x+y+2z+w=5 \\ 2x+3y-z-2w=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$

56. $\begin{cases} x+y-2z+w+3v=1 \\ 2x-y+2z+2w+6v=2 \\ 3x+2y-4z-3w-9v=3 \end{cases}$

Resuelva

57. Un teléfono público recibe monedas de ₡10 y ₡20. Si contiene 43 monedas que valen ₡570 en total, ¿cuántas monedas de cada valor hay en el teléfono?

58. Un grupo de siete personas paga un total de ₡5400 para entrar en un parque. Un tiquete de adulto cuesta ₡1000, y uno de niño cuesta ₡600. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el grupo?

59. Un millonario invirtió \$60 000 en dos fondos que pagan tasas de interés anual simple de 9% y 10.5%, respectivamente. Si cada año recibe \$5745 en intereses, ¿cuánto invirtió en cada fondo?

60. Un administrador se dispone a realizar un estudio de mercadeo. Planea hacer una encuesta con 600 llamadas telefónicas y 400 visitas a domicilio. La compañía encuestadora A tiene personal para llevar a cabo treinta llamadas y diez visitas por hora. La compañía B puede encargarse de veinte llamadas y veinte visitas por hora. ¿Cuántas horas debe contratarse a cada compañía para producir exactamente el número de llamadas y visitas planeadas?

61. Un fabricante produce dos artículos, A y B. La utilidad es de ₡400 por cada unidad de A y ₡550 por cada unidad de B. Se sabe que puede vender 25% más unidades de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender para obtener una utilidad de ₡2 100 000?

62. Un comerciante desea mezclar nueces, que cuestan ₡2400 el kilo, con pasas, que cuestan ₡5600 el kilo. Desea obtener 25 kg de una mezcla con un costo de ₡3232 por kilo. ¿Cuántos kilos de nueces y cuántos kilos de pasas debe mezclar?

63. Una tienda se dedica a preparar mezclas de café. Preparan bolsas de medio kilo usando café de Colombia, Costa Rica y Java. El costo por kilo de estos cafés es ₡4800, ₡3600 y ₡3000, respectivamente. Cada paquete tiene un costo total de ₡1884. Si se incluyen cien gramos de café de Java en cada bolsa, cuántos gramos de café de Colombia y de Costa Rica se necesitan para completar el paquete?

64. Una fábrica de muebles produce sillas y mesas. Construir una silla toma dos horas y cuesta ₡20 000, mientras que cada mesa se construye en cinco horas y cuesta ₡48 000. La fábrica dispone de 345 horas de trabajo y puede pagar ₡3 344 000 por semana. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas pueden producir semanalmente?

65. Una fábrica de productos lácteos produce helado regular y helado especial en dos plantas. La planta en Alajuela produce dos barriles de helado regular y un barril de helado especial por cada hora de operación. La planta en Heredia produce tres barriles de regular y dos barriles de especial por hora de operación. Cuesta ₡120 000 por hora operar la planta en Alajuela, y ₡215 000 por hora operar la planta en Heredia.

La compañía necesita producir 46 barriles de regular y 27 barriles de especial por día. ¿Cuántas horas al día debe operar cada planta para satisfacer los requisitos de producción?

66. Una fábrica de automóviles produce los modelos A y B. El primero requiere una hora de pintura y treinta minutos de pulido. El segundo, una hora de pintura y una de pulido. Si se dispone de cien horas de pintura y ochenta horas de pulido por semana, ¿cuántos automóviles de cada modelo se pueden producir cada semana?

67. En una economía se produce maíz y leche. Las demandas inter-industriales son:

		Para producir \$1 de…	
		Maíz	Leche
Se necesitan	Maíz	0.19	0.13
\$1's de…	Leche	0.04	0.38

¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer una demanda externa de \$6850 de maíz y \$9230 de leche?

68. Una economía está basada en las industrias A y B. Los requerimientos inter-industriales de producción son:

		Para producir una unidad de...	
		A	B
Se necesitan estas	A	0.27	0.08
unidades de...	B	0.15	0.09

¿Cuántas unidades de cada industria se requieren para satisfacer una demanda final de 330 unidades de A y 265 unidades de B?

69. Un grupo de animales en un experimento se somete a una dieta estricta. Cada uno debe recibir 20 g de proteína y 6 g de grasa. El laboratorio puede conseguir dos tipos de alimento con las siguientes composiciones: El tipo A tiene 10% proteína y 6% grasa, y el tipo B tiene 20% proteína y 2% grasa. ¿Cuántos gramos de cada tipo de alimento deben usarse para obtener la dieta correcta de un animal?

70. Una persona debe consumir diariamente 24 unidades de vitamina B y 18 de vitamina C. Las pastillas marca X cuestan ₡60 y contienen 8 unidades de vitamina B y 6 de C. Las pastillas Y cuestan ₡40 y contienen 4 unidades de B y 3 de C. ¿Cuántas pastillas de cada marca pueden comprarse con ₡200 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

71. La suma de tres números es 42. La diferencia entre los dos primeros es 6, y el tercero es igual al promedio de los otros dos. Encuentre los tres números.

72. Una compañía distribuye tres productos: A, B y C. Los costos fijos son de $24 000 por año, y los costos variables son $4, $6 y $9 por cada unidad de A, B y C respectivamente. Las utilidades unitarias son $2, $4 y $7 respectivamente. Para el próximo año, la demanda para los productos A y B será de 12 000 unidades en total. ¿Cuántas unidades de cada producto deben distribuirse para obtener una utilidad total de $45 000 con un costo total de $95 000 en el año?

73. Un proveedor de productos para el campo tiene tres tipos de fertilizantes, A, B y C, que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. Se planea mezclarlos para obtener 300 kg de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25%. La mezcla debe contener 50 kg más del tipo C que del tipo B. ¿Cuántos kilos de cada tipo deben usarse?

74. Parte de la lista de ingredientes requeridos para tres recetas de postre se da en la siguiente tabla:

	Azúcar (tazas)	Huevos (unidades)	Leche (litros)	Número de porciones
Pastel de manzana	3	2	1	6
Queque de banano	2	5	2	8
Rosquete borracho	2	4	2	10

Hay quince tazas de azúcar, dos docenas de huevos y once litros de leche disponibles. Suponiendo que no hay problema para conseguir los demás ingredientes (manzanas, bananos, ron, etc.), ¿cuántas porciones de cada tipo de postre pueden hacerse para usar todo el azúcar, todos los huevos y toda la leche?

75. Una economía está basada en las industrias de petróleo, transporte y agricultura. Los requerimientos inter-industriales de producción son:

		Para producir una unidad de…		
		Petróleo	Transporte	Agricultura
Se necesitan estas unidades de …	Petróleo	0.15	0.45	0.25
	Transporte	0.10	0.05	0.15
	Agricultura	0.00	0.00	0.05

¿Cuántas unidades de cada industria se requieren para satisfacer una demanda final de 1200 unidades de petróleo, 850 de transporte y 480 de agricultura?

76. En una economía se produce acero, carbón y transporte. Las demandas inter-industriales son:

		Para producir \$1 de…		
		Acero	Carbón	Transporte
Se necesitan \$1's de…	Acero	0.40	0.20	0.18
	Carbón	0.25	0.15	0.12
	Transporte	0.30	0.20	0.25

¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer una demanda externa de \$24 000 de acero, \$33 500 de carbón y \$57 200 de transporte?

77. Se puede invertir dinero en tres bancos a distintas tasas de interés anual simple. Un inversionista tiene \$1000 repartidos en partes iguales entre los bancos A y B, y en total recibe en intereses \$35 por año. Un segundo inversionista ha invertido en los bancos B y C; el monto que invirtió en C es el doble de lo que invirtió en B, y entre ambas inversiones recibe en intereses un 3.1% anual del total invertido. Un tercer inversionista tiene \$2000 invertidos, con la mitad en A y el resto en partes iguales entre B y C; él gana \$62.50 en intereses al año. El promedio entre las tasas de interés de los tres bancos es 3.2%. ¿Cuál es la tasa de interés de cada banco?

78. Una población de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla Lirio vuela a la isla Margarita; 20% de la población de Margarita vuela a la isla Narciso, y 5% de la población de Narciso vuela a Lirio. A pesar de esas migraciones, la población de cada isla es estable de un año a otro. ¿Cuántas aves viven en cada isla?

79. Una persona debe consumir diariamente 10 unidades de vitamina A, 9 de vitamina D y 19 de vitamina E. Las pastillas marca X cuestan ₡75 y contienen 2 unidades de vitamina A, 3 de D y 5 de E. Las pastillas Y cuestan ₡60 y contienen 1 de A, 3 de D y 4 de E. Las pastillas Z cuestan ₡30 y contienen 1, 0 y 1 unidad de A, D y E respectivamente. ¿Cuántas pastillas pueden comprarse con ₡345 al día, que satisfagan los requisitos de vitaminas?

80. En un triángulo, el ángulo mayor mide el doble de la suma de los otros dos. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

81. Encuentre tres enteros mayores que cinco tales que la suma de los tres sea 117, el promedio de los tres sea 39 y el primero sea ocho veces la suma de los otros dos.

82. Pueden usarse tres tuberías para llenar una piscina. La tubería A tarda ocho horas en llenar la piscina. Las tuberías A y C, trabajando simultáneamente, la llenan en seis horas. Si se usan B y C juntas, el tiempo de llenado es diez horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina si se usan las tres tuberías?

8.3 Solución de sistemas con calculadora

Si su calculadora resuelve sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, ella le puede ayudar a resolver sistemas más grandes, siempre que exista una solución única. La idea es usar el método GJ para reducir el sistema a uno más pequeño que la calculadora sí pueda resolver.

Ejemplo 16

Para el sistema $\begin{cases} 3a+d=1 \\ 3b-c=-9 \\ 2a-b+c=5 \\ a+2b+d=-3 \end{cases}$ la matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Podemos intercambiar F_1 y F_4 para obtener el uno necesario en la posición $1,1$, y después hacer F_3-2F_1 y F_4-3F_1 para obtener los ceros. Con eso llegamos a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Dejemos GJ en este punto y notemos que las filas 2 a 4 dan el sub-sistema

$$\begin{cases} 3b-c=-9 \\ -5b+c-2d=11 \\ -6b-2d=10 \end{cases}$$

que, gracias a los ceros en la primera columna, contiene solamente tres incógnitas. En una calculadora encontramos la solución de este sistema, que es $b=-2$, $c=3$ y $d=1$.

Por otra parte, la primera fila de la matriz dice que $a+2b+d=-3$, de donde podemos despejar $a=-3-2b-d=-3-2(-2)-(1)=0$. Con eso el sistema está completamente resuelto[1].

[1] Otra opción era despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones. También así se consigue un nuevo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, para cedérselo a la calculadora.

Otra opción, a partir de la matriz aumentada, era restar $F_1 - F_4$, lo cual, a pesar de ser una gran desviación del método GJ, funciona porque resulta en la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Las filas 1 a 3 de esta matriz representan el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = 4 \\ 3b - c = -9 \\ 2a - b + c = 5 \end{cases}$$

cuya solución en la calculadora es, por supuesto, $a = 0$, $b = -2$ y $c = 3$. El valor de d se obtiene de la cuarta fila, y es $d = 1$.

Para sistemas más grandes deben trabajarse las columnas necesarias para que el sistema reducido pueda resolverse por calculadora. Por ejemplo, para cinco ecuaciones con cinco incógnitas deben reducirse dos columnas para que el nuevo sistema tenga tres ecuaciones y tres incógnitas.

Resuelva con ayuda de una calculadora

83. $$\begin{cases} -a - 3b + 5c - 3d = -14 \\ a + 3b + 5c - 4d = 6 \\ 4a - b + 3c - 5d = -31 \\ 5a + 2b - 4c + 3d = -1 \end{cases}$$

84. $$\begin{cases} 2p - 2q - 4r + s + 3t = 23 \\ -2p + 2q - r + 5t = 7 \\ -2p + 5q + 2r + s + 2t = 3 \\ -4p + 2q - 5r - s + 2t = 10 \\ -2p + 5q + 4r + s + 5t = -2 \end{cases}$$

85. $$\begin{cases} -r - 4s + u + 3v = -16 \\ -3r + 4s - t - u + v = -3 \\ -2r + 3s - u - 5v = 22 \\ -5r + s + 2t - 3u - 5v = 16 \\ 4r - 2s + 5t - 3u + v = -5 \end{cases}$$

86. $$\begin{cases} -3w - 3x - y - 5z = -7 \\ -2w - 2x - 4y + z = 12 \\ w + 3x - 4y = 30 \\ 4w - x + 2y + 4z = -9 \end{cases}$$

8.4 Matrices inversas

Si A y B son matrices de tamaño $n \times n$ tales que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (la identidad de orden n) entonces A y B son *inversas* una de la otra, y se escribe $B = A^{-1}$ o $A = B^{-1}$. Si una matriz tiene inversa, se dice que es *invertible*.

Ejemplo 17

Las matrices $\left(\begin{smallmatrix}3&7\\2&5\end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix}5&-7\\-2&3\end{smallmatrix}\right)$ son inversas, porque

$$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

y también

$$\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2.$$

Entonces escribimos $\left(\begin{smallmatrix}3&7\\2&5\end{smallmatrix}\right)^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}5&-7\\-2&3\end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix}5&-7\\-2&3\end{smallmatrix}\right)^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}3&7\\2&5\end{smallmatrix}\right)$.

La inversa de una matriz de tamaño 2×2 puede calcularse con la fórmula

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

Pero si $ad-bc=0$, la matriz $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ no tiene inversa.

Para calcular la inversa de una matriz A de tamaño $n\times n$ se aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz $(A\,\vdots\,I_n)$, la matriz de tamaño $n\times(2n)$ que resulta de colocar las n columnas de A seguidas por las n columnas de I_n. Al final del proceso la mitad derecha de la matriz será igual a A^{-1}. En símbolos, el método de Gauss-Jordan transforma $(A\,\vdots\,I_n)$ en $(I_n\,\vdots\,A^{-1})$.

Ejemplo 18

Calcular la inversa de $M=\left(\begin{smallmatrix}1&0&-3\\2&1&-6\\0&6&-2\end{smallmatrix}\right)$.

La matriz inicial (M aumentada con I_3) es

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&1&0&0\\2&1&-6&0&1&0\\0&6&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos GJ:

$$F_2-2F_1\to\begin{pmatrix}1&0&-3&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&6&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$F_3-6F_2\to\begin{pmatrix}1&0&-3&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-2&12&-6&1\end{pmatrix}$$

$$F_3\div(-2)\to\begin{pmatrix}1&0&-3&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-6&3&-1/2\end{pmatrix}$$

$$F_1+3F_3\to\begin{pmatrix}1&0&0&-17&9&-3/2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-6&3&-1/2\end{pmatrix}$$

Concluimos que $M^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -17 & 9 & -3/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -1/2 \end{smallmatrix}\right)$. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 9 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 19

Calcular la inversa de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
F_1 \leftrightarrow F_2 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
F_1 \div 2 \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
F_2 \div 4 \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
F_3 + 6F_2 \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ya no podemos convertir la posición $3,3$ en 1, por lo que GJ no pudo llegar a buen término. Cuando esto sucede, la conclusión es que la matriz no tiene inversa.

Cualquier sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en la forma $A \cdot X = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la columna de incógnitas y B es la columna de lados derechos. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$$

puede escribirse en forma equivalente como

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix},$$

con $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$. Eso se debe a que el producto a la izquierda, $A \cdot B$, es igual a $\left(\begin{smallmatrix} 3x+7y \\ 2x+5y \end{smallmatrix}\right)$, y para que sea igual al lado derecho, $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, deben cumplirse las dos ecuaciones en el sistema original.

Si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y si la matriz de coeficientes A es cuadrada e invertible, entonces es posible multiplicar los dos lados de la igualdad $A \cdot X = B$ por A^{-1} para obtener

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

(donde I es la matriz identidad, resultado de multiplicar A^{-1} por A).

En resumen, si $A \cdot X = B$ representa un sistema de ecuaciones, y la matriz de coeficientes A es invertible, entonces el sistema tiene una solución única, dada por $X = A^{-1} \cdot B$.

Ejemplo 20

Acabamos de mencionar el sistema $\begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$, cuya matriz de coeficientes es $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Como ya vimos en el Ejemplo 17, la inversa de A es $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Entonces la solución del sistema es

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Específicamente, $x = 58$ y $y = -24$.

La utilidad de este nuevo método se aprecia cuando hay que resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Así, el trabajo de calcular su inversa se hace una sola vez, y ahora para cada sistema basta con usar la fórmula $X = A^{-1} \cdot B$ para encontrar la solución. Vea el Ejercicio 118.

Compruebe que las dos matrices son inversas entre sí

87. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

88. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 1 & -2/c \end{pmatrix}$ si $c \neq 0$

89. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

90. $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

91. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcule la inversa, si existe

92. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

93. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

94. $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

95. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

96. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

97. $\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

98. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$

99. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

100. $\begin{pmatrix} 1/3 & 5/2 \\ 1/5 & 3/2 \end{pmatrix}$

101. $\begin{pmatrix} -1 & -2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$
con $a \in \mathbb{R}$

102. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

103. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

105. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

106. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

107. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & c & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
con $c \in \mathbb{R}$

109. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

110. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resuelva usando las inversas de los ejercicios 102 y siguientes

111. $\begin{cases} p + 2r = 5 \\ 2p - q + 3r = 0 \\ 4p + q + 8r = 6 \end{cases}$

112. $\begin{cases} a + 2b + 3c = -3 \\ a + 3b + 5c = 1 \\ a + 2b + 4c = 4 \end{cases}$

113. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 13 \\ 2x - y + z = -2 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

114. $\begin{cases} 8x - y - 3z = 5 \\ -5x + y + 2z = 3 \\ 10x - y - 4z = 0 \end{cases}$

115. $\begin{cases} v - w = 4 \\ 4u - 3v + 4w = 2 \\ 3u - 3v + 4w = 1 \end{cases}$

116. $\begin{cases} a + b + 2c + d = 4 \\ -2b = 5 \\ a + 2b + c - 2d = 0 \\ 3b + 2c + d = -2 \end{cases}$

Resuelva

117. Para los tres sistemas $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x + 5y = -6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ x + 2y = 24 \end{cases}$, calcule la inversa de la matriz de coeficientes y úsela para resolver los sistemas.

118. La fábrica de ropa del Ejercicio 29 (página 123) tiene un proveedor que suple los broches y las cremalleras en cantidades limitadas. Esta semana pueden suplir 200 broches y 85 cremalleras; la siguiente semana, 220 b y 90 c; luego 240 b y 100 c; y la cuarta semana 250 b y 105 c. Suponiendo que la tela no tiene problemas de disponibilidad, se quiere determinar cuántos maletines y cuántos pantalones pueden producirse cada una de esas semanas.

(a) Escriba la matriz de coeficientes para el sistema de ecuaciones de cada semana.

(b) Encuentre la inversa de la matriz en (a).

(c) Use la inversa en (b) para resolver los cuatro sistemas de ecuaciones.

119. Resuelva los cuatro sistemas del ejercicio anterior en una sola matriz: la matriz de coeficientes aumentada con una columna para cada semana.

8.5 Determinantes

El *determinante* de una matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de tamaño 2×2 es

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ejemplo 21

El determinante de $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ es

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(4) - (7)(6) = -54$$

Para $n > 2$, el determinante de una matriz $A_{n \times n}$ es

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

para cualquier i fijo, o bien

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$

para cualquier j fijo, donde M_{ij}, llamado el *menor* de a_{ij}, es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fija i y la columna j de A.

Ejemplo 22

Para calcular el determinante de $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, una opción es desarrollar a lo largo de la fila 1 (usando $i = 1$ en la definición):

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\ &= +a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \\ &= (-2) M_{11} - (1) M_{12} + (3) M_{13}. \end{aligned}$$

Aquí, el menor M_{11} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 1 de A:

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 0 = -6.$$

Similarmente,

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6.$$

y

$$M_{13} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12.$$

Entonces $\det(A) = (-2)(-6) - (1)(6) + (3)(-12) = -30$.

También era posible desarrollar el determinante a lo largo de cualquiera otra fila o columna. Por ejemplo, por la columna 2 (usando $j = 2$ en la segunda línea de la definición):

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}M_{22} + (-1)^{3+2}a_{32}M_{32} \\ &= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} \\ &= -(1)M_{12} + (3)M_{22} - (0)M_{32}. \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 16 = 6,$$

$$M_{22} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

y

$$M_{32} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7.$$

Entonces $\det(A) = -(1)(6) + (3)(-8) + (0)(-7) = -30$.

El determinante de A es siempre -30, sin importar cómo se calcule.

En el ejemplo, anterior, note que no era necesario calcular M_{32} porque iba a ser multiplicado por $a_{32} = 0$. En general, conviene desarrollar los determinantes por las filas o columnas que contengan más ceros.

Ejemplo 23

Al desarrollar el determinante de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo más eficiente es usar la columna 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0)M_{12} + (-2)M_{22} - (0)M_{32} + (0)M_{42} = -2M_{22},$$

donde M_{22} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila 2 y la columna 2 de B:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Escojamos ahora la columna 2:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -4(3) = -12.$$

Finalmente, $|B| = -2M_{22} = -2(-12) = 24$.

Una matriz cuadrada A es *triangular superior* si todos sus elementos bajo la diagonal son cero, o *triangular inferior* si todos sus elementos sobre la diagonal son cero. Resulta que si T es una matriz triangular (superior o inferior) entonces su determinante es el producto de su diagonal:

$$\det(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdots t_{nn}.$$

Para simplificar el cálculo de un determinante pueden hacerse operaciones entre las filas o columnas de la matriz, para conseguir más ceros o para llevar la matriz a forma triangular. En concreto, si A es una matriz cuadrada entonces:

- Al intercambiar dos filas o dos columnas de A, el determinante cambia de signo.
- Al multiplicar una fila o columna de A por un escalar c, el determinante se multiplica por c.
- Al sumar a una fila o columna de A un múltiplo de otra, el determinante se mantiene igual.

Ejemplo 24

Sea $D = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Para calcular su determinante deberíamos primero buscar qué operaciones entre filas o columnas consiguen más ceros en la matriz o la llevan a alguna forma triangular. Notando que las filas 1 y 4 se parecen, decidimos restar $F_1 - F_4$. El determinante se mantiene:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_1 - F_4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ahora vemos que la primera fila y la cuarta columna tienen tres ceros, pero antes de desarrollar notemos que la primera columna también tiene dos ceros y la segunda tiene uno. Con solo intercambiar las columnas 1 y 3 la matriz será triangular inferior:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = - \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}}$$

El signo cambia por el intercambio de columnas. El nuevo determinante se calcula ahora simplemente multiplicando la diagonal:

$$\det(D) = -(7)(-8)(9)(3) = 1512$$

La *Regla de Cramer* permite encontrar el valor de una o varias incógnitas en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, si la solución es única, de la siguiente manera: Si $A_{n\times n}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones con incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, con $\det(A) \neq 0$, y si A_j es el resultado de sustituir la columna j de A por el lado derecho del sistema, entonces

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 25

Encontrar el valor de y en el sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ 5x + 4y - z = -6 \\ 5x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$.

En primer lugar, identifiquemos las incógnitas x, y y z con x_1, x_2 y x_3, según la notación de Cramer. La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Las matrices mencionadas en el teorema son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 5 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar el valor de $y = x_2$, calculamos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -33$$

y

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 132.$$

Por la regla de Cramer encontramos que $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{132}{-33} = -4$. $\lrcorner$

Calcule, para $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

120. $\det(A)$, $|B|$ y $|C|$

121. $|A^{\mathsf{T}}|$, $|B^{\mathsf{T}}|$ y $|C^{\mathsf{T}}|$

122. $A \cdot B$, $|A \cdot B|$ y $|A| \cdot |B|$

123. C^{-1}, $|C^{-1}|$ y $|C|^{-1}$

Calcule

124. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

125. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

126. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

127. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

128. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

129. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

130. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -9 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

131. $\begin{vmatrix} 8 & -9 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

132. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 9 & -5 \\ 0 & -8 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 5 \end{vmatrix}$

133. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -8 \\ -8 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Resuelva usando la regla de Cramer

134. $\begin{cases} 3p+6q=5 \\ 8p+15q=6 \end{cases}$

135. $\begin{cases} -2a+5b=-47 \\ 5a-6b=72 \end{cases}$

136. $\begin{cases} -3a+c=0 \\ 4a-6b=c-2 \\ a-2=5b \end{cases}$

137. $\begin{cases} s-2t=3+3r \\ 4r-s+t=3 \\ 6r-2s+3t+1=0 \end{cases}$

138. $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3x+2z=-1 \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

139. $\begin{cases} 2a-b+c=3 \\ 3a+2b-2c=1 \\ a-3b+c=-2 \end{cases}$

140. $\begin{cases} 2p+q-3r=5 \\ 3p+2q-2r=5 \\ 5p-3q-r=16 \end{cases}$

141. Encuentre w en $\begin{cases} 3t-u+3v+w=2 \\ 2t+3u+2v+w=2 \\ -3t-u-4v+w=1 \\ -4t+14u-4v=-5 \end{cases}$

142. En el Ejercicio 73 (página 136), si ahora se necesitan iguales cantidades de los tipos B y C, ¿cuántos kilos de A deben usarse?

143. En el Ejercicio 74 (página 136), si ahora hay once tazas de azúcar, quince huevos y siete litros de leche disponibles, ¿cuántas porciones de pastel de manzana pueden hacerse?

144. El tanque de un buque petrolero puede ser llenado en dos días usando tres bombas. La bomba grande y la pequeña juntas tardarían tres días, mientras que la pequeña y la mediana juntas tardarían cuatro días. ¿Cuánto tiempo tardaría la bomba pequeña, trabajando sola, en llenar el tanque?

APÉNDICE A

Sugerencias

1 Los números reales

63 Multiplique por $\sqrt[4]{5}\sqrt{10}$.

64 Multiplique por $\sqrt[5]{2^2}$.

69 Multiplique por $4+2\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{10}^2$.

70 Note que $-2\sqrt[3]{-4}=+2\sqrt[3]{4}$. Multiplique por $\sqrt[3]{18}^2-2\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{4}^2$.

76 Considere la fracción $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{1}$.

2 Expresiones algebraicas

96 Primero use agrupación.

98 Primero agrupe los dos primeros y los dos últimos.

99 Primero factorice los cuatro primeros términos.

100 Use diferencia de cuadrados siempre que pueda, antes que diferencia de cubos. Si no, $a^4+a^2b^2+b^4$ puede factorizarse completando cuadrados (sumando y restando a^2b^2), como en la nota al pie de la página 23.

115 Es mejor usar factor común y luego agrupación.

207 Tome denominador común primero.

3 Ecuaciones

37 Puede hacer $y=x^2$.

38 Puede hacer $x=c^3$.

44 Haga $x=r^2+1$.

104 Recuerde que $\sqrt{a^2}=|a|$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$.

108 Denótelos x y $x+2$.

109 Denótelos x y $x+2$.

110 $e+5=3(e-7)$

111 Si hay x de ₡100, entonces hay $12-x$ de ₡50.

112 Si hay x de platea, entonces hay $3x$ de gradería.

114 Si x es el monto sin IV, entonces $x+0.13x=46556$, y el IV es $0.13x$.

115 Sea n el número de incrementos de ₡10 000. Entonces se alquilarán $18-n$ apartamentos a ₡$150000+10000n$ cada uno.

116 Sea x el número de niños adicionales a los primeros 20. Entonces son $20+x$ niños, y cada uno paga $3000-100x$.

117 $180000/(n-3)=180000/n+250$

118 $(n+4)(720/n-15)=720)$

119 $(n-3)(300/n+5)=300$

120 El discriminante debe ser cero. Una solución es $a = 0$, pero entonces la ecuación no es cuadrática y no tiene solución.

122 Si la base es b entonces la altura es $h = 360/b$, y el perímetro $2b + 2h = 76$.

123 La base es $b = h + 3$, y el área es $A = bh/2$.

124 $(35 + a)(25 + a) = 2(35)(25)$

125 $3q - (75000 + 2.2q) = 50000$

126 $200q - (350000 + 150q) = 82500$

127 $400q - (12000 + 125q) = 25000$

128 $35q - (50000 + 10q) = 0$

129 $100p - (40000 + 300 \cdot 100) = 100000$

130 $5000p - (9000 + 1.2 \cdot 5000) = 15000$

131 $p(200 - 0.1p) = 80000$

132 $P(0.09) + (14000 - P)(0.12) = 1500$

133 $P(0.12) + (5000000 - P)(0.15) = 720000$

134 $5000(0.08) + P(0.10) = 750$

135 $P(0.09) + (7200000 - P)(0.12) = 7200000(0.10)$

136
$30000(0.12) + P(0.085) = (30000 + P)(0.10)$

137 $4000000(0.12) + 8000000r = 12000000(0.165)$

138
$3500000(0.16) + 5000000(0.18) + 6000000r = 2780000$

139 $(P)(0.18)(2) + (2P)(0.14)(2) = 1\,000\,000$

140 $3a(0.08) + a(0.14) = 24700$

141 $2P = P(1 + 0.17t)$

142 $3P = P(1 + 20r)$

143 $2400(x) + 5600(25 - x) = 3232(25)$

144 $200(x) + 300(60000 - x) = 15654400$

145 $0.20(x) + 0.12(40 - x) = 0.15(40)$

146 $0.20(2.5 - x) + 1.00(x) = 0.50(2.5)$

147 $0.025(v) + 0.04(235 - v) = 0.03(235)$

148 $50t + 55t = 30$

149 $400/(v - 20) = 450/(v + 20)$

150 $d/55 + d/50 = 3$

151 $d^2 = (29 \times 1.5)^2 + (38 \times 1.5)^2$

152 Cae al suelo cuando su altura es 0.

153 $1/6 + 1/10 + 1/12 = 1/t$

154 $1/50 + 1/t = 1/30$

155 $1/10 - 1/t = 1/12$

156 Una opción: la manguera del ejercicio anterior, con el derrame, llena 1/12 de tanque en una hora, y a eso se añade 1/15 que llena la otra manguera.
Otra opción: las dos mangueras juntas llenan 1/10+1/15 de tanque en una hora, y de eso se resta $1/t$ de tanque que se derrama, donde t es la respuesta al ejercicio anterior.

157 $45/120 + 60/n = 1$

4 Inecuaciones

21 Primero reste a.

41 Resuelva $2 \leq |u+4|$ y $|u+4| < 6$ por separado. Para que u satisfaga ambas inecuaciones, debe estar en la intersección de las dos soluciones.

42 Resuelva $5 < |1-3p|$ y $|1-3p| \leq 11$ por separado. Para que p satisfaga ambas inecuaciones, debe estar en la intersección de las dos soluciones.

73 Resuelva las dos inecuaciones por aparte y luego interseque las soluciones de ambas.

74 Resuelva las dos inecuaciones por aparte y luego interseque las soluciones de ambas.

75 $(82+90+x)/3 \geq 85$

76 $5000(0.08)+P(0.10) > 1000$

77 $90q-(2500000+40q) \geq 2000000$

78 $400q \geq 12000+125q$

79 $22000x+15000 \cdot 8 < 20000(x+8)$

80 $2400(x)+5600(25-x) \leq 4000(25)$

81 $5 \leq 40-x \leq 15$

82 $0.18x+0.21(800000-x) > 150000$

83 Si x es el número de aumentos, el número de habitaciones alquiladas será $100-2x$. La inecuación es $100-2x > 85$

84 $5000+2000t \leq 15000$

85 $4000000+150x < 5000000$

86 $5000 \leq 16000-2500t \leq 6000$

87 $300000000+7500q < 10000q$

88 $0.08v > 400000+0.03v$

89
$0.04(4000000)+0.10(v-4000000) > 500000$

90 $p(200-0.1p) > 96000$

91 $n(n+1)/2 \geq 1000$

92 $(n-1)n/2 < 20$

93 El tiempo de viaje debe ser menor que 1.5 horas. Los primeros 50 km tardan 50/60, y el resto tarda $50/v$ donde v es la incógnita. La inecuación es $50/60+50/v < 1.5$

94 Al cortar los cuadrados de tamaño x (en cm), los lados medirán $(40-x)$ cm. Al levantar las pestañas, la altura de la caja será x cm. El volumen será $V=(40-x)(40-x)x$ y deberá cumplir $V \geq 9000$.

95 $(2a)(a) > 300$

96 $15t-4.9t^2 > 8$

97 El perímetro es $P=2x+2y$ donde $x=25$, el primer lado, y y es la incógnita, el segundo lado. La inecuación es $|[2(25)+2y]-75| \leq 5$.

98 La comisión es $C=0.05V$, así que las ventas son $V=C/0.05$, y la inecuación es $|C/0.05-2350000| \leq 10000$.

99 $|4000000r(3)-2000000| \leq 50000$

5 Funciones

32 (b) Deben producir en promedio $20000/30$ al día, durante 30 días. Entonces el costo será $C(20000/30) \times 30$.

70 Pruebe igualar y_2 a cada uno de los trozos de y_1; para cada solución tentativa, confirme si se encuentra en el trozo apropiado.

6 Funciones lineales y cuadráticas

28 La recta pasa por $(19000, 500)$ y $(24000, 300)$.

29 La recta pasa por $(0, 2500)$ y $(4, 1250)$.

30 La recta pasa por $(0, 70)$ y $(10, 82)$, en miles de cajas.

31 Sean x el número de asistentes, y y el precio. La recta pasa por los puntos $(300, 600)$ y $(240, 700)$.

32 Un 8% del valor original es \$1280; esa es la disminución en V por cada unidad de aumento en t.

33 (a) La recta pasa por $(40, 3700)$ y $(50, 2900)$. (b) El ingreso es $I = pq$.

34 (a) La recta pasa por $(0, 480)$ y $(20, 30)$, en miles de colones. (c) n empieza en cero, y termina cuando $V = 0$.

35 La recta pasa por $(8, 17000)$ y $(11.5, 22250)$. El monto base es lo que cobraría por un viaje de 0 km, y el monto por kilómetro es el incremento en el cobro total debido a cada kilómetro adicional.

36 (a) La recta pasa por $(2003, 9473)$ y $(2006, 10341)$. (d) La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

37 La recta pasa por $(32, 0)$ y $(212, 100)$.

38 (a) La recta pasa por $(6, 112.8)$ y $(10, 136.7)$. (d) La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

39 (a) La recta pasa por $(0.9, 27)$ y $(1.6, 13)$. (c) Resuelva $y < 18$.

40 La recta pasa por $(480, 474)$ y $(640, 482)$, en miles de colones. El sueldo fijo es lo que recibiría si no vende nada; su comisión es el incremento en el pago debido a cada unidad de incremento en ventas.

41 (a) La recta pasa por $(2002, 357.99)$ y $(2005, 476.49)$. (b) La pendiente es el incremento en y debido a cada unidad de incremento en x.

58 El ingreso es $I = pq = 1260p - 0.04p^2$.

59 El ingreso es $I = pq = 1100q - \frac{5}{3}q^2$.

60 El ingreso es $I = pq = 6900p - 80p^2$.

61 Despeje p en la función de demanda. El ingreso es $I = 18q - 0.03q^2$.

62 Si n es el número de descuentos de \$10, entonces venderán $1000 + 20n$ unidades a ₡$(600 - 10n)$ cada una.

63 Si n es el número de disminuciones en la tarifa, entonces habrá $5000 + 85n$ usuarios pagando ₡$(12000 - 150n)$ cada uno.

64 Si n es el número de disminuciones de ₡10, entonces venderán $10000 + 100n$ ejemplares a ₡$(1500 - 10n)$ cada uno.

65 Si n es el número de incrementos de ₡10 000, entonces se alquilarán $21 - n$ apartamentos a ₡$(150000 + 10000n)$ cada uno.

66 Si n es el número de dólares adicionales en la tarifa, entonces se alquilarán $100 - 2n$ habitaciones a $\$(36 + n)$ cada una.

67 Si espera n semanas, obtendrá $180 + 30n$ kg con valor de $450 - 30n$ colones por kilo.

68 Si n es el número de árboles adicionales por hectárea, habrá $120 + n$ árboles por hectárea produciendo $600 - 3n$ naranjas cada uno.

69 (b) n, p y q no pueden ser negativos.

70 (b) El objeto caerá la segunda vez que $h = 0$.

71 El área es $A = 2r(400 - \pi r)$, donde $r =$ radio de los semicírculos.

72 Si b y h son la base y la altura, entonces $2b + 2h = 60$ y el área es $A = bh$. Despeje b (o h) en la primera ecuación y sustitúyalo en la segunda para escribir A como una función cuadrática de h (o b).

73 Maximizar $A = x(120 - 2x)$, donde $x =$ long del lado perpendicular.

7 Funciones exponenciales y logarítmicas

17 $8 \cdot 5^y - 3 \cdot 5^y = 5 \cdot 5^y = 5^{y+1}$

18 $3 \cdot 4^x + 4^x = 4 \cdot 4^x = 4^{x+1}$

34 $A = 6.5$ cuando $t = 1$, y $A = 7.4$ cuando $t = 3$, en millones de colones.

35 $V(0) = 20$ y $V(5) = 36$.

36 $V(1) = 43.8$ y $V(6) = 37.25$.

37 $TC(2) = 74.75$ y $TC(9) = 178.40$, en colones por dólar.

38 $P(31) = 511009$ y $P(86) = 2559845$.

39 $P(0) = 5$ y $P(30) = 10$ (el doble), en millones de habitantes.

40 $f(600) = 1$ y $f(500) = 1020$, en segundos.

98 $r^{-1}(u)$ está definida solo si $1 - 2^{8-u} \geq 0$ (por la raíz cuadrada).

113 Tome $x = 4^r$.

114 Tome $x = 2^s$.

122 Hay dos soluciones potenciales, pero la base debe ser mayor que cero.

123 Hay dos soluciones potenciales, pero la base debe ser mayor que cero.

137 Tome $x = \ln z$ y note que $\ln \sqrt{z} = x/2$.

138 Tome $u = \log_3 x$ y note que $\log_3(9/x) = 2 - u$.

146 La solución es 8.621, en años desde el inicio del 2000.

147 Las soluciones son 53.916, 77.576 y 91.142, en años desde el inicio del 1900.

148 La solución es 12.508, en años desde el inicio de 1976.

151 La solución es 7.14 años, pero la máquina se compró hace cinco años.

153 ₡100 a los 4.343 años y ₡250 a los 11.717 años, ambos desde el 15 de junio de 1986.

155 Resuelva $I(16) = 0.80 I_0$ (a los 16 cm). Resuelva $I(x) = 0.50 I_0$.

156 Resuelva $1.1261624 \times 10^{18} \times 0.93306951^T = 60$.

159 Factorice por agrupación.

160 $100^v = (10^v)^2$

165 Escriba toda la inecuación en la forma $\log_{4/5}(\ldots) \geq 0$.

166 Puede escribir $2 = \log_{0.1}(\ldots)$ de modo que la inecuación se convierta en la forma $\log_{0.1}(\ldots) \leq 0$.

8 Matrices y sistemas de ecuaciones

29 (b) Tanto $M \cdot P$ como $P \cdot M$ están definidos, pero solo uno es significativo. En $M \cdot P$ la posición 1,1 sería la suma de 30 metros de tela, 400 broches y 120 cremalleras, que no tiene sentido. En $P \cdot M$, en cambio, la posición 1,1 es la suma de 30 y 20, ambos en metros de tela y ambos para el primer cliente.

34 $A^3 = A \cdot A \cdot A$

37 Escriba $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, calcule B^2 y despeje las incógnitas a, b, c y d.

57 $x+y=43$, $10x+20y=570$.

58 $a+n=7$, $1000a+600n=5400$.

59 $x+y=60000$, $0.09x+0.105y=5745$.

60 $30a+20b=600$, $10a+20b=400$.

61 $400a+550b=2100000$, $a=1.25b$

62 $n+p=25$, $2400n+5600p=(3232)(25)$.

63 $x+y+100=500$,
$4.8x+3.6y+3(100)=1884$.

64 $2s+5m=345$, $20s+48m=3344$.

65 $2b+3h=46$, $b+2h=27$.

66 $a+b=100$, $0.5a+b=80$.

67 $x=0.19x+0.13y+6850$,
$y=0.04x+0.38y+9230$.

68 $a=0.27a+0.08b+330$,
$b=0.15a+0.09b+265$.

69 $0.10a+0.20b=20$, $0.06a+0.02b=6$.

70 $8x+4y=24$, $6x+3y=18$,
$60x+40y=200$.

71 $x+y+z=42$, $x-y=6$, $z=(x+y)/2$.

72 $a+b=12000$,
$24000+4a+6b+9c=95000$,
$2a+4b+7c=45000$.

73 $a+b+c=300$,
$0.30a+0.20b+0.15c=0.25(300)$, $c=b+50$.

74 $3p+2q+2r=15$, $2p+5q+4r=24$,
$p+2q+2r=11$, donde cada unidad de p da seis porciones, etc.

75 $p=0.15p+0.45t+0.25a+1200$,
$t=0.10p+0.05t+0.15a+850$,
$a=0.05a+480$.

76 $a=0.40a+0.20c+0.18t+24000$,
$c=0.25a+0.15c+0.12t+33500$,
$t=0.30a+0.20c+0.25t+57200$.

77 Sean a, b y c las tasas de los bancos A, B y C, y sea P el monto que el segundo inversionista invirtió en B. Entonces
$500a+500b=35$, $bP+2cP=0.031(3P)$,
$1000a+500b+500c=62.50$,
$(a+b+c)/3=0.032$.

78 Sean x, y, z las poblaciones en Lirio, Margarita y Narciso. La población en Lirio el año entrante será la actual menos un 10% (que vuela a Margarita), más un 5% de la población de Narciso (que viene a Lirio):
$x-0.10x+0.05z$, y es igual a x porque la población es estable. Hay otra ecuación similar para Narciso y otra para Margarita. No olvide la población total de 35 000 aves.

79 $2x+y+z=10$, $3x+3y=9$,
$5x+4y+z=19$, $75x+60y+30z=345$.

80 $x=2(y+z)$, donde x es la medida en grados del mayor. Recuerde también que la suma de los tres ángulos en cualquier triángulo es 180°. El sistema tiene infinitas soluciones, pero x es el mismo en todas.

81 $x+y+z=117$, $(x+y+z)/3=39$, $x=8(y+z)$, con $x,y,z>5$. Hay infinitas soluciones, pero solamente dos con enteros mayores que 5.

82 Sea a la fracción de piscina que llena A en una hora, y similarmente b, y c. Entonces $a=1/8$, $a+c=1/6$ y $b+c=1/10$. El tiempo total será $1/(a+b+c)$.

118 (c) Las soluciones vienen de $A^{-1}\cdot\binom{200}{85}$ para la primera semana, etc.

119 La matriz aumentada es $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 & 200 & 220 & 240 & 250 \\ 3 & 1 & 85 & 90 & 100 & 105 \end{smallmatrix}\right)$.

131 Haga F_4+3F_2.

132 Haga F_2+F_4 y F_1-F_2.

133 Haga C_1+2C_3 y $C_2 \leftrightarrow C_4$.

144 Sean x, y y z las fracciones de tanque que llenan en un día las bombas pequeña, mediana y grande, respectivamente, trabajando una a la vez. Entonces $x+y+z=1/2$, $x+z=1/3$ y $x+y=1/4$. Averigüe solamente x.

APÉNDICE B

Soluciones

1 Los números reales

1 5

2 1

3 $-5/2$

4 $-7/3$

5 13

6 -7

7 $49/15$

8 $40/7$

9 $27/20$

10 $14/3$

11 $13/24$

12 $-116/105$

13 $-3/10$

14 $7/16$

15 8

16 1

17 1

18 4

19 0

20 No existe

21 $8/15$

22 $7/12$

23 $25/66$

24 $2y-x$

25 $(25t+1)/2$

26 $2p^2-2q^2$

27 a^2-b^2-5a-b

28 $-1/3$

29 $33/25$

30 $5/14$

31 3

32 $1/(19\cdot 70^{10})$

33 -25

34 $-17/100$

35 $121/16$

36 -124

37 $47/80$

38 $414/175$

39 $-1/96$

40 $10\sqrt{2}$

41 $6\sqrt{15}$

42 $3\sqrt[3]{147}$

43 $6\sqrt[5]{6/25} = 2^{6/5}\cdot 3^{6/5}\cdot 5^{-2/5}$

44 $3\sqrt{6/5} = 2^{1/2}\cdot 3^{3/2}\cdot 5^{-1/2}$

45 1

46 $48\cdot 6^{1/2}$

47 $4\cdot 6^{2/3}$

48 $-125\cdot 5^{1/3}$

49 $1440\cdot 3^{1/2}\cdot 5^{1/4}$

50 $-360\cdot 45^{1/5}$

51 $3^4\cdot 5^{8/3}\cdot 2^{-4}\cdot 7^{-4/3}$

52 $13\sqrt{2}$

53 $8\sqrt{5}$

54 $6^{25/12} = 36\sqrt[12]{6}$

55 5 y -5

56 -5 y -5

57 $2^{1/2}\cdot 3^{-5/4}\cdot 5^{-3/4}$

58 $10\cdot 3^{-3/5} = 10/\sqrt[5]{27}$

59 $2\sqrt{3}$

60 $-3\sqrt{50}$

61 $2\sqrt{6}/7$

62 $4\sqrt[3]{3}$

63 $-8\sqrt{350}\sqrt[4]{5}/5$

64 -2

65 $12+3\sqrt{3}$

66 $13-6\sqrt{5}$

67 $6\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

68 $\frac{10}{3}\sqrt{15}+5\sqrt{3}$

69 $8+4\sqrt[3]{10}+2\sqrt[3]{100}$

70 $6\sqrt[3]{12}-8\sqrt[3]{9}+16\sqrt[3]{2}$

71 $1/(2\sqrt{5})$

72 $-13/(6\sqrt{6}+24\sqrt{2})$

73 $1/(8\sqrt{5}-12\sqrt{2})$

74 $-1/5$

75 $3/(5\sqrt{5}+5\sqrt{2})$

76 $5/(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})$

77 $10\sqrt{3}/3$

78 $-72/25$

79 $-3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})/4$

80 $-5(2+3\sqrt{2})/14$

81 $-\frac{5}{3}(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{3}$

82 $15-15\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{9}$

2 Expresiones algebraicas

1 $3/8$

2 0

3 $60\sqrt{5}$

4 $2/11$

5 $9/128$

6 $-1/8$

7 -5

8 -7

9 2

10 $1/8$

11 19.95 unidades

12 \$87 692 308

13 2 485 938 hab.

14 14 136

15 78

16 7.9 m

17 \$13 685.69

18 $6pq^2+6pr+2q^3$

19 $8q^3-46pq^2+12pr$

20 $-47pq^2+13pr+11q^3$

21 $3q^3-25pq^2$

22 $38pq^2-11pr-pq$

23 $30p^2q^2r+6pq^5-20p^2r^2-4pq^3r$

24 $12pq^5-42p^2q^4-8pq^3r+28p^2q^2r$

25 $10p^2q^3r-35p^3q^2r+2pq^6-7p^2q^5$

26 $3x+7x^2-20x^3$

27 $2a^2+ab-ac-3b^2+bc$

28 $64p^3-27q^3$

29 $3rs^2-75rt^2$

30 $4v^2+4vw+w^2$

31 $9a^2b^4+30a^2b^2c+25a^2c^2$

32 $\frac{9}{4}p^4-6p^2q^3+4q^6$

33 $12x^5-28\sqrt{3}x^4+49x^3$

34 $64i^3-96i^2j-144ij^2+216j^3$

35 $9c^2d-\frac{16}{9}x^{-4/5}$

36 $8m^3+60m^2n+150mn^2+125n^3$

37 $\frac{64}{27}x^6+\frac{16}{3}x^5y+4x^4y^2+x^3y^3$

38 $250p-25\sqrt[3]{4}\,p^{5/3}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}\,p^{7/3}-\frac{1}{27}p^3$

39 $64x^6y^{-3}-24x^{10/3}y^{-1}+3x^{2/3}y-\frac{1}{8}x^{-2}y^3$

40 $x+7y$

41 x^3-x+x^2y-y

42 $b^{x+2}x-b^{x+3}x$

43 $6+13x^2b^2+6x^4b^4$

44 $-4a^x-3a^{2x-1}$

45 $4-4x+y$

46 $-2a^3-15ab$

47 $6y^3-6x^2y$

48 $-3x^2+15x-18$

49 $a^2-16b^2+8bc-c^2$

50 $\frac{8}{5}ab-\frac{1}{14}bc-\frac{7}{15}ac$

51 $-x^{4-a}+x^{2a+1}-x^{a+3}+x^a$

52 $-30x^5y^6w^2$

53 $-\frac{7}{2}m^2+\frac{9}{2}m-\frac{3}{2}$

54 $8a^3x^2-b^3x^2$

55 $2a+10b-c$

56 $6yz+8y^2$

57 x^6-a^6

58 $3x^2-16x+21$

59 $8a^3$

60 $9xy-17x^2y-15xy^2$

61 $3y^2+y/2-15/2$

62 $4z^2-z-8/3$

63 $\frac{13}{4}c^3-\frac{3}{2}c+2$

64 $3q-2+\dfrac{3q/2}{q^2-1/2}$

65 $t^3-3t+\dfrac{8t}{t^2+3}$

66 $2p^2+4p-21/2$

67 $9b^2+12b+16$

68 $4c^2-9c+12-\dfrac{14}{c+1}$

69 $-w^3-w^2+\dfrac{1}{1-w}$

70 $a^3+3a^2+10a+27+\dfrac{-29+68a}{a^2-3a+1}$

71 v^2+v

72 $2c^2-6$

73 $-u-4+\dfrac{1}{1-u}$

74 r^2+2r+1

75 $2x^3-5x^2+12x-27+\dfrac{49}{x+2}$

76 $4t^2-2t+6$

77 $16q^3+38q^2+92q+234+\dfrac{580}{q-5/2}$

78 $3z^2+7z+17/2+\dfrac{57/2}{2z-3}$

79 $2v^2+9v+1-\dfrac{36}{2v+1}$

80 $-x^5-2x^4-4x^3-8x^2-16x-32+\dfrac{67}{2-x}$

81 $-8b^3-55b^2-384b-2691-\dfrac{18841}{b-7}$

82 $w^2-5w+25$

83 $5ay(3xy-6ab+4a^2bx^2)$

84 $7p^2q(3+2pq^4+2p^2q)$

85 $3(2a+b)(x-5y+2z)$

86 $34a(x-4y)(ab+5a^2+b^2)$

87 $(6a-5b)(2x+w)$

88 $(9a^2b-4cx)(3xy+p)$

89 $3r(a^2-16a+25)(2rs-t)$

90 $(3x^2-4xy+8y^2)(2ab-3a+5b)$

91 $25a^2(3b-1)^2$

92 $6(2a+r^2s)^3$

93 $3(2t^3+7)^2$

94 $-(3r^2-5)^2(3r^2+5)^2$

95 $3a^2(2ax-3b)^3$

96 $(2a-b^3)(2a+b^3)(x+2y)$

97 $2y^2(3x^2y-5z)(9x^4y^2+15x^2yz+25z^2)$

98 $(3a+bv)(v^2-2w)(v^4+2v^2w+4w^2)$

99 $(x+y^2-c)(x^2+2xy^2+y^4+cx+cy^2+c^2)$

100 $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

101 $(t+8)(t-5)$

102 $(b+6)(b-8)$

103 $2y(y+6)(y-2)$

104 $2(u+5)(u-3/2)=(u+5)(2u-3)$

105 $-7(x-1)(x+2/7)=(1-x)(7x+2)$

106 $3(c+1/2)(c-3/2)=\frac{3}{4}(2c+1)(2c-3)$

107 $-7(v+18)(v+2/3)$

108 $2(w+0.4)(w-15)$

109 $4(x-1.2)(x-4.8)$

110 $5(m+\frac{3-2\sqrt{6}}{5})(m+\frac{3+2\sqrt{6}}{5})$

111 $k^2(k+1)^2(k-2)$

112 $(2v+1)^2(2v+3)$

113 $(y+1)^2(y-2)^2$

114 $9(r-2)^3(r-3)^2$

115 $z(3z-5)(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$

116 $y(5+y)$

117 $(m+b)^2$

118 $(a-b)(a+1)$

119 $(u+6)(u-6)$

120 $(3x-y)^2$

121 $(1+z)(1-z+z^2)$

122 $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

123 $a(a-b)(a-5b)$

124 $(x-3)(2y+z)$

125 $-6(r+7/9)(r-61/9)$

126 $(1-2r)^2$

127 $(x-y^2)(4x-y^2)$

128 $(q+5)(q-6)$

129 $(5w+7)(3w-2)$

130 $-6(w+3)^2(w-2)$

131 $(2m-3y^2)(4m^2+6my^2+9y^4)$

132 $-4(y+19/3)(y+2/3)$

133 $(2v-1)^3$

134 $(1-b\sqrt{3})(1+b\sqrt{3})$

135 $(5x^2+1)(25x^4-5x^2+1)$

136 $(a+b+m)(a+b-m)$

137 $5(z+5)(z+1.2)^2$

138 $(c-1)(c^4+1)$

139 $5(r+11.5)(r-3.5)$

140 $(6t+5)(t-4)$

141 $(5x^2-9y)(5x^2+9y)$

142 $(4a-3b)^2$

143 $(x+y+a-b)(x+y-a+b)$

144 $-2(p-5)(p+4)(p-3)(p+1)$

145 $7m^2(mn-1)^3$

146 $-15pr^2(p-3.2)(p+1.5)$

147 $(a-1)^3(a+1)$

148 $(a+6b)^2$

149 $-4(x-0.5)^3$

150 $(7+2p)(49-14p+4p^2)$

151 $-(t+5)(t-4)$

152 $6(u+70)(u-5/7)$

153 $(n+7)(n-6)$

154 $(v-4)(v^2+4v+16)$

155 $r^3(1+8r)(1-8r)$

156 $(z+4)(z-2)(z^2+2z+10)$

157 $(m+n-3)^2$

158 $9u(u-\frac{5-\sqrt{5}}{2})(u-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$

159 $7(u-2)(u+2)(u^2+2)$

160 $-t(2t-1)^2(t^2+1)$

161 $6x^2y^3(x+2)(3x-5)$

162 $5q^2(3q^2-3q+4)$

163 $(a-x)(a+x+1)$

164 $(3m-2a)^2$

165 $9(x-1.4)(x-5)$

166 $(x+2y)^3$

167 $(4c+3)(2c-7)$

168 $(1+9ab)^2$

169 $(3+4x)(5-2x)$

170 $(3y+c)(w-5)(w+3/2)$

171 $b^4(b^2+1)(b-1)^2(b+1)^2$

172 $(1-2x^2)(a^2-b^3)$

173 $(1+m)(2a-3b-c)$

174 $(w-1/3)^2$

175 $5.4(t+5/3)^3$

176 $(3a-x)(x+4+3a)$

177 $(3x+y+1)(3x-y)$

178 $-3(w-7/8)(w-41/8)$

179 $(a+2b+m+3n)(a+2b-m-3n)$

180 $(7x-5)(7x-6)$

181 $(5y-3)^3$

182 $(1+3a^3)^2$

183 $(1+3x-4y)(1-3x+4y)$

184 $(1-p)^3(1+p)$

185 $(q-2)(q^4+2q^3+4q^2+8q+16)$

186 $(2-x+b)(2+x-b)$

187 $(x-y)(x^2+xy+y^2+1)$

188 $-(y+15)(y-1.4)$

189 $2x(a-b)^2$

190 $-4(w-1.4)(w-1.6)$

191 $(m+4)(m+3)(m-4)$

192 $2(b+3/2)^2(b-1)^2$

193 $(x+1)(x-1)(x+y)$

194 $(u-3)(u+1)(u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})$

195 $(x-y)(3x-3y+1)(3x-3y-1)$

196 $(2p+5)(p-3)(p^2+3p+9)$

197 $(z-2)^2(z+1)(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$

198 $(t-3)(x-1)(a+2)$

199 $(c-1)(c+1)(c^2+c+1)(c^2-c+1)$

200 $2(v-1)(v+3)(v^2+v+1)$

201 $(b-4)(2b^4+3)$

202 $5(t-2)(t-3)(t+2)$

203 $-(y-1/5)(y-50)$

204 $(r+1)(r-2)(r+3)^2$

205 $(4w+5)(w-4)(2w-3)(w+2)$

206 $(x+5)(x-3)(x-\sqrt[3]{3})(x^2+x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$

207 $\frac{1}{3}(a+2)(2a-1)(3a-5)$

208 $(t+1)(t-2)(t-3)(t+3)(t-4)^2$

209 $3(i-2)^2(i-4)(3i-2)(2i+3)$

210
$(t-2)^2(t-3)(t+4)(t-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(t-\frac{5-\sqrt{13}}{2})$

211 $-9(z+1.4)(z-5)$

212 $(v+2)/(2v+3)$

213 $(x^2+2x-1)/(2x+3)$

214 $(x-1)/(b+1)$

215 $(pq^2+p^2q)/(p^2+q^2)$

216 z

217 $5p/2$

218 $12(q+3)/(2q-1)$

219 $v(v-2)\,/\,[3(v-3)(v-4)]$

220 $(3t-2)/(2t+3)$

221 $2(t+x)/(t-x)$

222 $2/3$

223 $-27z^2$

224 $(2y-3)\,/\,[(y^2-1)(y-2)]$

225 $r(c^2+y^2)\,/\,[cy(w-r)]$

226 $(t^2-8t-5)/[(t+2)(t-1)]$

227 $2x^3/(x^2-1)$

228 $2(u+1)/(u^2-2)$

229 $(a^2+b^2)/[a^2b^2(a+b)]$

230 $(p^3+1)^2/p^6$

231 $r^2/(rw-1)^2$

232 $-3/[(u-1)(u+2)(u+3)]$

233 $(2b^2-b+1)\,/\,[(3b-2)(b+6)(2b-1)]$

234 $(x^2+13x+10)\,/\,[(x-1)(x+3)(2x+1)]$

235 $-(2t+1)\sqrt{2t-1}$

236 $(u^2-1)\sqrt{3u+1}$

237 $(u^{5/2}\sqrt{u+1}+(u+1)\sqrt{u})/(u^2+u)$

238 $8a-4\sqrt{6a}$

239 $(3c-5b)\sqrt[3]{18b^2c}\,/\,(2c)$

240 $\frac{1}{5}(2-r-r^2)(\sqrt{5r+4p}-2\sqrt{p})$

241 $(x^2+5)(3v+2\sqrt{x-1})$

242
$9\cdot 2^{5/4}y^{5/2}(2w-z)(3\sqrt{ty}+\sqrt{wz})\,/\,(9ty-wz)$

243 $(10-2q)\left[4-2(3q-5)^{1/3}+(3q-5)^{2/3}\right]$

244 $(3z-1)(z+2-\sqrt{z+5})$

3 Ecuaciones

1 $0=0$

2 $4-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$

3 $-1=-1$

4 $-1=-1$

5 $0.4641=0.4641$

6 $4=4$

7 $a=-3$

8 $a=0.5$

9 $y=-5/2$

10 $v=-37/18$

11 $z=-4$

12 $r=5/38$

13 $c=39/2$

14 $t=-26/9$

15 $b=-3$

16 $z=-6$

17 $t=27/20$

18 $q=-1/2$

19 $w\in\{-2,-1\}$

20 $x=1/2$

21 $y\in\{0,1\}$

22 $w=5/4$

23 $z\in\{-1/2,-5/3\}$

24 $b\in\{17/12,5/2\}$

25 $u\in\{5,2/3\}$

26 $b\in\{4,-1/3\}$

27 $z\in\{5/4,3/2\}$

28 $t\in\{-6,-4\}$

29 $t=2\pm2\sqrt{2}$

30 No hay solución real

31 $r=(-1\pm\sqrt{13})/2$

32 $p=(-4\pm\sqrt{7})/3$

33 No hay solución real

34 $w=1\pm2\sqrt{5}/5$

35 $p=1\pm3\sqrt{10}/10$

36 $u=-1\pm\sqrt{11}$

37 $x\in\{\pm1,\pm\sqrt{5}\}$

38 $c\in\{-2,1/3\}$

39 $q\in\{0,\pm\sqrt{2}/4\}$

40 $a\in\{2,-2,1/3\}$

41 $v\in\{0,-1,4\}$

42 $u\in\{0,(-1\pm\sqrt{3})/2\}$

43 $c\in\{-1/10,\pm\sqrt{5}\}$

44 $r\in\{0,\pm1\}$

45 $t\in\{0,1/3,1\pm\sqrt{2}/2\}$

46 $c\in\{0,-3,\pm1/2\}$

47 $u\in\{1,-5\}$

48 $y\in\{0,1/2\}$

49 $v=3\pm2\sqrt{3}$

50 $r\in\{1,-4\}$

51 $w\in\{-3,-3/4\}$

52 $a=2$

53 $t=-5$

54 $u=-3/4$

55 $r=1$

56 $z=\pm\sqrt{3}$

57 No hay solución real

58 $t\in\{1,2/3\}$

59 $y=3$

60 $c\in\{6,-2\}$

61 $z\in\{4,-1/2\}$

62 No hay solución real

63 No hay solución real

64 $p=-31/3$

65 $t=-8/11$

66 $w=-1/9$

67 $c=\pm\sqrt{6}/6$

68 $t=-10/9$

69 $p=16$

70 $y=12$

71 $w=2$

72 $z=11$

73 $z = 3$

74 $x = 2$

75 $x = -3/4$

76 $q = 1$

77 $q = 16$

78 $b = 0$

79 $b \in \{0, -1\}$

80 $r \in \{-3, 1/2\}$

81 $t = 3$

82 No hay solución

83 $y \in \{0, 3\}$

84 $b = 5$

85 $q = 4$

86 $y \in \{0, 8\}$

87 $x = 169/49$

88 $t = 2$

89 $v \in \{2, -1\}$

90 $p = 0$

91 $u = 3$

92 $x \in \{9, -3\}$

93 $v \in \{-5/3, 11/3\}$

94 $q \in \{9, -2\}$

95 No hay solución

96 $v = 7/2$

97 $z = 7/4$

98 $c \in \{3/2, -7/6\}$

99 $y = 8$

100 $x = -6$

101 $q = \pm 3$

102 $r \in \{2/5, -8/3\}$

103 $p = 2$

104 $u \in \{1, 3/4\}$

105 $b \in \{-2, -1/4\}$

106 $t \in \{2, 2/3\}$

107 $q \in \{1, 4, (-5 \pm \sqrt{41})/2\}$

108 72 y 74

109 65 y 67, o bien −67 y −65

110 13 años

111 Siete de ₡100 y cinco de ₡50

112 130 de platea y 390 de gradería

113 10 podadoras

114 ₡5356

115 ₡250 000

116 25 niños

117 48 personas

118 12 acciones

119 15 ha

120 $a = 3$

121 A los 1.0204 y 3.0612 s

122 18 m y 20 m

123 17 cm y 14 cm

124 12.131 m

125 156 250 unidades

126 8650 unidades

127 Aprox. 82 pasajeros

128 2000 naranjas

129 ₡1700

130 $6

131 ₡552.79 o ₡1447.21

132 $6000 a 9% y $8000 a 12%

133 ₡1 000 000 en la primera y ₡4 000 000 en la segunda

134 $3500

135 ₡4 800 000 a 9% y ₡2 400 000 a 12%

136 $40 000

137 18.75%

138 22%

139 ₡1 086 956.52 al 18% y ₡2 173 913.04 al 14%

140 $195 000 en bonos y $65 000 en acciones

141 5.882 años: unos 5 años, 10 meses, 18 días

142 10%

143 18.5 kg de nueces y 6.5 kg de pasas

144 23 456 litros de regular y 36 544 litros de súper

145 15 g de la primera y 25 g de la segunda

146 0.9375 litros

147 $156.\bar{6}$ ml de la primera y $78.\bar{3}$ ml de la segunda

148 2/7 de hora: unos 17 min, 8.6 seg

149 340 km/h

150 78.571 km

151 71.703 km

152 0.9811 s subiendo y 2.0801 s bajando; 3.0612 s

153 20/7 de hora: unas 2 hrs, 51 min, 26 seg

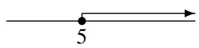
154 75 min

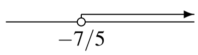
155 60 horas

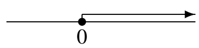
156 20/3 de hora: 6 hrs, 40 min

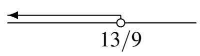
157 96 tiros

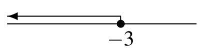
4 Inecuaciones

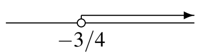
1 $c \geq 5$, $[5, \infty[$, 

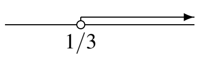
2 $q > -7/5$, $]-7/5, \infty[$, 

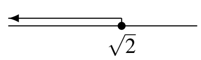
3 $x \geq 0$, $[0, \infty[$, 

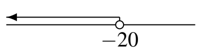
4 $b < 13/9$, $]-\infty, 13/9[$, 

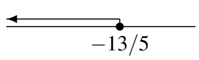
5 $z \leq -3$, $]-\infty, -3]$, 

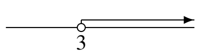
6 $a > -3/4$, $]-3/4, \infty[$, 

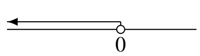
7 $t > 1/3$, $]1/3, \infty[$, 

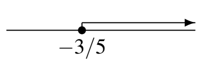
8 $p \leq \sqrt{2}$, $]-\infty, \sqrt{2}]$, 

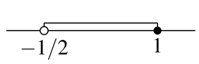
9 $v < -20$, $]-\infty, -20[$, 

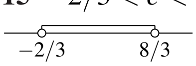
10 $z \leq -13/5$, $]-\infty, -13/5]$, 

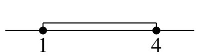
11 $w > 3$, $]3, \infty[$, 

12 $v < 0$, $]-\infty, 0[$, 

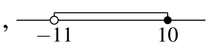
13 $x \geq -3/5$, $[-3/5, \infty[$, 

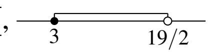
14 $-1/2 < q \leq 1$, $]-1/2, 1]$, 

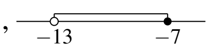
15 $-2/3 < c < 8/3$, $]-2/3, 8/3[$,


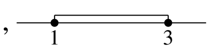
16 $1 \leq t \leq 4$, $[1, 4]$, 

17 No hay solución

18 $-11 < x \leq 10$, $]-11, 10]$, 

19 $3 \leq p < 19/2$, $[3, 19/2[$, 

20 $-13 < t \leq -7$, $]-13, -7]$, 

21 $1 \leq a \leq 3$, $[1, 3]$, 

22 $0 \leq p \leq 3/2$

23 $-9 \leq v \leq 11$

24 $1 < z < 7$

25 $t < 18/5$ o $t > 32/5$

26 $-1/2 \leq r \leq 1$

27 $1/60 < z < 19/60$

28 No hay solución

29 $u \in \mathbb{R}$

30 $y < -151/25$ o $y > -149/25$

31 No hay solución

32 $c \leq -37/3$ o $c \geq 11$

33 $a \in \mathbb{R}$

34 $-5/3 < q < -4/3$

35 $x \leq -5$ o $x \geq 20/3$

36 $v = -1/3$

37 $0 \leq z \leq 8$

38 $c \leq -2$ o $c \geq 3$

39 $y < -1$ o $y > 3$

40 $1 < x < 7/3$

41 $-10 < u \leq -6$ o $-2 \leq u < 2$

42 $-10/3 \leq p < -4/3$ o $2 < p \leq 4$

43 $a < 0$ o $a > 1$

44 $r > 1$

45 $1 < x < 3$

46 $-\sqrt{10}/2 < y < \sqrt{10}/2$

47 $-1 < c < 1/4$

48 $q = 3/2$

49 $v \leq -1/3$

50 $t \leq -3/2$ o $0 \leq t \leq 6$

51 $-2 < w < 2$ o $w > 2$

52 $p = -1/2$ o $p \geq 3$

53 No hay solución

54 $a < 3/2$

55 $-1 < z < 3$ o $z \geq 5$

56 $0 < t \leq 3/7$ o $t > 1/2$

57 $r < 0$ o $2/3 \leq r \leq 1$ o $r > 2$

58 $-1 < q \leq 0$ o $1 \leq q < 2$

59 $b < -4$ o $b > -2$

60 $t < 5$ o $t > 9$

61 $p < -2$ o $0 < p \leq 3/2$

62 $-2 < x \leq 0$ o $x > 1$

63 $-2 \leq v < 0$ o $v \geq 2$

64 $-1 < t \leq 1$ o $t \geq 2$

65 $u < 2$

66 $a < -3$ o $a > 1$

67 $r \in \mathbb{R}$

68 $0 < q < 1/2$

69 $-2\sqrt{5} < w < -2\sqrt{3}$ o $2\sqrt{3} < w < 2\sqrt{5}$

70 $1/4 \leq y \leq 1/2$

71 $t \leq -2$ o $t \geq 2$ o $t = \pm 1$

72 $-3/11 \leq b < 0$ o $0 < b \leq 3$

73 $-2/3 \leq y \leq -1/2$ o $y \geq 5$

74 $x \geq 2$

75 83 o más

76 Más de \$6000

77 Al menos 90 000 lápices

78 Al menos 44 pasajeros

79 Menos de 20 galones

80 Al menos 12.5 kg

81 Entre 25 y 35 horas

82 Menos de ₡600 000 a 18% y más de ₡200 000 a 21%

83 Menos de \$43.50 la noche

84 Hasta cinco horas

85 Menos de $6666.\bar{6}$ km

86 Entre los 4 y los 4.4 años

87 Más de 120 000 unidades

88 Vender más de ₡8 000 000 mensuales

89 Más de ₡7 400 000

90 Entre ₡800 y ₡1200, no inclusive

91 45 enteros o más

92 Los que tienen menos de ocho lados

93 A más de 75 km/h

94 Desde 3.82 cm hasta 10 cm, inclusive

95 Ancho mayor que 12.247 m y largo mayor que 24.495 m

96 Desde 0.6879 s hasta 2.3733 s

97 Entre 10 cm y 15 cm

98 Entre ₡117 000 y ₡118 000

99 Entre 16.25% y $17.08\bar{3}$%

5 Funciones

1 28, 8, $18-5\sqrt{6}$, $4-\sqrt{2}$

2 $7/4$, 14, $7\cdot 2^{-a}$

3 1, $81-46\sqrt{3}$, $8v^3+12v^2-4v-3$, t^3+6t^2+7t-1

4 -1, 7, 112, $27x^6-135x^5+225x^4-125x^3-15x^2+25x+1$, $147\cdot 4^{-y}/16-35\cdot 2^{-y}/4$

5 $-1/4$, -1, 1, $1/2$, 67, 235

6 4, 0, $-1/2$, no existe, 0, $\sqrt{55}$

7 $\mathbb{R}$

8 $\mathbb{R}-\{-2/3,2\}$

9 $\mathbb{R}-\{0\}$

10 $\mathbb{R}-\{1,-2\pm\sqrt{3}\}$

11 $\mathbb{R}-\{\pm 1,-2\}$

12 $\mathbb{R}$

13 $]-\infty,5]$

14 $\{5/2\}$

15 $[-3,1/4]$

16 $]-\infty,-2[\cup[1,2[$

17 $]0,3[\cup]3,\infty[$

18 $]-4,0[\cup]0,\infty[$

19 $]2,5/2]$

20 $[1,2[$

21 $\mathbb{R}-\{2,3\}$

22 $\mathbb{R}-\{8\}$

23 $-6x^2+3x-2$, $18v^2-9v+2$

24 $(10t-32)/(10t-27)$, $-(22z+80)/(2z+5)$

25 $2|u|$, $4x-9$

26 $(3r-2r^2)^{3/2}+1$, $1-r^{3/2}-2r^3$

27 $(3z-5)/(z+1)$, $(v-1)/(v+1)$

28 x, w

29 t, v

30 w, $1-|u-1|$

31 v, t

32 (a) $C(q) = 80000 + 1600q$.
(b) ₵34 400 000. (c) $I(q) = 3000q$.
(d) $G(q) = 1400q - 80000$.
(e) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

33 $U(q) = 7000q - (180000 + 4000q) = 3000q - 180000$; deben vender 60 copias

34 $C(t) = 250t^2 - 510t + 860$; ₵12 780

35 $D(t) = (90000 + 6000t)/(7550 + 350t)$; $D(12) \approx 14$

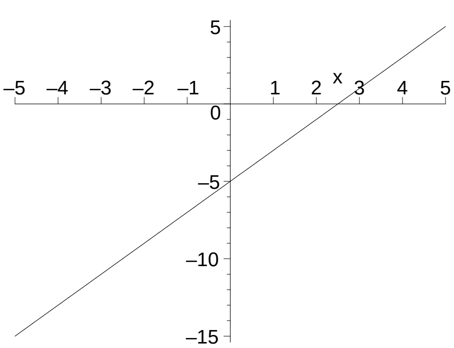
36 $C(n) = 3\sqrt{370n - 225} + 1850n + 375$; 9025 tenedores, a un costo de ₵46 910

37 $C = 50x + 20\,000x^{-1}$

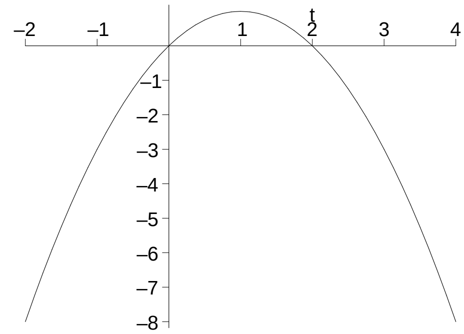
38 $A(x) = 125x - x^2$

39 $C = 320x^2 + 60(4)(x)(25/x^2) = 320x^2 + 6000x^{-1}$

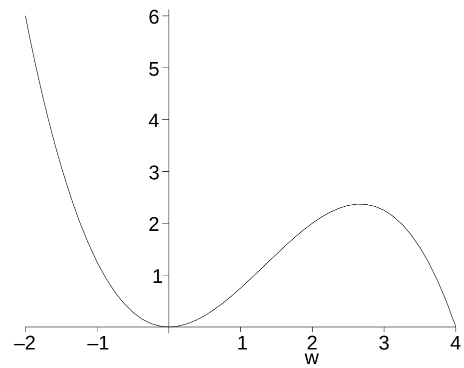
40



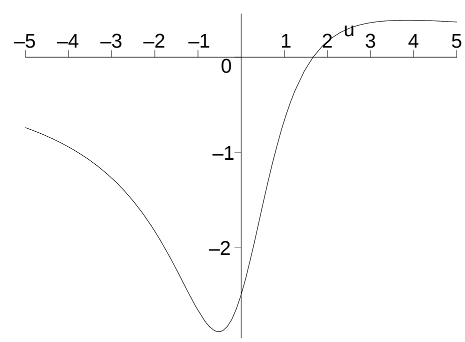
41



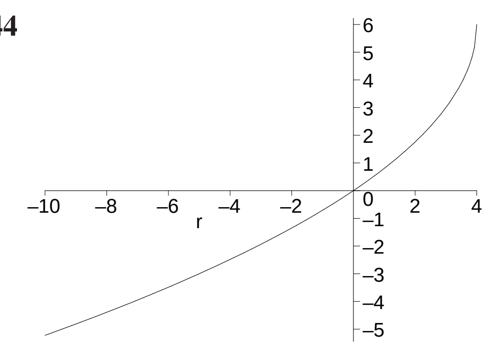
42



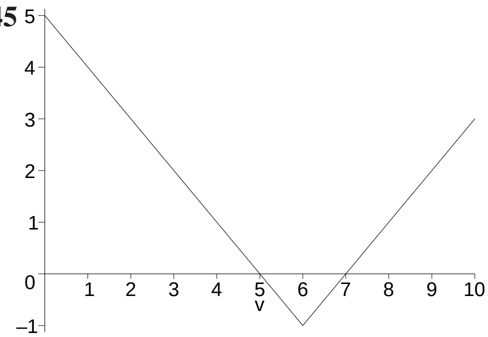
43



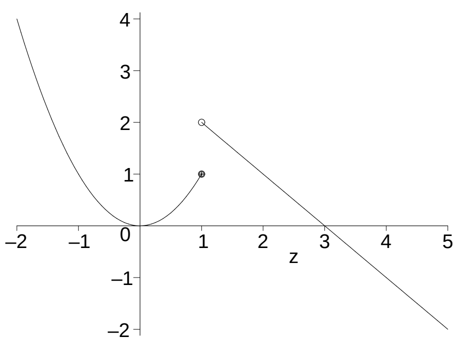
44



45



46



47 $(0,-1/5)$, $(7/15,0)$

48 $(-3/2,0)$, $(0,2/3)$

49 $(-1,0)$, $(0,-5)$, $(5/2,0)$

50 $(-2,0)$, $(0,-1)$, $(1/2,0)$

51 $(-4/7,0)$, $(2,0)$

52 $(0,1)$, $(\sqrt[3]{2},0)$

53 $(-1,0)$, $(0,3-\sqrt{3})$

54 $(0,0)$

55 $(-1/5,0)$, $(0,1)$, $(9/5,0)$

56 $(-12,0)$, $(-4,0)$, $(0,12)$

57 $(-3,8)$ y $(-1/2,-2)$

58 $(1,4)$, $(2,8)$

59 $(3/2,65/4)$, $(5/3,155/9)$

60 $(-2,6)$, $(1,3)$

61 $(-(\sqrt{5}+1)/2,(\sqrt{5}-1)/2)$, $((\sqrt{5}-1)/2,-(\sqrt{5}+1)/2)$, $(3/2,1/4)$

62 No hay

63 $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$

64 $(-1,-6)$, $(5/2,1)$

65 No hay

66 $(-2^{-3/4},-2^{-1/4})$, $(0,0)$, $(2^{-3/4},2^{-1/4})$

67 $(1,1)$

68 $(3,6)$

69 $(5,13)$

70 $(2/3,-1/3)$, $(2,1)$

71 $2\sqrt{2}$, $(1,0)$

72 $\sqrt{73}$, $(-3/2,4)$

73 $5\sqrt{17}/4$, $(5/8,5/2)$

74 $5\sqrt{2}/3$, $(1/6,7/6)$

75 $4\sqrt{2}$, $(3,2)$

76 -6, 18 y 42; 3, -1 y 2

77 2.5, 0 y 0.7; 1, 8 y -4

78 1, 4 y 32; 0, 5 y 2

79 Sí

80 Sí

81 No

82 No

83 No

84 No

85 Sí

86 $x = (w-5)/3$

87 $p = 3 - y/2$

88 $y = (7t+1)/4$

89 $u = 3v - 3/2$

90 $w = \sqrt[3]{z+6}$

91 $u = (4-q^3)/8$

92 $x = \sqrt[3]{[(u+2)^5-1]/2}$

93 $t = \sqrt[5]{4(p-6)^{11}+8}$

94 $r = 3 + 1/x$

95 $p = 1/(v-2)$

96 $q = r/(2r+3)$

97 $y = \sqrt[3]{t/(1-t)}$

98 $v = \sqrt{z-3}$

99 $y = \sqrt{r+4} - 2$

100 $z = 5 - \sqrt{w+9}$

101 $\mathbb{R}$, $q^{-1}(x) = (3-3x)/2$, $\mathbb{R}$

102 $\mathbb{R} - \{2\}$, $g^{-1}(y) = (4y+5)/(2y-1)$, $\mathbb{R} - \{1/2\}$

103 $\mathbb{R} - \{-8/5\}$, $h^{-1}(t) = (2-8t)/(5t)$, $\mathbb{R} - \{0\}$

104 $\mathbb{R} - \{-3\}$, $p^{-1}(r) = (2+3r)/(1-r)$, $\mathbb{R} - \{1\}$

105 $\mathbb{R} - \{1\}$, $h^{-1}(w) = (w-2)/(w+3)$, $\mathbb{R} - \{-3\}$

106 $\mathbb{R}$, $f^{-1}(u) = -1 - u^3/2$, $\mathbb{R}$

107 $\mathbb{R}$, $q^{-1}(v) = (1-v)^5 - 6$, $\mathbb{R}$

108 $]-\infty, 1]$, $p^{-1}(z) = 1 - z^2$, $[0, \infty[$

109 $[0, \infty[$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$, $[-2, \infty[$

110 $]-\infty, 4]$, $f^{-1}(t) = 4 - \sqrt{9-t}$, $]-\infty, 9]$

111 $[0, \infty[$, $r^{-1}(t) = (3 - \frac{1}{2}t)^2$, $]-\infty, 6]$

112 $[-2, \infty[$, $p^{-1}(u) = \sqrt{u} - 2$, $[0, \infty[$

6 Funciones lineales y cuadráticas

1 $y - 3 = -2(x+1)$, $y = -2x+1$

2 $y = \frac{4}{3}(x-12)$, $y = \frac{4}{3}x - 16$

3 $y + 3 = 0(x-2)$, $y = -3$

4 $y - 1/2 = 0(x+6)$, $y = 1/2$

5 $x = -4/5$

6 $x = 1$

7 $y + 4 = 2(x+6)$, $y = 2x+8$

8 $y - 0 = \frac{1}{9}(x-2)$, $y = \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}$

9 $y - 6 = 0(x-1)$, $y = 6$

10 $x = 5$

11 $y - 8 = 8(x+1)$, $y = 8x+16$

12 $y - 9 = 2(x+6)$, $y = 2x+21$

13 $y + 8 = -\frac{1}{2}(x-2)$, $y = -\frac{1}{2}x - 7$

14 $y - 9 = 0(x+7)$, $y = 9$

15 $x = 6$

16 $y + 2 = 0(x + 5)$, $y = -2$

17 $x = -4$

18 $y + 5 = 2.6(x - 4)$, $y = 2.6x - 15.4$

19 $y - 7 = -\frac{2}{3}(x - 3)$, $y = -\frac{2}{3}x + 9$

20 $y - 4 = \frac{5}{2}(x - 10)$, $y = \frac{5}{2}x - 21$

21 $y - 0 = \frac{4}{3}(x - 3)$, $y = \frac{4}{3}x - 4$

22 $y - 0 = 0(x - 5)$, $y = 0$

23 $x = 4$

24 $x = -4$

25 $y - 7 = 0(x - 2)$, $y = 7$

26 $y - \frac{16}{7} = -\frac{1}{2}(x - \frac{6}{7})$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{7}$

27 $y - 1 = 4(x - 4)$, $y = 4x - 15$

28 $N(p) = 1260 - 0.04p$. Por cada colón de incremento en el precio se venderán 0.04 pelucas menos.

29 $V = 2500 - 312.5t$. El valor decrece \$312.50 cada año.

30 $N = 1.2t + 70$, en miles de cajas; para predecir la producción del año actual, sustituya $t =$ año actual $-$ 1990 en la ecuación (por ejemplo, para el año 2007, $N = 1.2(17) - 2318 = 90.4$: 90 400 cajas). La producción aumenta en 1200 cajas cada año.

31 (a) $y = 1100 - \frac{5}{3}x$. Para aumentar la asistencia en una persona deberá rebajar el precio en ₡$\frac{5}{3}$. (b) ₡350. (c) 120 personas.

32 $V = 16\,000 - 1280t$

33 (a) $q = 6900 - 80p$. (b) $p \approx 32.65$ o $p \approx 53.60$.

34 (a) $V(n) = 480 - 22.5n$, en miles de colones. (b) ₡142 500. (c) $[0, 21.\bar{3}]$.

35 ₡5000 y ₡1500

36 $y = 289.\bar{3}x - 570061.\bar{6}$. Cada año hay $289.\bar{3}$ estudiantes más.

37 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

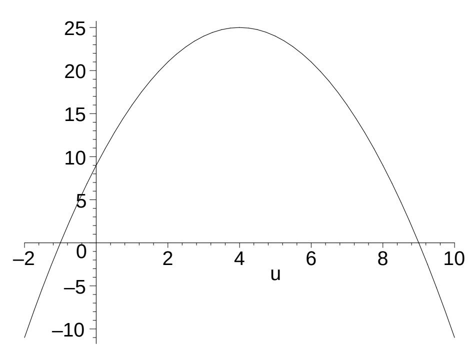
38 (a) $y = 5.975x + 76.95$ en cm.
(b) 100.85 cm, 124.75 cm y 154.625 cm. (c) A los 12.226 años (12 años, 2 meses, 21 días).
(d) 5.975 cm.

39 (a) $y = 45 - 20x$. (b) 45 hrs. (c) Mayor que 1.35 g.

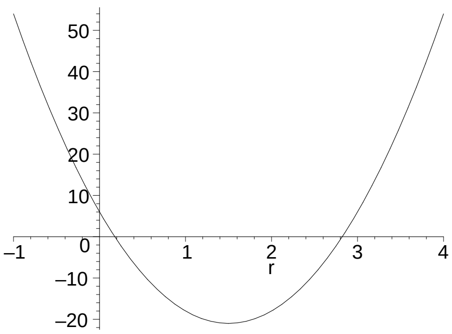
40 $P = 0.05v + 450000$; ₡450 000 y 5%

41 (a) $y = 39.5x - 78721.01$. (b) ₡39.50. (c) ₡436.99/\$. (d) 2008.

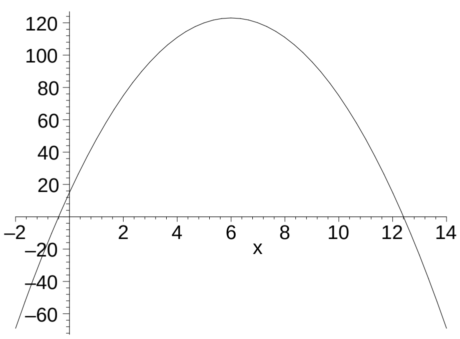
42 $(4,25)$, $(0,9)$, $(-1,0)$, $(9,0)$, $]-\infty, 25]$



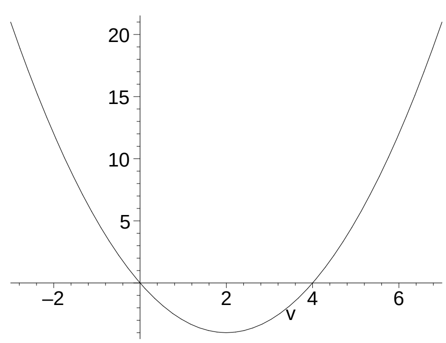
43 $(3/2, -21)$, $(0,6)$, $(3/2 + \sqrt{7}/2, 0)$, $(3/2 - \sqrt{7}/2, 0)$, $[-21, \infty[$



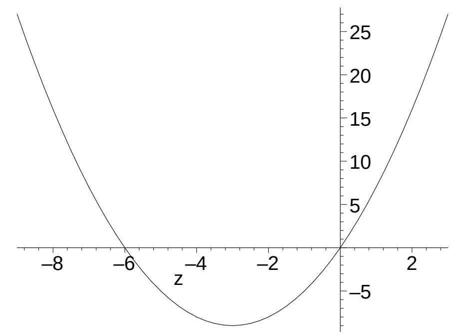
44 $(6,123)$, $(0,15)$, $(6+\sqrt{41},0)$, $(6-\sqrt{41},0)$, $]-\infty,123]$



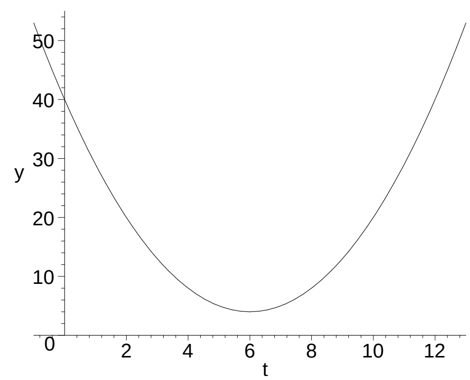
45 $(2,-4)$, $(0,0)$, $(4,0)$, $[-4,\infty[$



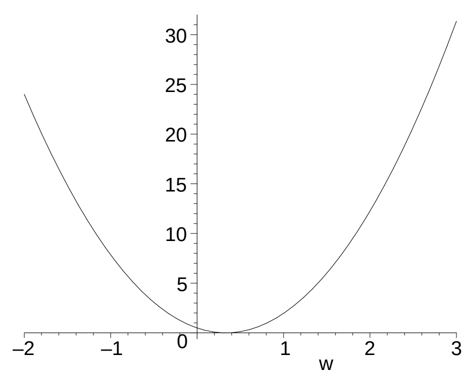
46 $(-3,-9)$, $(0,0)$, $(-6,0)$, $[-9,\infty[$



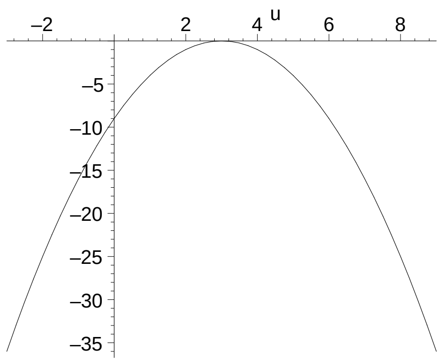
47 $(6,4)$, $(0,40)$, $[4,\infty[$



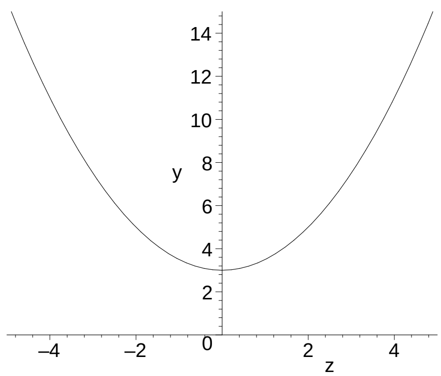
48 $(1/3,0)$, $(0,0.49)$, $[0,\infty[$



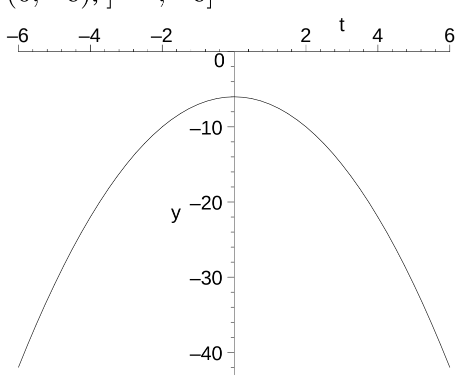
49 $(3,0)$, $(0,-9)$, $]-\infty,0]$



50 $(0,3)$, $[3,\infty[$



51 $(0,-6)$, $]-\infty,-6]$



52 100 y 100

53 25 y -25

54 $q = 250$

55 450 cajas; ₡729 000

56 $83.\bar{3}$ km/h

57 \$2125 mensuales

58 ₡15 750

59 ₡550

60 $p = 43.125$

61 $q = 300$

62 \$550; \$605 000

63 ₡10 411.76 y 5900 usuarios; ₡61 429 384

64 ₡1250; ₡15 625 000

65 ₡180 000

66 \$43

67 Dentro de 4.5 semanas

68 160 árboles; 76 800 naranjas

69 (a) $p = 1000 + 50n$, $q = 500 - 8n$,
$I = pq = 500000 + 17000n - 400n^2$.
(b) $[0, 62.5]$. (c) 21.25 días, ₡680 625.

70 (a) 9.8 m. (b) 2.8 s. (c) [0, 2.8].

71 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos

72 $b = 15$ cm y $h = 15$ cm; $A = 225\,\text{cm}^2$

73 30 m el lado perpendicular a la pared, 60 m el paralelo

7 Funciones exponenciales y logarítmicas

1 $f(x) = 3 \cdot 5^x$

2 $q(x) = (2/5) \cdot 10^x$

3 $h(x) = 4(1/2)^x$

4 $g(x) = -10 \cdot \sqrt{5}^x$

5 $r(x) = 4(3/2)^x$

6 $p(x) = -64^x$

7 $y = 0$

8 $u = 1/2$

9 No hay solución real

10 $r = -3/4$

11 $w = 5$

12 $t = -2/3$

13 $v = 8/15$

14 $x \in \{0, 3\}$

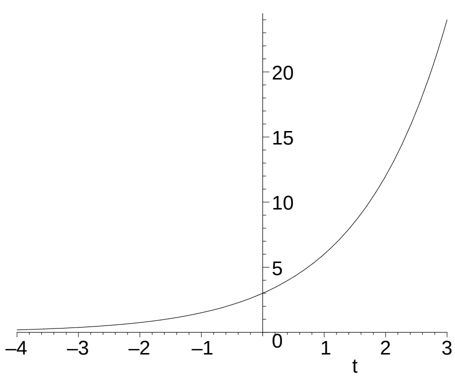
15 $z = -3$

16 $q = 4$

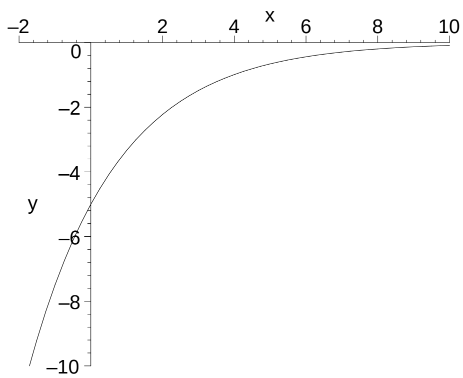
17 $y = 1$

18 $x = 1/2$

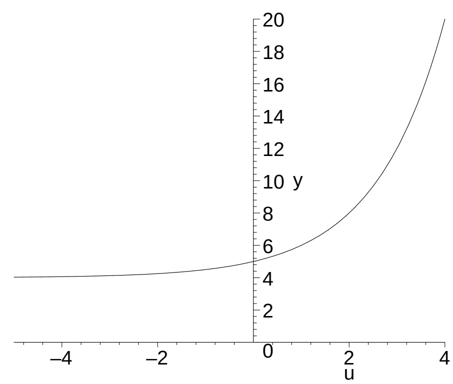
19 $]0, \infty[$; $(0, 3)$



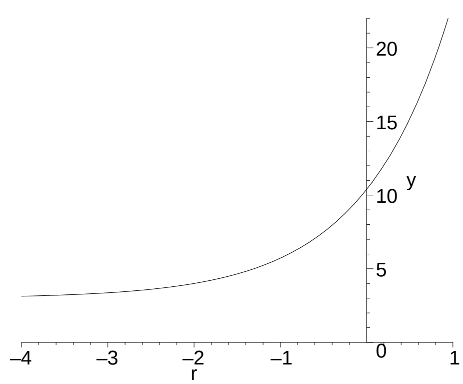
20 $]-\infty, 0[$; $(0, -5)$



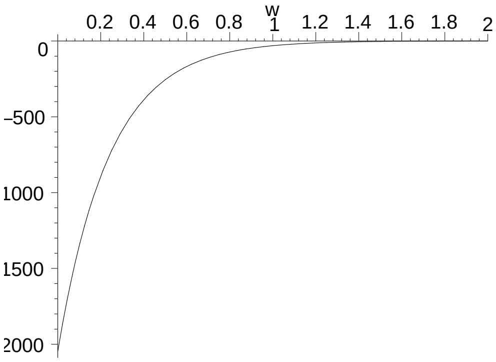
21 $]4, \infty[$; $(0, 5)$



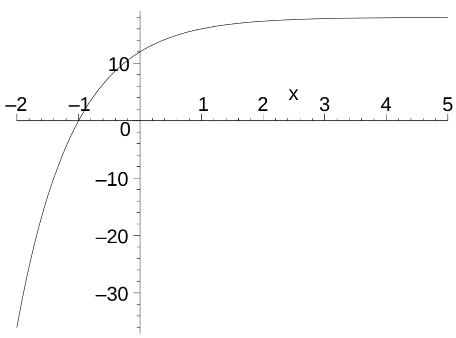
22 $]3, \infty[$; $(0, 10.3891)$



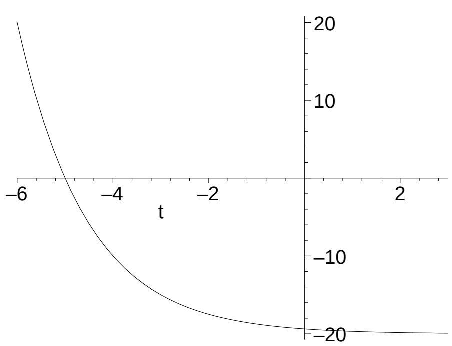
23 $]-\infty, 1[$; $(0, -2047)$, $(11/6, 0)$



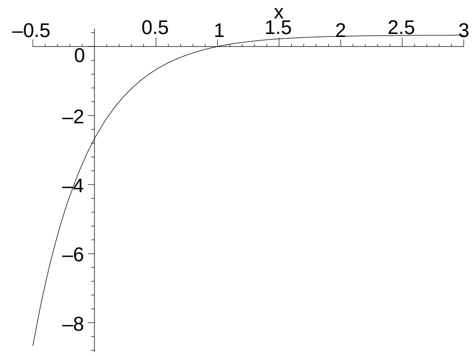
24 $]-\infty, 18[$; $(0,12)$, $(-1,0)$



25 $]-20, \infty[$; $(0,-19.375)$, $(-5,0)$



26 $]-\infty, 1/3[$; $(0,-8/3)$, $(1,0)$



27 \$1610.51

28 ₡5 295 271.27

29 ₡352.47; ₡159.44

30 $4000 \cdot 1.018^t$; 6137.714 millones de habitantes

31 $V(t) = 1800 \cdot 0.75^t$; \$427.15

32 ₡15 millones; 23%

33 ₡12.4 millones; ₡5.377 millones; 13%

34 ₡6 091 920; 6.5367%

35 $V(t) = 20 \cdot 1.12475^t$; 12.475%

36 $V(t) = 45.2422 \cdot 0.96812^t$; \$45 242; 3.188%; \$34 913

37 $TC(t) = 58.301 \cdot 1.13232^t$ en ₡/\$; 13.232%

38 $P(t) = 206065 \cdot 1.02973^t$ habitantes; 2.973%

39 $P(t) = 5 \cdot 2^{t/30}$ en millones de habitantes; 2.337%

40 $f(T) = 1.1261624 \times 10^{18} \times 0.93306951^T$; 1.1040808×10^{15} segundos, o aproximadamente 35 millones de años.

41 $\log_2 8 = 3$

42 $\log_{25} 125 = 3/2$

43 $\log_5(1/25) = -2$

44 $\log_{16} 2 = 1/4$

45 $\log_{2/3}(9/4) = -2$

46 $\log_{27/8}(2/3) = -1/3$

47 $5^{-1} = 1/5$

48 $3^0 = 1$

49 $(1/2)^{-3} = 8$

50 $10^4 = 10\,000$

51 $10^{-2} = 0.01$

52 $6^1 = 6$

53 $\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}$

54 $u = 1/9$

55 $w = 4/3$

56 $r = 2$

57 $v = \mathrm{e}^{-2}$

58 $x = -\mathrm{e}$

59 $t = -1/2$

60 $y = 8$

61 $z = 3/2$

62 $c = 9$

63 $x = \sqrt{10}$

64 $\log_6 x + 2\log_6(x-1)$

65 $2 + 2\log_3(a+b) + \frac{1}{2}\log_3(a-b)$

66 $3\ln w + \ln(3y+5)$

67 $3\ln y + 3\ln(3w+5)$

68 $\frac{3}{2}\log_3 n + \frac{3}{4}\log_3 h - \frac{3}{2}h\log_3 5$

69 $4\log r + 2\log(s+1) - \frac{1}{3}\log(r-2) - 2r$

70 $4\log_2 p - \log_2(2q+5r) - 3\log_2(q+2) - \log_2(1-p) + \frac{1}{4}r - \frac{1}{4}\log_2(2-p) - \log_2 q$

71 $\log_2 15$

72 $\ln 150$

73 $\log(5/2)$

74 $\log 10 = 1$

75 $\ln \dfrac{x-y}{a(x+y)}$

76 $\log_3 x^{-1/2}y^{-1}$

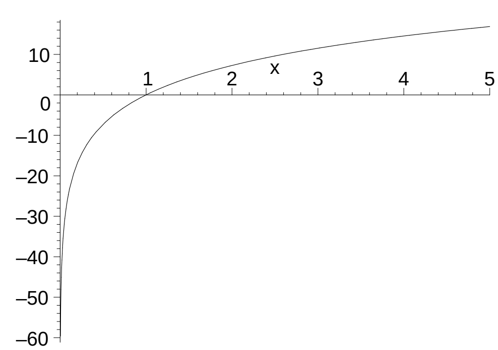
77 $\log_7(24ax^4/7)$

78 $\ln 2$

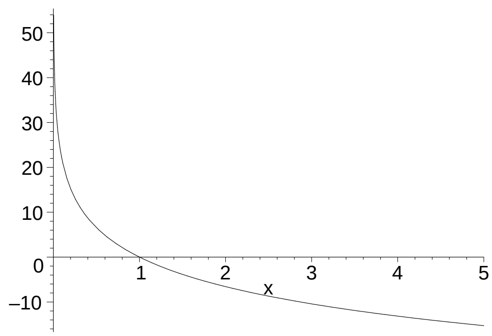
79 $\ln \dfrac{(3x+a)^3}{c-y}$

80 $\log_6 6^{3p+1} = 3p+1$

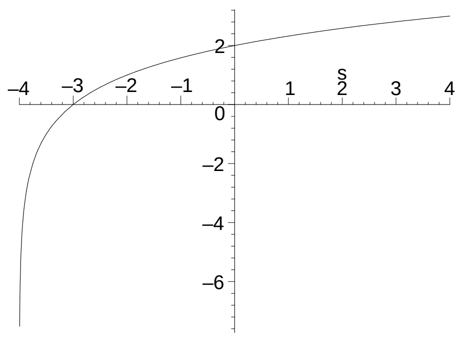
81 $]0,\infty[$; $(1,0)$



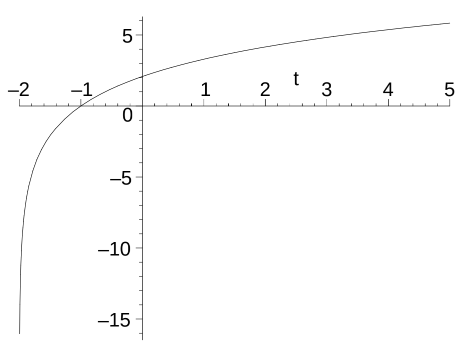
82 $]0,\infty[$; $(1,0)$



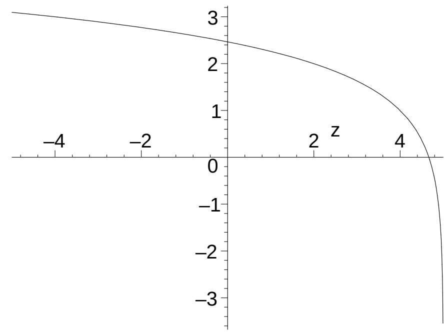
83 $]-4,\infty[$; $(0,2)$, $(-3,0)$



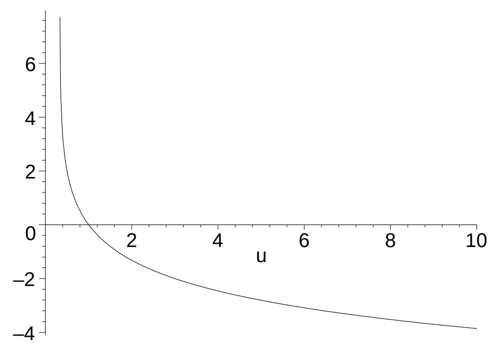
84 $]-2,\infty[$; $(0,2.07944)$, $(-1,0)$



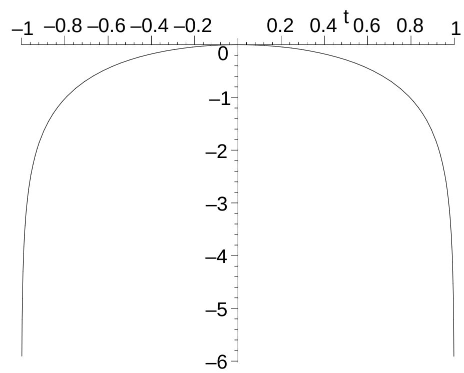
85 $]-\infty,5[$; $(0,2.46497)$, $(14/3,0)$



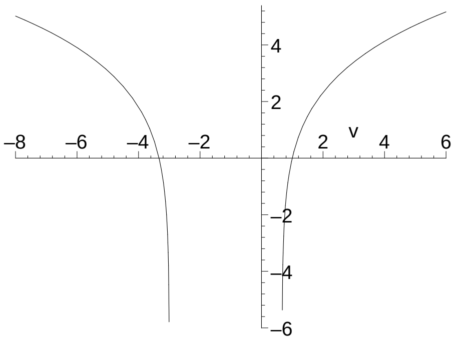
86 $]1/3,\infty[$; $(1,0)$



87 $]-1,1[$; $(0,0)$



88 $]-\infty,-3[\cup]2/3,\infty[$; $(-10/3,0)$, $(1,0)$



89 $\mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - \log_2(x-4))$, $]4, \infty[$

90 $\mathbb{R}$, $p^{-1}(w) = 3 + \log_4(w-2)$, $]2, \infty[$

91 $\mathbb{R}$, $p^{-1}(z) = \log_5(2 - z/3) - 1$, $]-\infty, 6[$

92 $\mathbb{R}$, $g^{-1}(y) = 2 - \log_3(20 - 4y)$, $]-\infty, 5[$

93 $\mathbb{R}$, $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{3 + \log(2t+2)}$, $]-1, \infty[$

94 $]0, \infty[$, $h^{-1}(x) = 2^{x-3}$, $\mathbb{R}$

95 $]-\infty, 1[$, $g^{-1}(t) = 1 - 2^{4-t}$, $\mathbb{R}$

96 $]0, \infty[-\{1\}$, $q^{-1}(v) = 10^{1/(5-v)}$, $\mathbb{R} - \{5\}$

97 $]-\infty, 0[$, $h^{-1}(y) = \ln(1 - \mathrm{e}^y)$, $]-\infty, 0[$

98 $[0, 1[$, $r^{-1}(u) = \left(1 - 2^{8-u}\right)^2$, $[8, \infty[$

99 $p = \log_3 21 \approx 2.7712437$

100 $q = -3$

101 $w = \pm 2$

102 $r = (2 + \ln 30)/5 \approx 1.0802395$

103 $x = \frac{1}{3}\log_5 3 \approx 0.22753540$

104 $t = -\log_6 72 \approx -2.3868528$

105 $v = 1/2$

106 $x = \pm 1$

107 $u = 0$

108 $y = \ln 4/(\ln 3 - \ln 4) \approx -4.8188417$

109
$s = (\ln 5 + 2\ln 6)/(\ln 6 - 2\ln 5) \approx -3.6387761$

110 $u = \pm 3$

111 $c = \pm\sqrt{\log 2} \approx \pm 0.54866201$

112 $y = \frac{1}{3}\log_2 36 \approx 1.7233083$

113 $r = 1/2$

114 $s \in \{1, 4\}$

115 $w = 25$

116 $x = \sqrt[3]{10009} \approx 21.550808$

117 $y = 299/95$

118 $z = 4$

119 $p = 4$

120 $q = 1$

121 $r = 2$

122 $s = 4$

123 $v = 1$

124 $t \approx 0.81446233$

125 $u = -1$

126 $v = 20$

127 $w = -1$

128 $x = 0$

129 No hay solución real

130 $z = 3$

131 $t = 5$

132 $v=-8/9$

133 $w=10^{100}$

134 $x=1/2$

135 $y=\pm 4$

136 $z=0$

137 $z\in\{1,\mathrm{e}^4\}$

138 $x=3$

139 $q\in\{\mathrm{e},\mathrm{e}^{-2}\}$

140 $p\in\{\ln 2, 1000, 0\}$

141 En 9.614 años (9 años, 7 meses, 11 días)

142 2.840 años (2 años, 10 meses, 2 días)

143 11.639 años (11 años, 7 meses, 20 días)

144 7.370 años (7 años, 4 meses, 13 días)

145 En 30.697 días

146 En el 2008

147 En 1953, 1977 y 1991

148 En 1988

149 En 2.043 años (2 años, 16 días)

150 En 1.390 años (1 año, 4 meses, 20 días); 0.691 años (8 meses, 9 días) atrás

151 Dentro de 2.14 años (2 años, 1 mes, 20 días)

152 4.977 años (4 años, 11 meses, 22 días)

153 18 de octubre de 1990; 3 de marzo de 1998

154 1921.86 m

155 $c=0.010006$; 49.7 cm

156 540.9°

157 $]5,\infty[$

158 $]-\infty,0]\cup[5,\infty[$

159 $]-\infty,1/3]\cup[3,\infty[$

160 $]0,\log 5[$

161 $]-3,0[$

162 $[-7/4,1/4[$

163 $]-\infty,-5[\cup]-2,5/19[$

164 $]0,\mathrm{e}^{-2}]\cup[\mathrm{e}^2,\infty[$

165 $]-5,-3]\cup[3,5[$

166 $[2,\infty[$

8 Matrices y sistemas de ecuaciones

1 (a) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}6\\-2\\4\\0\end{pmatrix}$.

2 (a) $\begin{pmatrix}10.4 & 147 & 176 & 170\\ 5 & 110 & 172 & 159\\ 6.8 & 120 & 167 & 166\\ 9.9 & 140 & 170 & 161\end{pmatrix}$. (b) 4×4. (c) $\begin{pmatrix}10.4 & 5 & 6.8 & 9.9\\ 147 & 110 & 120 & 140\\ 176 & 172 & 167 & 170\\ 170 & 159 & 166 & 161\end{pmatrix}$. (d) 10.4, 110, 167, 161.

3 (a) $\begin{pmatrix}57 & 61 & 48\\ 72 & 92 & 79\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}57 & 72\\ 61 & 92\\ 48 & 79\end{pmatrix}$. (c) 2×3 y 3×2 respectivamente.

4 (a) $\begin{pmatrix}2820 & 1470\\ 1240 & 980\\ 830 & 560\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}2820 & 1240 & 830\\ 1470 & 980 & 560\end{pmatrix}$. (c) 1470 y 830. (d) $2,3$.

5 (a) $\begin{pmatrix}1564 & 834 & 1000 & 2430\\ 175 & 65 & 66 & 230\\ 7.9 & 14.4 & 13.7 & 6.2\end{pmatrix}$. (b) 3×4. (c) 230 y

7.9. (d) $2,3$. (e) $\begin{pmatrix} 1564 & 175 & 7.9 \\ 834 & 65 & 14.4 \\ 1000 & 66 & 13.7 \\ 2430 & 230 & 6.2 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ -6 & -3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; no es simétrica

8 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 11 \\ 3 & -11 & -9 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -16 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

11 $\begin{pmatrix} 11 & 0 & -13 \\ 1 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

12 $\begin{pmatrix} 18 & 21 & -19 \\ -11 & 17 & 15 \end{pmatrix}$

13 $\begin{pmatrix} 13 & -19 \\ 34 & -4 \\ -13 & 3 \end{pmatrix}$

14 $\begin{pmatrix} -4 & -8 & 6 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix} -7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

16
$\begin{pmatrix} 2820 & 1240 & 830 \\ 1470 & 980 & 560 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 240 & 120 & 90 \\ 190 & 90 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3060 & 1360 & 920 \\ 1660 & 1070 & 620 \end{pmatrix}$
(también pueden sumarse las transpuestas)

17 (a) $\frac{1}{2}(G_1+G_2) = \begin{pmatrix} 531 & 560 \\ 510 & 540 \\ 511 & 491 \end{pmatrix}$.
(b) $G_2 - G_1 = \begin{pmatrix} 48 & 70 \\ 60 & 60 \\ 68 & 58 \end{pmatrix}$.
(c) $\frac{1000}{480}G_1 + \frac{1000}{500}G_2 \approx \begin{pmatrix} 2166 & 2284 \\ 2080 & 2203 \\ 2084 & 2003 \end{pmatrix}$.

18 $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

19 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} -53 & 16 & 22 & 19 \\ 25 & -9 & -12 & -10 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

22 $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

24 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

25 $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

26 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

27 $\begin{pmatrix} 44 & -30 \\ -1 & 8 \\ -25 & -1 \\ -27 & -2 \end{pmatrix}$

28 (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 350 \end{pmatrix}$.
(b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 590 \\ 1250 \\ 1460 \end{pmatrix}$ representa los costos en colones de los ingredientes para cada postre.
(c) ₡1250.

29 (a) $M = \begin{pmatrix} 1.5 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$.
(b) $P \cdot M = \begin{pmatrix} 50 & 180 & 70 \\ 135 & 460 & 180 \\ 140 & 400 & 160 \end{pmatrix}$ representa las cantidades de materiales requeridas para cada cliente. (c) 70 cremalleras; 135 metros; 400 broches.

30 (a) $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 47 & 25 \\ 12 & 26 & 12 \end{pmatrix}$.
(c) $C \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 14240 \\ 7220 \end{pmatrix}$ representa los costos en colones de los ingredientes para cada encargo.
(d) 25 litros. (e) ₡7220.

31 (a) $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (b) $M \cdot C = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$ representa los costos en dólares de los materiales para cada producto. (c) $P \cdot M \cdot C = \begin{pmatrix} 520 \\ 1360 \\ 1280 \end{pmatrix}$ representa los costos en dólares de los materiales para cada cliente. (d) \$20.
(e) \$1360.

32 $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

35 $a = 0$

36 (a) 2×2. (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

37 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

38 $p = -13$, $q = 22/3$

39 $a = 1$, $b = 4$

40 $x = 15/2$, $y = 17/2$

41 $r = 4$, $t = -1/c$ si $c \neq 0$, o no hay solución si $c = 0$

42 $a = 22$, $b = 4$, $c = 66$

43 $r = 1$, $s = -4$, $t = -5$

44 $x = 3$, $y = 0$, $z = -5$

45 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

46 $p = 37/17$, $q = -25/17$, $r = -12/17$

47 $t = 69$, $u = 5/2$, $v = -59$, $w = -51/2$

48 No hay solución

49 $x = -w+1$, $y = w+2$, $z = 3$, $w \in \mathbb{R}$; $(1,2,3,0)$, $(0,3,3,1)$

50 $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$

51 $a = 19d/7 - 9$, $b = -36d/7 + 25$, $c = 3d/7 + 4$, $d \in \mathbb{R}$; $(-13,19,-2,-4)$, $(6,-17,1,3)$

52 No hay solución

53 $p = (4k-14)/(k-1)$, $q = (3k+2)/(1-k)$, $r = 5/(k-1)$ si $k \neq 1$, o no hay solución si $k = 1$

54 $x = -4w/3$, $y = 5w/9 - 1$, $z = 7w/18$, $v = w+2$, $w \in \mathbb{R}$; o bien $v = 18z/7 + 2$, $w = 18z/7$, $x = -24z/7$, $y = 10z/7 - 1$, $z \in \mathbb{R}$; $(0,-1,0,2,0)$, $(-24,9,7,20,18)$ para (x,y,z,v,w)

55 No hay solución

56 $x = 1$, $y = 2z$, $w = -3v$, $v \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$; $(1,0,0,0,0)$, $(1,2,1,0,0)$ para (x,y,z,w,v)

57 29 monedas de ₡10 y 14 de ₡20

58 Tres adultos y cuatro niños

59 \$37 000 en el primero y \$23 000 en el segundo

60 Diez horas A y quince horas B

61 2500 unidades de A y 2000 de B

62 18.5 kg de nueces y 6.5 kg de pasas

63 120 g de Colombia y 280 g de Costa Rica

64 40 sillas y 53 mesas

65 Once horas en Alajuela y ocho en Heredia

66 40 automóviles modelo A y 60 modelo B

67 \$10 959.56 de maíz y \$15 594.16 de leche

68 492.87 unidades de A y 372.45 de B

69 80 g de A y 60 g de B

70 Dos pastillas de cada marca

71 17, 11 y 14

72 5000 unidades de A, 7000 de B y 1000 de C

73 190 kg de A, 30 kg de B y 80 kg de C

74 12 porciones de P, 16 porciones de Q y 25 porciones de R

75 2198.83 unidades de petróleo, 1205.97 de transporte y 505.26 de agricultura

76 \$115 751.96 de acero, \$94 310.61 de carbón y \$147 716.95 de transporte

77 2.9%, 4.1% y 2.6% respectivamente

78 10 000 aves en Lirio, 5 000 en Margarita y 20 000 en Narciso

79 3 pastillas de X y 4 de Z

80 120°

81 104, 6 y 7, o bien 104, 7 y 6

82 40/9 de hora (aprox. 4 hrs, 26 min, 40 seg)

83 $a = -3, b = 5, c = 2, d = 4$

84 $p = 4, q = 3, r = -4, s = 2, t = 1$

85 $r = 0, s = 2, t = 3, u = 4, v = -4$

86 $w = 1, x = 3, y = -5, z = 0$

92 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

93 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

94 $\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/7 & 9/35 \end{pmatrix}$

95 $\begin{pmatrix} -1/2 & 7/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

96 $\begin{pmatrix} -1/5 & 8/15 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

97 No existe

98 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

99 $\begin{pmatrix} 1/8 & -5/8 \\ -1/8 & -3/8 \end{pmatrix}$

100 No existe

101 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1/a & -1/a \end{pmatrix}$ si $a \neq 0$, o no existe si $a = 0$

102 $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

103 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

104 $\begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 & 4/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7/3 & -1/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

105 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

106 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

107 No existe

108 $\frac{1}{c+4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -c \\ 2 & 1 & 4 \\ -c & 2 & -2c \end{pmatrix}$ si $c \neq -4$, o no existe si $c = -4$

109 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/2 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

110 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

111 $p = -43, q = -14, r = 24$

112 $a = -4, b = -10, c = 7$

113 $x = -49/3, y = -8, z = 68/3$

114 $x = 13, y = 6, z = 31$

115 $u = 1, v = 14, w = 10$

116 $a = 1, b = -5/2, c = 3, d = -1/2$

117 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $x = 19, y = -10$; $x = -27, y = 15$; $x = -120, y = 72$

118 (a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix}$.
(c) 15 maletines y 40 pantalones esta semana; 20 m y 30 p la segunda semana; 20 m y 40 p la tercera semana; 20 m y 45 p la cuarta semana.

119 15 maletines y 40 pantalones esta semana; 20 m y 30 p la segunda semana; 20 m y 40 p la tercera semana; 20 m y 45 p la cuarta semana.

120 -20, 4 y 24

121 -20, 4 y 24

122 $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$, -80 y -80

123 $\begin{pmatrix} 5/24 & 1/24 \\ -3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$, 1/24 y 1/24

124 74

125 63

126 156

127 -72

128 -6

129 -286

130 -405

131 -1600

132 -900

133 140

134 $p = -13,\ q = 22/3$

135 $a = 6,\ b = -7$

136 $a = 22,\ b = 4,\ c = 66$

137 $r = 1,\ s = -4,\ t = -5$

138 $x = 3,\ y = 0,\ z = -5$

139 $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$

140 $p = 37/17,\ q = -25/17,\ r = -12/17$

141 $w = -51/2$

142 180 kg

143 12 porciones

144 12 días