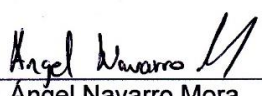
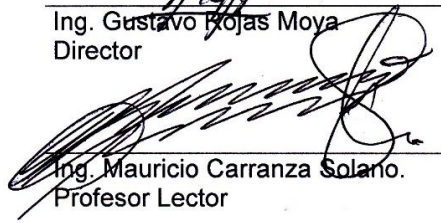
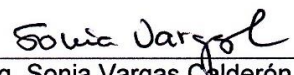


**Validación de modelos virtuales
a partir de modelos reales.**

**CONSTANCIA DE DEFENSA PÚBLICA DE
PROYECTO DE GRADUACIÓN**

Proyecto de Graduación defendido públicamente ante el Tribunal Evaluador, integrado por los profesores Ing. Gustavo Rojas Moya, Ing. Ángel Navarro Mora, Ing. Mauricio Carranza Solano, Ing. Sonia Vargas Calderón, como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en Ingeniería en Construcción, del Instituto Tecnológico de Costa Rica.


Ing. Gustavo Rojas Moya
Director
Ing. Ángel Navarro Mora.
Profesor Guía
Ing. Mauricio Carranza Solano.
Profesor Lector
Ing. Sonia Vargas Calderón.
Profesora Observadora

Abstract

The structural analysis programs present several ways to model a structure but not always are used properly.

The project pretend prove the validity of the virtual models frame and shell to represent the behavior of beam elements validating the results from real prototypes varying the span/depth ratio using the displacement as calibration parameter.

It was used wood of Radiata pine, which was characterized to know his mechanics characteristics on flexion, besides it was calculated of different ways the elasticity modulus (E) to find the one that represent the displacement of the real prototypes of proper way comparing them with the obtained in the virtual models. For the shell elements it was realized an aspect analysis for the finite elements and a sensibility analysis to determine the influential factors on his results.

The mechanical characteristics in flexion obtained were inferior to those reported by radiata pine producers.

The most precise methods to calculate the modulus of elasticity were that implicated the load and displacement in the proportional limit.

Both virtual models are valid, but the frame is more efficient because it doesn't need a preprocessing to start the analysis while the shell it does require it and should be more careful doing it.

The quantities of the finite elements to use and his respective aspect ratio are factors that affect the result of the shell models.

Keywords: Validation, SAP2000, Radiata Pine, modulus of elasticity, finite element method, aspect ratio.

Resumen

Los programas de análisis estructural presentan distintas maneras de modelar una estructura, y no siempre se utilizan de manera adecuada.

El proyecto pretende comprobar la validez de modelos virtuales frame y shell para representar el comportamiento de elementos tipo viga, validando los resultados a partir de prototipos reales, variando la relación longitud/peralte, utilizando como parámetro de calibración el desplazamiento.

Se utilizó madera de Pino Radiata, el cual se caracterizó para conocer sus características mecánicas en flexión, además se calculó de distintas maneras el módulo de elasticidad (E) para encontrar el que representara de manera adecuada la deflexión de los prototipos reales, comparándolas con las obtenidas mediante modelos virtuales. Para los elementos shell se realizó un análisis de aspecto para los elementos finitos y un análisis de sensibilidad para determinar los factores influyentes en sus resultados.

Las características mecánicas en flexión obtenidas fueron inferiores a las reportadas por los productores de pino radiata.

Los métodos más precisos para el cálculo del módulo de elasticidad fueron los que implicaban la carga y la deflexión en el límite proporcional.

Ambos modelos virtuales son válidos, pero el frame es más eficiente, porque no necesita de un preprocesamiento para iniciar el análisis, mientras que el shell sí lo requiere, y se debe ser más cuidadoso realizándolo.

La cantidad de elementos finitos por utilizar y su respectiva relación de aspecto son factores que afectan al resultado de los modelos shell.

Palabras clave: Validación, SAP2000, Pino Radiata, módulo de elasticidad, método de elementos finitos, relación de aspecto.

Validación de modelos virtuales a partir de modelos reales

Validación de modelos virtuales a partir de modelos reales

HUGO IGNACIO FUENTES VÍQUEZ

Proyecto final de graduación para optar por el grado académico de
Licenciatura en Ingeniería en Construcción

Diciembre del 2016

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE INGENIERÍA EN CONSTRUCCIÓN

Contenido

Prefacio.....	1
Resumen ejecutivo	2
Introducción	4
Marco teórico	5
Metodología	11
Resultados.....	19
Análisis de los resultados	31
Conclusiones	37
Recomendaciones	38
Apéndices	39
Referencias.....	40

Prefacio

Los programas de análisis estructural son comúnmente utilizados, porque simplifican los cálculos para la obtención de resultados básicos para diseño como esfuerzos, deflexiones, deformaciones unitarias, y frecuencias de vibración.

Pero, el no tener conocimiento básico de como el programa realiza estos análisis puede implicar resultados erróneos.

Con solo el hecho de cambiar la manera de introducción de un elemento deseado al programa, este puede requerir pasos extra antes de realizar el análisis.

En el caso de las vigas, mediante el programa estructural SAP2000 pueden ser modeladas como elementos tipo frame y tipo shell (área). Estos modelos utilizan el algoritmo de cálculo denominado método de elementos finitos (FEM) que da una solución aproximada al valor real planteado por los métodos estáticos.

Sin embargo, la credibilidad de los parámetros obtenidos mediante este método depende, en gran medida, de la buena calidad del preprocesamiento del modelo. Esto dado que, una convergencia del método de elementos finitos a la solución verdadera, principalmente, se debe a la cantidad de elementos en los que se subdivide el cuerpo y la relación de aspecto de los elementos.

Por esta razón, el proyecto pretende comprobar la validez de modelos virtuales frame y shell para representar el comportamiento estructural de elementos tipo viga, validando los resultados con prototipos reales, variando la relación longitud/peralte, utilizando como parámetro de calibración el desplazamiento.

Agradecimientos

A mi madre Jeanneth Víquez y mi padre Hugo Fuentes, los cuales me han brindado su apoyo incondicional durante todos estos años.

Al profesor Ángel Navarro, por su paciencia, guía y colaboración durante la ejecución del proyecto.

Al ingeniero Juan Tuk Durán por el patrocinio de la madera utilizada y por los consejos brindados con respecto a los ensayos en madera.

Al profesor Freddy Muñoz por la orientación dada en el tema de los ensayos en madera.

A la escuela de Ingeniería Forestal por permitir utilizar los equipos especializados para la realización de los ensayos.

A los técnicos Adrián Gutiérrez y Robert Cubero por su ayuda en la preparación de las probetas y la realización de los ensayos de flexión.

A todos los profesores por sus enseñanzas y consejos ya que han sido parte fundamental de la formación académica adquirida.

Resumen ejecutivo

El diseño estructural se complementa con el uso de programas de análisis estructural. En su medida, los cálculos realizados por estos programas deben conocerse para evitar resultados incorrectos.

Métodos numéricos como el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés), dan una solución aproximada a la teórica mediante la discretización de elementos continuos en elementos pequeños para simplificar el análisis de ese elemento por medio de ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos tienen particularidades que deben considerarse a la hora de utilizarlos.

SAP2000 permite modelar estructuras por medio de elementos frame y área. Para ambos tipos el programa utiliza el método numérico mencionado anteriormente, y así obtiene resultados de reacciones, esfuerzos y deflexiones. Estos resultados pueden tener distorsiones en los elementos área si no se realiza una buena discretización de los elementos finitos.

Además, se es dado por un hecho de que el elemento frame simula el comportamiento de la estructura real de buena manera.

Este proyecto pretende comprobar la validez de los modelos virtuales en el programa de análisis estructural SAP2000 para representar el comportamiento de los elementos tipo viga, comparándolos con prototipos reales de madera.

Para ello, se caracterizaron las propiedades mecánicas de la madera.

Durante la investigación, se compararon distintos métodos para la obtención del módulo de elasticidad de la madera y encontrar el valor que simule en el programa una deflexión aproximada a la real.

Se contrastaron las deflexiones obtenidas en los modelos virtuales con las presentadas en los modelos a escala real, y así mostrar el modelo virtual que más se ajuste al experimental.

Se revisó la relación de aspectos de los elementos finitos para los modelos área y así identificar el efecto entre las relaciones del lado

mayor con respecto al menor en la convergencia a la solución aproximada.

Se realizó un análisis de sensibilidad para determinar el efecto de un incremento en el área de un elemento, manteniendo la cantidad de elementos finitos constantes.

Para cumplir con los objetivos mencionados anteriormente la metodología por seguir fue la siguiente:

Se utilizó pino radiata, el cual se caracterizó mecánicamente para obtener la resistencia a flexión.

Los especímenes fueron preparados de acuerdo con el método secundario de la norma ASTM D143-14 y el tiempo de acondicionamiento para tratar de lograr un contenido de humedad del 12% fue de 2 semanas.

Para el ensayo de flexión se utilizó una máquina de ensayos JBA modelo 853.

Adicionalmente, antes que se fallaran las muestras de flexión, se utilizó el dispositivo SYLVATEST DOU para medir la velocidad de propagación de onda en las probetas.

Posteriormente, se montaron los modelos experimentales reales con 2 tipos de viga distintos:

- i. El primer tipo fueron las denominadas vigas grandes, las cuales tenían una longitud total (Lt) de 320,18 cm, un ancho (b) de 4,18 cm y un peralte (h) de 20,36 cm.
- ii. El segundo tipo eran las llamadas vigas pequeñas que tenían una longitud total (Lt) de 233,20 cm, un ancho (b) de 4,13 cm y un peralte (h) de 7,80 cm.

A todas las vigas se les aplicó una carga en el centro de la luz para cada relación longitud/peralte establecidas y se le midió la deflexión y la deformación unitaria ocasionada por esa carga aplicada.

Se calculó el módulo de elasticidad (E) a partir de 4 métodos.

- i. Con la velocidad de onda ultrasónica de las probetas de flexión ensayadas, según la norma ASTM.

- ii. Con la carga y deflexión en el límite proporcional de esas mismas probetas
- iii. A partir de la carga y deflexión en el límite proporcional de los prototipos reales
- iv. Utilizando la deformación unitaria medida en los prototipos reales.
- v. Luego de escoger el módulo de elasticidad que se consideró una mejor aproximación a la realidad, se procedió a modelar los distintos modelos reales experimentales en el programa estructural SAP2000 mediante elementos tipo frame y tipo shell. Con los elementos tipo shell se realizaron varias iteraciones para cada modelo variando el tipo de malla y revisando las deflexiones en un punto de control.

Conforme se obtenían los resultados de las deflexiones de los modelos frame y shell, se hacían gráficas de convergencia para garantizar la obtención de un buen modelo.

Para los modelos shell en los cuales se observó un comportamiento inusual en la convergencia, se hizo un análisis de proporcionalidad de lados de los elementos finitos para poder distinguir el efecto que tenían sus respectivas proporciones en el comportamiento de la deflexión obtenida.

Finalmente, para los modelos shell que llegaron a converger a la solución aproximada se realizó un análisis de sensibilidad que permitiera visualizar el impacto que tendría modificar la malla de elementos finitos, manteniendo la misma luz o modificar la luz manteniendo la misma cantidad de elementos finitos.

Al analizar los resultados obtenidos se llegó a las siguientes conclusiones:

- i. El esfuerzo máximo de flexión fue de $(556,32 \pm 72,78)$ kg/cm², sin embargo, hubo factores que pueden haber influido en las resistencias.
- ii. Los métodos más precisos para la determinación del E fueron los que utilizaron la carga y la deflexión en el límite proporcional para su obtención, dando un promedio de $(59\ 848,80 \pm 12\ 326,31)$ kg/cm² con las probetas ASTM D143-14 mientras que para el prototipo real $(53\ 587,42 \pm 6\ 564,33)$ kg/cm²

En el caso del modelo real, el promedio reportado se calculó sin utilizar los módulos obtenidos para las relaciones de L/8 y L/4 debido a que estos presentan valores más bajos por el efecto de cortante.

- iii. Se validó que el modelo que mejor se adapta y el más eficiente es el tipo frame aunque con una buena distribución de la malla el elemento tipo shell también es válido sin embargo menos eficiente.
- iv. Se determinó que si una relación de aspectos se mantiene cercana a la unidad conforme se aumenta la cantidad de elementos finitos la solución converge, sin embargo, si hay variaciones de proporcionalidad mientras se aumenta la cantidad de elementos se provocan distorsiones en los resultados finales.
- v. Se confirmó una convergencia de los modelos shell subdivididos en ambas direcciones con una relación de aspectos mayor a 1 siempre y cuando se aumente la cantidad de elementos finitos a utilizar.
- vi. Se comprobó además que, sin importar el tamaño del elemento analizado, un buen comportamiento está regido por el aumento en los elementos finitos de este (siempre y cuando se mantenga una relación de aspecto cercana a la unidad), por ende, no puede darse por válido que “x” cantidad de elementos finitos funcionarán para cualquier elemento.

Introducción

El comportamiento estructural de los sistemas, por facilidad, suele ser obtenido por medio del uso de varios programas de análisis estructural que utilizan distintos algoritmos para el desarrollo de las estructuras.

Entre los algoritmos más usados está el del método de elementos finitos (FEM) con el cual pueden resolverse estructuras que son consideradas como continuas y que su comportamiento está regido por ecuaciones diferenciales.

La solución de estos sistemas consiste en discretizar el cuerpo en elementos geométricos que se encuentran unidos por nodos y que tienen sus propiedades y comportamiento regidos por ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

De esta manera, al analizar estos elementos, se pasa de resolver ecuaciones diferenciales (que rigen el comportamiento del sistema continuo) a sistemas de ecuaciones algebraicas más simples, las cuales luego son ensambladas para dar origen a la solución aproximada del sistema continuo.

El programa SAP2000 no es la excepción en el uso de este método. Así, entonces, una viga puede ser modelada por el programa, utilizando un modelo tipo frame o uno shell (área).

Una buena aproximación del FEM depende del tipo de malla que se elija para que el programa haga un análisis eficiente.

Factores como la cantidad de elementos finitos por usar y la proporcionalidad entre sus lados provocan distorsiones en los resultados de los parámetros deseados.

Si bien es cierto, distintos investigadores como, por ejemplo, Yucheng Liu y Gary Glass (2013) demuestran los efectos de la densidad de la malla en los elementos finitos, no comparan el comportamiento con otros modelos ni evidencian posibles errores que puede arrastrar una malla con gran cantidad de elementos finitos.

Por esta razón, el proyecto pretende como objetivo general comprobar la validez de los modelos virtuales en el programa de análisis estructural SAP2000 para representar el comportamiento de los elementos tipo viga validándolos con modelos reales de madera.

Para cumplir con el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- i. Caracterizar las propiedades mecánicas en flexión de la madera y así obtener sus esfuerzos máximos.
- ii. Comparar distintos métodos para la obtención del módulo de elasticidad de la madera y encontrar el valor que simule en el programa una deflexión aproximada a la real.
- iii. Contrastar las deflexiones obtenidas a partir de los modelos frame y shell de SAP2000 con presentados en los modelos a escala real y así mostrar el modelo virtual que más se ajuste al experimental.
- iv. Analizar el efecto de la relación de aspecto en los resultados de los elementos área.
- v. Realizar un análisis de sensibilidad para determinar el efecto de un incremento en el área de un elemento manteniendo la cantidad de elementos finitos constantes conforme se incrementa el área.

Para los prototipos reales se usará madera aserrada de pino radiata y se utilizará la deflexión como parámetro de control que sirva de comparación entre un modelo y otro.

Además, la madera se tratará como un material isotrópico.

Marco teórico

Pino radiata

El pino radiata (*pinus radiata*) es un árbol de tipo conífera que es cultivado en Nueva Zelanda, España, Estados Unidos, Chile, entre otros. Al no ser una especie nativa de Costa Rica, se introduce al país importándolo de dichos países productores.

Material ortotrópico

La madera es un material en el cual sus propiedades mecánicas varían dependiendo de la dirección en la cual se apliquen los esfuerzos. Esta característica se encuentra relacionada directamente con la orientación del grano en la madera.

Factores que influyen en la resistencia de la madera

Orientación del grano

Se refiere a la dirección de las fibras, relativas al grano y se encuentran definidas como: longitudinal, tangencial y radial.

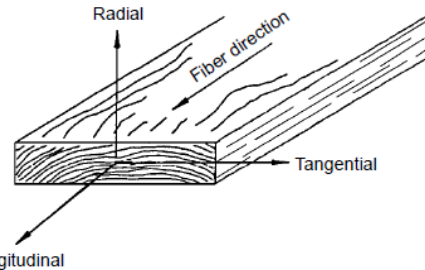


Figura 1. Direcciones relativas a las fibras de la madera.
Fuente: (Forest Products Laboratory, 1999, pp.4-2)

Contenido de humedad

Es la cantidad de agua por peso total que se encuentra en el espécimen. Puede obtenerse de dos formas, la primera es secando la muestra a analizar en un horno a $103 \pm 2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ¹ hasta que alcance peso constante.

La segunda forma es utilizar un medidor de humedad electrónico el cual da el valor del porcentaje de humedad en tiempo real.

Los ensayos se deben realizar con un contenido de humedad de 12%, en caso contrario un mayor porcentaje influye directamente en una menor resistencia del espécimen y esto lo evidencia el Wood Handbook: Wood as an engineering material con la Figura 2.

¹ American Society for Testing and Materials. (2014). ASTM D-143: Standard Test Methods for Small Clear Specimens of Timber. United States of America. p. 16

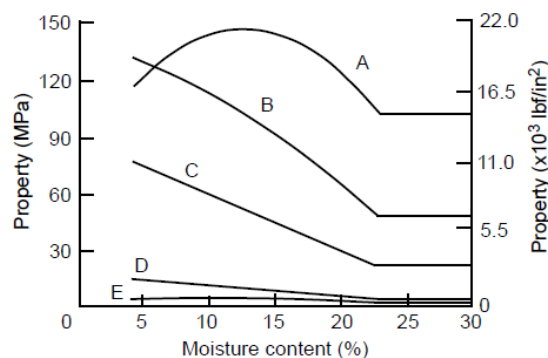


Figura 2. Efecto del contenido de humedad en las propiedades de resistencia de la madera.
Fuente: (Forest Products Laboratory, 1999, p. 4-35)

Donde:

- A: Tensión paralela al grano
- B: Flexión
- C: Compresión paralela al grano
- D: Compresión perpendicular al grano
- E: Tensión perpendicular al grano

Inclinación del grano

Es el ángulo o pendiente que se forma al trazar una línea imaginaria de manera longitudinal al lado que desea analizarse y la disposición en la que se encuentran las fibras. Este concepto puede apreciarse mejor de manera gráfica en la Figura 3.

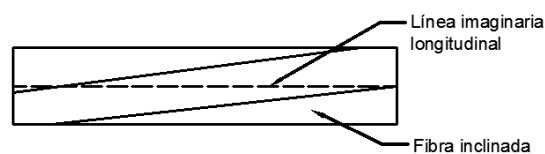


Figura 3. Inclinación del grano con respecto a eje longitudinal
Fuente: Propia

Por ejemplo, en una entrevista Muñoz afirma que: para que mecánicamente una pieza de madera se desenvuelva de la mejor manera a flexión, la inclinación del grano debe ser nula como se aprecia en la Figura 4.

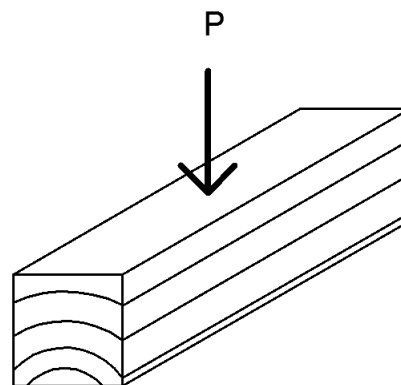


Figura 4. Apropia inclinación del grano para flexión.
Fuente: Propia

Tuk presenta en su libro *Madera: Diseño y Construcción* el Cuadro 1, que representa la variación porcentual de la resistencia con respecto a la inclinación de las fibras

Cuadro 1. Resistencia correspondiente a varias inclinaciones		
Inclinación del grano	Resistencia máxima (%)	
	Flexión o tensión paralela al grano	Compresión paralela al grano
1:6	40	53
1:8	53	66
1:10	61	74
1:12	69	82
1:14	74	87
1:16	76	100
1:18	80	
1:19	85	
1:20	100	

Fuente: (Tuk, 2010, p. 93)

Nudos

Son imperfecciones que le dan discontinuidad al elemento. Paniagua (s.f.) define el nudo como: "Un nudo es una porción de rama que se ha incorporado en el tronco del árbol".²

² Paniagua, V. (s.f.). Guía de uso y aplicaciones de la madera en la arquitectura en Costa Rica. p. 36

Tipos de ensayos realizados

Ensayos destructivos

Son los ensayos que ayudan a determinar las características mecánicas del material, pero comprometen la integridad física de este sin la posibilidad de reutilizar el espécimen.

Ensayos no destructivos

Ensayos que permiten determinar las características mecánicas del material de manera aproximada y que como su nombre lo dice, tienen la finalidad de no comprometer físicamente la muestra, que, en ocasiones, puede ser el elemento estructural como tal.

Propiedades mecánicas

Módulo de elasticidad estático (E)

Conocido también como el módulo de Young, es el parámetro que caracteriza la rigidez del material.

Sin embargo, el módulo de elasticidad también se ve afectado por el esfuerzo de cortante que aumenta su efecto conforme se reduce la luz de la viga.

Módulo de elasticidad dinámico (Ed)

Es el módulo de elasticidad calculado a partir de la velocidad de propagación de las ondas de ultrasonido a lo largo de la muestra de la madera.

³ Ordóñez. et. al. (2016). *Estructuras de madera aplicadas al sector de la construcción en el Perú*. p. 18

Módulo de Poisson (v)

Es la relación entre la deformación longitudinal con la deformación transversal del elemento. Es adimensional.

Módulo de cortante

El módulo de corte cuantifica la resistencia a la deformación por un esfuerzo cortante y “relaciona las distorsiones con los esfuerzos de corte aplicados al espécimen”.³

Para un material homogéneo e isotrópico, el valor del módulo de cortante está definido por la siguiente ecuación.

$$G_v = \frac{E}{2(1 + v)} \quad \text{Ec. 1}$$

Donde:

E: Módulo de elasticidad (kg/cm²)

v: Módulo de poisson (adimensional)

Resistencia y módulos de elasticidad típicos

De la revisión de literatura, se obtuvo la resistencia y módulos de elasticidad típicos los cuales son presentados en los cuadros 2 y 3 y que funcionarán como parámetro de comparación para los obtenidos mediante las diversas pruebas.

Los productores ARAUCO y Grupo Losán mencionan que los ensayos se realizaron con probetas libres de defectos. Pero, solo ARAUCO reporta el contenido de humedad a la cual se ensayaron (12%).

Además, NZ Wood no reporta las condiciones bajo las cuales se realizaron los ensayos.

Cuadro 2. Esfuerzos de pino radiata reportados por productores							
Productor	Máximos			En el límite proporcional			E (kg/cm ²)
	Fb (kg/cm ²)	Fc II (kg/cm ²)	Fc ⊥ (kg/cm ²)	Fb (kg/cm ²)	Fc II (kg/cm ²)	Fc ⊥ (kg/cm ²)	
ARAUCO ⁴	895,00	503,00	122,20	415,60	209,80	67,40	107 300,00
Grupo Losán ⁵	846,37	407,89	58,12	NR	NR	NR	88 001,84
NZ Wood ⁶	874,92	375,26	NR	NR	NR	NR	83 922,96

Fuente: Recopilación de características mecánicas de productores

En la tesis publicada por Ordoñez se presentan estos resultados, utilizando solamente 3 especímenes para cada ensayo. Para el ensayo de compresión paralela la velocidad de carga fue de 0,6 mm/min y para flexión 2,5 mm/min sin embargo no reporta el contenido de humedad con el que se ensayaron las probetas.

Cuadro 3. Esfuerzos máximos del Pino Radiata reportados por Ordoñez				
Propiedad	Fc II (kg/cm ²)	Ft (kg/cm ²)	Fb (kg/cm ²)	E (kg/cm ²)
Promedio	280,60	NR	589,00	70 728,54
Desviación estándar	13,60	NR	108,20	14 207,64
CV (%)	4,80	NR	18,40	20,09

Fuente: (Ordoñez, 2016, p. 44-46)

Modelos virtuales

Modelo Frame

Es un modelo que se forma a partir de elementos unidimensionales a las cuales se les puede asignar las características geométricas y mecánicas del elemento por modelar.

Modelo Shell

Este modelo se forma a partir de elementos bidimensionales (áreas) con tres o más lados y que al igual que el tipo frame, representan las características geométricas y mecánicas del

elemento. La mayoría de las veces son utilizadas para representar losas y muros, pero también pueden ser utilizados para otro tipo de elementos.

Además, es capaz de tener deformaciones dentro y fuera de su plano.

Hay dos tipos de elementos shell que ofrece SAP2000, y que caracteriza Navarro (2015) como:

- I. Shell thin: "Se utiliza en elementos de espesor pequeño, con relaciones L/t mayores que 20".⁷
- II. Shell thick: "cuando los elementos tienen una relación L/t menores que 20, es decir, espesores grandes, aunque podría utilizarse para cualquier tipo de elementos".⁵

Además, menciona que en los elementos thin el programa no considera deformaciones por cortante, mientras que en elementos thick sí las considera.

⁴ ARAUCO. (s.f.). MADERA PINO RADIATA. p. 4

⁵ Grupo Losán. (s.f.). Radiata Pine. p. 1

⁶ NZ Wood. (s.f.). INFORMATION SHEET RADIATA PINE. p. 1

⁷ Navarro, A. (2015). SAP2000. p. 10

Método de elementos finitos (FEM)

Chandrupatla (1999) define la solución por medio del FEM como: "Una región compleja que define un continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones que la gobiernan se consideran sobre estos elementos y se expresan en términos de valores desconocidos en vértices de los elementos. Un proceso de ensamblaje, considerando debidamente la carga y las restricciones, da como resultado un conjunto de ecuaciones. La solución de estas ecuaciones nos da el comportamiento aproximado del continuo."⁸

Es un método numérico por lo que el resultado que presenta converge a una posible solución real del problema, o sea, es una aproximación.

Convergencia del MEF

Celigüeta (2008) define que un análisis por medio del FEM converge cuando: "...es convergente si al disminuir el tamaño de los elementos, y por lo tanto aumentar el número de nudos y de elementos, la solución obtenida tiende hacia la solución exacta".⁹

Relación de aspecto de los elementos finitos

Se refiere a la relación que existe entre el lado más largo de un elemento finito y su lado corto.

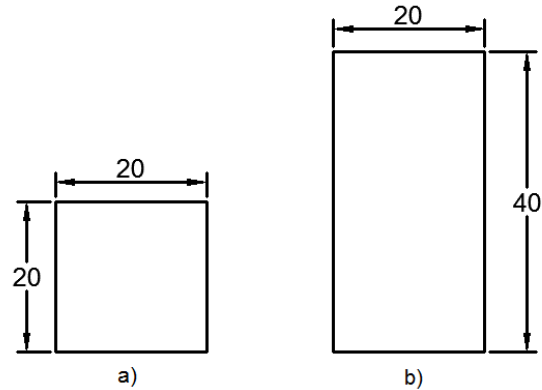


Figura 5. Ejemplificación de la relación de aspectos de 2 elementos finitos.

Por ejemplo, en la Figura 5.a se observa un elemento finito con una relación de aspecto de 1, mientras que en la 5.b la relación de aspecto del elemento finito es de 2.

Análisis de sensibilidad

Es un análisis que se realiza para determinar la influencia de las distintas variables que intervienen en un resultado. Finalmente este evidencia cual es la de mayor efecto.

⁸ Chandrupatla, T. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. p. 1

⁹ Celigüeta, J. (2008). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. p. 8

Alcances y limitaciones

La caracterización mecánica de la madera está limitada:

- Las probetas se obtuvieron a partir de cuatro vigas de madera, por lo que la dirección fibras en muchos de los casos no era la adecuada para realizar los ensayos.
- El ancho nominal de las vigas es de 2 pulgadas (5,08 cm): sin embargo, al ser nominales, su espesor real era de aproximadamente 4,18 cm por lo que las probetas se prepararon siguiendo las dimensiones de los métodos secundarios.
- Al realizar ensayos, se debe procurar que las muestras se encuentren con un contenido de humedad de 12%, sin embargo no se contó con un cuarto de climatización adecuado y no se pudo obtener dicho contenido de humedad.
- Para el ensayo de flexión se utilizaron 25 probetas que trataron de prepararse con la menor cantidad de defectos posibles, pero la dirección de las fibras en muchos casos no era la adecuada.

La madera se trató como un material isotrópico y no como ortotrópico.

Metodología

Caracterización mecánica de Pino Radiata

Se realizó una revisión de literatura para conocer los esfuerzos reportados por los investigadores y los productores de pino radiata.

Posteriormente, se coordinó con la escuela de Ingeniería Forestal para hacer los ensayos de caracterización mecánica en su respectivo laboratorio.

El ensayo aplicado fue el de flexión de acuerdo con la norma ASTM D-143: Standard Test Method for Small Clear Specimens of Timber.

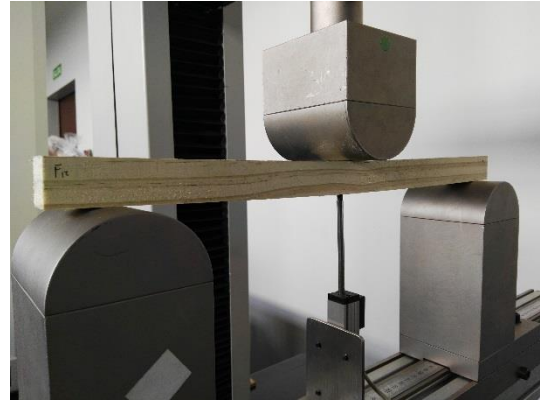
Primero, se muestrearon los especímenes aleatoriamente de secciones de 3 vigas de 320 cm de largo, 4,18 cm de ancho y 7,80 cm de peralte.

Después, se prepararon tratando de cumplir con las dimensiones propuestas por la norma para el método secundario. Luego, se acondicionaron para tratar de llegar a una humedad óptima de 12%.

Las características del ensayo se describen a continuación:

Flexión

- Dimensiones de las probetas: (2,5 x 2,5 x 41) cm.
- Velocidad de carga: 1,3 mm/min
- Tiempo de acondicionamiento: 2 semanas
- Máquina: JBA modelo 853
- Método de determinación del contenido de humedad: Hydromette HTR 300 (Ver Fotografía 2)



Fotografía 1. Ensayo de flexión en proceso
Fuente: Propia



Fotografía 2. Medidor de contenido de humedad Hydromette HTR 300
Fuente: Propia

Adicionalmente antes de realizar el ensayo a flexión, se calculó la velocidad de propagación de ondas ultrasónicas de los especímenes de flexión por medio del dispositivo SYLVATEST DUO y sus dos transductores de 22 Hz.

Este método funciona de la siguiente manera: El dispositivo de lectura posee 2 sensores, uno es el emisor de onda y otro es el receptor. El emisor se coloca a un lado de la muestra y este produce la onda ultrasónica que viaja a lo largo de la madera, mientras que el receptor que se encuentra alineado y al lado opuesto del emisor toma la onda. El dispositivo mide el tiempo que tarda la onda en llegar desde un sensor a otro y con la longitud de la muestra previamente introducida en él calcula la velocidad de onda.



Fotografía 3. Medición de la propagación de onda de manera longitudinal
Fuente: Propia

Prototipo experimental

Se contó con 4 vigas con una longitud total (L_t) de 320 cm, con un peralte (h) promedio de 20,36 cm y un ancho (b) promedio de 4,18 cm (denominadas vigas grandes) a las que se les aplicó relaciones de longitud/peralte de $L/12$, $L/8$ y $L/4$ para obtener la luz (L), además de 2 vigas con un peralte promedio de 7,80 cm (vigas pequeñas) en las que se usaron relaciones de $L/12$, $L/16$, $L/20$, $L/22$ y $L/28$.

El modelo experimental fue montado en el laboratorio del Piso Fuerte del Centro de Investigaciones en Vivienda y Construcción (CIVCO).

Las vigas fueron apoyadas en sus extremos usando apoyos simples y a cada viga se le aplicó una carga puntual en el centro que no provocara un momento que excediera el esfuerzo de flexión en el límite proporcional.

La celda de carga tiene una capacidad de 650 kg

Se colocaron soportes laterales para evitar un posible pandeo lateral en las vigas grandes (Ver Fotografía 4).



Fotografía 4. Soportes laterales de madera.
Fuente: Propia

Se midió la deflexión provocada por la carga utilizando un crackmeter.

Para colocar el sensor se hizo un pequeño orificio en el eje central de la viga para enganchar el instrumento por medio de un tornillo como se observa en la Fotografía 5.



Fotografía 5. Sistema de unión viga-deformímetro.
Fuente: Propia

Además, en la parte inferior se colocó una galga extensiométrica para cuantificar la deformación unitaria que sufría la fibra más externa en tensión de la viga. Cabe destacar que la galga extensiométrica estaba adherida a la madera por dos placas de metal y masilla epóxica.

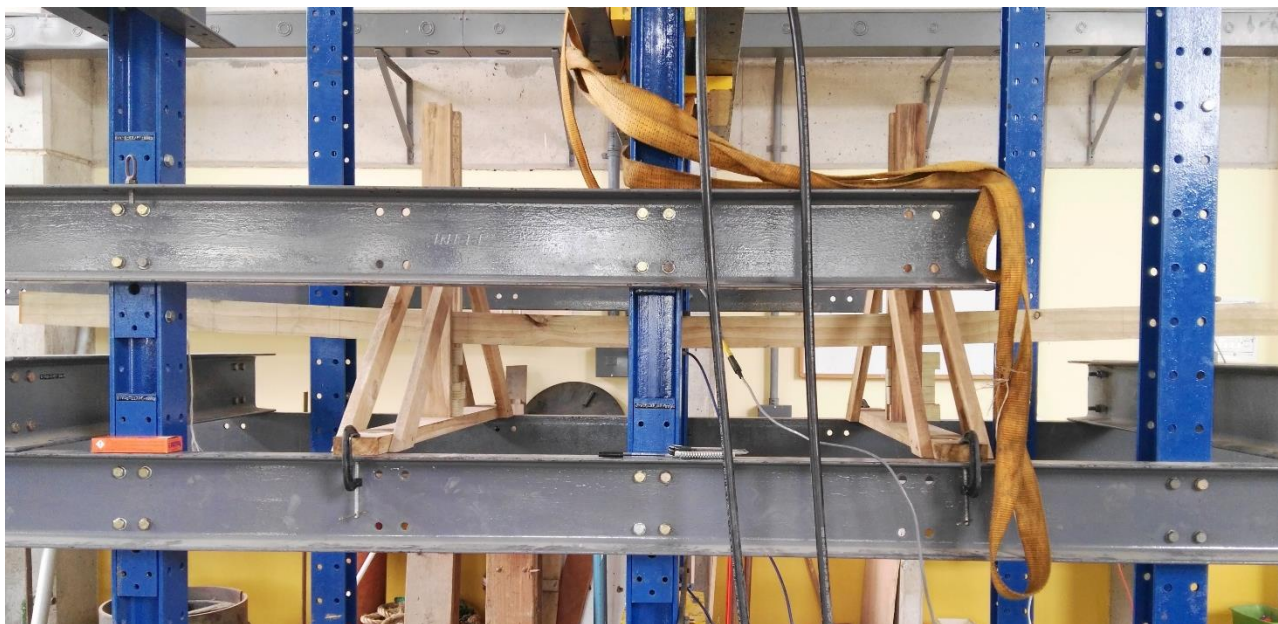


Fotografía 6. Sistema de unión viga-galga extensiométrica
Fuente: Propia

El modelo final para las vigas grandes se muestra en la Fotografía 7, mientras que para las vigas pequeñas en la 8.



Fotografía 7. Prototipo experimental de viga grande con una relación Longitud-Peralte (L/t) de 12
Fuente: Propia



Fotografía 8. Prototipo experimental de viga pequeña con una relación Longitud-Peralte (L/t) de 28
Fuente: Propia

La variación de la luz se daba de la siguiente manera:

- i. Se colocaban los apoyos simples en una de las ubicaciones establecidas por las relaciones longitud/peralte y se aplicaba la carga deseada.
- ii. Luego de aplicar la carga se detenía el pistón hidráulico y se movían los apoyos a la nueva luz para volver a ensayarla. El proceso del movimiento de apoyos puede observarse en la Figura 6.

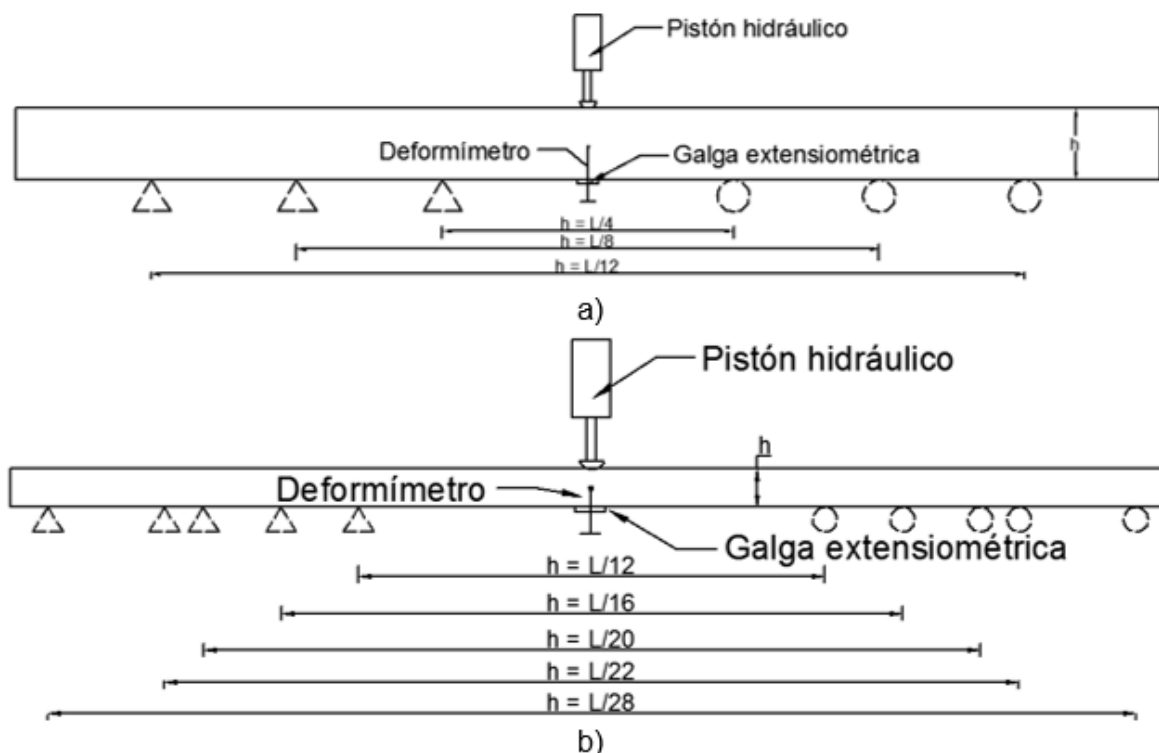


Figura 6. Movimiento de apoyos con respecto a la relación longitud/peralte para vigas grandes (a) y vigas pequeñas (b)
Fuente: Propia

Cálculo del módulo de elasticidad

Una vez realizadas las pruebas experimentales se obtuvieron los siguientes parámetros:

Probetas de flexión:

- Velocidad de propagación (V)
- Densidad (ρ)
- Carga bajo el límite proporcional (P)
- Deflexión bajo el límite proporcional (Δ)
- Propiedades geométricas (S, I)

Prototipo experimental:

- Carga bajo el límite proporcional (P)
 - Deflexión bajo el límite proporcional (Δ)
 - Deformación unitaria (ϵ)
 - Propiedades geométricas (A, S, I)
- Normalmente, para una viga simplemente apoyada y con una carga puntual en el centro de la luz que provoca una deflexión, por la flexión pura la ecuación que define al módulo de elasticidad es:

$$E = \frac{PL^3}{48\Delta I} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde:

E: Módulo de elasticidad (kg/cm^2)
P: Carga bajo el límite proporcional (kg)
L: Luz de la viga (cm)
I: Inercia (cm^4)
 Δ : Deflexión bajo el límite proporcional (cm)

Para las probetas de flexión, según la norma ASTM D143-14, se calculó el módulo de elasticidad estático de acuerdo con la ecuación 2. Además, para estas mismas probetas se calculó el módulo de elasticidad dinámico con la ecuación 3:

$$Ed = \rho V^2 \quad \text{Ec. 3}$$

Donde:

Ed: Módulo de elasticidad dinámico (kg/cm^2)
 ρ : Densidad de la madera (kg/cm^3)
V: Velocidad de onda (cm/s)

Para el prototipo experimental, el resultado del módulo de elasticidad relacionado con la deflexión y la carga se calculó a partir de la ecuación 4, la cual es recomendada por la norma ASTM D198-15 por adicionar el efecto del cortante al desplazamiento de una viga con una única carga en el centro de la luz. Para efectos del proyecto, dicha ecuación se presenta con el módulo de elasticidad despejado, mientras que en la norma es la deflexión la que se encuentra despejada:

$$E = \frac{PL^3}{48\Delta I} + \frac{PL(1+\nu)}{2KA\Delta} \quad \text{Ec. 4}$$

Donde:

ν : Módulo de poisson (adimensional)

K: Constante que se define para secciones rectangulares como $5/6$ ¹⁰

A: Área transversal del elemento (cm²)

También, se calculó el módulo de elasticidad a partir de la deformación unitaria y el esfuerzo que la provoca (ecuación 5):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{Ec. 5}$$

Donde:

σ : Esfuerzo (kg/cm²)

ε : Deformación unitaria (adimensional)

Modelos virtuales en el programa SAP2000

Como las vigas de madera no eran dimensionalmente iguales, se hizo un promedio del peralte, espesor y luz de cada viga para así obtener una viga resultante que sería la usada en los modelos del programa.

Para modelar los casos obtenidos a escala real, se escogieron las siguientes cargas:

- Vigas grandes: 500 kg
- Vigas pequeñas: 80 kg

Además, el módulo de elasticidad utilizado en el programa fue el calculado a partir de la deformación unitaria, por la aproximación de su valor reportado en literatura.

Los modelos virtuales utilizados fueron el tipo “frame” y el “shell”.

Los modelos shell se definieron como thick para que el programa considere las deformaciones por cortante.

Para obtener la deflexión de la viga por medio del modelo frame, no fue necesario realizar pasos adicionales. Esto quiere decir que una vez que se tenía el modelo dibujado en el programa, se iniciaba el análisis de la carga propuesta.

Sin embargo, para el modelo tipo Shell se requirió de una serie de iteraciones con respecto a la malla usada y su número de elementos para que el programa utilizara el método de elementos finitos y así calculara la deflexión.

Cada vez que se dividía la malla, se medía la deflexión obtenida, para posteriormente revisar la convergencia.

La división de la malla se dio en tres formas:

- Figura 5.a: División en ambas direcciones (A-D)
- Figura 5.b: División de arriba hacia abajo (A-A)
- Figura 5.c: División de izquierda a derecha (I-D)

Y pueden ser visualizadas en las Figuras

Nota: Para la división en dirección de arriba-abajo se aprecian 3 líneas verticales encerradas en color negro que se podrían confundir con una división de ambas direcciones, pero estas son necesarias para poder definir la ubicación de los apoyos y la carga puntual.

¹⁰ American Society for Testing and Materials. (2015). ASTM D-198: Standard Test Methods of Static Test of Lumber in Structural Sizes. United States of America. p. 22

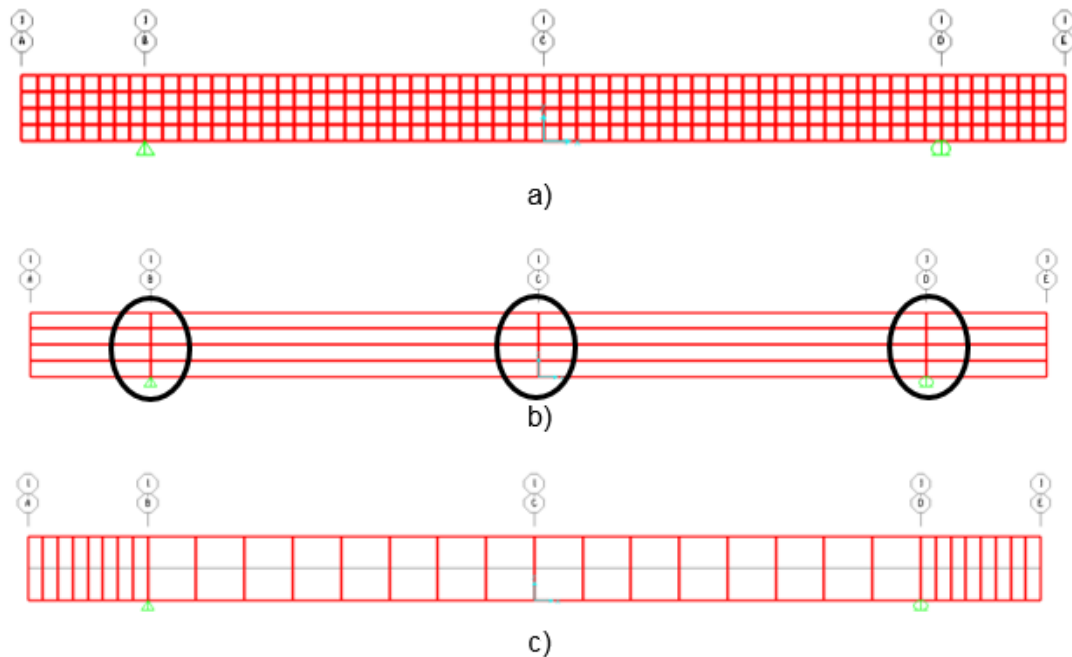


Figura 7. Esquema de las subdivisiones utilizadas en los modelos virtuales shell.
Fuente: Propia

Análisis de la relación de aspecto de los elementos finitos

Para los modelos shell en los que se observaron distorsiones en la convergencia al valor teórico, se realizó este análisis para definir hasta qué punto las relaciones entre los lados del elemento finito empiezan a mostrar problemas en su algoritmo.

La Figura 8 muestra que antes de dividir la viga en elementos finitos, se encuentra seccionada en 4 elementos denominados A, B, C y D. Para este análisis se tomará en cuenta la sección B.

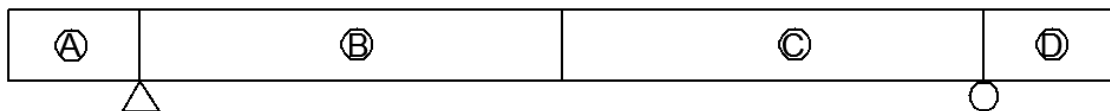


Figura 8. Secciones iniciales de las vigas sin dividir en elementos finitos
Fuente: Propia

Análisis de sensibilidad

Se hizo para determinar el efecto del aumento de un área en la deflexión los modelos tipo shell A-D a la hora de realizar el análisis por medio del FEM.

Se plantearon 2 condiciones. La primera fue variar el número de elementos finitos de la malla sin modificar la luz (L) de la viga. La segunda fue variar la longitud de la luz de la viga para aumentar el área sin modificar el número de elementos finitos por usar.

Para ambas condiciones, se tomó como parámetro de comparación la deflexión obtenida por medio de la ecuación 4 (modelo teórico) y así determinar el error absoluto de las aproximaciones del FEM en los modelos shell.

La primera condición se logró al determinar cuál modelo que más se adapta a la deflexión obtenida en el prototipo real, ya que para cada luz, se varió el número de elementos finitos.

Para la segunda condición, se utilizaron relaciones de longitud/peralte de $L/12$, $L/14$, $L/16$, $L/18$, $L/20$, $L/22$, $L/24$, $L/26$ y $L/28$ (variación de la luz de la viga) y se propuso mantener el número de elementos finitos de la malla constante.

Resultados

Caracterización mecánica de Pino Radiata

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las pruebas experimentales y modelos virtuales realizados en el proyecto.

El esfuerzo máximo de flexión está en el Cuadro 4, mientras que el esfuerzo de flexión en el límite proporcional se presenta en el Cuadro 5.

Adicionalmente, el Cuadro 6 muestra la densidad promedio del pino radiata.

Cuadro 4. Esfuerzo máximo de flexión del Pino Radiata a partir de la norma ASTM D143-14				
Propiedad	Contenido de humedad (%)	Promedio (kg/cm ²)	Desviación estándar (kg/cm ²)	CV (%)
Fb	14,18	556,32	72,78	13,08

Fuente: Propia

Cuadro 5. Esfuerzo de flexión del Pino Radiata en el límite proporcional			
Propiedad	Promedio	Desviación estándar	CV (%)
Fb (kg/cm ²)	323,00	63,91	19,79

Fuente: Propia

Cuadro 6. Densidad promedio del Pino Radiata			
Propiedad	ρ prom. (kg/m ³)	Desviación estándar (kg/m ³)	CV (%)
Densidad	417,69	30,83	7,38

Fuente: Propia

Comparación de los módulos de elasticidad

El módulo de elasticidad de las probetas en flexión, según ASTM D143-14 se presenta en el Cuadro 7 junto con calculados a partir de las ecuaciones 3 y 5 correspondientes a los métodos mencionados en la metodología.

Para reacomodar los datos de mejor manera y evitar confusiones, los módulos calculados a partir de los modelos reales con la ecuación 4 se encuentran en el Cuadro 8.

Cuadro 7. Comparación de métodos para determinar el módulo de elasticidad (E)			
Método	E promedio (kg/cm ²)	Desviación estándar (kg/cm ²)	CV (%)
ASTM	59 848,80	12 326,31	20,60
Velocidad Onda	84 641,17	17 856,92	21,10
Deformación Unitaria	145 714,37	45 578,05	31,28

Fuente: Propia

Cuadro 8. Módulo de elasticidad (E) de las relaciones del modelo experimental			
Relación	E prom (kg/cm ²)	Desviación estándar (kg/cm ²)	CV (%)
$h = L/4$	12 807,86	2 592,25	20,24
$h = L/8$	39 532,04	6 348,09	16,06
$h = L/12$	49 135,93	6 097,72	12,41
$h = L/16$	54 378,95	7 206,78	13,25
$h = L/20$	56 408,08	5 744,31	10,18
$h = L/22$	61 118,28	709,66	1,16
$L/28$	55 798,84	5 436,77	9,74

Fuente: Propia

Adicionalmente, se realiza una correlación entre el módulo de elasticidad dinámico y el estático para conocer su grado de correlación. Esta correlación se muestra en la Figura 9.

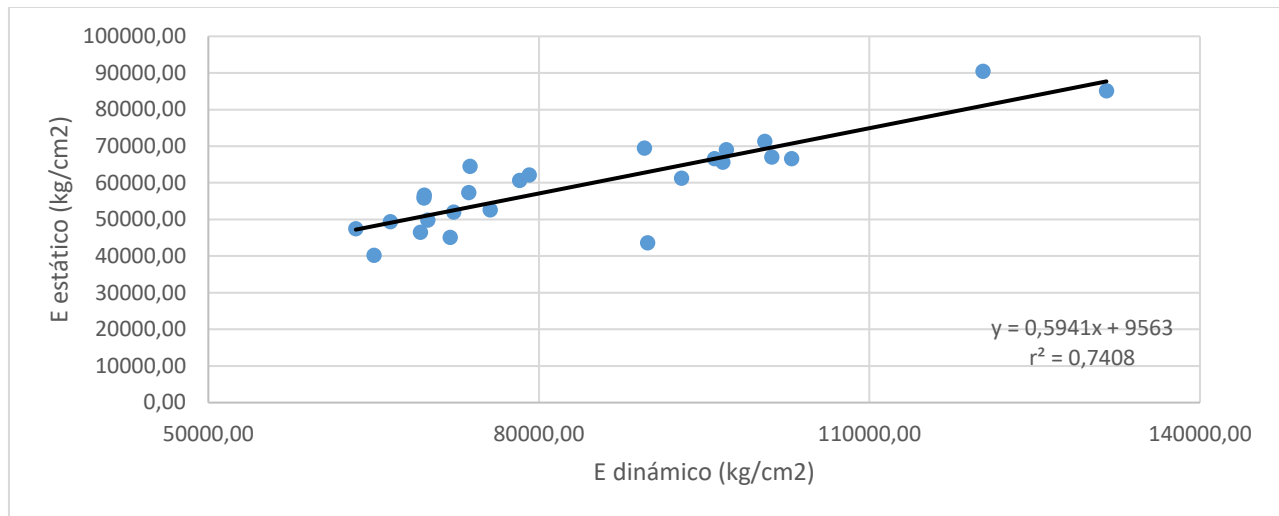
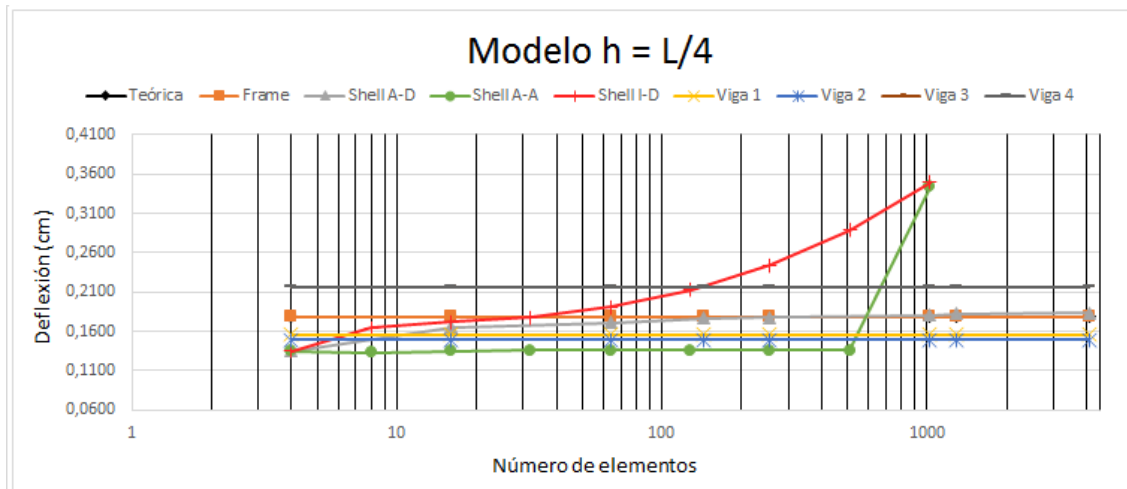


Figura 9. Correlación del E estático con el E dinámico.
Fuente: Propia

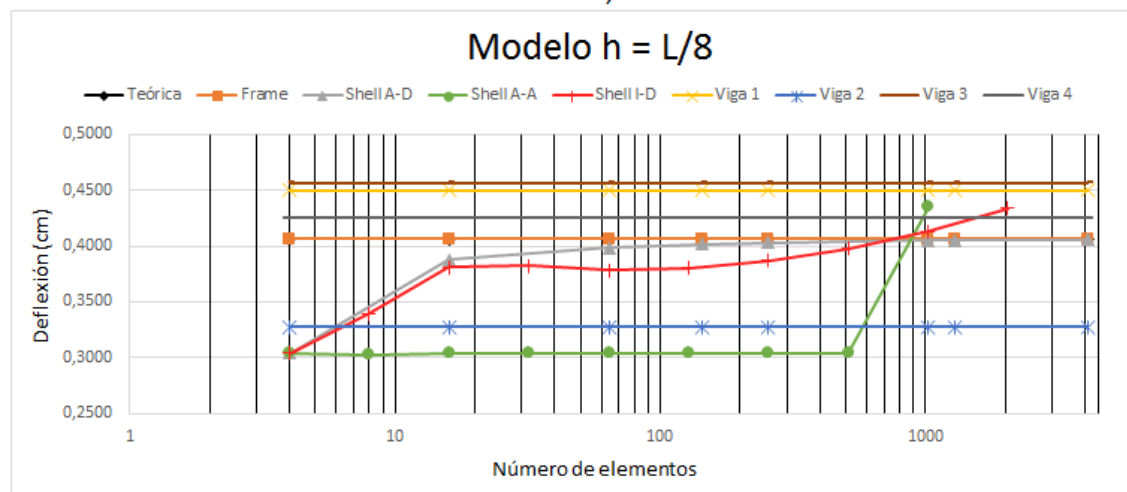
Validación de modelos virtuales

Para validar los modelos virtuales, se crean gráficas de convergencia que ayudan a determinar la aproximación de los distintos modelos planteados a los prototipos reales.

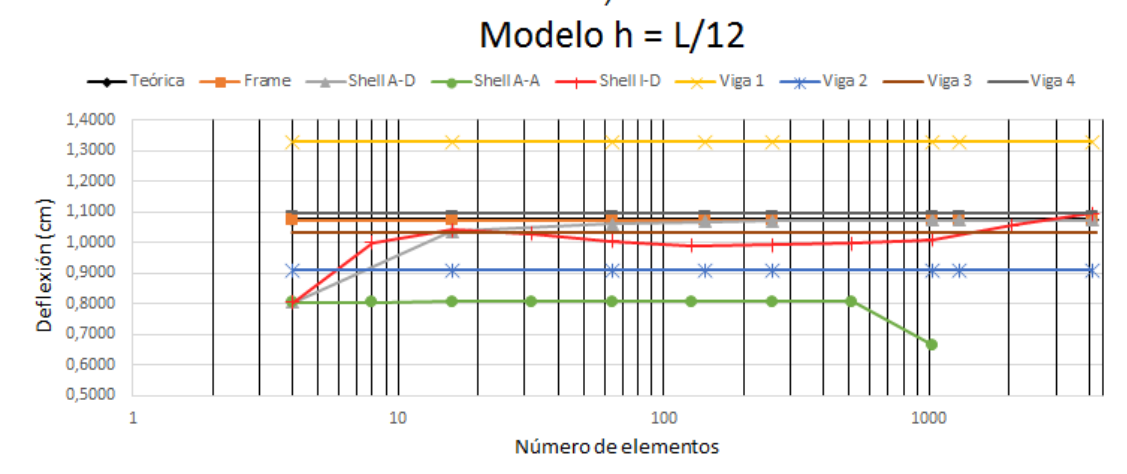
La Figura 11 muestra las gráficas de convergencia de desplazamientos de las vigas grandes, mientras que la Figura 12 la de las vigas pequeñas.



a)



b)



c)

Figura 10. Convergencia de las deflexiones obtenidas por los modelos teórico, frame, shell y experimental en vigas grandes
Fuente: Propia

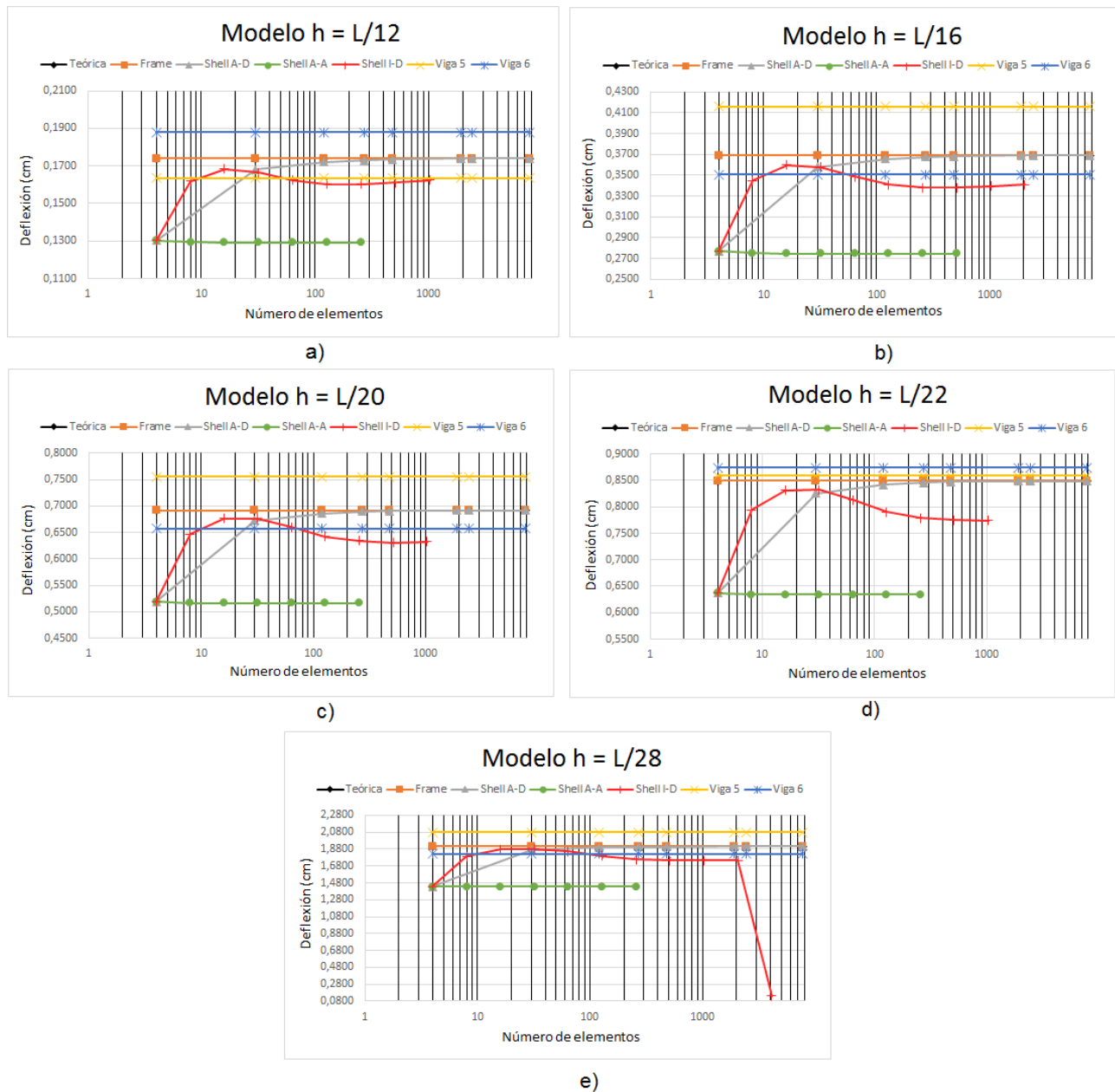


Figura 11. Convergencia de las deflexiones obtenidas por los modelos teórico, frame, shell y experimental en vigas pequeñas
Fuente: Propia

Influencia de relación de aspecto (RA)

Para las Figuras anteriormente presentadas (10 y 11) se presenta el análisis de la influencia de relación de aspecto en las Figuras 12 y 13 que relaciona la deflexión con la relación de aspecto de

cada elemento finito para el segmento B de la Figura 8.

Además, para los modelos shell en ambas direcciones (A-D) se realizan las Figuras 14 y 15 que relacionan las deflexiones obtenidas a partir de distintas relaciones de aspecto (RA), así como las Figuras 16 y 17 correspondientes a los errores relativos de estas deflexiones conforme aumenta la cantidad de elementos finitos.

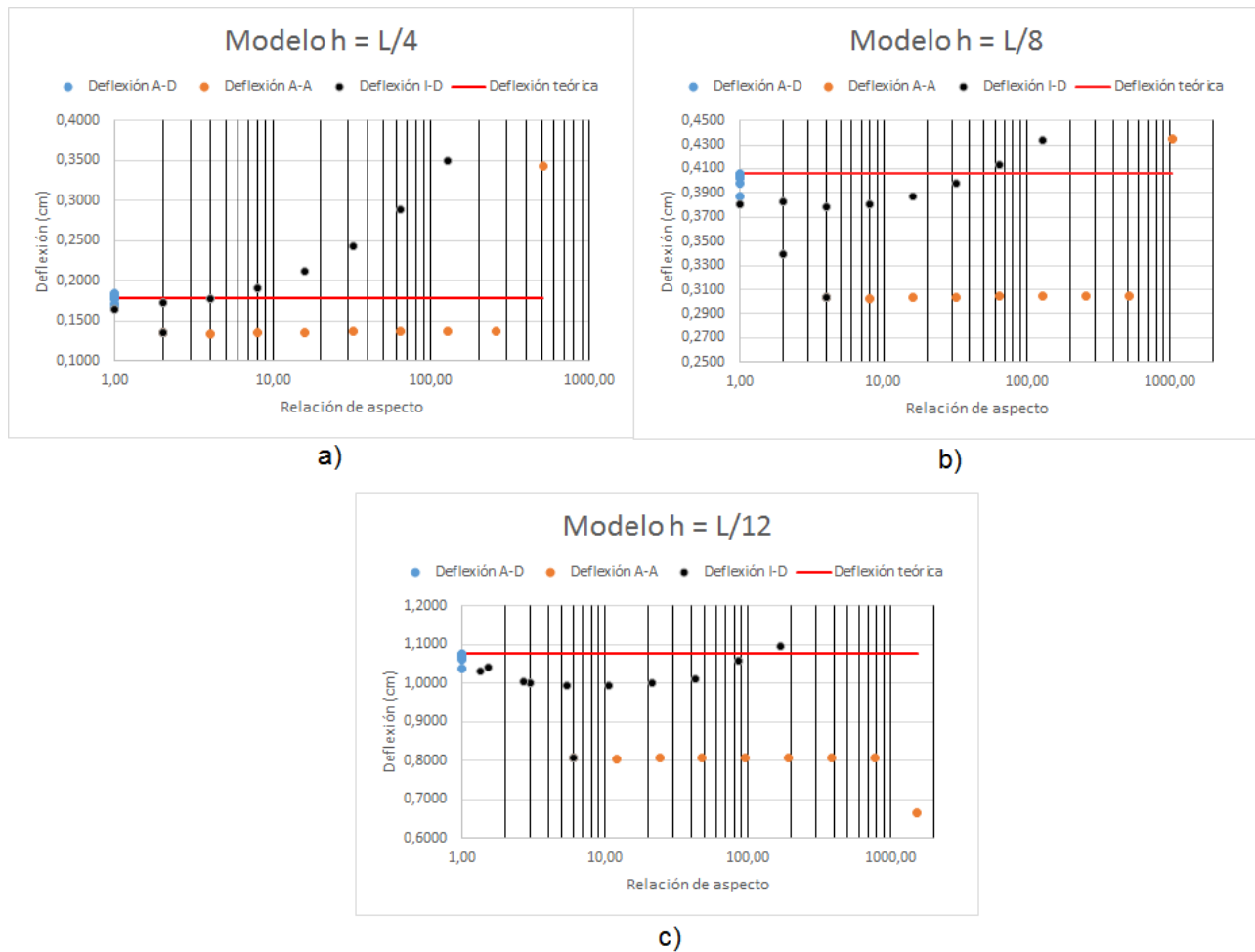


Figura 12. Variación de las deflexiones con respecto a las relaciones de aspecto de cada elemento finito para los modelos Shell I-D, Shell A-A y Shell A-D de las vigas grandes
Fuente: Propia

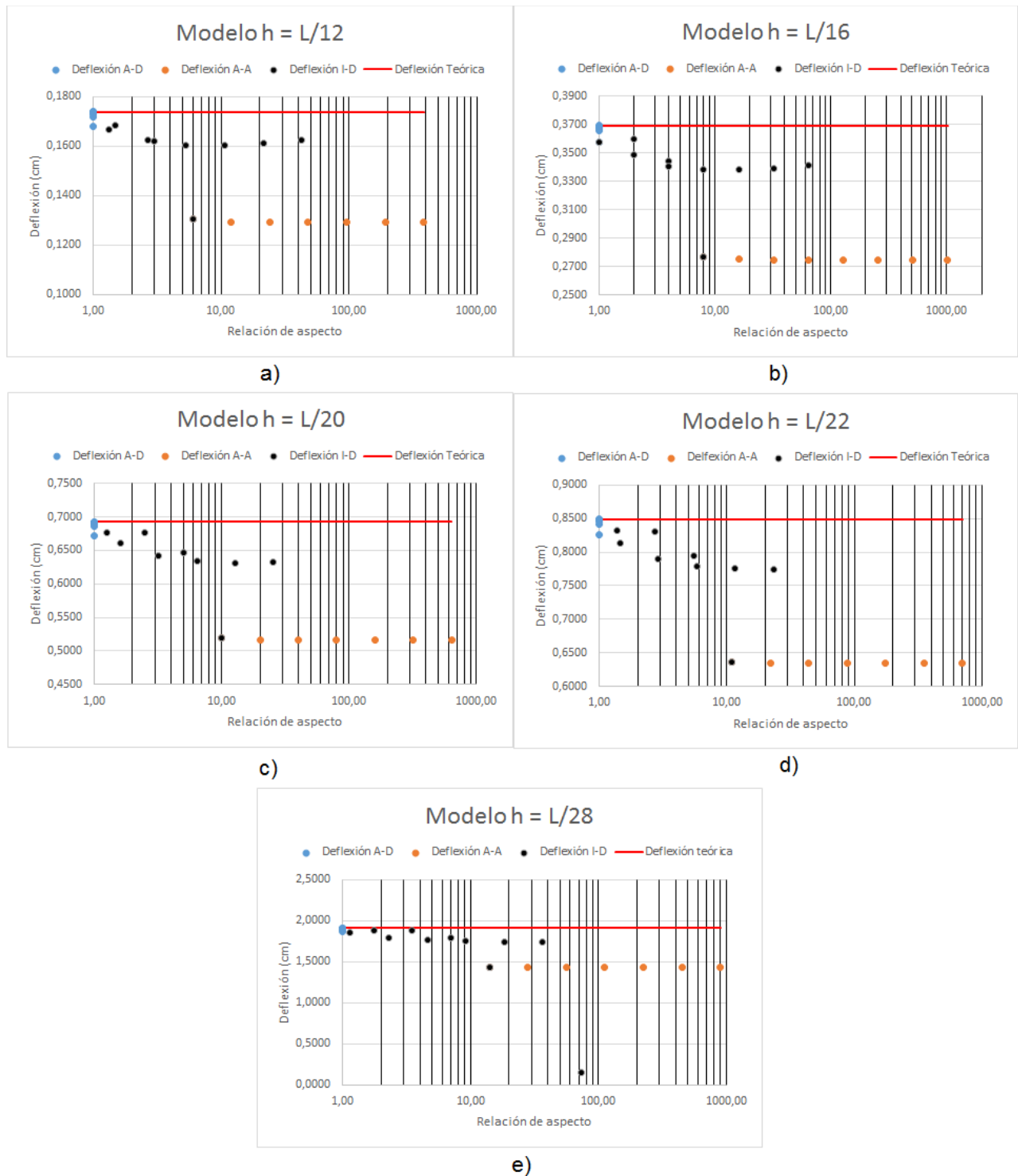
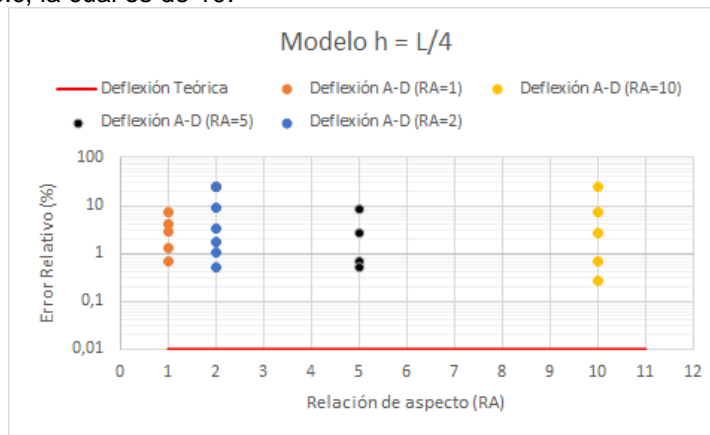
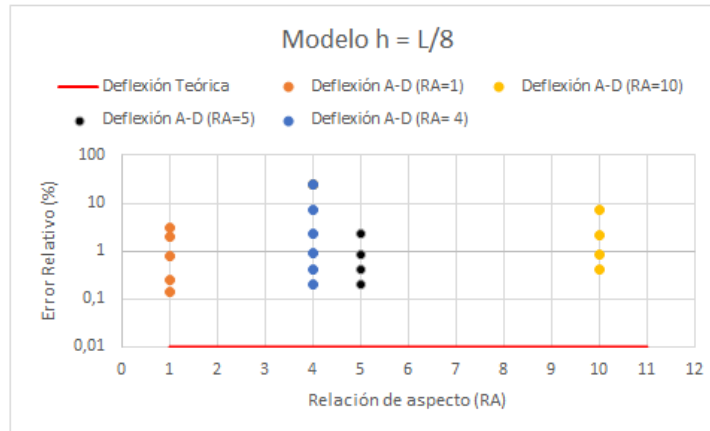


Figura 13. Variación de las deflexiones con respecto a las relaciones de aspecto (RA) de cada elemento finito para los modelos Shell I-D, Shell A-A y Shell A-D de las vigas pequeñas
Fuente: Propia

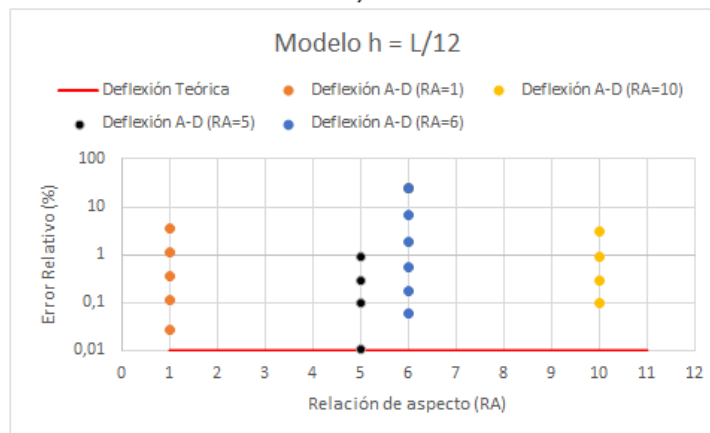
Además, las Figuras 14,15,16 y 17 muestran los errores relativos con respecto a la variación de de relaciones de aspecto de 1, 5 y 10 conforme se aumenta la cantidad de elementos. También se encuentra una cuarta relación que representa la obtenida a partir de las dimensiones estándar de los modelos, excepto en las figuras 15.c y 16.c, la cual es de 10.



a)



b)



c)

Figura 14. Error relativo con respecto distintas relaciones de aspecto (RA) de modelos shell en ambas direcciones para vigas grandes.
Fuente: Propia

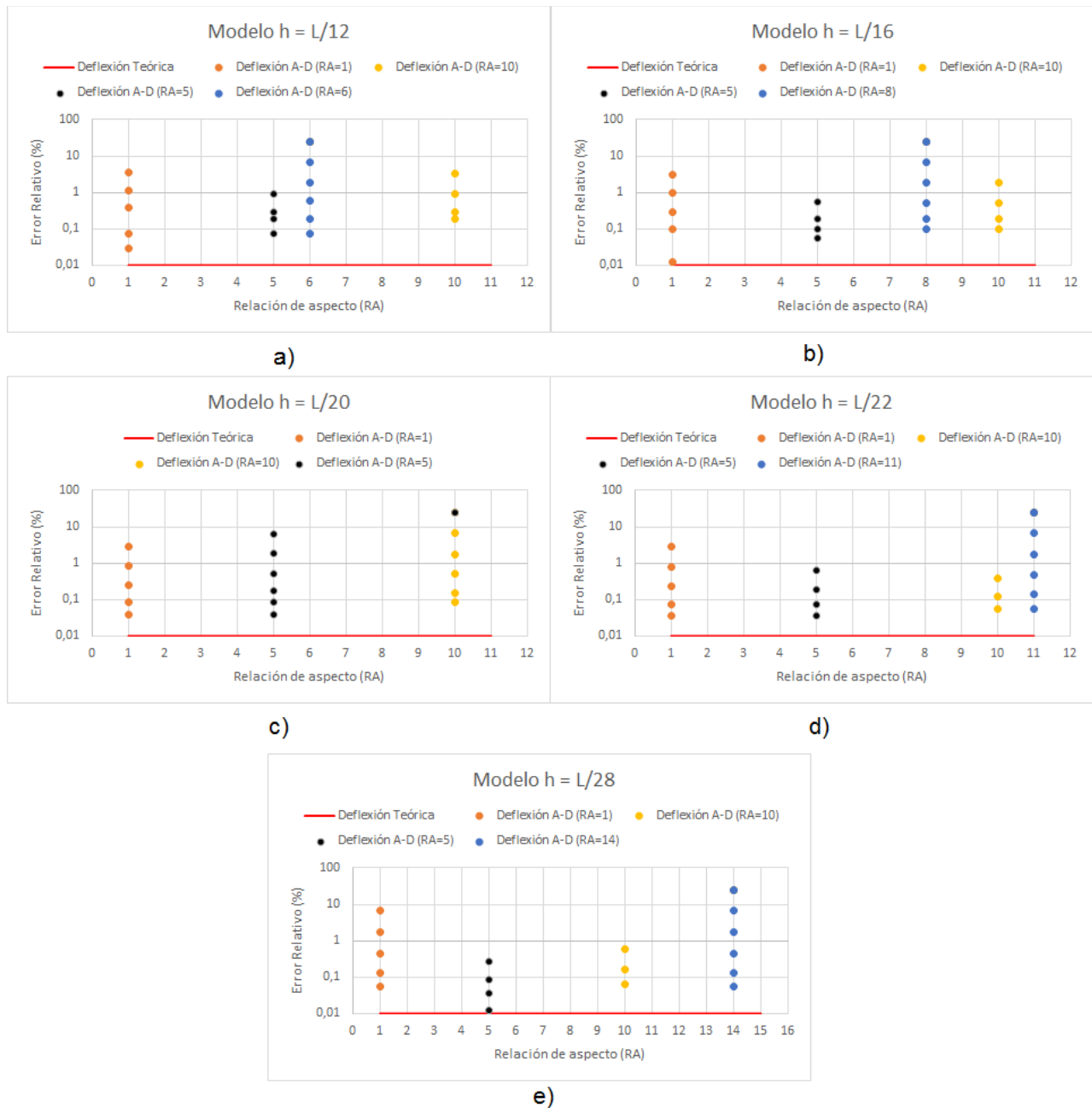
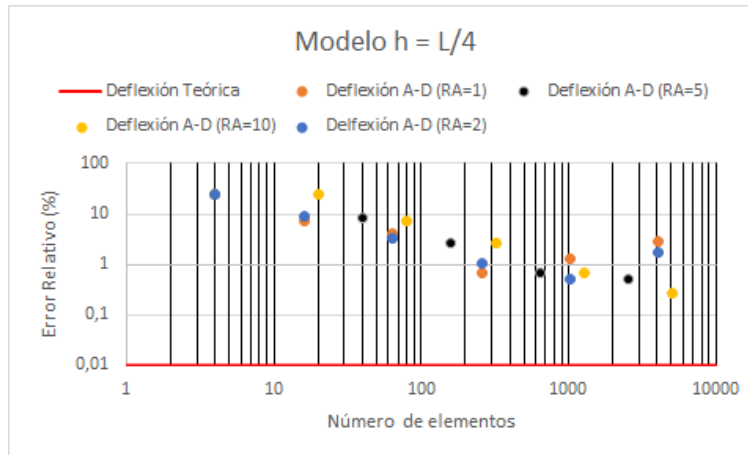
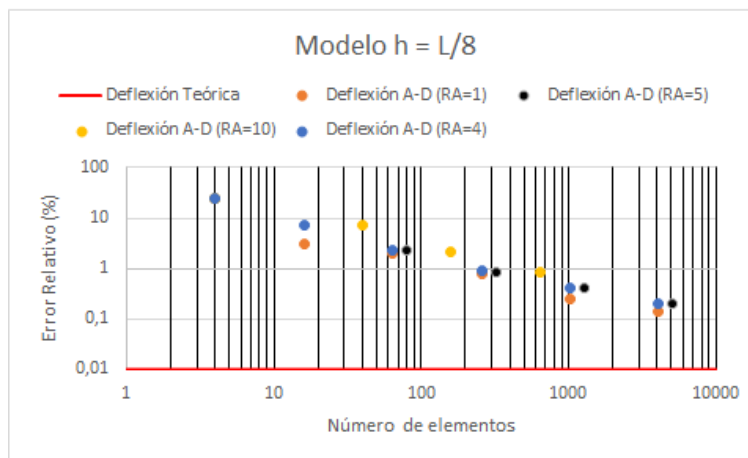


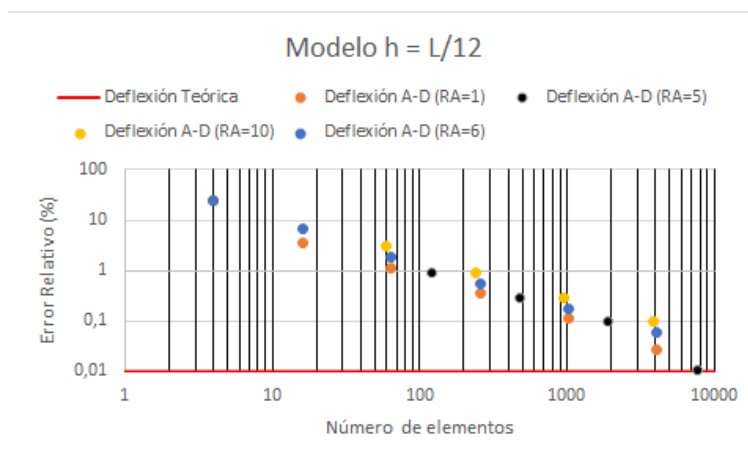
Figura 15. Error relativo con respecto a distintas relaciones de aspecto (RA) de modelos shell en ambas direcciones para vigas pequeñas.
Fuente: Propia



a)



b)



c)

Figura 16. Error relativo con respecto a la cantidad de elementos finitos para las relaciones de aspecto (RA) de modelos shell en ambas direcciones para vigas grandes.
Fuente: Propia

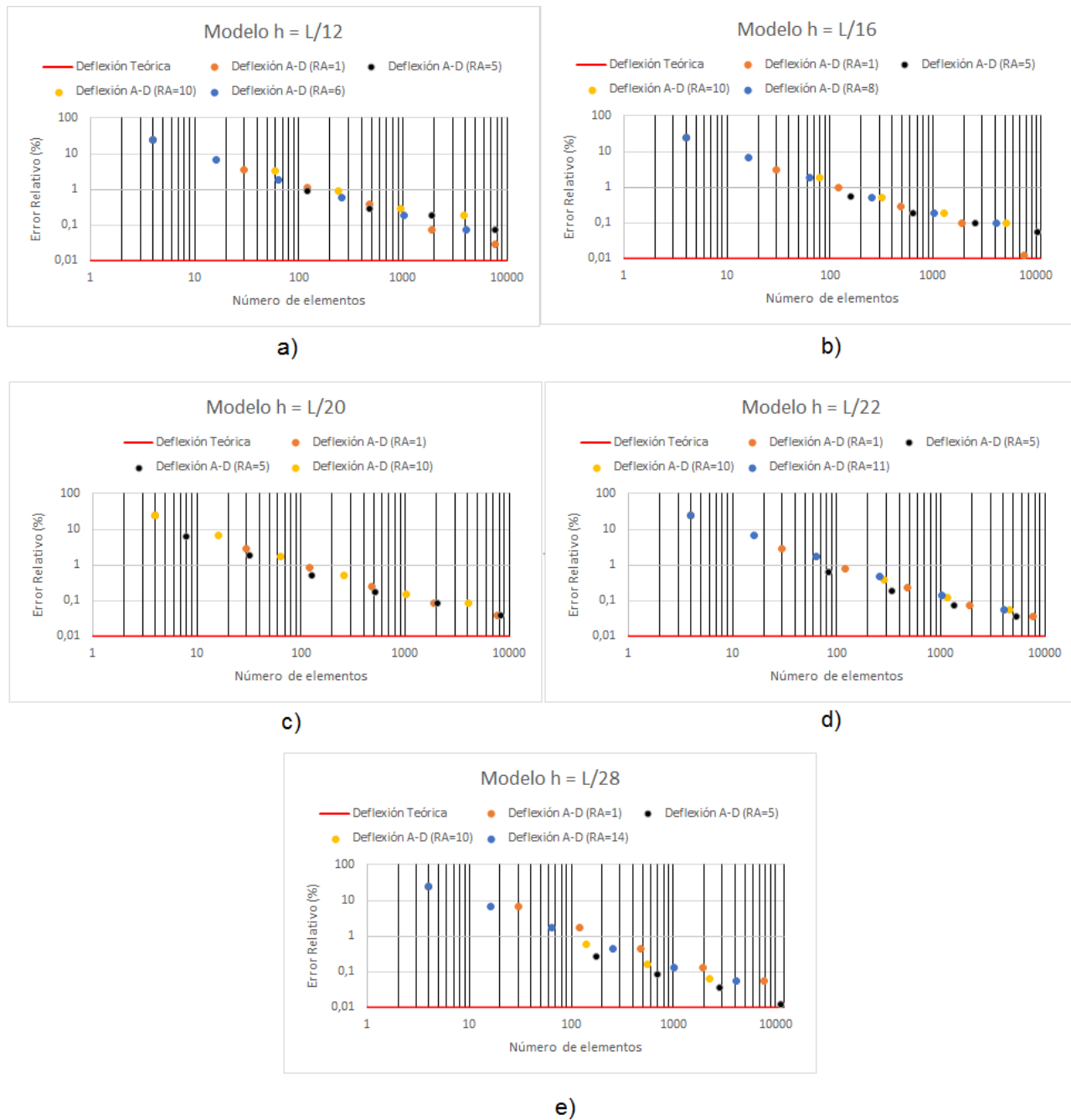


Figura 17. Error relativo con respecto a la cantidad de elementos finitos para las relaciones de aspecto (RA) de modelos shell en ambas direcciones para vigas grandes.

Análisis de sensibilidad

Como se mencionó en el marco teórico, el análisis de sensibilidad evidencia el efecto en un resultado al modificar una variable.

Este análisis se realizó entre el modelo teórico y el modelo virtual shell subdividido en ambas direcciones (A-D) (ver Figura 5.a para una mayor compresión).

Se determinó el error absoluto asociado al número de elementos finitos del modelo $h = L/12$ de las vigas pequeñas manteniendo la luz constante de 93,60 cm (y, por lo tanto, un área constante), pero variando la cantidad de elementos finitos.

De la misma manera, para conocer el error absoluto asociado a la longitud de luz (L) de manera que se obtuvieran modelos de $h = L/12$, $h = L/14$, $h = L/16$, $h = L/18$, $h = L/20$, $h = L/22$, $h = L/24$, $h = L/26$ y $h = L/28$ y se escogió una cantidad de 480 elementos finitos, los cuales se mantuvieron constantes conforme se aumentaba la luz.

La representación gráfica de los errores absolutos obtenidos con estos cambios se observa en la Figura 18, la cual tiene un doble eje en la dirección x. El eje x de superior representa el

número de elementos finitos y el inferior la variación de la luz.

Cabe mencionar que el error asociado a la luz se encuentra aumentado 10 veces para que concordaran los ejes de los errores y quedaran con la misma escala; sin embargo, al buscar uno de los errores asociados a la luz, el error leído deberá dividirse entre 10.

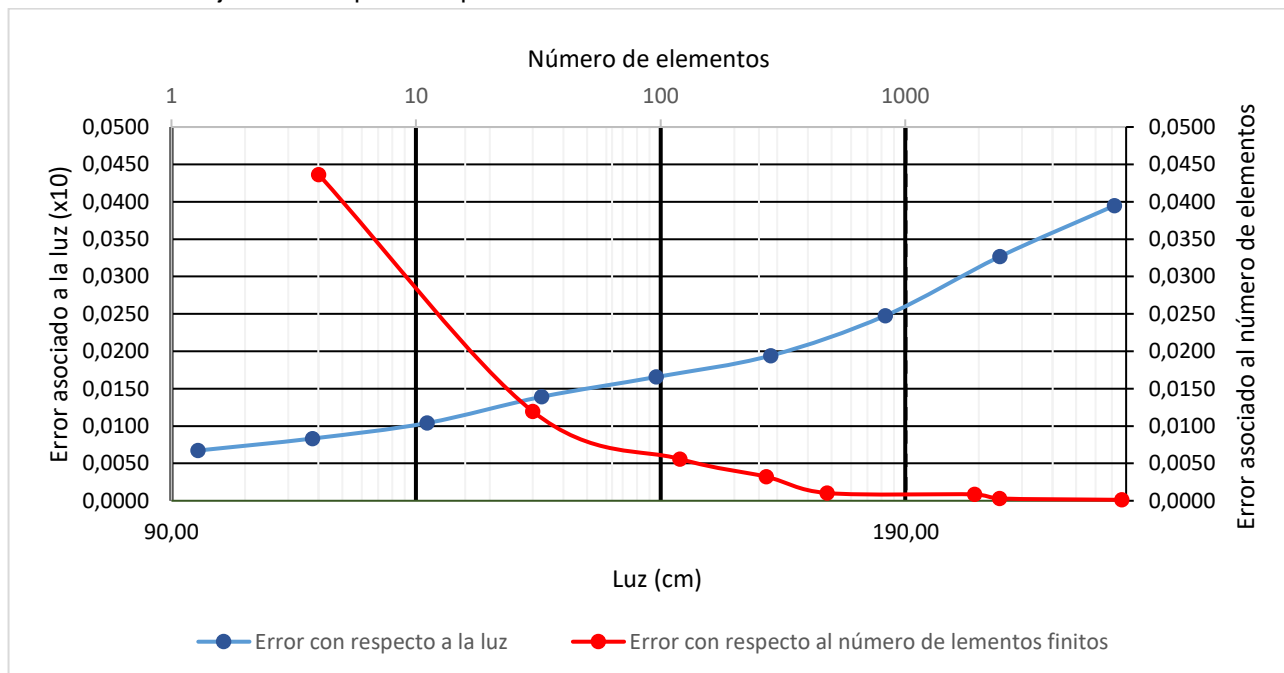


Figura 18. Análisis de sensibilidad con respecto a los errores absolutos
Fuente: Propia

Análisis de los resultados

Caracterización mecánica de Pino Radiata

A la hora de analizar los resultados obtenidos en el Cuadro 4, lo primero que se debe observar es el coeficiente de variación. En una entrevista con el ingeniero Juan Tuk Durán menciona que para que un ensayo se dé como válido, en madera el coeficiente de variación debe estar entre un 7 y un 25%. Teniendo esto en cuenta, el ensayo de flexión empieza a tomar validez.

Haciendo las comparaciones entre los Cuadros 1 y 2 y los resultados obtenidos en laboratorio, se puede notar que los valores del ensayo realizado se encuentran por debajo de los expuestos por los productores y Ordóñez, pero que es posible de que se deba a ciertos factores que se enuncian a continuación:

El ensayo se realizó con el contenido de humedad indicado en el Cuadro 4.

En la Figura 2 se mostró el efecto que tiene la humedad en las propiedades mecánicas de la madera, dando como resultado que a mayor humedad, menor es la resistencia a los distintos tipos de carga, lo que evidencia como primer factor perjudicial a la humedad.

Como segundo factor está la inclinación de las fibras, la cual también disminuye la resistencia de los elementos porcentualmente como enuncia Tuk (2010) en el Cuadro 1.

Esta reducción de resistencia, por la inclinación del grano se da porque se crea un plano de falla entre las fibras. Este plano puede evidenciarse para la probeta de flexión de la Fotografía 9 en donde la zona de ruptura sigue la dirección de las fibras.



Fotografía 9. Plano de falla en dirección a la orientación de las fibras.

Fuente: Propia

Comparación de los módulos de elasticidad, utilizando distintos métodos de cálculo

Al observar los cuadros 7 y 8 se puede apreciar que de los 4 métodos utilizados, hay 2 que presentan similitud en sus resultados.

Primero, es de esperar que los módulos de elasticidad obtenidos sean menores a los reportados en literatura, dado que los esfuerzos máximos también fueron bajos.

Teniendo esto en cuenta, los valores más confiables y que se toman como válidos son los calculados a partir de las ecuaciones 3 y 5 por la similitud de sus valores promedio y que ambos ensayos realizados fueron completamente independientes uno del otro.

Los factores que pueden haber reducido el módulo de elasticidad mediante estos métodos son los mismos que afectaron los valores de los esfuerzos máximos.

Sin embargo, en el Cuadro 8, para los modelos con una relación de $h = L/8$ y $h = L/4$ empieza a haber una disminución en el módulo de

elasticidad, pero esto se debe a que el esfuerzo de cortante toma mayor influencia que el de flexión y distorsiona el resultado del módulo.

Popov (2000) indica que: "... conforme la longitud de la viga aumenta, la deflexión por flexión se vuelve rápidamente dominante. Por esta razón, usualmente es posible despreciar la deflexión debida al cortante"¹¹

Además, Pope (1997) menciona que: "La contribución del esfuerzo de cortante a la deflexión está en función del módulo de rigidez G. En vigas cortas donde el material tiene un valor pequeño de G comparado con el E, como la madera, la contribución por cortante a la deflexión es mucho más significativa"¹²

Si bien es cierto, se utilizó la ecuación 4 para considerar el efecto del cortante, es de destacar que el material se trató como isotrópico y por ende al calcular el módulo de cortante se usó la ecuación 1 que está formulada para materiales con comportamiento homogéneo.

Como es de conocimiento general, la madera no es isotrópica, sino que es ortotrópica por lo que la ecuación 1 posiblemente no describe de manera adecuada el módulo de cortante del pino radiata.

En el proyecto no se determinó el módulo de cortante debido a que no se cumplen los requisitos planteados por la norma ASTM D198-15 los cuales mencionan que se deben utilizar al menos 4 relaciones L/h (con la misma sección transversal) y que su inversa al cuadrado (h/L)² para esas cuatro relaciones debe procurar tener incrementos de la misma magnitud y con un rango de 0,035 a 0,002 5. La norma recomienda entonces, que las relaciones L/h a utilizar sean 5,5, 6,5, 8,5 y 20.

Con respecto a los módulos de elasticidad (E) calculados a partir de la velocidad de onda y la deformación unitaria pueden no haber sido muy precisos por los siguientes factores:

El E de la velocidad de onda es llamado dinámico y al ser un ensayo no destructivo, lo que se busca es correlacionar el valor obtenido con el valor estático de las pruebas de flexión.

García menciona que "el MOE dinámico es de 5 a 20% mayor que el estático".¹³ Esta relación se da cuando el coeficiente de determinación (r^2) es mayor que 0,8.

Sin embargo, para este caso, el E dinámico promedio es aproximadamente un 40% mayor que el estático, lo cual indica que existe una baja relación entre estos dos parámetros. Esto se evidencia en la Figura 9, donde se aprecia que el coeficiente de determinación (r^2) es de 0,740 8 y se demuestra así una baja predicción del E estático a partir del E dinámico.

Las diferencias entre los resultados pueden deberse a la manera en que viaja la onda de los transductores esto lo menciona Méndez (2015) citando a Wang (2004): "...la onda de ultrasonido presenta un tiempo de transmisión más rápido en sentido longitudinal que en sentido transversal; estos tiempos de transmisión tienden a ser menores cuando la onda viaja paralela al grano y mayores cuando se dan de forma perpendicular al mismo".¹⁴

La Fotografía 10 permite observar que si la onda viajaba longitudinalmente esta intersecaba alguna de las fibras de la madera debido a que no eran completamente paralelas y tomando en cuenta lo anterior, la velocidad estaría siendo afectada y por ende el módulo de elasticidad dinámico.

El resultado también se ve afectado por el contenido de humedad, porque como se muestra en la ecuación 3, el E dinámico es directamente proporcional a la densidad, y entre mayor cantidad de agua tenga el espécimen, mayor será su densidad.

¹¹ Popov, E. (2000). Mecánica de sólidos. p. 619

¹² Pope, E. (1997). Rules of thumb for mechanical engineer: a manual of quick, accurate solutions to everyday mechanical engineering problems. p. 307

¹³ García, A. *et al.* (2016). Comparison of modelling using regression techniques and an artificial neural network for obtaining the static modulus of elasticity of Pinus radiata D. Don. Timber by ultrasound. p. 1

¹⁴ Méndez, L. (2015). Determinación del módulo de elasticidad por los métodos dinámico y estático para madera termo-tratada de Gmelina arborea y Tectona grandis. p. 48



Fotografía 10. Variación en la orientación de las fibras
Fuente: Propia

El cálculo por medio de la deformación unitaria dio un valor promedio elevado con respecto a la literatura y a los datos obtenidos por medio de las ecuaciones 2 y 4 para los prototipos reales y las probetas de laboratorio.

Diversos autores dan sus explicaciones acerca de una deficiente aproximación del módulo de elasticidad de los materiales cuando es calculado a partir de galgas extensiométricas.

Petersen realiza un experimento en el que calcula el módulo de elasticidad para una barra de acero a partir de la deformación unitaria usando galgas extensiométricas y el resultado obtenido es de $1,3 \times 10^{11}$ Pa.

Menciona que la gran diferencia entre este valor y el indicado en los textos ($2,0 \times 10^{11}$ Pa) puede deberse a incertidumbres tanto del equipo como errores humanos.

Además, Neelavarapu indica que las mediciones con galgas extensiométricas en madera se dificultan, porque es un material no homogéneo, anisotrópico y poroso.

Por su parte Komurlu (2015) agrega que: “se encontró una pérdida importante de la deformación unitaria debido a la transición de esfuerzos por medio de las interfaces y esta pérdida puede deberse a la medición de la deformación del adhesivo en lugar de la deformación del material usado”.¹⁵

Para el prototipo real, la unión de la galga con la viga fue como la que se muestra en las Figuras 19 y 20 en donde se ve que entre la madera y la placa metálica hay masilla epóxica, y luego entre la placa metálica y la galga nuevamente hay masilla epóxica.

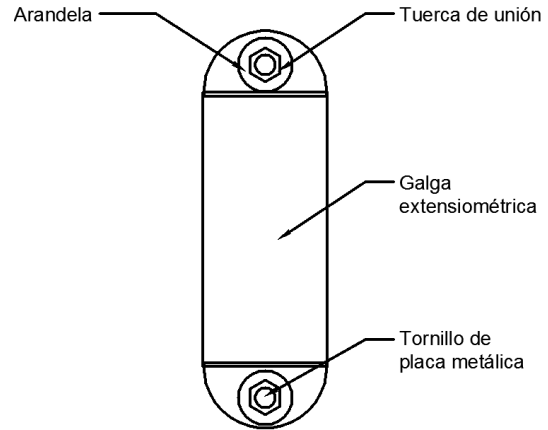


Figura 19. Vista en planta de la unión viga-galga extensiométrica
Fuente: Propia

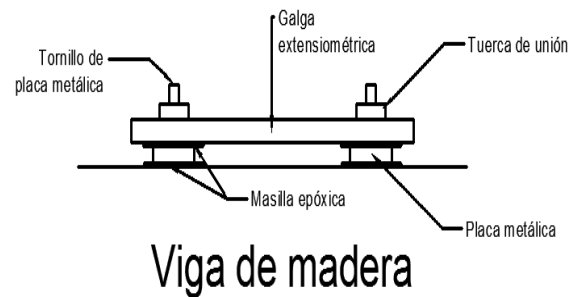


Figura 20. Vista frontal de la unión viga-galga extensiométrica
Fuente: Propia

Las Figuras demuestran que hay varias capas de distintos materiales entre la viga y la galga y que es posible entonces que en cada sección de unión haya una mala transmisión de esfuerzos y provocara una deficiente lectura de la deformación unitaria.

Por último, Komurlu (2015) recomienda que el espesor del adhesivo debe de ser lo más delgado posible, factor que tampoco fue controlado eficientemente, porque que entre la placa metálica y la madera no se colocó una prensa que mantuviera a presión la unión por el tiempo de secado, en vez de esto, se colocaron unas placas de metal de aproximadamente 1 kg para que con el propio peso creara esta presión.

¹⁵ Komurlu et. al. (2015). Effect of Adhesive Type on the Measurement of Modulus of Elasticity Using Electrical Resistance Strain Gauges

Validación de los modelos virtuales

Es de recalcar que la madera es un material anisotrópico y sin importar que la luz y la carga aplicada fueran aproximadamente las mismas para todos los modelos, las deflexiones de los prototipos reales tienen ciertas variaciones entre sí.

Sin embargo, estas variaciones no son tan grandes como parecen gráficamente, ya que si se analiza la Figura 10.c, las vigas 1 y 2 tienen aproximadamente 4,2 mm de diferencia entre sus deflexiones, que para ser un material no uniforme es una distancia tolerable.

Lo primero por recalcar es que en las Figuras 10 y 11, no se observa la serie de datos obtenidos mediante el modelo teórico. Esto se debe a que se encuentra detrás de la serie que representa la deflexión del modelo virtual frame.

En otras palabras, las deflexiones obtenidas por ambos modelos son las mismas.

Para los modelos shell A-D, en las figuras 10 y 11 puede observarse la convergencia de los modelos al teórico y al frame, caso contrario sucede en los modelos shell A-A e I-D.

Para el shell A-A principalmente se observa una tendencia de la deflexión constante conforme se aumenta el número de elementos finitos, sin embargo para las relaciones longitud/peralte de las vigas grandes, a partir de 500 elementos finitos, el comportamiento se torna impredecible.

Para los casos de las vigas pequeñas no se pudo obtener el comportamiento a partir de 500 elementos, por errores producidos por la capacidad de procesamiento de la computadora utilizada.

Con el modelo shell I-D también sucede algo particular ya que al empezar a discretizar las vigas, las deflexiones tienden a converger; sin embargo, llega un punto en el que la tendencia de convergencia se pierde y el resultado se empieza a alejar del teórico.

El FEM basa su algoritmo en la resolución de elementos finitos con relaciones de aspecto iguales a la unidad y este factor es determinante

para lograr explicar el comportamiento de los modelos shell A-A y shell I-D.

Por último, varios de los prototipos reales utilizados no se encuentran estrictamente representados por los modelos virtuales, como es el caso de las Figuras 10.c y 11.b, en donde las vigas 1 y 5 se encuentran por encima de la deflexión de los modelos teórico, frame y shell A-D.

Esto se debe a que al haber utilizado el promedio de los módulos de elasticidad para cada relación longitud/peralte, estos llevan asociada una desviación estándar que hace que existan estas variaciones.

Análisis de la relación de aspecto (RA) del elemento finito.

Cubillos (s.f.) define que los buenos elementos finitos bidimensionales: "...se caracterizan porque su proporción es cercana a la unidad y los ángulos están cerca a los 90 grados".¹⁶ Y demás afirma que los elementos pobres (los que no cumplen con estas condiciones citadas) tienden a generar resultados inexactos.

En las Figuras 12 y 13 puede observarse que para el shell A-D todas las relaciones conforme se aumenta el número de elementos finitos son iguales a la unidad y sus deflexiones se acercan a la solución teórica.

Pero, para los modelos shell A-A y shell I-D, las deflexiones se distorsionan conforme se da un aumento en la RA.

Ahora, no es posible determinar una tendencia del error asociado al aumento de las relaciones de aspecto, ya que si bien es cierto, las soluciones no convergen a la teórica, en las Figuras 12.b y 12.c, para los modelos shell I-D se evidencia que a partir de una relación de 2, la deflexión se mantiene constante y por debajo de la solución teórica, sin embargo, a partir de una relación de aspectos de 10 inicia un incremento en la deflexión sobrepasando a la solución teórica cuando la RA es mayor a 100.

Para los modelos A-A cuyas relaciones inician a partir de 10, se aprecia en ambas Figuras

¹⁶ Cubillos, A. (s.f). Introducción al método de elementos finitos. p. 11

(12 y 13) que conforme se incrementa la RA la deflexión se mantiene constante, sin embargo en la Figura 12 esta continuidad se rompe y las deflexiones incrementan para las Figuras 12.a y 12.b y disminuyen para la 12.c.

Demostrado que el modelo shell en ambas direcciones (A-D) con una RA cercana a la unidad converge a la solución teórica, se plantearon relaciones de aspecto de 5, 10 y adicionalmente la estándar dada por las dimensiones de los modelos y se varió la cantidad de elementos para observar el comportamiento.

En la figura 14.c se observa que no solamente las relaciones de aspecto de 1 tienen un menor porcentaje de error en ese modelo, sino que también los modelos con RA de 5, 6 y 10. Además no es el modelo en que la iteración inicial se ajusta más rápido a la solución, como si lo hace el que tiene una relación de aspecto de 5. Esto se debe a que para lograr estas relaciones en un área en particular, se debieron de distribuir la cantidad de elementos finitos de manera que se pudieran cumplir con estas relaciones de aspecto propuestas. Este factor da como resultado que por ejemplo, para el modelo de viga grande $h = L/12$ con RA de 1 se iniciara la iteración con 16 elementos finitos, mientras que para la RA de 5 se iniciara con 120 elementos.

Entonces, para comparar de mejor manera los efectos de las RA se realizan las figuras 16 y 17 que corresponden al error relativo de los modelos de las figuras 14 y 15 conforme se incrementa la cantidad de elementos finitos.

En la figura 16.c se observa que para un error de aproximadamente 0,1%, las relaciones de aspecto de 1, 5 y 10 utilizan 1 024, 1 920 y 3 840 elementos finitos respectivamente. Mientras que en la RA = 6, se utilizan 1 024 elementos y obtiene un error de 0,179 8%. Pero esta tendencia no se mantiene necesariamente para todos los modelos.

La figura 17 muestra en sus distintos modelos que conforme se incrementa la relación L/h , la RA = 5 cada vez requiere menor cantidad de elementos para lograr un error igual o menor a la RA = 1 dando así como resultado, por ejemplo, para el modelo en viga pequeña de $h = L/22$ un error de 0,071 5% necesite 1 344 elementos para una RA de 5 y 1 920 elementos para una RA de 1 mientras que para el modelo $h = L/28$, un error de 0,037 2% requiera 2 816 elementos para la RA =

5 y para un error de 0,053 9% se requieran 7 680 elementos para la RA = 1.

Pero no solo la RA = 5 se ve beneficiada con el aumento del área provocado por una mayor luz, ya que la figura 17.e evidencia que las RA de 10 y 14 necesitan menor cantidad de elementos para obtener un error aproximadamente igual a la de 1.

Sin embargo, la figura 16.a no sigue la tendencia planteada anteriormente (a mayor longitud del claro las RA bajas requieren más cantidad de elementos para alcanzar el mismo o menor error que las RA altas), ya que al inicio si se muestra que para una menor relación longitud/peralte son más efectivas las RA bajas, pero a partir de 1 000 elementos aumenta su error relativo y se vuelven más eficientes las RA de 5 y 10.

Análisis de sensibilidad

Como se puede apreciar en la Figura 18 y que además es evidente en el FEM por ser un método numérico es que, al aumentar el número de elementos finitos en un cuerpo (siempre y cuando se mantenga una proporcionalidad cercana a la unidad) su error absoluto es menor al valor exacto y por ende existe una convergencia y esto lo evidencia Turapathi (1999) donde explica que “Se obtiene una buena idea de la convergencia incrementando sucesivamente el número de elementos en mallas de elementos finitos”¹⁷.

Sin embargo si se mantienen la misma cantidad de elementos finitos pero se varía la longitud, el error absoluto con respecto al valor exacto tiende a aumentar.

Tomemos en cuenta una malla con una proporcionalidad de 1. Al aumentar el número de elementos en el cuerpo en estudio sin producir un cambio en el tamaño de él, los elementos finitos se vuelven más pequeños, el cuerpo se vuelve menos rígido y esto beneficia a la deflexión.

Caso contrario sucede cuando se mantiene la cantidad de elementos y se aumenta la luz o el peralte del elemento ya que, el cuerpo en estudio aumenta su área, provocando que también los elementos finitos crezcan y se hagan más rígidos.

¹⁷ Chandrupatla, T. (1999). Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. p. 154

Las Figuras 21 y 22 ejemplifican lo mencionado, donde se tiene un área inicial con 16 elementos y luego se aumenta el tamaño dando así un área final con la misma cantidad de elementos finitos pero con sus áreas más grandes.

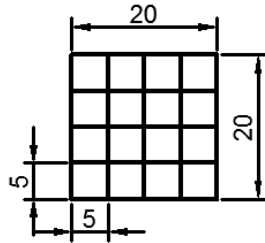


Figura 21. Tamaño inicial del elemento con 16 subdivisiones
Elaboración: Propia

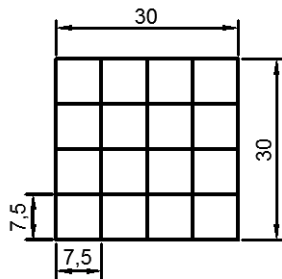


Figura 22. Tamaño final del elemento con 16 subdivisiones
Elaboración: Propia

Este efecto del aumento del área se puede ver también comparando, por ejemplo, los modelos de vigas pequeñas $h = L/12$ y $h = L/20$ en donde se observa (apéndices 14 y 16) que para 120 elementos finitos, el primer modelo mencionado tiene un error absoluto de 0,001 9 mientras que el segundo modelo un error de 0,005 8 debido al incremento del claro.

Conclusiones

- i. El valor obtenido para el esfuerzo máximo de flexión fue de $(556,32 \pm 72,78)$ kg/cm² el cual es menor al reportado por los productores, pero se puede deber a la poca cantidad de probetas ensayadas y factores no controlados como humedad y dirección de las fibras.
- ii. Los métodos alternativos para el cálculo del módulo de elasticidad demostraron poca precisión tomando como base los obtenidos por medio de los ensayos a flexión de la norma ASTM D-143 y los de escala real. Sin embargo, para relaciones $L/h < 12$ comienzan a haber dispersiones debido al aumento del efecto del esfuerzo cortante.
- iii. Los dos modelos virtuales se adaptan a las deflexiones teóricas, por lo tanto ambos son válidos.
- iv. El modelo tipo frame demostró ser más eficiente que el shell teniendo en consideración la simplicidad a la hora de realizar un análisis.
- v. Si bien es cierto, el modelo shell se adapta al modelo teórico, se requiere de mayor cuidado al usarlo ya que factores como cantidad de elementos finitos y sus dimensiones pueden distorsionar el resultado final.
- vi. Una buena convergencia de los modelos shell se da cuando la relación de aspectos de los elementos finitos se mantiene cercana a 1 conforme aumenta el número de elementos.
- vii. Modelos shell subdivididos en ambas direcciones con una relación de aspectos superiores a la unidad logran converger a la solución teórica pero requieren mayor discretización de los elementos finitos.
- viii. No es posible determinar una cantidad fija de elementos finitos para garantizar una

convergencia en cualquier elemento. El número de elementos finitos dependerá del tamaño del elemento en análisis.

Recomendaciones

- Realizar los ensayos de caracterización mecánica a una mayor cantidad de probetas para obtener mayor variabilidad de las muestras y garantizar una mejor validez estadística.
- Controlar factores que impliquen una disminución en la resistencia de la madera como el contenido de humedad, inclinación de las fibras y nudos dentro de las probetas.
- A los prototipos experimentales reales, aplicar 2 cargas puntuales localizadas a $L/3$ y $2/3L$ en la viga para impedir la participación excesiva de la deformación por cortante.
- Calcular el módulo de cortante de acuerdo a los lineamientos planteados en la norma ASTM D198-15 para considerarlo en las vigas cortas y así evitar la distorsión del módulo de elasticidad de la madera.

Apéndices

Apéndice 1. Cálculo del esfuerzo máximo en compresión.

Apéndice 2. Cálculo del esfuerzo máximo en tensión.

Apéndice 3. Cálculo del esfuerzo a flexión en el límite proporcional.

Apéndice 4. Cálculo del esfuerzo máximo en flexión.

Apéndice 5. Cálculo del módulo de elasticidad (E) estático.

Apéndice 6. Cálculo del módulo de elasticidad (E) dinámico.

Apéndice 7. Cálculo de la densidad seca.

Apéndice 8. Cálculo del E a partir de deformación unitaria en vigas a escala real.

Apéndice 9. Cálculo del E a partir de la carga y la deflexión en vigas a escala real.

Apéndice 10. Cálculo del desplazamiento teórico de las vigas con las cargas seleccionadas.

Apéndice 11. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/4$ en vigas grandes.

Apéndice 12. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/8$ en vigas grandes.

Apéndice 13. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/12$ en vigas grandes.

Apéndice 14. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/12$ en vigas pequeñas.

Apéndice 15. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/16$ en vigas pequeñas.

Apéndice 16. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/20$ en vigas pequeñas.

Apéndice 17. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/22$ en vigas pequeñas.

Apéndice 18. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/28$ en vigas pequeñas.

Apéndice 19. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/4$ en vigas grandes.

Apéndice 20. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/8$ en vigas grandes.

Apéndice 21. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/12$ en vigas grandes.

Apéndice 22. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/12$ en vigas pequeñas.

Apéndice 23. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/16$ en vigas pequeñas.

Apéndice 24. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/20$ en vigas pequeñas.

Apéndice 25. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/22$ en vigas pequeñas.

Apéndice 26. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/28$ en vigas pequeñas.

Apéndice 27. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D para vigas grandes.

Apéndice 28. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 2$ de modelos shell A-D para vigas grandes.

Apéndice 29. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D para vigas grandes.

Apéndice 30. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D para vigas grandes.

Apéndice 31. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes.

Apéndice 32. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 4$ de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes.

Apéndice 33. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes.

Apéndice 34. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes.

Apéndice 35. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas grandes.

Apéndice 36. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas grandes.

Apéndice 37. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 6$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas grandes.

Apéndice 38. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas grandes.

Apéndice 39. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas pequeñas.

Apéndice 40. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas pequeñas.

Apéndice 41. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 6$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas pequeñas.

Apéndice 42. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/12$ para vigas pequeñas.

Apéndice 43. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/16$ para vigas pequeñas.

Apéndice 44. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/16$ para vigas pequeñas.

Apéndice 45. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 8$ de modelos shell A-D $h = L/16$ para vigas pequeñas.

Apéndice 46. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/16$ para vigas pequeñas.

Apéndice 47. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/20$ para vigas pequeñas.

Apéndice 48. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/20$ para vigas pequeñas.

Apéndice 49. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/20$ para vigas pequeñas.

Apéndice 50. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas.

Apéndice 51. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas.

Apéndice 52. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas.

Apéndice 53. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 11$ de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas.

Apéndice 54. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/28$ para vigas pequeñas.

Apéndice 55. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 5$ de modelos shell A-D $h = L/28$ para vigas pequeñas.

Apéndice 56. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 10$ de modelos shell A-D $h = L/28$ para vigas pequeñas.

Apéndice 57. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 14$ de modelos shell A-D $h = L/28$ para vigas pequeñas.

Apéndice 58. Variación de la luz de viga con 480 elementos finitos para el modelo en viga pequeña.

Apéndice 59. Variación de elementos finitos con una luz constante de 93.60 cm para modelo $h = L/12$ en viga pequeña.

Apéndice 1. Cálculo del esfuerzo máximo en compresión

Muestra	Ancho (cm)	Espesor (cm)	Área (cm ²)	Carga Ruptura (kg)	Esfuerzo máximo (kg/cm ²)	CH (%)
C1	2,43	2,43	5,92	1 121,62	189,56	15,19
C2	2,43	2,41	5,86	1 405,70	240,03	15,80
C3	2,44	2,43	5,92	1 244,28	210,12	15,69
C4	2,41	2,43	5,87	1 506,59	256,73	16,02
C5	2,42	2,44	5,89	1 251,01	212,56	15,96
C6	2,42	2,43	5,89	1 047,30	177,87	15,81
C7	2,41	2,41	5,82	1 311,54	225,53	16,09
C8	2,41	2,41	5,82	1 425,88	245,09	15,90
C9	2,43	2,45	5,96	1 587,30	266,29	15,80
C10	2,43	2,43	5,90	1 520,04	257,42	15,12

Apéndice 2. Cálculo del esfuerzo máximo en tensión

Muestra	Ancho (cm)	Espesor (cm)	Área (cm ²)	Carga Ruptura (kg)	Esfuerzo Máximo (kg/cm ²)	CH (%)
T1	0,99	0,62	0,61	398,65	652,38	15,86
T2	0,98	0,56	0,55	506,76	929,09	15,77
T3	1,02	0,61	0,62	351,35	566,55	16,07
T4	0,96	0,65	0,62	709,46	1 135,83	15,65
T5	0,92	0,58	0,53	621,62	1 167,30	15,64
T6	1,02	0,57	0,58	385,14	658,82	15,95
T7	1,00	0,63	0,62	527,03	843,93	14,91
T8	1,06	0,65	0,69	695,95	1 009,25	15,89
T9	1,05	0,58	0,61	472,97	777,84	16,01
T10	1,06	0,52	0,55	317,57	576,16	16,18

Apéndice 3. Cálculo del esfuerzo a flexión en el límite proporcional

Muestra	Alto (cm)	Ancho (cm)	S (cm³)	P en límite proporcional (kg)	L (cm)	M (kg.cm)	Fb (kg/cm²)	CH (%)
F1	2,47	2,44	2,48	96,50	36,00	868,50	350,76	14,20
F2	2,44	2,42	2,41	95,40	36,00	858,60	356,97	14,30
F3	2,45	2,43	2,43	92,90	36,00	836,10	343,79	14,90
F4	2,48	2,46	2,52	83,30	36,00	749,70	297,43	13,80
F5	2,46	2,44	2,46	103,80	36,00	934,20	379,76	14,20
F6	2,44	2,43	2,42	62,90	36,00	566,10	234,39	14,40
F7	2,46	2,44	2,46	55,10	36,00	495,90	201,67	13,80
F8	2,44	2,42	2,40	135,00	36,00	1 215,00	507,01	14,00
F9	2,45	2,44	2,44	82,50	36,00	742,50	304,30	14,50
F10	2,45	2,43	2,42	67,80	36,00	610,20	252,45	15,00
F11	2,45	2,41	2,41	93,20	36,00	838,80	347,77	13,60
F12	2,44	2,44	2,42	93,80	36,00	844,20	348,68	14,60
F13	2,46	2,42	2,45	83,40	36,00	750,60	306,76	14,70
F14	2,43	2,42	2,38	78,50	36,00	706,50	297,01	14,60
F15	2,44	2,43	2,40	87,90	36,00	791,10	329,71	14,80
F16	2,45	2,44	2,44	63,90	36,00	575,10	235,60	13,60
F17	2,46	2,43	2,44	71,70	36,00	645,30	264,47	13,50
F18	2,45	2,43	2,43	78,60	36,00	707,40	290,75	14,60
F19	2,44	2,43	2,41	93,80	36,00	844,20	350,98	12,80
F20	2,44	2,43	2,41	90,10	36,00	810,90	336,58	13,90
F21	2,44	2,42	2,40	114,00	36,00	1 026,00	428,32	14,30
F22	2,46	2,44	2,45	95,60	36,00	860,40	350,90	14,00
F23	2,45	2,43	2,42	81,20	36,00	730,80	301,47	13,80
F24	2,45	2,43	2,43	97,90	36,00	881,10	362,74	13,70
F25	2,45	2,43	2,43	79,50	36,00	715,50	294,68	14,90

Apéndice 4. Cálculo del esfuerzo máximo en flexión

Muestra	Alto (cm)	Ancho (cm)	S (cm ³)	L (cm)	P max (kg)	M max (kg.cm)	Fb max Fb (kg/cm ²)	CH (%)
F1	2,47	2,44	2,48	36,00	151,00	1 359,00	548,86	14,20
F2	2,44	2,42	2,41	36,00	176,50	1 588,50	660,43	14,30
F3	2,45	2,43	2,43	36,00	152,50	1 372,50	564,34	14,90
F4	2,48	2,46	2,52	36,00	133,90	1 205,10	478,10	13,80
F5	2,46	2,44	2,46	36,00	154,50	1 390,50	565,25	14,20
F6	2,44	2,43	2,42	36,00	114,60	1 031,40	427,05	14,40
F7	2,46	2,44	2,46	36,00	114,10	1 026,90	417,61	13,80
F8	2,44	2,42	2,40	36,00	175,00	1 575,00	657,24	14,00
F9	2,45	2,44	2,44	36,00	121,80	1 096,20	449,26	14,50
F10	2,45	2,43	2,42	36,00	132,50	1 192,50	493,36	15,00
F11	2,45	2,41	2,41	36,00	188,50	1 696,50	703,37	13,60
F12	2,44	2,44	2,42	36,00	159,50	1 435,50	592,91	14,60
F13	2,46	2,42	2,45	36,00	151,50	1 363,50	557,25	14,70
F14	2,43	2,42	2,38	36,00	161,50	1 453,50	611,05	14,60
F15	2,44	2,43	2,40	36,00	157,00	1 413,00	588,91	14,80
F16	2,45	2,44	2,44	36,00	132,70	1 194,30	489,27	13,60
F17	2,46	2,43	2,44	36,00	160,00	1 440,00	590,18	13,50
F18	2,45	2,43	2,43	36,00	142,00	1 278,00	525,28	14,60
F19	2,44	2,43	2,41	36,00	153,50	1 381,50	574,36	12,80
F20	2,44	2,43	2,41	36,00	146,00	1 314,00	545,40	13,90
F21	2,44	2,42	2,40	36,00	178,00	1 602,00	668,78	14,30
F22	2,46	2,44	2,45	36,00	143,00	1 287,00	524,88	14,00
F23	2,45	2,43	2,42	36,00	151,50	1 363,50	562,48	13,80
F24	2,45	2,43	2,43	36,00	155,00	1 395,00	574,31	13,70
F25	2,45	2,43	2,43	36,00	145,15	1 306,35	538,03	14,90

Apéndice 5. Cálculo del módulo de elasticidad (E) estático

Muestra	Alto (cm)	Ancho (cm)	Área (cm ²)	I (cm ⁴)	L (cm)	P en límite proporcional (kg)	Δ en el límite proporcional (cm)	E (kg/cm ²)
F1	2,47	2,44	6,02	3,05	36,00	96,50	0,55	55 838,91
F2	2,44	2,42	5,91	2,94	36,00	95,40	0,49	64 464,75
F3	2,45	2,43	5,96	2,98	36,00	92,90	0,50	60 643,57
F4	2,48	2,46	6,09	3,13	36,00	83,30	0,52	49 777,42
F5	2,46	2,44	6,00	3,03	36,00	103,80	0,48	69 440,57
F6	2,44	2,43	5,94	2,95	36,00	62,90	0,46	45 089,29
F7	2,46	2,44	6,00	3,02	36,00	55,10	0,44	40 244,58
F8	2,44	2,42	5,90	2,92	36,00	135,00	1,03	43 647,44
F9	2,45	2,44	5,97	2,99	36,00	82,50	0,51	52 583,06
F10	2,45	2,43	5,93	2,95	36,00	67,80	0,48	46 463,14
F11	2,45	2,41	5,90	2,96	36,00	93,20	0,36	85 132,27
F12	2,44	2,44	5,95	2,95	36,00	93,80	0,46	67 074,20
F13	2,46	2,42	5,97	3,01	36,00	83,40	0,39	69 036,93
F14	2,43	2,42	5,87	2,89	36,00	78,50	0,46	57 370,33
F15	2,44	2,43	5,91	2,92	36,00	87,90	0,41	71 335,70
F16	2,45	2,44	5,97	2,99	36,00	63,90	0,42	49 415,18
F17	2,46	2,43	5,96	3,00	36,00	71,70	0,38	61 235,19
F18	2,45	2,43	5,95	2,98	36,00	78,60	0,54	47 431,43
F19	2,44	2,43	5,93	2,93	36,00	93,80	0,55	56 607,01
F20	2,44	2,43	5,93	2,94	36,00	90,10	0,48	62 099,68
F21	2,44	2,42	5,90	2,92	36,00	114,00	0,42	90 463,54
F22	2,46	2,44	5,99	3,01	36,00	95,60	0,47	65 635,16
F23	2,45	2,43	5,95	2,96	36,00	81,20	0,40	66 583,23
F24	2,45	2,43	5,95	2,98	36,00	97,90	0,48	66 625,74
F25	2,45	2,43	5,95	2,97	36,00	79,50	0,50	51 981,73

Apéndice 6. Cálculo del módulo de elasticidad (E) dinámico

Muestra	Alto (cm)	Ancho (cm)	L total (cm)	Volumen (m³)	Peso (kg)	ρ húmeda (kg/m³)	V (m/s)	Ed (kg/cm²)
F1	2,47	2,44	41,00	0,000 25	0,111 8	452,61	3 882,00	69 553,46
F2	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,120 0	494,85	3 823,00	73 750,34
F3	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,115 6	473,16	4 027,00	78 243,76
F4	2,48	2,46	41,00	0,000 25	0,113 6	454,84	3 882,00	69 895,28
F5	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,112 1	455,80	4 390,00	89 575,06
F6	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,128 4	527,45	3 657,00	71 930,49
F7	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,113 9	463,04	3 711,00	65 025,15
F8	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,136 5	564,22	3 952,00	89 858,70
F9	2,45	2,44	41,00	0,000 24	0,109 5	447,21	4 071,00	75 577,74
F10	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,114 7	471,52	3 795,00	69 246,97
F11	2,45	2,41	41,00	0,000 24	0,137 6	568,48	4 763,00	131 510,27
F12	2,44	2,44	41,00	0,000 24	0,119 1	487,96	4 508,00	101 118,19
F13	2,46	2,42	41,00	0,000 24	0,118 7	485,23	4 428,00	97 016,50
F14	2,43	2,42	41,00	0,000 24	0,118 9	493,92	3 823,00	73 612,05
F15	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,123 9	511,30	4 390,00	100 482,39
F16	2,45	2,44	41,00	0,000 24	0,114 3	466,81	3 738,00	66 512,02
F17	2,46	2,43	41,00	0,000 24	0,130 2	532,49	4 137,00	92 932,31
F18	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,120 1	492,11	3 554,00	63 383,78
F19	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,110 0	452,76	3 882,00	69 576,13
F20	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,121 3	499,10	3 943,00	79 126,46
F21	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,128 2	529,71	4 719,00	120 287,25
F22	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,112 5	458,34	4 548,00	96 673,41
F23	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,119 0	487,99	4 548,00	102 928,81
F24	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,110 9	454,87	4 548,00	95 942,58
F25	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,107 7	441,63	4 006,00	72 270,11

Apéndice 7. Cálculo de la densidad seca

Muestra	Alto (cm)	Ancho (cm)	L total (cm)	Volumen (m³)	Peso seco (kg)	ρ seca (kg/m³)
F1	2,47	2,44	41,00	0,000 25	0,095 9	388,34
F2	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,102 8	424,09
F3	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,098 4	402,66
F4	2,48	2,46	41,00	0,000 25	0,097 9	392,07
F5	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,096 2	391,08
F6	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,109 9	451,50
F7	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,098 1	399,14
F8	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,117 4	485,23
F9	2,45	2,44	41,00	0,000 24	0,093 6	382,36
F10	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,097 5	400,79
F11	2,45	2,41	41,00	0,000 24	0,118 9	491,17
F12	2,44	2,44	41,00	0,000 24	0,101 7	416,71
F13	2,46	2,42	41,00	0,000 24	0,101 2	413,90
F14	2,43	2,42	41,00	0,000 24	0,101 5	421,81
F15	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,105 6	435,63
F16	2,45	2,44	41,00	0,000 24	0,098 8	403,32
F17	2,46	2,43	41,00	0,000 24	0,112 6	460,61
F18	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,102 6	420,26
F19	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,095 9	394,81
F20	2,44	2,43	41,00	0,000 24	0,104 4	429,72
F21	2,44	2,42	41,00	0,000 24	0,109 9	453,96
F22	2,46	2,44	41,00	0,000 25	0,096 8	394,17
F23	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,102 6	420,65
F24	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,095 7	392,55
F25	2,45	2,43	41,00	0,000 24	0,091 7	375,82

Apéndice 8. Cálculo del E a partir de deformación unitaria en vigas a escala real

Viga	Relación	Carga (kg)	Desplazamiento (cm)	Deformación Unitaria	Eε (kg/cm²)
1	L/12	500,25	1,33	0,000 963 63	108 972,85
	L/8	505,53	0,45	0,000 708 77	99 815,01
	L/4	511,01	0,16	0,000 321 85	111 089,61
2	L/12	501,37	0,91	0,000 674 21	154 768,39
	L/8	503,78	0,33	0,000 455 61	153 417,64
	L/4	504,62	0,15	0,000 22778	153 690,31
3	L/12	500,94	1,03	0,001 168 99	89 112,10
	L/8	500,30	0,46	0,000 770 69	89 998,13
	L/4	499,50	0,22	0,000 392 84	88 134,90
4	L/12	498,71	1,10	0,000 747 84	144 103,36
	L/8	506,02	0,42	0,000 49 781	146 439,00
	L/4	497,83	0,22	0,000 23718	151 183,74
5	L/28	80,37	2,08	0,000 573 35	182 645,35
	L/22	80,96	0,86	0,000 415 17	199 638,41
	L/20	80,35	0,76	0,000 392 86	190 363,18
	L/16	81,06	0,42	0,000 319 02	189 188,28
	L/12	80,50	0,16	0,000 250 29	179 613,60
6	L/28	80,30	1,82	0,000 909 16	116 995,49
	L/22	80,55	0,87	0,000 813 96	103 001,68
	L/20	80,40	0,66	0,000 756 13	100 604,45
	L/16	81,95	0,35	0,000 441 03	140 655,83
	L/12	79,52	0,19	0,000 239 62	188 391,76

Apéndice 9. Cálculo del E a partir de la carga y la deflexión en vigas a escala real

Viga	Relación	P (kg)	Δ (cm)	Ancho (cm)	Altura (cm)	Luz (cm)	I (cm ⁴)	Poisson (v)	M máx (kg.cm)	E (kg/cm ²)
1	L/12	500,25	1,33	4,20	20,40	244,60	2 971,38	0,30	30 590,49	39 430,49
	L/8	505,53	0,45	4,20	20,40	163,07	2 971,38	0,30	20 609,16	35 854,73
	L/4	511,01	0,16	4,20	20,40	81,53	2 971,38	0,30	10 415,71	14 906,81
2	L/12	501,37	0,91	4,25	20,35	244,20	2 984,70	0,30	30 608,57	57 153,53
	L/8	503,78	0,33	4,25	20,35	162,80	2 984,70	0,30	20 503,67	48 586,86
	L/4	504,62	0,15	4,25	20,35	81,40	2 984,70	0,30	10 268,96	15 185,17
3	L/12	500,94	1,03	4,25	20,35	244,00	2 984,70	0,30	30 557,15	50 238,23
	L/8	500,30	0,46	4,25	20,35	162,67	2 984,70	0,30	20 346,14	34 506,26
	L/4	499,50	0,22	4,25	20,35	81,33	2 984,70	0,30	10 156,11	10 365,26
4	L/12	498,71	1,10	4,10	20,35	244,60	2 879,36	0,30	30 495,94	49 086,18
	L/8	506,02	0,42	4,10	20,35	163,07	2 879,36	0,30	20 629,02	39 180,32
	L/4	497,83	0,22	4,10	20,35	81,53	2 879,36	0,30	10 147,09	10 774,18
5	L/28	80,37	2,08	4,15	7,80	219,33	164,12	0,30	4 406,68	51 954,46
	L/22	80,96	0,86	4,15	7,80	172,33	164,12	0,30	3 487,86	61 620,09
	L/20	80,35	0,76	4,15	7,80	156,67	164,12	0,30	3 147,06	52 346,24
	L/16	81,06	0,42	4,15	7,80	125,33	164,12	0,30	2 539,78	49 282,98
	L/12	80,50	0,16	4,15	7,80	94,00	164,12	0,30	1 891,76	53 060,10
6	L/28	80,30	1,82	4,10	7,75	217,47	159,04	0,30	4 365,60	59 643,21
	L/22	80,55	0,87	4,10	7,75	170,87	159,04	0,30	3 440,97	60 616,48
	L/20	80,40	0,66	4,10	7,75	155,33	159,04	0,30	3 122,13	60 469,92
	L/16	81,95	0,35	4,10	7,75	124,27	159,04	0,30	2 546,03	59 474,92
	L/12	79,52	0,19	4,10	7,75	93,20	159,04	0,30	1 852,79	45 847,04

Apéndice 10. Cálculo del desplazamiento teórico de las vigas con las cargas seleccionadas

Relación	L total (cm)	L (cm)	b (cm)	h (cm)	E (kg/cm ²)	I (cm ⁴)	S (cm ³)	P (kg)	Δ teórico (cm)
L/4	320,18	81,45	4,18	20,36	12 807,86	2939,87	288,79	500,00	0,18
L/8	320,18	162,90	4,18	20,36	39 532,04	2939,87	288,79	500,00	0,41
L/12	320,18	244,36	4,18	20,36	49 135,93	2939,87	288,79	500,00	1,07
L/12	233,20	93,60	4,13	7,80	49 135,93	163,32	41,88	80,00	0,17
L/16	233,20	124,80	4,13	7,80	54 378,95	163,32	41,88	80,00	0,37
L/20	233,20	156,00	4,13	7,80	56 408,08	163,32	41,88	80,00	0,69
L/22	233,20	171,60	4,13	7,80	61 118,28	163,32	41,88	80,00	0,85
L/28	233,20	218,40	4,13	7,80	55 798,84	163,32	41,88	80,00	1,91

Apéndice 11. Convergencia de deflexiones para modelos h = L/4 en vigas grandes

Viga 1	Viga 2	Viga 3	Viga 4	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	4	0,134 8	0,043 8	4	0,134 8	0,043 8	4	0,134 8	0,043 8
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	16	0,165 5	0,013 1	8	0,133 4	0,045 2	8	0,164 1	0,014 5
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	64	0,171 1	0,007 5	16	0,134 8	0,043 8	16	0,171 8	0,006 8
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	144	0,176 7	0,001 9	32	0,135 5	0,043 1	32	0,178 1	0,000 5
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	256	0,177 4	0,001 2	64	0,136 2	0,042 4	64	0,191 4	-0,012 7
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	1 024	0,180 9	-0,002 3	128	0,136 2	0,042 4	128	0,212 3	-0,033 7
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	1 296	0,182 3	-0,003 7	256	0,136 2	0,042 4	256	0,243 8	-0,065 1
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8	4 096	0,183 7	-0,005 1	512	0,136 2	0,042 4	512	0,288 5	-0,109 8
0,155 7	0,149 5	0,216 3	0,216 4	0,178 6	0,178 8				1 024	0,343 6	-0,165 0	1 024	0,349 9	-0,171 3

Apéndice 12. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/8$ en vigas grandes														
Viga 1	Viga 2	Viga 3	Viga 4	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	4	0,303 9	0,102 4	4	0,406 4	-0,000 1	4	0,406 4	-0,000 1
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	16	0,387 4	0,018 9	8	0,302 6	0,103 8	8	0,339 2	0,067 1
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	64	0,398 3	0,008 1	16	0,303 7	0,102 7	16	0,381 1	0,025 3
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	144	0,401 9	0,004 4	32	0,303 9	0,102 4	32	0,382 4	0,023 9
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	256	0,403 0	0,003 3	64	0,304 1	0,102 2	64	0,378 1	0,028 2
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	1 024	0,405 1	0,001 3	128	0,304 1	0,102 2	128	0,380 2	0,026 2
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	1 296	0,405 3	0,001 0	256	0,304 1	0,102 2	256	0,387 0	0,019 4
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4	4 096	0,405 7	0,000 6	512	0,304 1	0,102 2	512	0,397 6	0,008 7
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4				1 024	0,434 9	-0,028 6	1 024	0,412 8	-0,006 4
0,449 6	0,327 5	0,456 9	0,424 9	0,406 3	0,406 4							2 048	0,433 8	-0,027 5

Apéndice 13. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/12$ en vigas grandes														
Viga 1	Viga 2	Viga 3	Viga 4	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	4	0,805 8	0,269 2	4	0,805 8	0,269 2	4	0,805 8	0,269 2
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	16	1,038 1	0,036 9	8	0,805 1	0,269 9	8	1,001 0	0,074 0
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	64	1,062 7	0,012 3	16	0,806 5	0,268 4	16	1,041 0	0,033 9
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	144	1,068 9	0,006 1	32	0,806 9	0,268 1	32	1,030 1	0,044 9
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	256	1,071 1	0,003 9	64	0,807 1	0,267 9	64	1,004 8	0,070 2
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	1 024	1,073 8	0,001 2	128	0,807 1	0,267 9	128	0,991 9	0,083 1
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	1 296	1,074 2	0,000 8	256	0,807 1	0,267 9	256	0,992 0	0,082 9
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9	4 096	1,074 7	0,000 3	512	0,807 1	0,267 9	512	0,998 8	0,076 2
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9				1 024	0,665 1	0,409 9	1 024	1,010 1	0,064 9
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9							2 048	1,056 9	0,018 1
1,330 0	0,911 0	1,033 0	1,099 0	1,075 0	1,074 9							4 096	1,096 4	-0,021 4

Apéndice 14. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/12$ en vigas pequeñas

Viga 5	Viga 6	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	4	0,130 4	0,043 6	4	0,130 4	0,043 6	4	0,130 4	0,043 6
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	30	0,168 0	0,006 0	8	0,129 4	0,044 5	8	0,162 0	0,012 0
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	120	0,172 0	0,001 9	16	0,129 3	0,044 7	16	0,168 4	0,005 6
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	270	0,173 0	0,001 0	32	0,129 3	0,044 7	32	0,166 6	0,007 4
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	480	0,173 3	0,000 7	64	0,129 3	0,044 7	64	0,162 4	0,011 6
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	1 920	0,173 9	0,000 1	128	0,129 3	0,044 7	128	0,160 4	0,013 6
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	2 430	0,173 9	0,000 1	256	0,129 3	0,044 7	256	0,160 2	0,013 8
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1	7 680	0,174 1	-0,000 1				512	0,161 1	0,012 9
0,163 4	0,187 9	0,174 0	0,174 1							1 024	0,162 6	0,011 4

Apéndice 15. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/16$ en vigas pequeñas

Viga 5	Viga 6	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	4	0,276 9	0,092 3	4	0,276 9	0,092 3	4	0,276 9	0,0923
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	30	0,358 0	0,011 2	8	0,275 1	0,094 2	8	0,344 6	0,0246
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	120	0,365 7	0,003 5	16	0,274 7	0,094 5	16	0,359 8	0,0094
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	270	0,367 5	0,001 7	32	0,274 7	0,094 5	32	0,358 0	0,0112
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	480	0,368 2	0,001 0	64	0,274 7	0,094 5	64	0,348 6	0,0206
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	1 920	0,368 8	0,000 4	128	0,274 7	0,094 5	128	0,340 9	0,0283
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	2 430	0,368 8	0,000 4	256	0,274 7	0,094 5	256	0,338 2	0,0310
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2	7 680	0,369 2	0,000 1	512	0,274 7	0,094 5	512	0,338 2	0,0310
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2							1 024	0,339 4	0,0298
0,416 0	0,350 6	0,369 2	0,369 2							2 048	0,341 0	0,0282

Apéndice 16. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/20$ en vigas pequeñas

Viga 5	Viga 6	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	4	0,519 1	0,173 1	4	0,519 1	0,173 1	4	0,519 1	0,173 1
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	30	0,672 4	0,019 7	8	0,516 5	0,175 6	8	0,647 2	0,045 0
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	120	0,686 4	0,005 8	16	0,516 2	0,175 9	16	0,676 7	0,015 5
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	270	0,689 4	0,002 8	32	0,516 2	0,175 9	32	0,676 2	0,015 9
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	480	0,690 5	0,001 7	64	0,516 2	0,175 9	64	0,660 0	0,032 1
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	1 920	0,691 6	0,000 5	128	0,516 2	0,175 9	128	0,642 4	0,049 7
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	2 430	0,691 6	0,000 5	256	0,516 2	0,175 9	256	0,634 4	0,057 8
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1	7 680	0,691 9	0,000 2				512	0,631 2	0,061 0
0,755 1	0,657 8	0,692 2	0,692 1							1 024	0,632 9	0,059 2

Apéndice 17. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/22$ en vigas pequeñas

Viga 5	Viga 6	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	4	0,636 7	0,212 4	4	0,636 7	0,212 4	4	0,636 7	0,212 4
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	30	0,825 4	0,023 8	8	0,634 4	0,214 8	8	0,794 3	0,054 8
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	120	0,842 3	0,006 8	16	0,634 1	0,215 1	16	0,831 1	0,018 0
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	270	0,845 9	0,003 3	32	0,634 1	0,215 1	32	0,832 0	0,017 2
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	480	0,847 2	0,001 9	64	0,634 1	0,215 1	64	0,813 5	0,035 6
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	1 920	0,848 5	0,000 6	128	0,634 1	0,215 1	128	0,790 4	0,058 7
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	2 430	0,848 5	0,000 6	256	0,634 1	0,215 1	256	0,778 7	0,070 4
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1	7 680	0,848 8	0,000 3				512	0,775 6	0,073 5
0,859 0	0,874 0	0,849 1	0,849 1							1 024	0,773 8	0,075 3

Apéndice 18. Convergencia de deflexiones para modelos $h = L/28$ en vigas pequeñas

Viga 5	Viga 6	Teórico	Frame	Shell AD			Shell A-A			Shell I-D		
Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Δ (cm)	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto	Elementos	Δ (cm)	Error Absoluto
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	4	1,434 4	0,478 3	4	1,434 4	0,478 3	4	1,434 4	0,478 3
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	30	1,869 5	0,043 2	8	1,433 8	0,479 0	8	1,790 6	0,122 1
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	120	1,898 7	0,014 0	16	1,434 2	0,478 5	16	1,876 1	0,036 7
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	270	1,906 1	0,006 7	32	1,434 2	0,478 5	32	1,884 7	0,028 0
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	480	1,908 8	0,003 9	64	1,434 4	0,478 3	64	1,852 2	0,060 5
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	1 920	1,911 3	0,001 4	128	1,434 4	0,478 3	128	1,796 9	0,115 9
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	2 430	1,911 7	0,001 1	256	1,434 4	0,478 3	256	1,759 8	0,152 9
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8	7 680	1,912 1	0,000 6				512	1,747 3	0,165 4
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8							1 024	1,745 3	0,167 5
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8							2 048	1,744 5	0,168 3
2,080 0	1,821 0	1,912 7	1,912 8							4 096	0,143 5	1,769 2

Apéndice 19. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/4$ en vigas grandes

Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
2	0,134 8	0,178 6	24,534 4	2,00	0,134 8	0,178 6	24,534 4	2,00	0,134 8	0,178 6	24,534 4
1	0,165 5	0,178 6	7,329 8	4,00	0,133 4	0,178 6	25,316 4	1,00	0,164 1	0,178 6	8,111 8
1	0,171 1	0,178 6	4,201 7	8,00	0,134 8	0,178 6	24,534 4	2,00	0,171 8	0,178 6	3,810 7
1	0,176 7	0,178 6	1,073 6	16,00	0,135 5	0,178 6	24,143 4	4,00	0,178 1	0,178 6	0,291 6
1	0,177 4	0,178 6	0,682 6	32,01	0,136 2	0,178 6	23,752 4	8,00	0,191 4	0,178 6	7,137 7
1	0,180 9	0,178 6	1,272 5	64,02	0,136 2	0,178 6	23,752 4	16,00	0,212 3	0,178 6	18,868 1
1	0,182 3	0,178 6	2,054 5	128,03	0,136 2	0,178 6	23,752 4	31,99	0,243 8	0,178 6	36,463 7
1	0,183 7	0,178 6	2,836 5	256,06	0,136 2	0,178 6	23,752 4	63,98	0,288 5	0,178 6	61,488 5
				512,13	0,343 6	0,178 6	92,378 6	127,97	0,349 9	0,178 6	95,897 7

Apéndice 20. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/8$ en vigas grandes											
Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
4	0,303 9	0,406 3	25,207 0	4,00	0,406 4	0,406 3	0,021 1	4,00	0,406 4	0,406 3	0,021 1
1	0,387 4	0,406 3	4,657 0	8,00	0,302 6	0,406 3	25,541 1	2,00	0,339 2	0,406 3	16,519 2
1	0,398 3	0,406 3	1,983 8	16,00	0,303 7	0,406 3	25,262 7	1,00	0,381 1	0,406 3	6,216 3
1	0,401 9	0,406 3	1,092 8	32,00	0,303 9	0,406 3	25,207 0	2,00	0,382 4	0,406 3	5,882 2
1	0,403 0	0,406 3	0,814 3	64,01	0,304 1	0,406 3	25,151 3	4,00	0,378 1	0,406 3	6,940 3
1	0,405 1	0,406 3	0,313 1	128,02	0,304 1	0,406 3	25,151 3	8,00	0,380 2	0,406 3	6,439 1
1	0,405 3	0,406 3	0,257 4	256,03	0,304 1	0,406 3	25,151 3	16,00	0,387 0	0,406 3	4,768 4
1	0,405 7	0,406 3	0,146 0	512,06	0,304 1	0,406 3	25,151 3	32,00	0,397 6	0,406 3	2,150 9
				1 024,13	0,434 9	0,406 3	7,038 1	63,99	0,412 8	0,406 3	1,580 4
								127,98	0,433 8	0,406 3	6,759 7

Apéndice 21. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/12$ en vigas grandes											
Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
6	0,805 8	1,075 0	25,039 9	6,00	0,805 8	1,075 0	25,039 9	6,00	0,805 8	1,075 0	25,039 9
1	1,038 1	1,075 0	3,429 1	12,00	0,805 1	1,075 0	25,107 6	3,00	1,001 0	1,075 0	6,884 2
1	1,062 7	1,075 0	1,142 7	24,00	0,806 5	1,075 0	24,972 1	1,50	1,041 0	1,075 0	3,158 2
1	1,068 9	1,075 0	0,566 9	48,01	0,806 9	1,075 0	24,938 3	1,33	1,030 1	1,075 0	4,174 3
1	1,071 1	1,075 0	0,363 7	96,02	0,807 1	1,075 0	24,921 3	2,67	1,004 8	1,075 0	6,528 5
1	1,073 8	1,075 0	0,109 6	192,03	0,807 1	1,075 0	24,921 3	5,33	0,991 9	1,075 0	7,731 0
1	1,074 2	1,075 0	0,075 8	384,06	0,807 1	1,075 0	24,921 3	10,66	0,992 0	1,075 0	7,714 0
1	1,074 7	1,075 0	0,024 9	768,13	0,807 1	1,075 0	24,921 3	21,33	0,998 8	1,075 0	7,087 4
				1 536,25	0,665 1	1,075 0	38,131 6	42,66	1,010 1	1,075 0	6,037 3
								85,32	1,056 9	1,075 0	1,684 7
								170,64	1,096 4	1,075 0	1,990 5

Apéndice 22. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/12$ en vigas pequeñas

Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
6	0,130 4	0,174 0	25,080 3	6,00	0,130 4	0,174 0	25,080 3	6,00	0,130 4	0,174 0	25,080 3
1	0,168 0	0,174 0	3,420 6	12,00	0,129 4	0,174 0	25,603 5	3,00	0,162 0	0,174 0	6,873 6
1	0,172 0	0,174 0	1,118 6	24,00	0,129 3	0,174 0	25,708 1	1,50	0,168 4	0,174 0	3,211 3
1	0,173 0	0,174 0	0,595 4	48,00	0,129 3	0,174 0	25,708 1	1,33	0,166 6	0,174 0	4,257 7
1	0,173 3	0,174 0	0,386 1	96,00	0,129 3	0,174 0	25,708 1	2,67	0,162 4	0,174 0	6,664 3
1	0,173 9	0,174 0	0,072 2	192,00	0,129 3	0,174 0	25,708 1	5,33	0,160 4	0,174 0	7,815 3
1	0,173 9	0,174 0	0,072 2	384,00	0,129 3	0,174 0	25,708 1	10,67	0,160 2	0,174 0	7,919 9
1	0,174 1	0,174 0	0,032 4					21,33	0,161 1	0,174 0	7,396 8
								42,67	0,162 6	0,174 0	6,559 7

Apéndice 23. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/16$ en vigas pequeñas

Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
8	0,276 9	0,369 2	25,010 7	8,00	0,276 9	0,369 2	25,010 7	8,00	0,276 9	0,369 2	25,010 7
1	0,358 0	0,369 2	3,044 2	16,00	0,275 1	0,369 2	25,500 9	4,00	0,344 6	0,369 2	6,653 3
1	0,365 7	0,369 2	0,950 0	32,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	2,00	0,359 8	0,369 2	2,554 1
1	0,367 5	0,369 2	0,459 9	64,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	1,00	0,358 0	0,369 2	3,044 2
1	0,368 2	0,369 2	0,281 7	128,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	2,00	0,348 6	0,369 2	5,583 9
1	0,368 8	0,369 2	0,103 4	256,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	4,00	0,340 9	0,369 2	7,678 1
1	0,368 8	0,369 2	0,103 4	512,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	8,00	0,338 2	0,369 2	8,391 0
1	0,369 2	0,369 2	0,014 3	1 024,00	0,274 7	0,369 2	25,590 0	16,00	0,338 2	0,369 2	8,391 0
								32,00	0,339 4	0,369 2	8,079 1
								64,00	0,341 0	0,369 2	7,633 5

Apéndice 24. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/20$ en vigas pequeñas

Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
10	0,519 1	0,692 2	25,007 5	10,00	0,519 1	0,692 2	25,007 5	10,00	0,519 1	0,692 2	25,007 5
1	0,672 4	0,692 2	2,851 2	20,00	0,516 5	0,692 2	25,374 1	5,00	0,647 2	0,692 2	6,494 3
1	0,686 4	0,692 2	0,834 9	40,00	0,516 2	0,692 2	25,420 0	2,50	0,676 7	0,692 2	2,232 6
1	0,689 4	0,692 2	0,399 6	80,00	0,516 2	0,692 2	25,420 0	1,25	0,676 2	0,692 2	2,301 3
1	0,690 5	0,692 2	0,239 2	160,00	0,516 2	0,692 2	25,420 0	1,60	0,660 0	0,692 2	4,638 4
1	0,691 6	0,692 2	0,078 8	320,00	0,516 2	0,692 2	25,420 0	3,20	0,642 4	0,692 2	7,181 7
1	0,691 6	0,692 2	0,078 8	640,00	0,516 2	0,692 2	25,420 0	6,40	0,634 4	0,692 2	8,350 2
1	0,691 9	0,692 2	0,033 0					12,80	0,631 2	0,692 2	8,808 4
								25,60	0,632 9	0,692 2	8,556 4

Apéndice 25. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/22$ en vigas pequeñas

Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
11	0,636 7	0,849 1	25,016 4	11,00	0,636 7	0,849 1	25,016 4	11,00	0,636 7	0,849 1	25,016 4
1	0,825 4	0,849 1	2,797 1	22,00	0,634 4	0,849 1	25,292 2	5,50	0,794 3	0,849 1	6,451 4
1	0,842 3	0,849 1	0,797 5	44,00	0,634 1	0,849 1	25,326 6	2,75	0,831 1	0,849 1	2,124 8
1	0,845 9	0,849 1	0,383 8	88,00	0,634 1	0,849 1	25,326 6	1,38	0,832 0	0,849 1	2,021 4
1	0,847 2	0,849 1	0,228 7	176,00	0,634 1	0,849 1	25,326 6	1,45	0,813 5	0,849 1	4,193 3
1	0,848 5	0,849 1	0,073 5	352,00	0,634 1	0,849 1	25,326 6	2,91	0,790 4	0,849 1	6,916 9
1	0,848 5	0,849 1	0,073 5	704,00	0,634 1	0,849 1	25,326 6	5,82	0,778 7	0,849 1	8,295 9
1	0,848 8	0,849 1	0,039 1					11,64	0,775 6	0,849 1	8,657 9
								23,27	0,773 8	0,849 1	8,864 7

Apéndice 26. Variación de la deflexión con respecto a la relación de aspecto del modelo $h = L/28$ en vigas pequeñas											
Shell A-D				Shell A-A				Shell I-D			
Relación de aspecto	Δ shell A-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell A-A (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)	Relación de aspecto	Δ shell I-D (cm)	Δ Teórico (cm)	Error relativo (%)
14	1,434 4	1,912 7	25,008 1	14,00	1,434 4	1,912 7	25,008 1	14,00	1,434 4	1,912 7	25,008 1
1	1,869 5	1,912 7	2,259 9	28,00	1,433 8	1,912 7	25,041 6	7,00	1,790 6	1,912 7	6,383 8
1	1,898 7	1,912 7	0,734 4	56,00	1,434 2	1,912 7	25,016 5	3,50	1,876 1	1,912 7	1,916 3
1	1,906 1	1,912 7	0,348 9	112,00	1,434 2	1,912 7	25,016 5	1,75	1,884 7	1,912 7	1,463 6
1	1,908 8	1,912 7	0,206 4	224,00	1,434 4	1,912 7	25,008 1	1,14	1,852 2	1,912 7	3,165 1
1	1,911 3	1,912 7	0,072 3	448,00	1,434 4	1,912 7	25,008 1	2,29	1,796 9	1,912 7	6,056 9
1	1,911 7	1,912 7	0,055 5	896,00	1,434 4	1,912 7	25,008 1	4,57	1,759 8	1,912 7	7,993 1
1	1,912 1	1,912 7	0,030 4					9,14	1,747 3	1,912 7	8,646 8
								18,29	1,745 3	1,912 7	8,755 8
								36,57	1,744 5	1,912 7	8,797 7
								73,14	0,143 5	1,912 7	92,498 3

Apéndice 27. Variación de la deflexión con respecto a una $RA = 1$ de modelos shell A-D $h = L/4$ en vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
2	0,019 3	0,134 8	0,178 6	24,522 9	1	1	4
1	0,023 7	0,165 5	0,178 6	7,315 7	1	6	16
1	0,024 5	0,171 1	0,178 6	4,187 1	2	2	64
1	0,025 4	0,177 4	0,178 6	0,667 5	2	2	256
1	0,025 9	0,180 9	0,178 6	1,287 9	2	2	1 024
1	0,026 3	0,183 7	0,178 6	2,852 2	2	2	4 096

Apéndice 28. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 2 de modelos shell A-D h = L/4 en vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
2	0,019 3	0,134 8	0,178 6	24,522 9	1	1	4
2	0,023 3	0,162 7	0,178 6	8,880 0	2	2	16
2	0,024 7	0,172 5	0,178 6	3,405 0	2	2	64
2	0,025 3	0,176 7	0,178 6	1,058 5	2	2	256
2	0,025 7	0,179 5	0,178 6	0,505 8	2	2	1024
2	0,026 0	0,181 6	0,178 6	1,679 0	2	2	4 096

Apéndice 29. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/4 en vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
2	0,019 3	0,134 8	0,178 6	24,522 9	1	1	4
5	0,023 5	0,164 1	0,178 6	8,097 9	5	2	40
5	0,024 9	0,173 9	0,178 6	2,622 8	2	2	160
5	0,025 4	0,177 4	0,178 6	0,667 5	2	2	640
5	0,025 7	0,179 5	0,178 6	0,505 8	2	2	2 560

Apéndice 30. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/4 en vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
2	0,019 3	0,134 8	0,178 6	24,522 9	1	1	4
10	0,019 4	0,135 5	0,178 6	24,131 8	5	1	20
10	0,023 7	0,165 5	0,178 6	7,315 7	2	2	80
10	0,024 9	0,173 9	0,178 6	2,622 8	2	2	320
10	0,025 4	0,177 4	0,178 6	0,667 5	2	2	1 280
10	0,025 5	0,178 1	0,178 6	0,276 4	2	2	5 120

Apéndice 31. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
4	0,134 3	0,303 9	0,406 3	25,201 0	1	1	4
1	0,174 2	0,394 2	0,406 3	2,978 5	1	4	16
1	0,176 0	0,398 3	0,406 3	1,976 0	2	2	64
1	0,178 1	0,403 0	0,406 3	0,806 4	2	2	256
1	0,179 1	0,405 3	0,406 3	0,249 4	2	2	1 024
1	0,179 3	0,405 7	0,406 3	0,138 0	2	2	4 096

Apéndice 32. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 4 de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
4	0,134 3	0,303 9	0,406 3	25,201 0	1	1	4
4	0,166 2	0,376 1	0,406 3	7,434 1	2	2	16
4	0,175 4	0,396 9	0,406 3	2,310 2	2	2	64
4	0,177 9	0,402 6	0,406 3	0,917 8	2	2	256
4	0,178 8	0,404 6	0,406 3	0,416 5	2	2	1 024
4	0,179 2	0,405 5	0,406 3	0,193 7	2	2	4 096

Apéndice 33. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D $h = L/8$ para vigas grandes

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
4	0,134 3	0,303 9	0,406 3	25,201 0	1	1	4
5	0,175 5	0,397 1	0,406 3	2,254 5	5	4	80
5	0,178 0	0,402 8	0,406 3	0,862 1	2	2	320
5	0,178 8	0,404 6	0,406 3	0,416 5	2	2	1 280
5	0,179 2	0,405 5	0,406 3	0,193 7	2	2	5 120

Apéndice 34. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/8 para vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
4	0,134 3	0,303 9	0,406 3	25,201 0	1	1	4
10	0,166 8	0,377 5	0,406 3	7,100 0	5	2	40
10	0,175 6	0,397 4	0,406 3	2,198 8	2	2	160
10	0,178 0	0,402 8	0,406 3	0,862 1	2	2	640
10	0,178 8	0,404 6	0,406 3	0,416 5	2	2	2 560

Apéndice 35. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,442 6	0,805 8	1,075 0	25,041 7	1	1	4
1	0,570 2	1,038 1	1,075 0	3,431 5	1	6	16
1	0,583 7	1,062 7	1,075 0	1,145 2	2	2	64
1	0,588 3	1,071 1	1,075 0	0,366 1	2	2	256
1	0,589 8	1,073 8	1,075 0	0,112 1	2	2	1 024
1	0,590 3	1,074 7	1,075 0	0,027 4	2	2	4 096

Apéndice 36. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,442 6	0,805 8	1,075 0	25,041 7	1	1	4
5	0,585 2	1,065 4	1,075 0	0,891 1	5	6	120
5	0,588 8	1,072 0	1,075 0	0,281 4	2	2	480
5	0,589 9	1,074 0	1,075 0	0,095 1	2	2	1 920
5	0,590 4	1,074 9	1,075 0	0,010 5	2	2	7 680

Apéndice 37. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 6 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,442 6	0,805 8	1,075 0	25,041 7	1	1	4
6	0,550 1	1,001 5	1,075 0	6,835 6	2	2	16
6	0,579 6	1,055 2	1,075 0	1,839 5	2	2	64
6	0,587 3	1,069 2	1,075 0	0,535 5	2	2	256
6	0,589 4	1,073 1	1,075 0	0,179 8	2	2	1 024
6	0,590 1	1,074 3	1,075 0	0,061 3	2	2	4 096

Apéndice 38. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas grandes							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,442 6	0,805 8	1,075 0	25,041 7	1	1	4
10	0,572 1	1,041 6	1,075 0	3,109 7	5	3	60
10	0,585 3	1,065 6	1,075 0	0,874 2	2	2	240
10	0,588 8	1,072 0	1,075 0	0,281 4	2	2	960
10	0,589 9	1,074 0	1,075 0	0,095 1	2	2	3 840

Apéndice 39. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,071 6	0,130 4	0,174 0	25,083 0	1	1	4
1	0,092 3	0,168 0	0,174 0	3,424 0	1	6	30
1	0,094 5	0,172 0	0,174 0	1,122 1	2	2	120
1	0,095 2	0,173 3	0,174 0	0,389 7	2	2	480
1	0,095 5	0,173 9	0,174 0	0,075 8	2	2	1 920
1	0,095 6	0,174 1	0,174 0	0,028 9	2	2	7 680

Apéndice 40. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,071 6	0,130 4	0,174 0	25,083 0	1	1	4
5	0,094 7	0,172 4	0,174 0	0,912 8	5	6	120
5	0,095 3	0,173 5	0,174 0	0,285 0	2	2	480
5	0,095 4	0,173 7	0,174 0	0,180 4	2	2	1 920
5	0,095 5	0,173 9	0,174 0	0,075 8	2	2	7 680

Apéndice 41. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 6 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,071 6	0,130 4	0,174 0	25,083 0	1	1	4
6	0,089 0	0,162 0	0,174 0	6,876 9	2	2	16
6	0,093 8	0,170 8	0,174 0	1,854 5	2	2	64
6	0,095 0	0,173 0	0,174 0	0,598 9	2	2	256
6	0,095 4	0,173 7	0,174 0	0,180 4	2	2	1 024
6	0,095 5	0,173 9	0,174 0	0,075 8	2	2	4 096

Apéndice 42. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/12 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
6	0,071 6	0,130 4	0,174 0	25,083 0	1	1	4
10	0,092 5	0,168 4	0,174 0	3,214 8	5	3	60
10	0,094 7	0,172 4	0,174 0	0,912 8	2	2	240
10	0,095 3	0,173 5	0,174 0	0,285 0	2	2	960
10	0,095 4	0,173 7	0,174 0	0,180 4	2	2	3 840

Apéndice 43. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/16 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
8	0,168 3	0,276 9	0,369 2	25,009 3	1	1	4
1	0,217 6	0,358 0	0,369 2	3,042 3	1	8	30
1	0,222 3	0,365 7	0,369 2	0,948 1	2	2	120
1	0,223 8	0,368 2	0,369 2	0,279 7	2	2	480
1	0,224 2	0,368 8	0,369 2	0,101 5	2	2	1 920
1	0,224 4	0,369 2	0,369 2	0,012 4	2	2	7 680

Apéndice 44. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/16 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
8	0,168 3	0,276 9	0,369 2	25,009 3	1	1	4
5	0,223 2	0,367 2	0,369 2	0,547 1	5	8	160
5	0,224 0	0,368 5	0,369 2	0,190 6	2	2	640
5	0,224 2	0,368 8	0,369 2	0,101 5	2	2	2 560
5	0,224 3	0,369 0	0,369 2	0,057 0	2	2	10 240

Apéndice 45. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 8 de modelos shell A-D h = L/16 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
8	0,168 3	0,276 9	0,369 2	25,009 3	1	1	4
8	0,209 3	0,344 3	0,369 2	6,740 6	2	2	16
8	0,220 4	0,362 6	0,369 2	1,794 7	2	2	64
8	0,223 3	0,367 3	0,369 2	0,502 5	2	2	256
8	0,224 0	0,368 5	0,369 2	0,190 6	2	2	1 024
8	0,224 2	0,368 8	0,369 2	0,101 5	2	2	4 096

Apéndice 46. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/16 para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
8	0,168 3	0,276 9	0,369 2	25,009 3	1	1	4
10	0,220 4	0,362 6	0,369 2	1,794 7	5	4	80
10	0,223 3	0,367 3	0,369 2	0,502 5	2	2	320
10	0,224 0	0,368 5	0,369 2	0,190 6	2	2	1 280
10	0,224 2	0,368 8	0,369 2	0,101 5	2	2	5 120

Apéndice 47. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/20 para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
10	0,327 3	0,519 1	0,692 2	25,012 5	1	1	4
1	0,424 0	0,672 4	0,692 2	2,857 6	1	10	30
1	0,432 8	0,686 4	0,692 2	0,841 4	2	2	120
1	0,435 4	0,690 5	0,692 2	0,245 8	2	2	480
1	0,436 1	0,691 6	0,692 2	0,085 4	2	2	1 920
1	0,436 3	0,691 9	0,692 2	0,039 6	2	2	7 680

Apéndice 48. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/20 para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
10	0,327 3	0,519 1	0,692 2	25,012 5	1	1	4
5	0,408 1	0,647 2	0,692 2	6,500 5	1	2	8
5	0,428 5	0,679 6	0,692 2	1,826 6	2	2	32
5	0,434 2	0,688 6	0,692 2	0,520 7	2	2	128
5	0,435 7	0,691 0	0,692 2	0,177 0	2	2	512
5	0,436 1	0,691 6	0,692 2	0,085 4	2	2	2 048
5	0,436 3	0,691 9	0,692 2	0,039 6	2	2	8 192

Apéndice 49. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/20 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
10	0,327 3	0,519 1	0,692 2	25,012 5	1	1	4
10	0,407 3	0,645 9	0,692 2	6,683 7	2	2	16
10	0,428 8	0,680 0	0,692 2	1,757 9	2	2	64
10	0,434 3	0,688 8	0,692 2	0,497 8	2	2	256
10	0,435 8	0,691 1	0,692 2	0,154 1	2	2	1 024
10	0,436 1	0,691 6	0,692 2	0,085 4	2	2	4 096

Apéndice 50. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D h = L/22 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
11	0,435 0	0,636 7	0,849 1	25,014 9	1	1	4
1	0,563 9	0,825 4	0,849 1	2,795 1	1	11	30
1	0,575 5	0,842 3	0,849 1	0,795 5	2	2	120
1	0,578 8	0,847 2	0,849 1	0,226 7	2	2	480
1	0,579 7	0,848 5	0,849 1	0,071 5	2	2	1 920
1	0,579 9	0,848 8	0,849 1	0,037 1	2	2	7 680

Apéndice 51. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/22 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
11	0,435 0	0,636 7	0,849 1	25,014 9	1	1	4
5	0,576 4	0,843 7	0,849 1	0,640 4	3	7	84
5	0,579 0	0,847 5	0,849 1	0,192 2	2	2	336
5	0,579 7	0,848 5	0,849 1	0,071 5	2	2	1 344
5	0,579 9	0,848 8	0,849 1	0,037 1	2	2	5 376

Apéndice 52. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
11	0,435 0	0,636 7	0,849 1	25,014 9	1	1	4
10	0,577 9	0,845 9	0,849 1	0,381 8	8	9	288
10	0,579 4	0,848 1	0,849 1	0,123 3	2	2	1 152
10	0,579 8	0,848 6	0,849 1	0,054 3	2	2	4 608

Apéndice 53. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 11 de modelos shell A-D $h = L/22$ para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
11	0,435 0	0,636 7	0,849 1	25,014 9	1	1	4
11	0,541 5	0,792 6	0,849 1	6,656 4	2	2	16
11	0,570 0	0,834 3	0,849 1	1,743 6	2	2	64
11	0,577 4	0,845 1	0,849 1	0,468 0	2	2	256
11	0,579 3	0,847 9	0,849 1	0,140 5	2	2	1 024
11	0,579 8	0,848 6	0,849 1	0,054 3	2	2	4 096

Apéndice 54. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 1 de modelos shell A-D $h = L/28$ para vigas pequeñas

Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
14	0,894 7	1,434 4	1,912 7	25,006 9	1	1	4
1	1,114 0	1,786 0	1,912 7	6,625 3	1	14	30
1	1,172 6	1,879 9	1,912 7	1,713 5	2	2	120
1	1,187 6	1,904 0	1,912 7	0,456 3	2	2	480
1	1,191 5	1,910 2	1,912 7	0,129 4	2	2	1 920
1	1,192 4	1,911 7	1,912 7	0,053 9	2	2	7 680

Apéndice 55. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 5 de modelos shell A-D h = L/28 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
14	0,894 7	1,434 4	1,912 7	25,006 9	1	1	4
5	1,189 8	1,907 5	1,912 7	0,271 8	4	11	176
5	1,192 0	1,911 0	1,912 7	0,087 4	2	2	704
5	1,192 6	1,912 0	1,912 7	0,037 2	2	2	2 816
5	1,192 9	1,912 5	1,912 7	0,012 0	2	2	11 264

Apéndice 56. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 10 de modelos shell A-D h = L/28 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
14	0,894 7	1,434 4	1,912 7	25,006 9	1	1	4
10	1,186 0	1,901 4	1,912 7	0,590 4	5	7	140
10	1,191 1	1,909 6	1,912 7	0,162 9	2	2	560
10	1,192 3	1,911 5	1,912 7	0,062 3	2	2	2 240

Apéndice 57. Variación de la deflexión con respecto a una RA = 14 de modelos shell A-D h = L/28 para vigas pequeñas							
Relación	Δ Shell A-D(cm)	Δ Shell A-D(cm)	Δ Teórica (cm)	Error relativo (%)	Sep. ancho	Sep. Largo	Elementos
14	0,894 7	1,434 4	1,912 7	25,006 9	1	1	4
14	1,114 0	1,786 0	1,912 7	6,625 3	2	2	16
14	1,172 6	1,879 9	1,912 7	1,713 5	2	2	64
14	1,187 6	1,904 0	1,912 7	0,456 3	2	2	256
14	1,191 5	1,910 2	1,912 7	0,129 4	2	2	1 024
14	1,192 4	1,911 7	1,912 7	0,053 9	2	2	4 096

Apéndice 58. Variación de la luz de viga con 480 elementos finitos para los modelos en viga pequeña

Modelo	Luz (cm)	Área (cm ²)	Δ teórico (cm)	Δ Shell (cm)	Error absoluto (x10)
L/12	93,60	730,08	0,174 0	0,173 3	0,006 7
L/14	109,20	851,76	0,248 3	0,247 4	0,008 3
L/16	124,80	973,44	0,369 2	0,368 2	0,010 4
L/18	140,40	1 095,12	0,524 4	0,523 0	0,013 9
L/20	156,00	1 216,80	0,692 2	0,690 5	0,016 6
L/22	171,60	1 338,48	0,849 1	0,847 2	0,019 4
L/24	187,20	1 460,16	1,101 3	1,098 8	0,024 8
L/26	202,80	1 581,84	1,532 4	1,529 1	0,032 7
L/28	218,4	1 703,52	1,912 7	1,908 8	0,039 5

Apéndice 59. Variación de elementos finitos con una luz constante de 93,60 cm para modelo h = L/12 en viga pequeña

Elementos	Δ frame (cm)	Δ Shell (cm)	Error absoluto
4	0,174 0	0,130 4	0,043 6
30	0,174 0	0,162 0	0,012 0
120	0,174 0	0,168 4	0,005 6
270	0,174 0	0,170 8	0,003 2
480	0,174 0	0,173 0	0,001 0
1 920	0,174 0	0,173 1	0,000 9
2 430	0,174 0	0,173 7	0,000 3
7 680	0,174 0	0,173 9	0,000 1

Referencias

- American Society for Testing and Materials. (2014). *ASTM D-143: Standard Test Methods for Small Clear Specimens of Timber*. United States of America.
- American Society for Testing and Materials. (2015). *ASTM D-198: Standard Test Methods of Static Tests of Lumber in Structural Sizes*. United States of America.
- ARAUCO (s. f.). MADERA PINO RADIATA Recuperado de <http://www.latiendadeltriplex.com/pdf/16-FICHAS--MSD-.pdf>
- Celigüeta, J. (2008). Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural. España: UNICOPIA C.B
- Chandrupatla, T. (1999). Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. México: PRENTICE HALL.
- Cubillos, A. (s.f). Introducción al método de elementos finitos. Universidad de Ibagué. Recuperado de: <https://almec.files.wordpress.com/2007/10/resumen.pdf>
- Forest Products Laboratory. (1999). Wood handbook: Wood as an engineering material. Madison, WI: U.S. Department of Agriculture.
- García *et al.* (2016). Comparison of modelling using regression techniques and an artificial neural network for obtaining the static modulus of elasticity of Pinus radiata D. Don. Timber by ultrasound. Elsevier, Composites Part B 96, 112-118. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.036>
- Grupo Losán (s. f.). Radiata Pine. Recuperado de http://www.losan.es/c/document_library/get_file?p_l_id=11808&uuid=097f426c-3156-4a46-98d2-348d9f7d69d7&groupId=14
- Komurlu, E *et al.* (2015). Effect of Adhesive Type on the Measurement of Modulus of Elasticity Using Electrical Resistance Strain Gauges. *Arabian Journal for Science and Engineering*. DOI: 10.1007/s13369-015-1837-0
- Liu, Y. *et al.* (2013). Effects of Mesh Density on Finite Element Analysis. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/262525548_Effects_of_Mesh_Density_on_Finite_Element_Analysis
- Méndez, L. (2015). Determinación del módulo de elasticidad por los métodos dinámico y estático para madera termo-tratada de Gmelina arborea y Tectona grandis. REVISTAFORESTAL MESOAMERICANA KURÚ. Volumen 13:43-50
- Muñoz, F. (2016). Factores influyentes en las propiedades mecánicas de la madera. Tecnológico de Costa Rica, Cartago.
- Navarro, A. (2015). SAP2000. Tecnológico de Costa Rica.
- Neelavarapu, R. (2014). DETERMINATION OF YOUNG'S MODULUS AND POISSON'S RATIO OF PMMA MATERIAL USING STRAIN GAGES. Indian Institute of Technology Guwahati. Recuperado de: https://www.academia.edu/8961711/Determination_of_Youngs_modulus_and_Poissons_ratio_of_PMMA_material_by_using_Strain_gauges

NZ Wood (s. f.). INFORMATION SHEET RADIATA PINE. Recuperado de <http://www.nzwood.co.nz/wp-content/uploads/2013/07/RadiataPinefactsheet.pdf>

Ordoñez, P et. al. (2016). ESTRUCTURAS DE MADERA APLICADAS AL SECTOR DE LA CONSTRUCCIÓN EN EL PERÚ. Tesis final de graduación. Pontificia Universidad Católica de Perú. Recuperado de: <https://es.scribd.com/doc/316638852/Ordonez-Patricia-Lugo-Yessenia-Estructuras-Madera-Aplicadas>

Paniagua, V. (s.f.). Guía de uso y aplicaciones de la madera en la arquitectura en Costa Rica. UNIVERSIDAD DE COSTA RICA. Recuperado de: <http://www.arquis.ucr.ac.cr/assets/gu%C3%ADa-madera-de-usos-y-aplicaciones-de-la-madera-en-la-arquitectura-cr-encrypted.pdf>

Petersen, N. (s.f.). Measurement of Young's Modulus using Strain Gauges. Recuperado de: http://natepetersen.weebly.com/uploads/1/5/2/3/15238998/lab6_me330_postlab.pdf

Pope, E. (1997). Pope, E. (1997). *Rules of thumb for mechanical engineer: a manual of quick, accurate solutions to everyday mechanical engineering problems*. Houston: Gulf Publishing Company.

Popov, E. (2000). *Mecánica de sólidos*. Mexico: Pearson Education.

Tuk, J. (2010). *Madera: Diseño y Construcción*. San José, Costa Rica: Colegio Federado de Ingenieros y Arquitectos de CR.